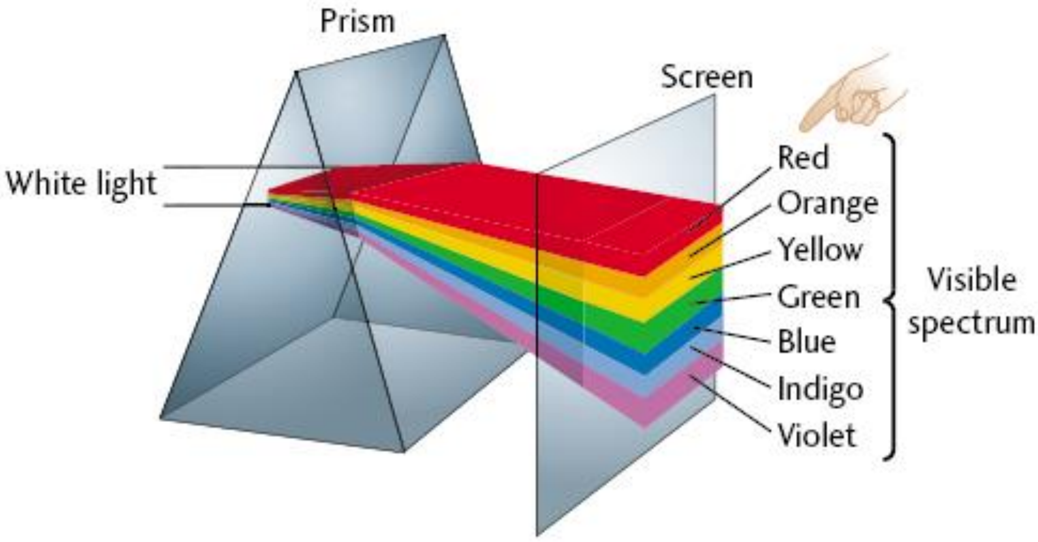
**KHO VẬT LÝ SƠ CẤP**
**TÀI LIỆU BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI VẬT LÝ**
**TRUNG HỌC PHỔ THÔNG**




# TẬP 3P

# - CƠ HỌC VẬT RẮN
# - DAO ĐỘNG VÀ SÓNG
# - DAO ĐỘNG ĐIỆN TỪ VÀ DÒNG ĐIỆN XOAY CHIỀU
# - QUANG LÝ VÀ VẬT LÝ HIỆN ĐẠI

**TP.HCM, THÁNG 5 NĂM 2020**
**LƯU HÀNH NỘI BỘ**

**GV. PHẠM VŨ KIM HOÀNG**

# MỤC LỤC



----TÀI LIỆU LƯU HÀNH NỘI BỘ -----

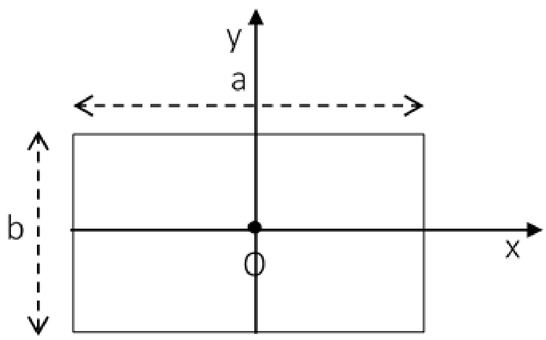
BIÊN SOẠN: PHẠM VŨ KIM HOÀNG PTNK-ĐHQG TP.HCM
Email:hoangptnk2015@gmail.com

# CHƯƠNG I.
# ĐỘNG HỌC, ĐỘNG LỰC HỌC VẬT RẮN
## I.1. MOMEN QUÁN TÍNH

**Bài 1.** Một vật hình cầu bán kính R có mật độ vật chất phụ thuộc vào khoảng cách r đến tâm của nó theo quy luật: $\frac{3m}{7\pi R^3}(1+\frac{r}{R})$, m là một hệ số dương. Tính khối lượng của vật và mômen quán tính của nó đối với trục quay đi qua tâm.

**ĐS:** $I=\frac{44}{105}mR^2$; M=m

**Bài 2.** Một tấm phẳng, mỏng đồng chất hình chữ nhật khối lượng m có các cạnh là a và b. Tính mô men quán tính của tấm đối với
3 trục vuông góc đi qua khối tâm O sau đây:



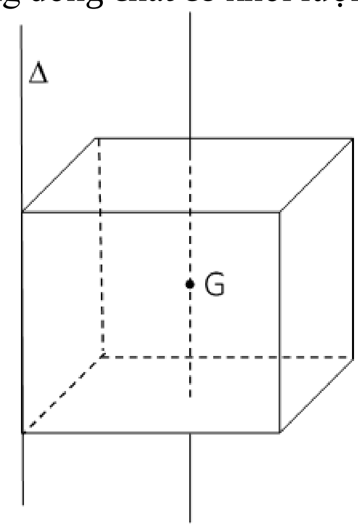

a. Trục x song song với cạnh a
b. Trục y song song với cạnh b
c. Trục z vuông góc với tấm.

ĐS : a. $I_x=\frac{1}{12}mb^2$ ; b. $I_y=\frac{1}{12}ma^2$ ; c. $I=\frac{1}{12}m(a^2+b^2)$

**Bài 3.** Xác định mômen quán tính của một vật hình lập phương đồng chất có khối lượng m, cạnh a đối với trục quay:

a. Trùng với trục đối xứng.
b. Trùng với 1 cạnh.

ĐS: a. $\frac{1}{6}ma^2$; b.$\frac{1}{3}ma^2$




**Bài 4.** Tính mômen quán tính của một hình nón đặc đồng chất đối với trục đối xứng của nó. Cho khối lượng của hình nón là m, bán kính đáy của nó là R.

ĐS : $I = \frac{3}{10} mR^2$

**Bài 5.** Xác định mô men quá tính của một vật hình trụ đồng chất, khối lượng m, chiều cao h, bán kính đáy là R đối với trục quay:

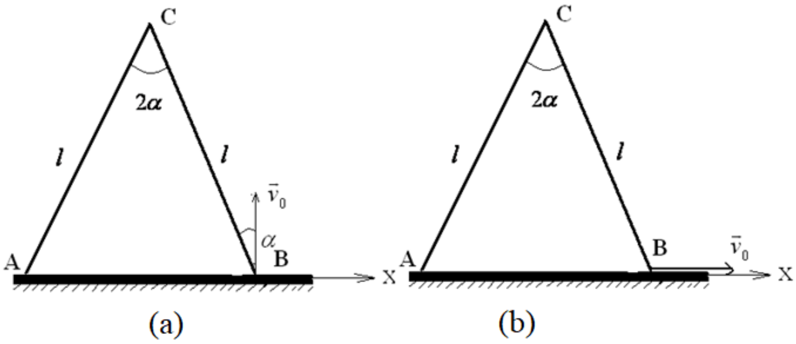
a. Trùng với một đường kính của đáy.

b. Đi qua khối tâm và song song với đáy.

ĐS: a. $I_x = \frac{mR^2}{4} + \frac{mh^2}{3}$; b. $I_G = \frac{mR^2}{4} + \frac{mh^2}{12}$.

## I.2. ĐỘNG HỌC VẬT RẮN

**Bài 1.** Hai thanh cứng có cùng chiều dài $l$ , được nối với nhau nhờ một khớp C, đầu A nối




Hình 2.1P

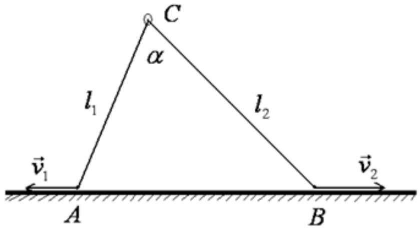
với bản lề cố định, còn đầu B tự do. Tại thời điểm ban đầu hai thanh tạo với nhau một góc $2\alpha$ (hìnhvẽ). Hãy tìm gia tốc khớp C tại thời điểm đầu B bắt đầu chuyển động thẳng đềuvớivậntốc $\vec{v}_0$ trong hai trường hợp:

a. $\vec{v}_0$ cóphương vuông góc Ax.

b. $\vec{v}_0$ có phương song song Ax.

ĐS: a. $a_C = \frac{v_0^2}{2l\sin\alpha\sin 2\alpha}$; b. $a_C = \frac{v_0^2}{4l\cos^3\alpha}$

**Bài 2.** Có hai thanh cứng, chiều dài $l_1$, $l_2$ nối với nhau bằng một bản lề và đặt thẳng đứng. Sau đó người ta chuyển hai đầu còn lại về hai phía với vận tốc lần lượt là $v_1$, $v_2$. Hãy tìm gia tốc bản lề tại thời điểm hai thanh tạo thành một góc vuông.



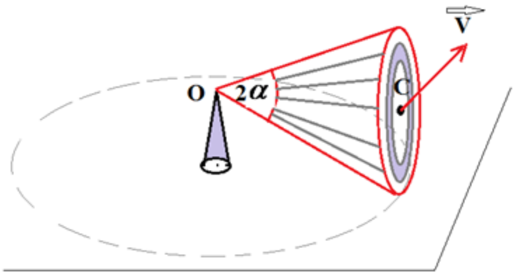

Hình 2.2P

ĐS: $a_C = \frac{(v_1+v_2)^2}{l_1 l_2 (l_1^2 + l_2^2)} \sqrt{l_2^6 + l_1^6}$

**Bài 3.** Một hình nón tròn xoay có nửa góc ở đỉnh bằng $\alpha$ =$30^0$ và bán kính đáy r = 5,0cm, lăn đều không trượt trên một mặt phẳng ngang (Hình 2.3P). Đỉnh của hình nón được gắn khớp vào điểm O, O ở cùng độ cao với điểm C, C là tâm của đáy hình nón. Vận tốc của điểm C bằng v = 10,0cm/s. Hãy xác định:

a) mô đun của vectơ vận tốc góc của hình nón và góc hợp bởi vectơ đó với đường thẳng đứng;

b) môđun của vectơ gia tốc góc của hình nón.

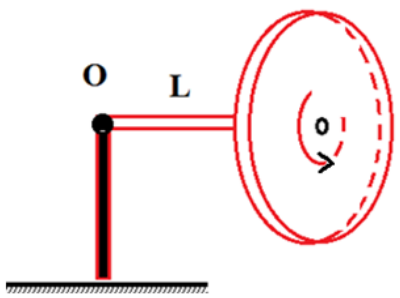



Hình 2.3P

ĐS: a. $\omega == \dfrac{v}{r\cos\alpha} \approx 2{,}31 rad/s$; $\beta = 60^0$

b. $\gamma \approx 2{,}31 rad/s^2$

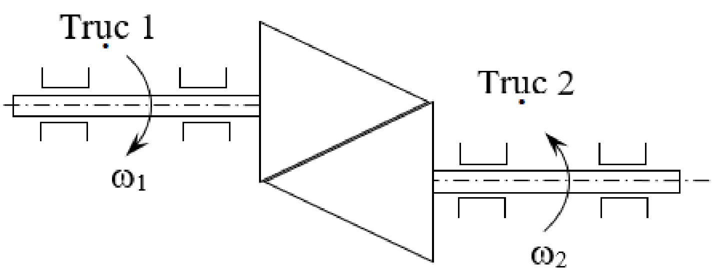
**Bài 4**. Một con quay được đặt trên sàn của một lồng thang máy; thang máy bắt đầu được nâng lên với gia tốc không đổi $\alpha$ = 2,0 m/s$^2$. Con quay là một đĩa đồng chất có bán kính R = 5,0 cm, được gắn vào một đầu một thanh có độ dài l = 10 cm. (hình vẽ). Đầu kia của thanh gắn vào bản lề O. Con quay tiến động với vận tốc góc n = 0,5 vòng/s (tốc độ quay của thanh OO' quanh trục O thẳng đứng). Bỏ qua sự ma sát và khối lượng của thanh, tìm vận tốc góc riêng của đĩa.




Hình 2.16P

ĐS: $\omega' = \dfrac{l(g+a)}{\pi n R^2}$ =301rad/s

**Bài 5.** Trục quay 1 truyền chuyển động quay cho trục 2 nhờ ma sát giữa hai hình nón giống nhau, ép đều lên nhau dọc theo đường sinh của chúng (Hình 1.24). Tìm vận tốc góc $\omega_2$ của trục 2 không tải, nếu vận tốc góc của trục 1 là $\omega_1$.




ĐS: $\omega_2 = (\sqrt{2} - 1)\omega_1 \approx 0{,}41\omega_1$

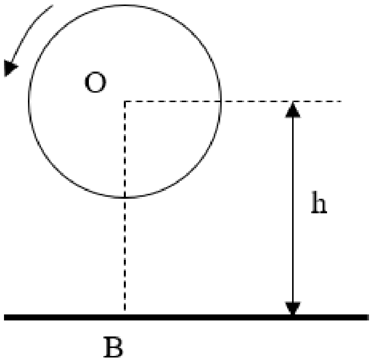
**Bài 6.** Một thanh đồng chất tiết diện đều chiều dài L=2m, một đầu treo vào giá đỡ, đầu kia được giữ cho thanh nằm ngang. Thả nhẹ thanh. Biết sau khi thanh quay qua vị trí thẳng đứng được một góc 30$^o$ thì thanh tuột khỏi giá đỡ.

a. Tìm khoảng cách nhỏ nhất giữa điểm treo và sàn, biết rằng thanh rơi chạm sàn lúc thanh có phương thẳng đứng.

b. Xác định độ cao lớn nhất của đầu dưới của thanh trong quá trình chuyển động.

ĐS: a. 3,2m; b. 2,68m

**Bài 7.** Một bánh xe có bán kính R, đặt cách mặt đất một đoạn h, quay đều với vận tốc góc $\omega$. Từ điểm A trên bánh xe bắn ra một giọt nước và nó rơi chạm đất tại điểm B, ngay dưới tâm của bánh xe. Xác định vị trí điểm A và thời gian rơi của giọt nước.



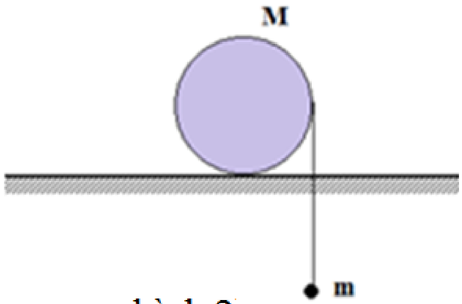

ĐS: $t = \dfrac{\sqrt{2\left(2\omega^2h^2 + gh - \omega^2R^2 - R\sqrt{\omega^4R^2 + 2\omega^2gh + g^2}\right)}}{\omega^2R + \sqrt{\omega^4R^2 + 2\omega^2gh + g^2}}$

**Với** $\alpha = AOB$, $\sin\alpha = \dfrac{\omega\sqrt{2\left(2\omega^2h^2 + gh - \omega^2R^2 - R\sqrt{\omega^4R^2 + 2\omega^2gh + g^2}\right)}}{g + 2\omega^2h}$

# I.3 ĐỘNG LỰC HỌC VẬT RẮN

**Bài 1.** Một cuộn chỉ gồm một sợi chỉ mảnh dài, quấn nhiều vòng lên một vật hình trụ đặc, đồng chất, tiết diện đều, có khối lượng M. Cuộn chỉ được đặt trên hai thanh ray giống nhau song song nằm trên mặt phẳng ngang và vuông góc với trục đối xứng của trụ. Một đầu sợi chỉ buộc chặt vào vật khối lượng m. Ban đầu giữ hệ đứng yên và phần sợi chỉ có buộc vật nặng thẳng đứng( hình 2).

Sau đó người ta buông hệ, mặt trụ lăn không trượt trên hai ray, sau một thời gian cuộn chỉ đạt được trang thái ổn định: gia tốc khối tâm trụ là a không đổi hướng dọc theo hai ray, và khi đó phương của sợi chỉ buộc vật nghiêng so với phương thẳng đứng một góc $\alpha$ không đổi.




hình 2

*Coi a, M,m và gia tốc rơi tự do g đã biết; sợi chỉ không dãn và khối lượng không đáng kể; hệ số ma sát nghỉ cực đại bằng hệ số ma sát trượt giữa mặt trụ và hai ray.*

a.Tìm $\alpha$ theo a và g.

b. Hãy xác định sức căng dây T của sợi chỉ.

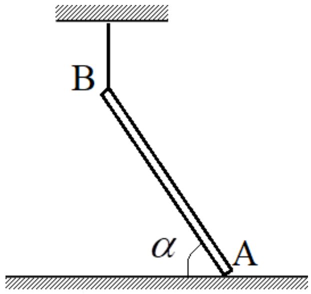
c. Hãy xác định tỉ số hai khối lượng $\dfrac{m}{M}$ theo a và g

d. Trong điều kiện trên, khi vật nặng giảm độ cao một đoạn h so lúc bắt đầu buông hệ thì vận tốc chuyển động tịnh tiến của khối tâm hình trụ đạt được v. Tính v theo h, a và g.

ĐS: a. $\alpha = \arctan\dfrac{a}{g}$; b. $T = \dfrac{3}{2}Ma\left(\dfrac{\sqrt{a^2+g^2}}{\sqrt{a^2+g^2}-a}\right)$;

c. $\dfrac{m}{M} = \dfrac{3}{2}.\dfrac{a\sqrt{a^2+g^2}}{(\sqrt{a^2+g^2}-a)^2}$; d. $v = \sqrt{2ah\sqrt{(\dfrac{a^2}{g^2}+1)}}$

**Bài 2.** Một thanh đồng chất AB tiết diện đều, chiều dài AB = *21*, khối lượng m, đàu A tựa trên sàn nằm ngang, đàu B treo bàng dây OB thẳng đứng, không giãn, khối lượng không đáng kể để AB tạo với sàn góc $\alpha$ như hình bên. Tại một thời điểm nào đố dây bị đứt và thanh bắt đàu chuyển động. Xác định áp lực của thanh lên sàn ngay tại thời điểm thanh bắt đàu chuyền động. Cho gia tốc trọng trường là g.

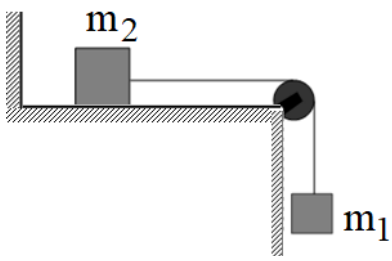



ĐS: $N = \dfrac{mg}{1+3\cos^2\alpha_0}$

**Bài 3.** Hai vật có khối lượng $m_1$ và $m_2$ được nối với nhau bằng một sợi dây nhẹ, không dãn vắt qua một ròng rọc có trục quay nằm ngang và cố định gắn vào mép bàn (hình 3). Ròng rọc có momen quán tính I và bán kính R. Coi rằng dây không trượt trên ròng rọc khi quay. Biết hệ số ma sát giữa vật $m_2$ và mặt bàn là μ, bỏ qua ma sát trục quay.

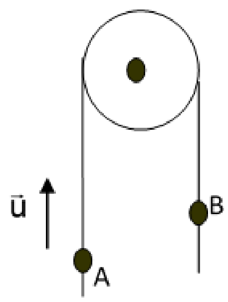
a. Xác định gia tốc của $m_1$ và $m_2$.

b. Tìm điều kiện giữa khối lượng $m_1$, $m_2$ và hệ số ma sát mặt bàn μ để hệ thống nằm cân bằng.



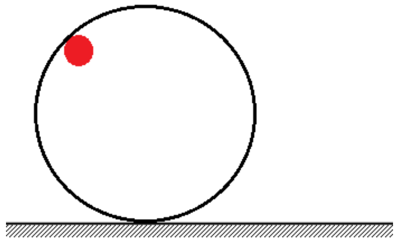

ĐS: a. $a = \dfrac{g(m_1-\mu m_2)}{\dfrac{I}{R^2}+m_1+m_2}$ ; b. $m_2\mu \geq m_1$

**Bài 4.** Một sợi dây vắt qua ròng rọc, ở hai đầu sợi dây có hai người đu vào. Biết khối lượng của mỗi người lớn gấp 4 lần khối lượng ròng rọc. Người A bắt đầu leo theo dây với vận tốc tương đối với dây là u. Tính vận tốc của người B so với mặt đất? coi như khối lượng ròng rọc phân bố đều trên vành.



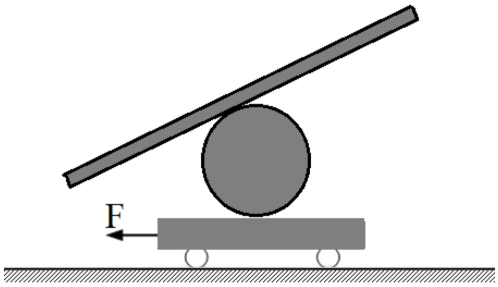

ĐS: $v_B = \dfrac{4u}{9}$.

**Bài 5.** Một vành tròn mảnh bán kính R khối lượng M phân bố đều. Trên vành ở mặt trong có gắn một vật nhỏ khối lượng m (hình bên). Kéo cho vành lăn không trượt trên mặt ngang sao cho tâm của vành có vận tốc $v_0$. Hỏi $v_0$ phải thoả mãn điều kiện gì để vành không nảy lên? Lực tác dụng lên vành để kéo vành chuyển động với vận tốc không đổi (như giả thiết) không có thành phần thẳng đứng?

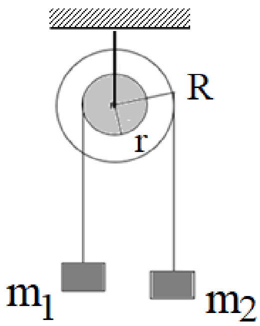


ĐS: $v_0 \le \sqrt{\left(1+\frac{m}{M}\right)gR}$

**Bài 6.** Một hình trụ có khối M được bó trí thành cơ hệ như hình vẽ, hệ số ma sát của hình trụ với mặt phẳng ngang là $\mu_1$, với mặt phẳng ngang là $\mu_2$. mặt phẳng ngang chuyển động đều về phía trái, cần phải tác động vào mặt phẳng ngang một lực F nhỏ nhất là bao nhiêu để xảy ra điều trên.

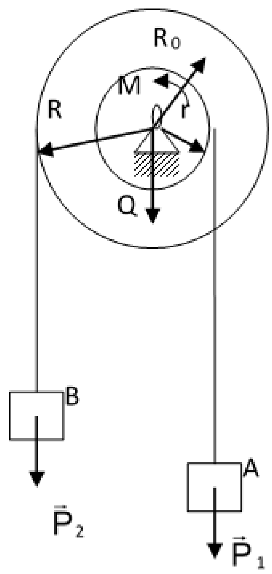



**Bài 7.** Một ròng rọc kép gồm hai hình trụ đặc đồng chất đặt đồng tâm. Hình trụ lớn có khối lượng M = 200g, bán kính R = 10cm, hình trụ nhỏ có khối lượng m = 100g, bán kính r = 5cm. Trên rãnh của từng hình trụ có quấn một sợi dây nhẹ không dãn, đầu tự do mỗi dây mang vật khối lượng lần lượt là $m_1$ = 250g và $m_2$ = 200g (hình vẽ). Ban đầu hệ đứng yên, thả cho hệ chuyển động. Tính gia tốc của từng vật và lực căng của mỗi dây treo.
ĐS: $\gamma$ = 20 rad/s$^2$; $a_1$ = 1m/s$^2$; $a_2$ = 2m/s$^2$; $T_1$ = 2,75N; $T_2$ = 1,6N.

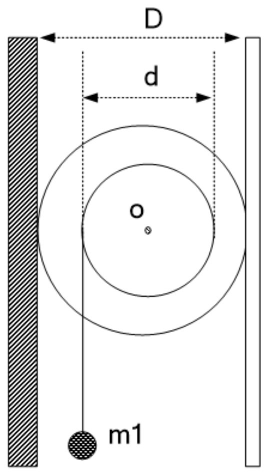



**Bài 8.** Hai vật nặng $P_1$ và $P_2$ được buộc vào hai dây quấn vào hai tang của một tời bán kính r và R (hình vẽ). Để nâng vật nặng $P_1$ lên người ta còn tác dụng vào tời một mômen quay M. Tìm gia tốc góc của tời quay. Biết trọng lượng của tời là Q và bán kính quán tính đối với trục quay là $\rho$.

ĐS: $\gamma = \frac{M + P_2R - P_1r}{P_1r^2 + P_2R^2 + Q\rho^2}g$.



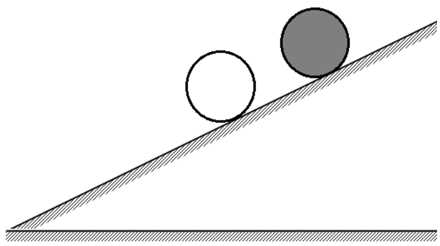
**Bài 9.** Hai bản phẳng song song và thẳng đứng 1 trong số chúng hoàn toàn trơn, cái còn lại rất nhám, được phân bố cách nhau khoảng D. Giữa chúng có đặt một ống chỉ với đường kính ngoài b ằng D, khối lượng chung bằng M mômen quán tính đối với trục là I. Ống chỉ bị kẹp chặt bởi 2 bản phẳng sao cho có thể chuyển động xuống dưới khi quay nhưng không trượt so với bản phẳng nhám. Một sợi chỉ nhẹ được buộc với vật nặng khối lượng ma và được quấn vào hình trụ trong của ống chỉ có đường kính d. Tìm gia tốc của vật nặng?



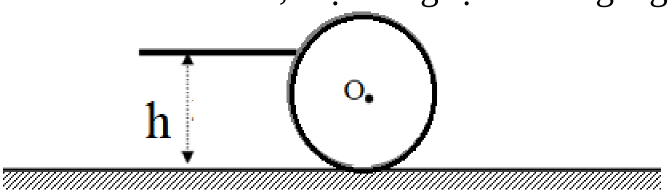

ĐS: $a = g\dfrac{M - \dfrac{D-d}{D}m}{M + \left(\dfrac{D-d}{D}\right)^2 m + \dfrac{4I}{D^2}}$.

**Bài 10.** Từ mức cao nhất của một mặt phẳng nghiêng, một hình trụ đặc và một quả cầu đặc có cùng khối lượng và bán kính, đồng thời bắt đầu lăn không trượt xuống dưới. Tìm tỷ số các vận tốc của hai vật tại một mức ngang nào đó.

ĐS: $\dfrac{v_C}{v_T} = \sqrt{\dfrac{15}{14}}$



**Bài 11.** Người ta dùng gậy tác động vào quả bi- a bán kính R, một xung lực nằm ngang cách mặt bàn bi- a một khoảng h.



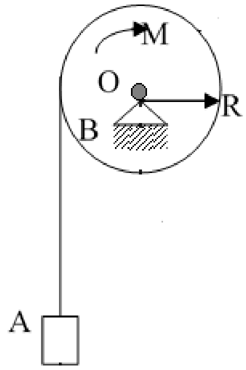

a) Xác định hệ thức giữa $\omega$ và vận tốc khối tâm $v_0$ của bi-a.

b) Nghiên cứu chuyển động của bi - a sau khi lực ngừng tác động trong các trường hợp:

1) $h > \frac{7r}{5}$; 2) $h = \frac{7r}{5}$ ; 3) $r < h < \frac{7r}{5}$.

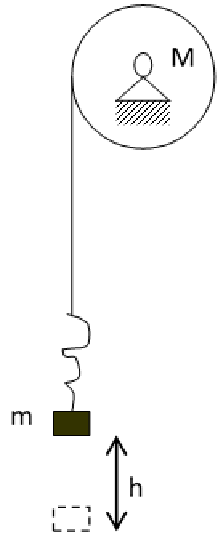
ĐS: a. $v_0 = \dfrac{2R^2\omega}{5(h-R)}$ .

**Bài 12.** Một vật A có trọng lượng P được kéo lên từ trạng thái đứng yên nhờ tời B là đĩa tròn đồng chất có bán kính R, trọng lượng Q và chịu tác dụng ngẫu lực có mômen M không đổi ( hình vẽ ). Tìm vận tốc vật A khi nó được kéo lên một đoạn là h.  Tìm gia tốc của vật A.




**ĐS:** $v_A = \sqrt{4g\dfrac{(M-Ph)}{R(2P+Q)}h}$ ; $a_A = 2g\dfrac{(M-PR)}{R(2P+Q)}$

**Bài 13.** Một bánh đà có dạng là một hình trụ đồng nhất khối lượng M, bán kính R quay quanh trục cố định nằm ngang. Một sợi dây quấn quanh bánh đà, đầu kia của sợi dây buộc một vật nặng có khối lượng m. Quả nặng được nâng lên rồi buông ra cho rơi xuống. Sau khi rơi được độ cao h, quả nặng bắt đầu làm căng sợi dây và quay bánh đà. Tìm vận tốc góc của bánh đà tại thời điểm đó ( hình vẽ ) .

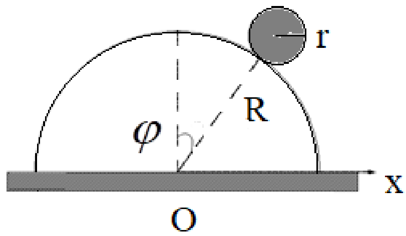



ĐS: $\omega = \dfrac{2m\sqrt{2gh}}{(m+2M).R}$

**Bài 14.** Hình trụ đồng chất khối lượng m bán kính r lăn không trượt trên mặt bán trụ cố định bán kính R từ đỉnh với vận tốc đầu $V_0 = 0$

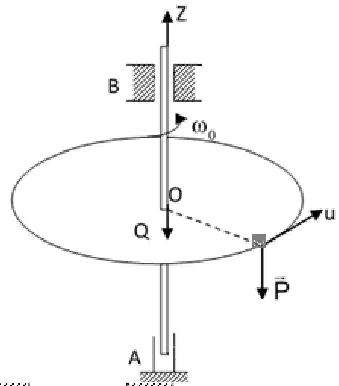
1. Xác định vận tốc khối tâm hình trụ theo góc φ là góc hợp bởi đường thẳng đứng và đường thẳng nối tâm hai trụ.

2. Định vị trí hình trụ r rời mặt trụ R. Bỏ qua ma sát.



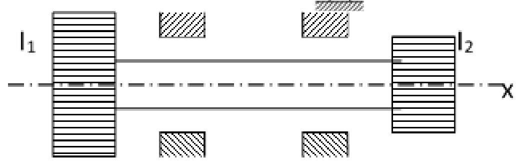

ĐS: 1. $v_c = \sqrt{\dfrac{4g}{3}(R+r)(1-\cos\phi)}$ ; 2. $\varphi = \arccos\dfrac{4}{7}$

**Bài 15.** Một đĩa tròn đồng chất, trọng lượng là Q, bán kính R quay được quanh một trục thẳng đứng AB đi qua tâm đĩa và vuông góc với đĩa. Trên vành đĩa có một chất điểm M có trọng lượng là P. Đĩa quay quanh trục với vận tốc góc $\omega_0$. Tại một thời điểm nào đó chất điểm M chuyển động theo vành đĩa với vận tốc tương đối so với đĩa là u. Tìm vận tốc góc của đĩa lúc đó.



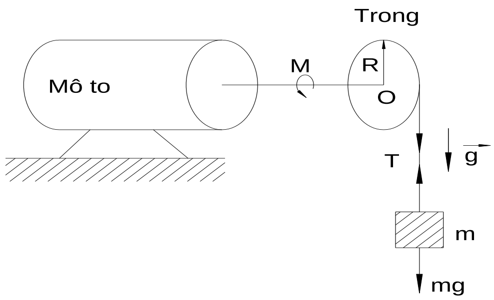

ĐS: $\omega = \omega_0 - \dfrac{2Pu}{(Q+2P)R}$

**Bài 16.** Hai đĩa cùng được gắn vào trục quay (hình vẽ). Người ta cho trục hơi xoắn rồi thả ra. Hãy xác định hệ thức giữa các vận tốc góc và các góc quay của các đĩa khi chúng dao động xoắn. Cho rằng khối lượng của trục bé không đáng kể, còn mômen quán tính của các đĩa đối với trục x là $I_1$ và $I_2$ là các đại lượng đã biết.




ĐS: $\omega_1 = -\dfrac{I_2}{I_1}\omega_2$

**Bài 17.** Một cái tời trống quay xem như hình trụ tâm O cũng là khối tâm có bán kính R, momen quán tính I đối với trục của nó. Một dây cáp khối lượng không đáng kể, hoàn toàn mềm được quấn quanh trống đầu dưới của dây cáp nối với tải khối lượng m. Trống có thể quay không ma sát quanh trục cố định nhờ động cơ tác động một ngẫu lực có momen M = const. Xác định gia tốc thẳng đứng của tải trọng.




ĐS: $a = \dfrac{(M - mgR)R}{I + mR^2}$

**Bài 18.** Một quả cầu (m,R) gắn lên một thanh cứng l không khối lượng. Quả cầu quay xung quanh trục của nó. Quả cầu và thanh quay xung quanh trục z. Vận tốc góc của thanh và quả cầu xung quanh z là $\omega$, của quả cầu quanh thanh là $\Omega$. Tính $\omega(\Omega) = ?$

ĐS: $\omega = \dfrac{5gl}{2R^2\Omega}$

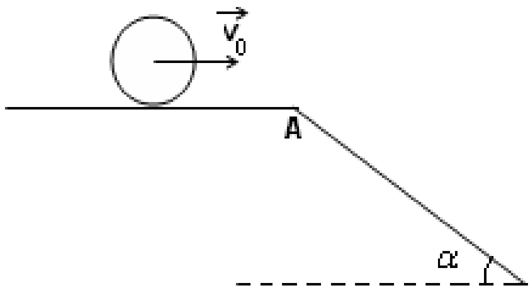
**Bài 19.** Một người có chiều cao h đi xe đạp một bánh theo một rãnh tròn bán kính R trong khi người và xe nghiêng về phía trong với góc $\theta$ so với phương thẳng đứng. Gia tốc trọng trường là g.

1. Giả sử $h \ll R$. Người đó phải đạp xe với vận tốc góc $\omega$ bằng bao nhiêu?

2. Bây giờ ta coi người đi xe đạp như một thanh có chiều dài h, trong đó h nhỏ hơn R nhưng không thể bỏ qua. Vận tốc góc $\omega$ bây giờ phải bằng bao nhiêu? Giả thiết rằng thanh cứng luôn nằm trong mặt phẳng tạo bởi phương thẳng đứng và bán kính và R là khoảng cách từ tâm quỹ đạo cho đến điểm tiếp xúc.

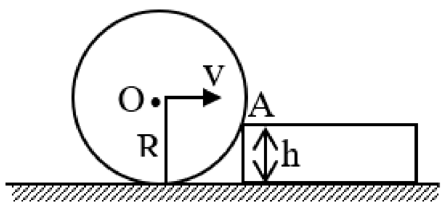
ĐS: 1. $\omega = \sqrt{\frac{g}{R}\tan\theta}$ ; 2. $\omega = \sqrt{(\frac{g}{R}\tan\theta)/(1 - \frac{2h}{3R}\sin\theta)}$

**Bài 20.** Một hình trụ đặc đồng chất có bán kính R = 10 (cm), lăn không trượt trên mặt phẳng nằm ngang với độ lớn vận tốc bằng $v_0$, rồi đến mặt phẳng nghiêng có góc nghiêng $\alpha = 45^0$ so với mặt phẳng ngang. Tìm giá trị vận tốc $v_{0max}$ của hình trụ lăn trên mặt phẳng ngang để không bị nảy lên tại A (xem hình vẽ). Lấy g = 10 (m/s$^2$), $I_{hinh\ tru} = \frac{1}{2}mR^2$.




ĐS: $v_0 \le$ 0,6 (m/s)

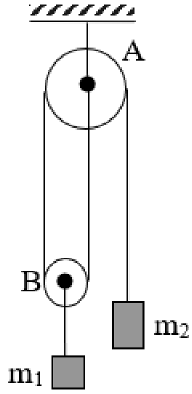
**Bài 21.** Một quả cầu rắn đồng chất bán kính R lăn không trượt với vận tốc v trên mặt phẳng nằm ngang và va chạm đàn hồi với một bậc thềm có độ cao h < R. Tìm vận tốc nhỏ nhất theo h và R để quả cầu lăn qua mặt phẳng đó. Biết rằng không xảy ra sự trượt tại điểm va chạm. Mô men quán tính của quả cầu đối với trục quay đi qua tâm của nó là $\frac{2}{5}mR^2$.




ĐS: $v_{\min} = \frac{R\sqrt{70gh}}{7R - 5h}$

**Bài 22.** Cho hệ thống như hình vẽ, có một ròng rọc cố định A, một ròng rọc động B và hai vật có khối lượng $m_1$ và $m_2$. Bỏ qua khối lượng của dây và ma sát.

1) Khối lượng của cả hai ròng rọc không đáng kể. Thả cho hệ thống chuyển động từ trạng thái nghỉ. Tính gia tốc $a_2$ của vật $m_2$ và lực Q tác dụng lên trục của ròng rọc A. So sánh Q với trọng lực Q' của hệ.




Áp dụng bằng số: $m_1$ = 0,2 kg ; $m_2$ = 0,5kg; g =10m/$s^2$. Tính $a_2$ và Q ?

2) Khối lượng ròng rọc B không đáng kể nhưng ròng rọc A có khối lượng đáng kể; bán kính của A là r. Thả cho hệ thống chuyển động từ trạng thái nghỉ, người ta thấy $m_2$ có gia tốc a = g/n, g là gia tốc rơi tự do, n là một số dương hoặc âm (lấy chiều dương đi xuống). Tính khối lượng của ròng rọc A theo $m_1$, $m_2$ và n.

Áp dụng số: r = 0,1m.

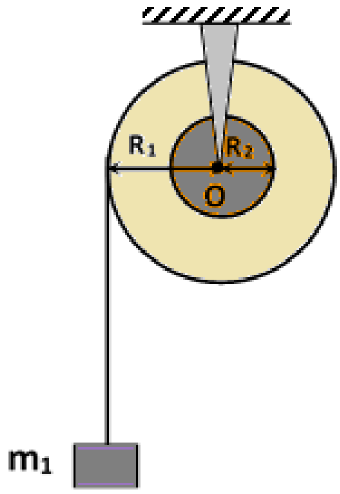
a) $m_1$ = 0,2 kg ; $m_2$ = 0,5kg; g =10m/$s^2$; n = 5. Tính m, mômen quán tính và lực Q tác dụng lên trục của ròng rọc A? So sánh Q và Q' do trọng lực của hệ tác dụng.

b) $m_1$ = 1kg; m có giá trị vừa tìm được ở trên. Tính $m_2$ để có n = - 5( $m_2$ đi lên).

ĐS: 1. $a_2$ = 7,27m/$s^2$ , Q = 4,1N;

2a. m = 2,9kg ; I = 0,0145 kg$m^2$; Q = 35,2 N; 2b. $m_2$ = 0,133 kg.

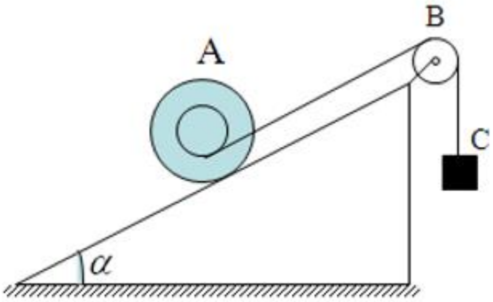
**Bài 23.** Một ròng rọc kép gồm hai ròng rọc có dạng hai đĩa tròn đồng chất gắn chặt, đồng trục. Ròng rọc lớn có bán kính $R_1$ = 10 cm, ròng rọc nhỏ có bán kính $R_2$ = 5 cm, trên vành các ròng rọc có rãnh để quấn dây. Nếu dùng một sợi dây nhẹ, không dãn một đầu quấn trên vành ròng rọc lớn đầu kia buộc vào vật $m_1$ = 300 g




( hình vẽ) rồi buông nhẹ cho vật chuyển động thì gia tốc chuyển động của $m_1$ là $a_1$. Nếu thay vật $m_1$ bằng vật $m_2$ = 500 g, rồi quấn dây vào vành ròng rọc nhỏ thì sau khi thả nhẹ, vật $m_2$ chuyển động với gia tốc $a_2$, biết $\frac{a_1}{a_2} = \frac{76}{55}$. Bỏ qua mọi ma sát, lấy g = 10 m/$s^2$. Tính mô men quán tính của ròng rọc kép.

ĐS: I = $1,125.10^{-3}$ kg.$m^2$.

**Bài 24.** Một khối trụ đặc, đồng chất, khối lượng M, bán kính R, được đặt trên mặt phẳng nghiêng cố định, nghiêng góc $\alpha = 30^0$ so với mặt phẳng ngang. Giữa chiều dài khối trụ có một khe hẹp trong đó có lõi có bán kính R/2. Một dây nhẹ, không giãn được quấn nhiều vòng vào lõi rồi vắt qua ròng rọc B (khối lượng không đáng kể, bỏ qua ma sát ở trục ròng rọc). Đầu còn lại của dây mang một vật nặng C khối lượng m = M/5. Phần dây AB song song với mặt phẳng nghiêng. Hệ số ma sát nghỉ và hệ số ma sát trượt giữa khối trụ và mặt phẳng nghiêng: $\mu_n = \mu_t = \mu$. Thả hệ từ trạng thái nghỉ:




**a.** Tìm điều kiện về μ để khối trụ lăn không trượt trên mặt phẳng nghiêng. Tính gia tốc $a_0$ của trục khối trụ và gia tốc a của m khi đó.

**b.** Giả sử μ không thỏa mãn điều kiện ở câu a. Tìm gia tốc $a_0$ của trục khối trụ và gia tốc a của m.

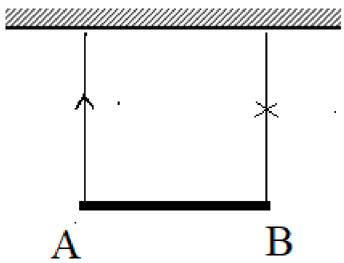
ĐS: a. $\mu \ge \frac{\sqrt{3}}{93}$ ; $a_0 = \frac{8}{31}g$ ; $a = \frac{4}{31}g$ ; b. $a = -\frac{10}{13}\mu g\sqrt{3} + \frac{2}{13}g$; $a_0 = -\frac{9}{26}\mu g\sqrt{3} + \frac{7}{26}g$

**Bài 25.** (Trích đề dự tuyển thi Olympic quốc gia 2002)

Một hình trụ đặc có khối lượng $m_1$ = 6 kg, bán kính R xuyên dọc theo một hình trụ đặc. Một thanh nhỏ không khối lượng tì vào các ổ bi. Dùng dây nối một vật $m_2$ = 2kg vào thanh. Hệ đặt trên một mặt phẳng nghiêng góc $\alpha = 30^0$. Tìm gia tốc của hệ vật biết hệ số ma sát trượt giữa vật và mặt phẳng nghiêng là $\mu = 0,2$, trụ lăn không trượt. Bỏ qua sức cản các ổ bi, dây không dãn và không khối lượng, $g = 10m/s^2$ .

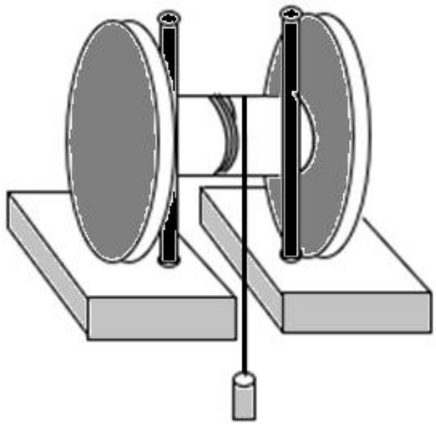
ĐS: $3,3\left(m/s^2\right)$

**Bài 26.** Một thanh AB đồng chất chiều dài 2l khối lượng m được giữ nằm ngang bởi hai dây treo thẳng đứng như hình vẽ. Xác định lực căng dây trái ngay sau khi đốt dây phải.




ĐS: $T = \frac{1}{4}mg$

**Bài 27.** Một ống chỉ khối lượng M được đặt nằm ngang trên một chiếc bàn và dựa vào 2 chiếc đinh cắm thẳng đứng trên bàn. Sợi chỉ dài, mảnh, một đầu quấn vào ống chỉ, còn đầu kia được luồn qua một khe ở mặt bàn và nối với một vật nặng khối lượng m (Hình vẽ). Với giá trị nào của m thì hệ cân bằng? Biết ống chỉ (phần quấn chỉ) có bán kính r, phần gỗ ở hai đầu ống chỉ có bán kính R, hệ số ma sát giữa ống chỉ và đinh là $\mu_1$ và giữa ống chỉ với mặt bàn là $\mu_2$.



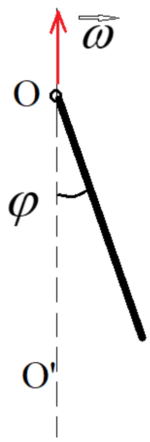
ĐS: $m_0 = M\dfrac{\mu_2(1+\frac{r}{R}\mu_1)}{\frac{r}{R}-\mu_2}$

**Bài 28.** Một thanh đồng chất tiết diện đều chiều dài l, khối lượng m, gối cầu tại O, quay quanh trục thẳng đứng OO’ với vận tốc góc không đổi $\omega$, góc giữa thanh và trục OO’ là $\varphi$.

a.Tìm $\varphi$ biết $\varphi$ nhọn?

b.Tìm phản lực lên thanh ở O (Bỏ qua ma sát)

c.Tìm lực căng của thanh tại điểm cách O một khoảng x<l




ĐS: a. $\varphi$ = arccos$\left(\dfrac{3g}{2l\omega^2}\right)$; b. Q = $\dfrac{m}{4}\sqrt{7g^2+4\omega^4 l^2}$

**Bài 29.** Một ôtô con đi theo đường nằm ngang với vận tốc $v_o$. Nếu người lái xe phanh hai bánh sau thì vệt phanh của xe là $L_1$=28m. Nếu người lái phanh hai bánh trước thì vệt phanh là $L_2$=16m. Hỏi vệt phanh là bao nhiêu nếu phanh cả 4 bánh? Biết đường kính của các bánh xe là như nhau, trọng tâm của xe nằm ở vị trí cách đều các trục của bánh xe.

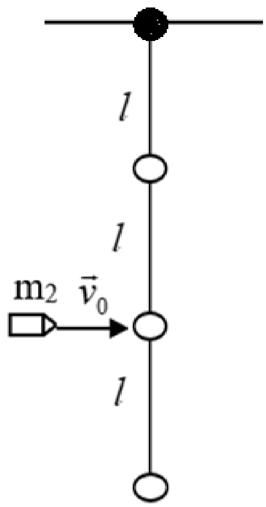
ĐS: 11m.

**Bài 29.** Trên một mặt phẳng nghiêng góc α (so với mặt ngang) đặt một vật hình hộp nhỏ A và một vật hình trụ đặc B, đồng chất, khối lượng phân bố đều. Cùng một lúc cho hai vật bắt đầu chuyển động xuống phía dưới theo đường dốc chính của mặt nghiêng. Vật A trượt, vật B lăn không trượt và trong quá trình chuyển động hai vật luôn cách nhau một khoảng không đổi. Biết hệ số ma sát trượt giữa vật A và mặt phẳng nghiêng bằng μ.

a) Tìm giá trị góc α.

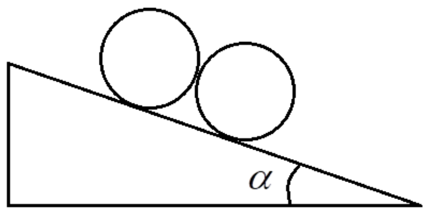
b) Hệ số ma sát μ’ giữa vật B và mặt phẳng nghiêng phải thỏa mãn điều kiện gì để có chuyển động của hai vật như trên?
ĐS: a. α = arctg3μ; b. $\mu' \geq \mu$

**Bài 30.** Ba quả cầu nhỏ, khối lượng mỗi quả đều là $m_1$ gắn trên một thanh nhẹ, cách nhau một khoảng bằng $l$. Thanh có thể quay quanh điểm O không ma sát. Khi quả cầu đang đứng yên tại vị trí cân bằng theo phương thẳng đứng thì có một viên đạn khối lượng $m_2$, bay ngang trúng quả cầu giữa như hình vẽ với vận tốc $v_0$. Ngay sau va chạm viên đạn quay ngược lại với vận tốc $v$ ($\vec{v}$ ngược hướng với $\vec{v}_0$).
Cho gia tốc trọng trường là g. Hỏi sau va chạm viên đạn đã làm thanh nhỏ quay được một góc bao nhiêu quanh điểm O?




ĐS: Quay một góc $\alpha$, $\cos\alpha = 1 - \dfrac{m_2^2(v_0+v)^2}{42m_1^2 gl}$

**Bài 31.** Cho một mặt phẳng nghiêng nhám tạo góc α so với phương ngang và hai vật rắn $M_1$, $M_2$ có dạng hình trụ đồng chất, có cùng khối lượng m, có cùng bán kính (vật $M_1$ là hình trụ đặc; vật $M_2$ là hình trụ rỗng, thành mỏng). Ma sát giữa các vật và mặt nghiêng đủ lớn để các vật có thể lăn không trượt trên mặt nghiêng. Hệ số ma sát trượt giữa hai vật là μ. Gia tốc trọng trường là g.




a. Đặt lần lượt từng vật lên trên mặt phẳng nghiêng như hình (a) và thả nhẹ để các vật lăn không trượt. Tính gia tốc của trục hình trụ của các vật.

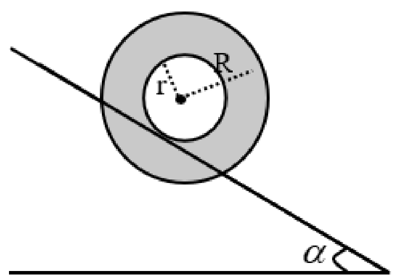
b. Đặt cùng lúc hai vật lên mặt phẳng nghiêng sao cho hai vật tiếp xúc với nhau như hình (b) rồi thả nhẹ. Hỏi phải đặt $M_2$ phía trước hay sau $M_1$ để hai vật cùng lăn không trượt trên mặt nghiêng mà vẫn tiếp xúc với nhau? Tính gia tốc của trục hình trụ của các vật và áp lực tương tác giữa các vật.

ĐS:

a.Trụ rỗng $a_r = \dfrac{1}{2} g\sin\alpha$; trụ đặc $a_d = \dfrac{2}{3} g\sin\alpha$

**b.** trụ rỗng phía trước hình trụ đặc; $\boxed{a = \dfrac{4g\sin\alpha}{\mu+7}}$; $\boxed{N = \dfrac{mg\sin\alpha}{\mu+7}}$

**Bài 32.** Một bánh xe không biến dạng khối lượng m, bán kính R, có trục hình trụ bán kính r tựa lên hai đường ray song song nghiêng góc α so với mặt phẳng nằm ngang như hình 1. Coi hệ số ma sát trượt giữa trục hình trụ và hai đường ray bằng hệ số ma sát nghỉ cực đại giữa chúng và bằng μ. Cho biết momen quán tính của



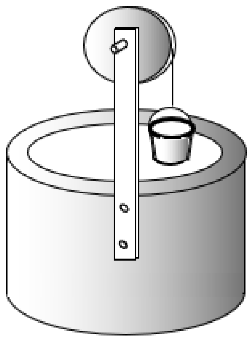
bánh xe (kể cả trục) đối với trục quay qua tâm là $I = mR^2$.

1. Giả sử trục bánh xe lăn không trượt trên đường ray. Tìm lực ma sát giữa trục bánh xe và đường ray.

2. Tăng dần góc nghiêng $\alpha$ tới giá trị tới hạn $\alpha_0$ thì trục bánh xe bắt đầu trượt trên đường ray. Tìm $\alpha_0$.

ĐS: 1. $F_{ms} = \frac{R^2}{R^2 + r^2} mg\sin\alpha$; 2. $\alpha = \alpha_0$, $\tan\alpha_0 = \frac{R^2 + r^2}{R^2}\mu$

**Bài 33.** Một ròng rọc hình trụ khối lượng M=3kg, bán kính R=0,4m được dùng để kéo nước trong một cái giếng (hình vẽ). Một chiếc xô khối lượng m=2kg, được buộc vào một sợi dây quấn quanh ròng rọc. Nếu xô được thả từ miệng giếng thì sau 3s nó chạm vào nước. Bỏ qua ma sát ở trục quay và momen quán tính của tay quay. Lấy g = 9,8 m/s$^2$. Tính:



a. Lực căng T và gia tốc của xô, biết dây không trượt trên ròng rọc
b. Độ sâu tính từ miệng giếng đến mặt nước.

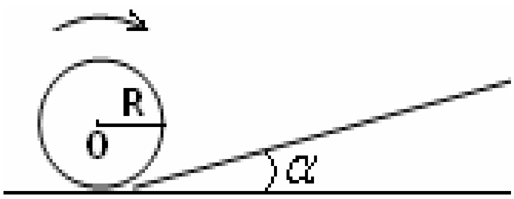
**ĐS:a.** a = 0,56 m/s$^2$, T = 8,4 N; b. $h = 25,2m$

**Bài 34.** Một thanh thẳng, đồng chất, tiết diện nhỏ, dài $\ell = 2(m)$ và có khối lượng M=3(kg). Thanh có thể quay trên mặt phẳng nằm ngang, quanh một trục cố định thẳng đứng đi qua trọng tâm của nó. Thanh đang đứng yên thì một viên đạn nhỏ có khối lượng m = 6(g) bay trong mặt phẳng nằm ngang chứa thanh và có phương vuông góc với thanh rồi cắm vào một đầu của thanh. Tốc độ góc của thanh ngay sau va chạm là 5(rad/s). Cho momen quán tính của thanh đối với trục quay trên là $I = \frac{1}{12}M\ell^2$. Tính tốc độ của đạn ngay trước khi cắm vào thanh.

ĐS: $v \approx 838,3(m/s)$

**Bài 35.** Một hình trụ đặc đồng tính, bán kính R đang quay quanh trục đi qua tâm O với tốc độ góc $\omega_0$ thì được đặt (không vận tốc tịnh tiến) xuống chân một mặt phẳng nghiêng có góc nghiêng $\alpha$ so với mặt phẳng ngang. Tìm thời gian hình trụ lên đến điểm cao nhất ?

ĐS: $T = \frac{R\omega_0}{2g\sin\alpha}$




**Bài 36.** Một thanh cứng, mảnh, đồng chất có chiều dài h dựng thẳng đứng trên mặt đất. Đầu trên của thanh bắt đầu đổ xuống trong mặt phẳng thẳng đứng với vận tốc ban đầu coi như bằng không, trong khi đầu dưới của thanh không bị trượt. Bỏ qua sức cản của không khí. Biết momen quán tính của thanh đối với trục quay đi qua một đầu của thanh

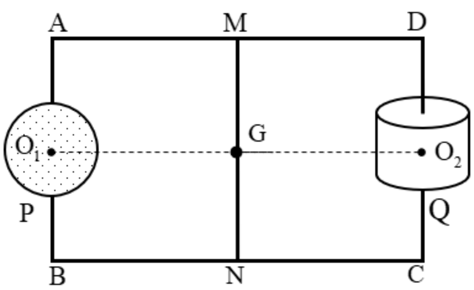
và vuông góc với thanh là $I = \frac{mh^2}{3}$ với m là khối lượng của thanh. Cho gia tốc trọng trường $g = 9,81 m/s^2$.

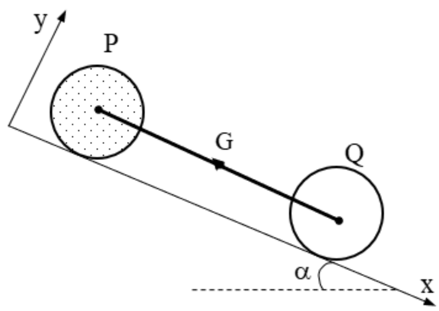
a) Tính gia tốc dài đầu trên của thanh khi nó hợp với phương thẳng đứng một góc $\alpha = 60^0$.

b) Thanh hợp với phương thẳng đứng một góc bằng bao nhiêu thì gia tốc dài đầu trên của nó bằng g.

ĐS: a. 19,4661 $m/s^2$; b. $\alpha \approx 34,4925^0$

**Bài 37.** Khung chử nhật ABCD cấu tạo bởi các thanh hình trụ đồng chất giống nhau, AD và BC liên kết với nhau bởi thanh MN hàn chặt ở hai đầu. Khối lượng khung ABCDMN là m. P là hình cầu đồng chất gắn với AB, tâm $O_1$ nằm trên AB, khối lượng m, bán kính r, momen quán tính $I = 2mr^2/5$ đối với trục AB, trục này quay quanh hai điểm A, B trên khung. Q là một hình trụ đồng chất gắn với CD, tâm $O_2$, khối lượng m, bán kính r, momen quán tính $J = mr^2/2$ đối với trục CD, trục này quay quanh hai điểm C, D trên khung. $O_1O_2$ đi qua khối tâm G của hệ. Bỏ qua ma sát ở các chỗ tiếp xúc A, B, C, D. Hệ được đặt không vận tốc đầu trên đỉnh mặt phẳng nghiêng góc α và chỉ xét đến chuyển động tịnh tiến thẳng của khung song song mặt phẳng nghiêng. Hệ số ma sát lăn trên mặt nghiêng của hình cầu và hình trụ được bỏ qua, hệ số ma sát trượt của hình cầu và hình trụ đều bằng μ. Tính gia tốc của G theo α. Biện luận theo α các trường hợp: P và Q lăn không trượt; Q trượt và P lăn không trượt; P và Q trượt.




ĐS :Nếu hình cầu P và hình trụ Q lăn không trượt: $a_G = \frac{10}{13} g \sin\alpha$.

Điều kiện $\alpha \le \alpha_1$, $\tan\alpha_1 = \frac{39}{10}\mu$.

Nếu hình cầu P lăn không trượt và hình trụ Q trượt:

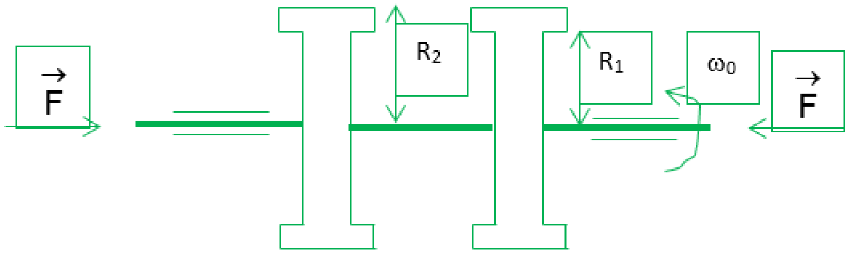
$$a_G = \frac{15}{17} g\left(\sin\alpha - \mu\frac{\cos\alpha}{2}\right)$$

Điều kiện $\alpha_1 \le \alpha \le \alpha_2$., $\tan\alpha_2 = \frac{39}{10}\mu$

Nếu hình cầu P và hình trụ Q đều trượt: $a_G = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$.

**Bài 38.** Để nối hai trục ta dùng mô hình như hình vẽ . Hai đĩa giống nhau có momen quán tính đối với trục quay tương ứng là I. Ban đầu một đĩa đứng yên, còn đĩa kia quay đều với tốc độ góc $\omega_0$ . Muốn hai trục nối nhau ta tác dụng lực vào hai đĩa dọc theo trục như hình và có độ lớn F. Mặt phẳng tiếp xúc 2 đĩa có dạng hình vành khuyên có bán kính trong $R_1$, bán kính ngoài $R_2$ . Hệ số ma sát giữa các mặt phẳng là $\mu$.

**1.** Tìm tốc độ góc chung của 2 đĩa sau khi nối.
**2.** Xác định năng lượng hao hụt khi nối trục.
**3.** Xác định thời gian cần thiết khi nối trục.

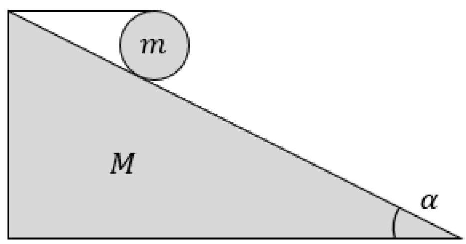



ĐS: **1.** $\omega = \dfrac{\omega_0}{2}$

**2.** Năng lượng hao hụt: $\Delta T = \dfrac{I\omega_0^2}{4}$

**3.** $t = \dfrac{3\left(R_2^2 - R_1^2\right)\omega_0 I}{4\mu F\left(R_2^3 - R_1^3\right)}$

**Bài 39.** Để giữ một hình trụ đặc, đồng chất, bán kính $r$, khối lượng $m$ nằm cân bằng trên mặt phẳng nghiêng của một chiếc nêm khối lượng $M$ đang nằm yên trên mặt phẳng nằm ngang sao cho trục của $m$ song song với mặt phẳng nằm ngang người ta sử dụng các sợi dây mềm, mảnh, nhẹ và không dãn nối vào các điểm cao nhất của nêm và buộc tiếp xúc chúng vào các điểm cao nhất của $m$ (hình 2). Biết rằng các sợi dây vuông góc với trục của $m$ và song song với mặt phẳng nằm ngang và cách sàn một khoảng $h$, mặt nghiêng của nêm hợp với phương nằm ngang một góc $\alpha$, gia tốc rơi tự do tại nơi đặt nêm là $\vec{g}$.

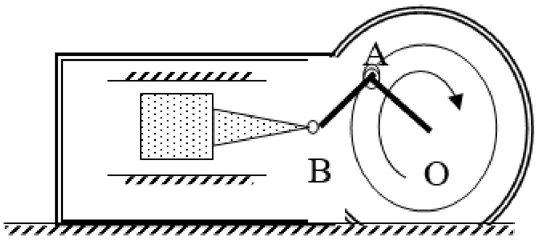



1. Tìm hệ số ma sát tối thiểu giữa $m$ và $M$.
2. Tại một thời điểm nào đó, các sợi dây giữ $m$ đồng loạt đứt, vì thế $m$ lăn không trượt trên $M$ còn $M$ trượt không ma sát trên sàn.
   a. Tìm gia tốc của $M$ so với sàn.
   b. Tìm gia tốc góc của $m$ trong hệ quy chiếu gắn với sàn.
   c. Tìm vận tốc và vận tốc góc của $m$ tại thời điểm ngay trước khi nó va chạm với sàn.

ĐS: 1. $\mu_{min} = tan\frac{\alpha}{2}$ ; 2a.$a = \frac{1}{3}\frac{\frac{m}{M}sin(2\alpha)}{1+\frac{m}{M}\left(1-\frac{2}{3}cos^2\alpha\right)}g$

**2b.**$\gamma = \frac{2}{3}\frac{1+\frac{m}{M}}{1+\frac{m}{M}\left(1-\frac{2}{3}cos^2\alpha\right)}\frac{g\sin\alpha}{r}$; 2c.$V = \frac{\frac{m}{M}\cos\alpha}{1+\frac{m}{M}}v_0$, $\omega = \frac{v_0}{r}$

**Bài 40.** Một mô hình động cơ hơi nước đặt nằm ngang trên mặt sàn nhẵn. Tay quay OA có chiều dài r và quay đều với tốc độ góc ω, điểm B luôn chuyển động thẳng. Thanh truyền AB dài bằng tay quay. Coi khối lượng của các bộ phận chuyển động rút về thành 2 khối lượng $m_1$ và $m_2$ tập trung ở A và B, khối lượng của vỏ động cơ là $m_3$ (hình 25).

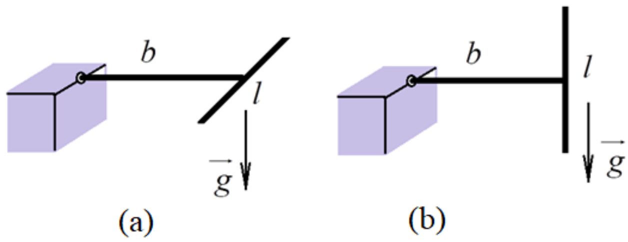



1. Cho rằng vỏ động cơ chỉ chuyển động ngang và ban đầu pit-tông ở vị trí xa nhất về bên trái. Xác định phương trình chuyển động của vỏ động cơ.

2. Nếu động cơ được bắt vít xuống nền bằng bu-lông, tìm áp lực của động cơ lên nền và lực cắt ngang bu-lông. Bỏ qua lực căng ban đầu của bu-lông.

ĐS: 1. $X=\frac{(2m_2+m_1)r(\cos\omega t-1)}{m_1+m_2+m_3}$; 2. T = $(m_1+2m_2)\omega^2 r.\cos\omega t$

**Bài 41.** Một thanh không khối lượng chiều dài là b có một đầu được gắn khớp vào một giá đỡ và đầu kia được gắn cứng vuông góc với điểm giữa của một thanh có khối lượng m và chiều dài *l*.



Hình 2.5P

a. Nếu hai thanh được giữ trong một mặt phẳng nằm ngang (Hình 2.5P) và sau đó được thả ra, hỏi gia tốc ban đầu của khối tâm là bao nhiêu?

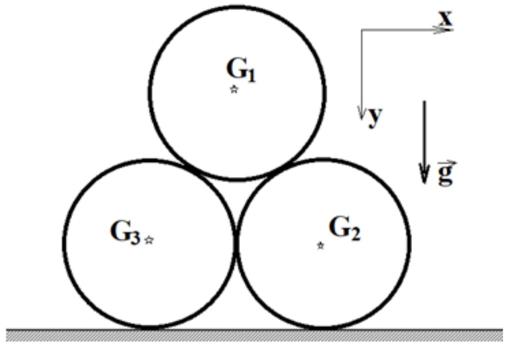
b. Nếu hai thanh được giữ trong một mặt phẳng thẳng đứng (xem hình 8.31) và sau đó được thả ra, hỏi gia tốc ban đầu của khối tâm là bao nhiêu?

Đáp số: a. a=g  b. $a=\frac{g}{1+\frac{l^2}{12b^2}}$

**Bài 42.** Ba hình trụ giống hệt nhau có momen quán tính là $I = \beta m R^2$ được đặt theo một hình tam giác (Hình 2.6P). Hãy tìm gia tốc hướng xuống dưới ban đầu của hình trụ nằm trên cùng trong hai trường hợp sau. Trường hợp nào có gia tốc lớn hơn?

a. Có ma sát giữa hai hình trụ bên dưới với nền (vì vậy chúng sẽ lăn không trượt) nhưng không có ma sát giữa các hình trụ với nhau.

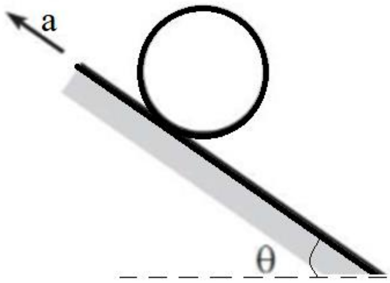
b. Không có ma sát giữa hai hình trụ nằm dưới với nền nhưng có ma sát giữa các hình trụ với nhau (vì vậy chúng không trượt đối với nhau)



Hình 2.6P

ĐS: a. $a_{1y} = \dfrac{g}{7+6\beta}$ ; b. $a_{1y} = \dfrac{g}{8\beta + 7}$

**Bài 43.** Một quả bóng có $I = (2/5)MR^2$ được đặt trên một mặt phẳng nghiêng một góc $\theta$. Mặt phẳng nghiêng được gia tốc hướng lên trên (dọc theo chiều của nó) với gia tốc a (Hình 2.7P). Với giá trị của a bằng bao nhiêu để cho khối tâm của quả bóng không di chuyển? Giả sử rằng hệ số ma sát là đủ lớn để cho quả bóng lăn không trượt đối với mặt phẳng nghiêng.

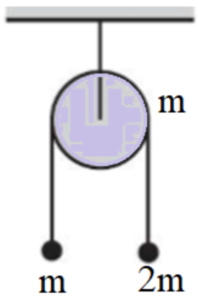


Hình 2.7P

ĐS: $a = \dfrac{5g\sin\alpha}{2}$

**Bài 44.** Xét máy Atwood như hình 2.8P. Các khối lượng là m và 2m, ròng rọc là một đĩa đồng chất có khối lượng m và bán kính r. Dây không có khối lượng và không trượt đối với ròng rọc. Hãy tìm gia tốc của các khối lượng, sử dụng định luật bảo toàn năng lượng.

Đáp số $a = \dfrac{2}{7} g$

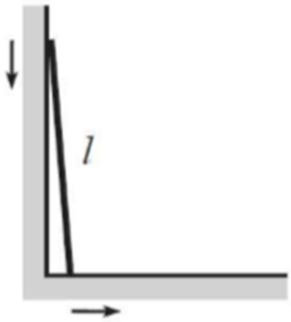


Hình 2.8P

**Bài 45.** Một thang đồng chất có chiều dài *l* được dựng trên một mặt sàn không ma sát và dựa vào một bức tường không ma sát. Ban đầu, nó được giữ đứng yên với chân của nó cách bức tường một khoảng rất nhỏ, sau đó nó được thả ra. Ngay sau đó chân thang sẽ trượt ra xa bức tường và đỉnh thang sẽ trượt xuống dọc theo bức tường (Hình 2.9P).

Khi nó không còn tiếp xúc với tường, hỏi thành phần theo phương ngang của vận tốc khối tâm là bao nhiêu?

ĐS: $v_n = \frac{1}{2}\sqrt{3gl(1-\cos\theta)}.\cos\theta$



Hình 2.9P

Khi thanh rời bắt đầu rời tường thì thành phần $v_n$ đạt cực đại,

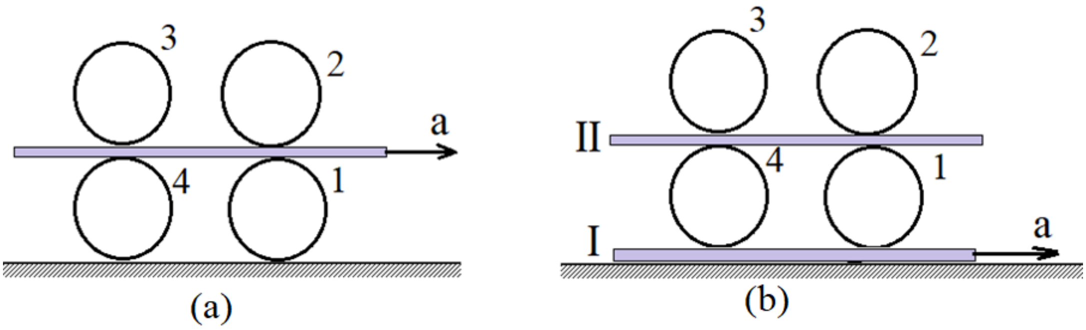
khi đó $\cos\theta = \frac{2}{3} \Rightarrow \theta \approx 48,2^0$

**Bài 46.`**

Cho bốn vật hình trụ giống nhau, đồng chất, tiết diện đều, mỗi trụ có khối lượng m, bán kính R. Bốn trụ đặt thành hai tầng, giữa hai tầng ngăn cách nhau bởi tấm ván có khối lượng không đáng kể. Cho rằng các trụ lăn không trượt trên ván và trên sàn. Tìm gia tốc của các trụ và độ lớn các lực ma sát nghỉ trong các trường hợp sau.

**a.** Trên hình vẽ 2.10Pa, tấm ván được kéo với gia tốc a.

**b.** Trên hình vẽ 2.10Pb, tấm ván I được kéo sang phải với gia tốc a.



Hình 2.10P

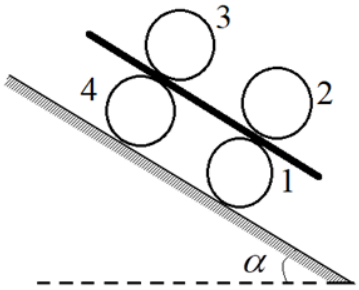
c.Trong điều kiện câu b, biết rằng ván II có khối lượng m. Tìm gia tốc của các trụ và độ lớn các lực ma sát nghỉ.

ĐS:a. Trụ 1: $a_1 = \frac{a}{2}; F_1 = \frac{1}{8}ma; F_1' = \frac{3}{8}ma$. Trụ 2: $a_2 = \frac{1}{3}a;\ F_2 = \frac{1}{3}ma$

b. $a_1 = \frac{7}{17}a$, $a_2 = \frac{-1}{17}a$; $F_1 = \frac{6}{17}ma$ ; $F_2 = F_1' = \frac{1}{17}ma$;

c. $a_1 = \frac{13}{29}a; a_2 = -\frac{1}{29}a$ ; $F_1 = \frac{21}{58}ma\ F_1' = \frac{5}{58}ma;\ F_2 = \frac{1}{29}ma$

**Bài 47.** Cho bốn vật hình trụ giống nhau, đồng chất, tiết diện đều, mỗi trụ có khối lượng m, bán kính R. Bốn trụ đặt thành hai tầng, giữa hai tầng ngăn cách nhau bởi tấm ván có khối lượng không đáng. Cho rằng các trụ lăn không trượt trên ván và trên mặt phẳng nghiêng. Biết góc nghiêng của mặt phẳng nghiêng là $\alpha$. Tìm gia tốc mỗi vật.



Hình 2.11P

ĐS: $a_1 = \dfrac{10}{17} g \sin\alpha$ ; $a_2 = \dfrac{18}{17} g \sin\alpha$

**Bài 48**. Một vòng mảnh khối lượng M đặt dựng đứng trên mặt bàn nhẵn nằm ngang và được cho đổ xuống. Tìm áp lực của vòng trên mặt bàn khi mặt phẳng của vòng tạo với phương thẳng đứng một góc $\beta=60^0$.

ĐS: $N = mg(\sqrt{3} - \dfrac{3}{2})$

**Bài 49**. Một đĩa mỏng đồng chất khối lượng m đặt dựng đứng trên mặt ***phẳng nhẵn nằm ngang***. Người ta cho đĩa đổ xuống. Tìm áp lực của đĩa lên mặt phẳng ngang của đĩa tạo với phương thẳng đứng một góc $\alpha=30^0$.

ĐS: $N = mg\dfrac{1+(1-\cos\alpha)^2}{(1+4\sin^2\alpha)} \approx 0,26mg$

**Bài 50. (Olympic Mỹ 1996)**

1. Một hình nón, góc ở đỉnh $2\theta$, được đặt thẳng đứng tựa trên đỉnh. Mặt trong hình nón không có ma sát. Một vật có kích thước nhỏ, lăn ở mặt trong của hình nón ở độ cao h như hình vẽ. Hãy tìm vận tốc góc của vật.

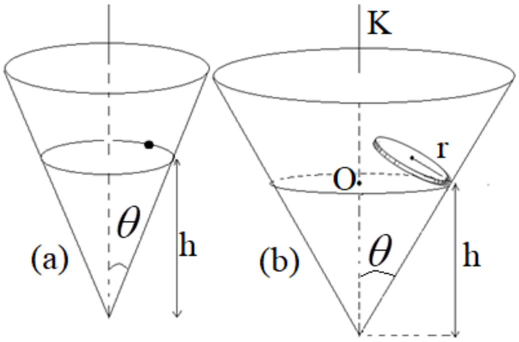
2. Giả sử bề mặt có lực ma sát và một vòng tròn nhỏ bán kính r lăn không trượt ở mặt trong hình nón với tốc độ góc $\omega$ không đổi như hình vẽ. Cho các điều kiện sau:

a. Điểm tiếp xúc giữa vòng tròn và mặt trong cách đỉnh hình nón theo phương thẳng đứng một đoạn h

b. Mặt phẳng chứa vòng tròn luôn vuông góc với thành hình nón.

Hãy tìm vận tốc góc của vòng tròn quanh trục hình nón *(để vật sắp trượt)*. So sánh với câu 1.

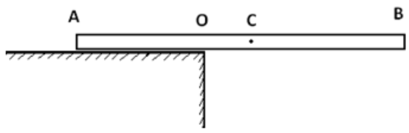
Giả sử r khá nhỏ so với bán kính quay h.tg$\theta$.



Hình 2.17P

ĐS: 1. $\omega=\dfrac{1}{tg\theta}\sqrt{\dfrac{g}{h}}$ ; 2. $\omega=\dfrac{1}{tg\theta}\sqrt{\dfrac{g}{2h}}$

**Bài 51.** Một thanh AB = 2b, khối lượng m, tâm C nằm trung điểm AB, mômen quán tính đi qua C và vuông góc AB là $I_C = \frac{1}{3}mb^2$. Thanh được đặt trên một mặt bàn nằm ngang, đầu A nằm trên bàn, đầu B nằm ngoài mặt bàn sao cho AB vuông góc mép bàn tại O (HV); OC = a. Hệ số ma sát giữa bàn và thanh là k (k < 1). Khi buông tự do không vận tốc đầu. Tìm góc nghiêng giữa thanh và phương ngang $\theta_0$ để thanh bắt đầu trượt trên mép bàn.

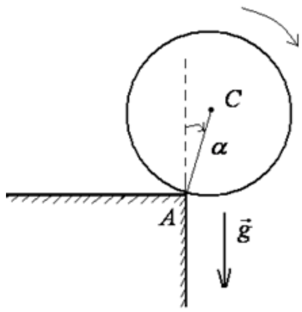


Hình 2.18P

ĐS: $\theta_0 = arctg\left[k\dfrac{b^2}{9a^2+b^2}\right]$

**Bài 52.** Một vật hình trụ đồng chất khối lượng m, bán kính R (có mômen quán tính đối với trục đối xứng $I_C = \frac{1}{2}mR^2$) nằm ở mép bàn sao cho đường sinh mặt trụ tiếp xúc cạnh A mép bàn. Ban đầu trụ cân bằng, sau đó nhiễu nhỏ ($v_0$= 0) trụ đổ xuống bàn theo góc nghiêng $\alpha$ tăng dần. Ở độ nghiêng $\alpha_0$ nào thì mặt trụ bắt đầu trượt trên cạnh mép bàn. Biết hệ số ma sát trượt giữa mặt trụ và cạnh bàn là k = 0,2.

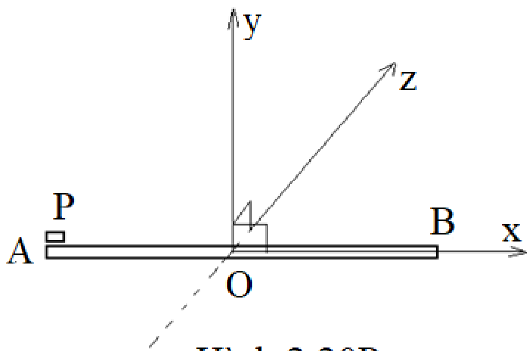
ĐS: $\alpha_0 = 27^0$



Hình 2.19P

**Bài 53.** Một thanh AB khối lượng m, chiều dài 2a, chuyển động không ma sát quanh trục Oz nằm ngang, mặt phẳng chuyển động là mặt phẳng thẳng đứng (Oxy). Mômen quán tính đối vúoi trục Oz là $I_0 = \frac{1}{3}Ma^2$. Người ta đặt lên đầu mút A của thanh một chất điểm P có khối lượng m. Hệ số ma sát giữa thanh và vật P là k. Người ta buông hệ tự do không vận tốc đầu từ vị trí thanh nằm ngang ($\alpha$ = 0 ). Ở điều kiện nào P vẫn còn trên thanh.

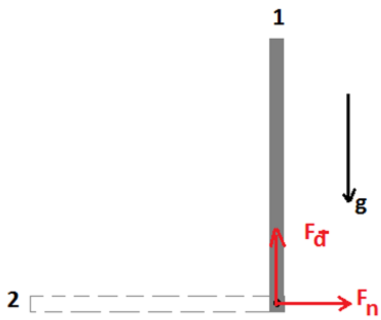
ĐS: $tg\alpha \le k\dfrac{M}{M+9m}$



Hình 2.20P

**Bài 44.** Một thanh đồng chất khối lượng m, dài $\ell$ (hình 2.21P) rơi không vận tốc đầu từ vì trí 1 thực hiện chuyển động quay trục cố định nằm ngang O. Tìm thành phần nằm ngang $F_n$ và thành phần thẳng đứng $F_đ$ của lực mà trục tác dụng lên thanh tại vị trí nằm ngang 2.

ĐS: : $F_n = \frac{3}{2}mg$ ; $F_đ = \frac{1}{4}mg$

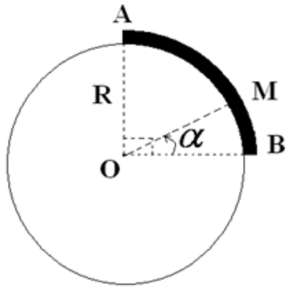


Hình 2.21P

**Bài 55.** Một sợi dây AB mảnh, đồng chất, không dãn, chiều dài $\frac{\pi R}{2}$, khối lượng m nằm trong mặt phẳng thẳng đứng, được vắt qua mặt trụ nhẵn tâm O, bán kính R và nằm ngang như hình vẽ. Ban đầu, đầu A của dây nằm trên điểm cao nhất của mặt trụ.

a. Tính gia tốc của dây và sức căng dây tại 1 điểm M trên dây lúc vừa buông đầu dây A. Biết góc $\angle MOB = \alpha$.

b. Tính vận tốc của dây khi đầu dây A vừa rời bán cầu.



Hình 2.24P

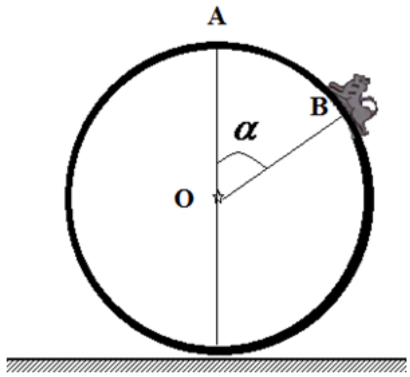
ĐS: a. $a = \frac{2g}{\pi}$ ; $T_M = \frac{2mg}{\pi}\left[\sin\alpha - \frac{2\alpha}{\pi}\right]$; b. $v = \sqrt{2gR\left(\frac{2}{\pi} + \frac{\pi}{4}\right)}$

**Bài 56**. Trên bề mặt của một hình trụ rỗng lớn nằm trên mặt phẳng ngang có một con chó khối lượng m bắt đầu leo về phía điểm cao nhất A, và nó luôn ở cùng một khoảng cách so với điểm A (hình vẽ). Kết quả là hình trụ bắt đầu lăn không trượt trên mặt phẳng ngang, khối lượng hình trụ là M, góc AOB bằng $\alpha$. Hãy xác định:

1) Gia tốc a của trục hình trụ.

2) lực ma sát $F_{ms}$ giữa hình trụ và mặt phẳng trong thời gian lăn.

3) Thời gian mà con chó có thể giữ được vị trí nói trên nếu công suất có ích lớn nhất mà nó có thể tạo ra bằng $N_{max}$. Vận tốc cực đại $v_{max}$ của chuyển động tịnh tiến của hình trụ bằng bao nhiêu? (*công suất có ích ở đây là công suất mà con chó sinh ra để làm tăng động năng của hệ. Coi con chó rất nhỏ so với hình trụ).*



Hình 2.26P

***ĐS: a.*** $a = \frac{mg\sin\alpha}{2M + m(1+\cos\alpha)}$;

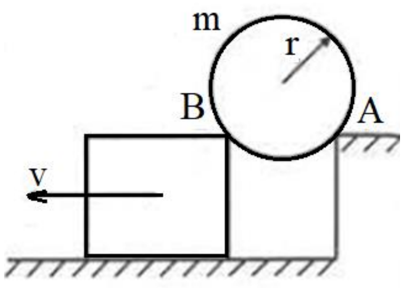
b. $F_{ms} = \frac{(M+m)}{2M + m(1+\cos\alpha)} mg\sin\alpha$ .

c. $t_{max} = \frac{N_{max}}{(m+2M)}\left[\frac{2M + m(1+\cos\alpha)}{mg\sin\alpha}\right]^2$; $v_{max} = \frac{N_{max}}{(m+2M)}\frac{2M + m(1+\cos\alpha)}{mg\sin\alpha}$

**Bài 57.** Một hình trụ có khối lượng m và bán kính r đang đứng yên và tựa vào một khối hộp (Hình 2.27P). Khối hộp được kéo sang trái với vận tốc v không đổi. Lúc đầu khối hộp ở sát cạnh tường, bỏ qua ma sát giữa hình trụ với tường và khối hộp. Hãy xác định:

**1.** Dạng quỹ đạo chuyển động của tâm hình trụ so với điểm A
**2.** Điều kiện của vận tốc v để khối hộp vẫn còn tiếp xúc với trụ khi khoảng cách giữa hai điểm A và B là $r\sqrt{2}$.
**3.** Các lực tác dụng lên thành hình trụ khi khoảng cách giữa A và B là $r\sqrt{2}$.

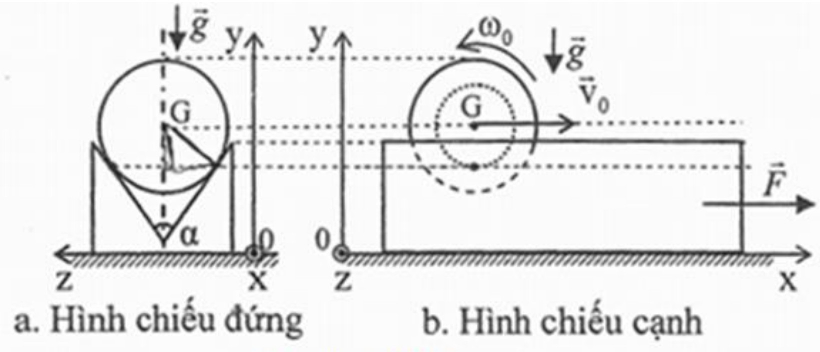
ĐS: 2. $v \le \sqrt{gr\sqrt{2}}$; 3. $N = m(\frac{g}{\sqrt{2}} - \frac{v^2}{2r})$



Hình 2.27P

**Bài 58 (HSG QG 2017)**

Xét một hệ cơ gồm một quả cầu đặc đồng chất và một thanh cứng. Quả cầu nằm trên máng của thanh, máng được tạo bởi hai mặt phẳng hợp với nhau góc $\alpha = 60^0$, mặt phẳng phân giác của nó là mặt phẳng đứng. Hình 1.a và 1.b mô tả hình chiếu đứng và hình chiếu cạnh của hệ. Hệ được đặt trên mặt sàn nằm ngang. Coi thanh và quả cầu không bị biến dạng trong quá trình khảo sát. Thanh có khối lượng m và đủ dài. Quả cầu có bán kính R, khối lượng M, mômen quán tính đối với trục quay đi qua khối tâm G là $I = \frac{2}{5}MR^2$.



Hình 2.29P

Hệ số ma sát trượt giữa máng và quả cầu là μ. Gia tốc trọng trường là g. Cho hệ tọa độ 0xyz, xét hai trường hợp sau:

**1.**Thanh được gắn cố định với sàn. Tại thời điểm ban đầu t = 0, quả cầu đang quay ngược chiều kim đồng hồ quanh trục quay vuông góc với mặt phẳng 0xy và đi qua G với tốc độ góc $\omega_0$, đồng thời có vận tốc khối tâm là $\vec{v}_0$ theo chiều 0x (hình 1.b). Tới thời điểm t = τ, quả cầu bắt đầu lăn không trượt, vận tốc khối tâm vẫn còn cùng chiều 0x trên thanh.

a. Mô tả quá trình chuyển động của quả cầu kể từ thời điểm ban đầu tới thời điểm t = τ

b. Tính quãng đường quả cầu đi được trên thanh trong khoảng thời gian τ nói trên.

**2.**Thanh có thể trượt không ma sát trên sàn. Tác dụng vào thanh một lực $\vec{F}$ không đổi theo phương 0x sao cho trong quá trình thanh chuyển động, quả cầu lăn không trượt trên máng.

a. Tại một thời điểm nào đó, vận tốc của thanh là $\vec{v}_1$, vận tốc khối tâm của quả cầu là $\vec{v}_2$. Trong hệ quy chiếu gắn với thanh, hãy xác định vị trí của điểm có tốc độ lớn nhất trên quả cầu. Tính tốc độ lớn nhất đó.

b. Xác định biểu thức độ lớn cực đại của lực $\vec{F}$ theo μ, g, M và m để trong quá trình thanh chuyển động quả cầu luôn lăn không trượt trên máng.

ĐS: 1b. $s = \frac{2}{169\mu g}(2v_0 + \omega_0 R)(9v_0 - 2\omega_0 R)$.

2a. Để $v_M$ đạt cực đại tại đỉnh quả cầu, $v_M = \omega.d_{max} = 3v_{21} = 3|\vec{v}_2 - \vec{v}_1|$.

2b. $F_{max} = \mu g(2M + \frac{13m}{4})$.

**Bài 59 .** Một mặt phẳng nghiêng có chiều dài $\ell$ = 1m lập với phương ngang một góc $\alpha = 30^0$, hệ số ma sát tính theo khoảng cách x từ đỉnh đến chân mặt phẳng nghiêng theo công thức $\mu = \frac{x}{\ell}$. Tại thời điểm t = 0, thả nhẹ một vành tròn đồng chất có bán kính R = 4cm từ đỉnh A của mặt phẳng nghiêng. Bỏ qua ma sát lăn. Cho g =10m/s$^2$.

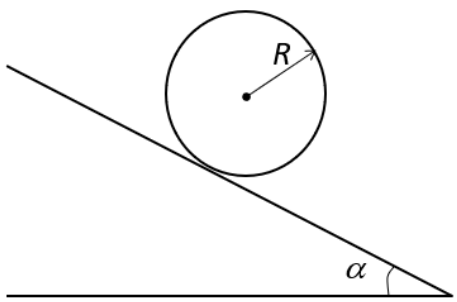
1. Tìm theo thời gian t: tọa độ x của tâm, gia tốc góc $\gamma$, tốc độ góc $\omega$ của vành khi vành lăn có trượt.

2. Xác định thời điểm vành bắt đầu lăn không trượt.

ĐS: 1. $x = 0,58[1 - \cos(2,94t)]$; $\omega = 125\left(1 - \frac{1}{2,94}\sin 2,94\,t\right)$; $\gamma = 125[1 - \cos(2,94\,t)]$; 2. t = 0,64s

# CHƯƠNG II
# NĂNG LƯỢNG VẬT RẮN, VA CHẠM VẬT RẮN
## II.1 NĂNG LƯỢNG VẬT RẮN

**Bài 1.** Một hình trụ mỏng đồng nhất bán kính $R$ và khối lượng $m$ được đặt lên một mặt phẳng nghiêng một góc $\alpha$ so với phương ngang. Hệ số ma sát trượt giữa mặt nghiêng và hình trụ là $\mu$. Bỏ qua ma sát lăn.




a) Tìm sự phụ thuộc của gia tốc $a(\alpha)$ của hình trụ vào góc nghiêng $\alpha$ của mặt phẳng. Khảo sát trường hợp hình trụ lăn không trượt và lăn có trượt.

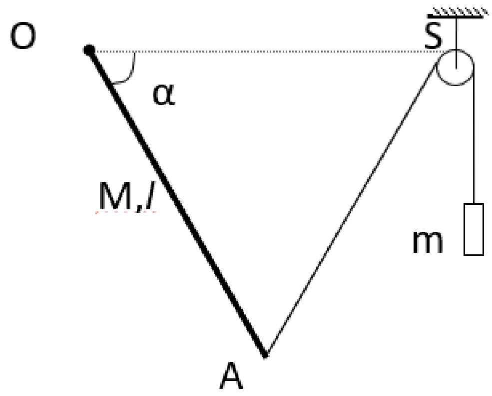
b) Nếu gắn vào thành trong của hình trụ một vật nhỏ khối lượng $m_0$ thì trong những điều kiện nào đó, hình trụ có thể nằm cân bằng trên mặt phẳng nghiêng. Hãy xác định điều kiện đó và chỉ ra các vị trí cân bằng của hệ với các $m_0$ khác nhau.

ĐS : a. Lăn không trượt $a = \frac{g\sin\alpha}{2}$ ; lăn có trượt $a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$ khi $\mu < \frac{\tan\alpha}{2}$.

b. $m_0 = \frac{\sin\alpha}{1-\sin\alpha}m$; cân bằng bền khi phương bán kính nối vật tạo phương thẳng đựng một góc $\varphi = \arcsin(\frac{m+m_0}{m_0}\sin\alpha)$

**Bài 2.**

Cho một cơ hệ (như hình vẽ bên), thanh đồng nhất OA có khối lượng M, chiều dài *l* có thể quay tự do quanh trục O cố định nằm ngang, đầu A buộc vào một sợi dây nhẹ không dãn, đầu còn lại của dây vắt qua ròng rọc S và buộc vào vật m. S ở cùng độ cao với O và OS=*l*. Khi cân bằng góc α= $60^0$. Bỏ qua ma sát, khối lượng và kích thước của ròng rọc.



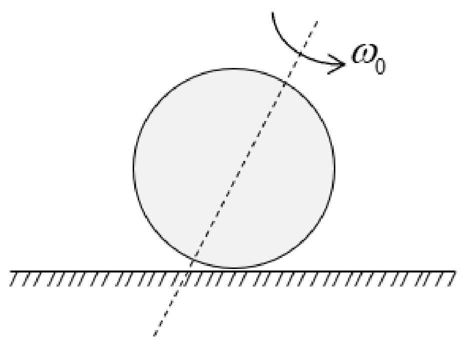

a) Tìm tỷ số $\frac{M}{m}$.

b) Đưa thanh đến vị trí nằm ngang rồi thả nhẹ. Tìm vận tốc của m khi thanh đi qua vị trí cân bằng ban đầu.

ĐS: a. $\frac{M}{m} = \sqrt{3}$; b. $\sqrt{\frac{9gl}{9+8\sqrt{3}}}$

**Bài 3.** Một quả cầu đặc đồng chất khối lượng m, bán kính R đang quay với tốc độ góc $\omega_0$ . Trục quay đi qua tâm quả cầu và lập với phương thẳng đứng $\alpha$ . Vận tốc ban đầu của tâm quả cầu bằng không. Đặt nhẹ quả cầu lên mặt bàn nằm ngang. Hãy xác định vận tốc của tâm quả cầu và động năng của quả cầu tại thời điểm nó ngừng trượt trên mặt bàn. Bỏ qua ma sát lăn.

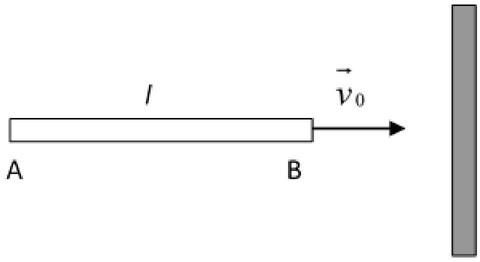
Áp dụng số: $m = 1kg; R = 10cm; \omega_0 = 10rad/s; \alpha = 12^0$.



ĐS: $v = \frac{2}{7}R\omega_0 \sin\alpha = 0,0594 m/s; W_d = \frac{1}{35}mR^2\omega_0^2\left(5\cos^2\alpha + 2\right) = 0,1938J.$

**Bài 4.** Một thanh đồng chất AB, khối lượng m, chiều dài l, chuyển động với vận tốc ban đầu $v_0$ (hướng dọc theo thanh) từ vùng không có ma sát sang vùng có ma sát trên mặt bàn nằm ngang với hệ số ma sát trượt là μ

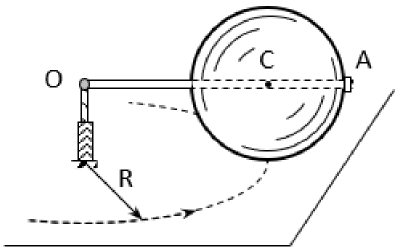
1. Tìm điều kiện về $v_0$ để khi dừng lại toàn bộ thanh nằm trong vùng có ma sát.




2. Với một vị trí số cho trước của $v_0$, hãy tính khoảng thời gian kể từ lúc đầu B bắt đầu chạm vào mép vùng có ma sát cho đến khi thanh dừng lại, đầu A cách mép vùng có ma sát một khoảng bao nhiêu?

ĐS: 1. $v_0 \ge \sqrt{\mu g l}$

**Bài 5.** Một quả cầu đồng tính có khối lượng m và bán kính r, lăn không trượt trên mặt phẳng nằm ngang, quay xung quanh một trục nằm ngang A (*hình 1*). Khi đó, trục A quay quanh trục cố định O còn tâm C của quả cầu chuyển động với vận tốc v theo một đường tròn bán kính R.



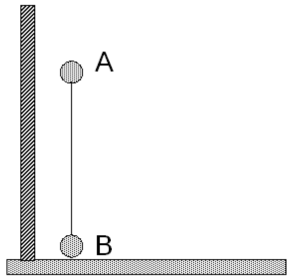

Điểm nào ở trên quả cầu chuyển động với tốc độ lớn nhất, tốc độ đó bằng bao nhiêu ?

Tính động năng của quả cầu.

ĐS: $K = \frac{7}{10}mv^2(1 + \frac{2R^2}{7r^2})$

**Bài 6.**

Thanh AB cứng, nhẹ chiều dài l mỗi đầu gắn một quả cầu nhỏ khối lượng bằng nhau, tựa vào tường thẳng đứng (Hình vẽ). Truyền cho quả cầu B một vận tốc rất nhỏ để nó trượt trên mặt sàn nằm ngang. Giả thiết rằng trong quá trình chuyển động thanh AB luôn nằm trong mặt phẳng vuông góc với tường và sàn. Bỏ qua ma sát giữa các quả cầu với tường và sàn. Gia tốc trọng trường là g.



a. Xác định góc α hợp bởi thanh với sàn vào thời điểm mà quả cầu A bắt đầu rời khỏi tường.

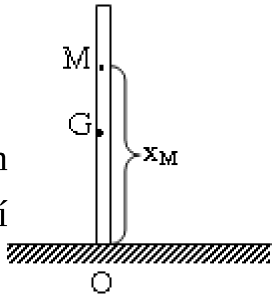
b. Tính vận tốc của quả cầu B khi đó.

ĐS: a. $\alpha \approx 42^0$ ; b. $v_B = \sqrt{\frac{8}{27}gl}$

**Bài 7.** Một thanh đồng chất có chiều dài l đang ở vị trí thẳng đứng thỡ bị đổ xuống. Hãy xác định :

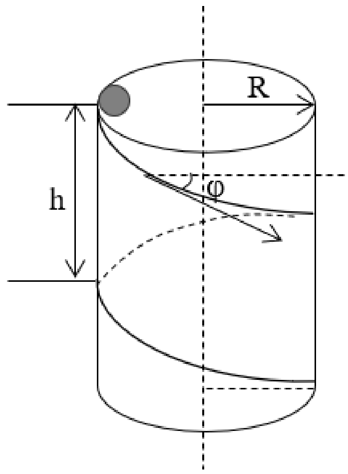
a, Vận tốc dài của đỉnh thanh khi nó chạm đất?

b, Vị trí của điểm M trên thanh sao cho khi M chạm đất thì vận tốc của nó đúng bằng vận tốc chạm đất của một vật rơi tự do từ vị trí M?




**ĐS: a.** v = w l = $\sqrt{3gl}$ ; b. $x_M = \frac{2}{3}l$

**Bài 8.** Một máng nhẹ uốn thành đường xoắn ốc hình trụ thẳng đứng bán kính R, có thể quay tự do quanh trục đối xứng thẳng đứng (Hình 1). Biết vòng xoắn nghiêng 1 góc $\varphi = \frac{\pi}{4}$ so với phương ngang. Một vật có khối lượng m được thả không vận tốc ban đầu cho trượt không ma sát xuống theo máng. Coi khối lượng của máng bằng khối lượng của vật.

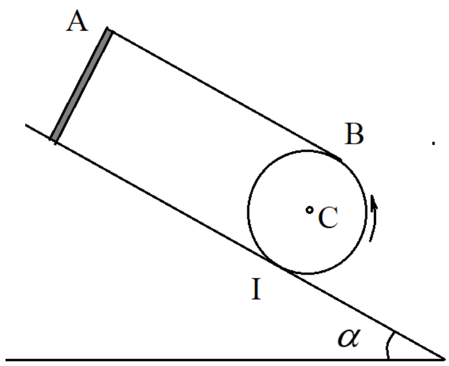



**a.** Xác định vận tốc của vật tại thời điểm vật trượt xuống được một độ cao bằng h.

**b.** Tính tốc độ góc quay của máng.

ĐS: a. $v = \sqrt{\frac{5gh}{3}}$ ; b. $\omega = -\frac{1}{R}\sqrt{\frac{gh}{3}}$

**Bài 9.** Một sợi dây quấn trên ống dây là hình trụ đồng chất kim loại m, bán kính R, J = $\frac{1}{2}$mR$^2$ so với trục. Hình trụ di chuyển trên mặt phẳng nghiêng góc $\alpha$, giả thiết dây đủ mảnh để mẫu dây AB luôn bị căng song song với mặt phẳng nghiêng. Hệ số ma sát giữa ống dây và mặt phẳng nghiêng là f. Ban đầu ống dây đứng yên.




1.Với giả thiết nào của $\alpha$, ống dây còn đứng yên.

2.Trong trường hợp chuyển động:

a, Tính gia tốc tâm C của ống dây.

b, Tính biến thiên động năng giữa t = 0 và t.

ĐS: 1. Với $\alpha$ thoả mãn : tg$\alpha \leq$ 2f thì ống dây còn đứng yên.

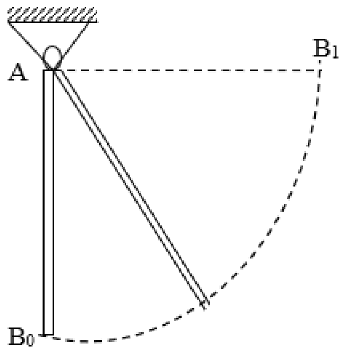
2a. : a = $\frac{2}{3}g(\sin\alpha - 2f\cos\alpha)$; 2b. $\Delta E_d = \frac{3}{4}mg^2(\sin\alpha - 2f\cos\alpha)^2.t^2$

**Bài 10.**

Một khối trụ đặc có khối lượng m và bán kính r bắt đầu lăn không trượt bên trong một mặt trụ có ma sát bán kính R từ một vị trí xác định bởi góc $\alpha_0$. Hãy xác định áp lực của khối trụ tại một vị trí tuỳ ý xác định bởi góc α.

ĐS: N = P/3 (7cosα - 4cos$\alpha_0$)

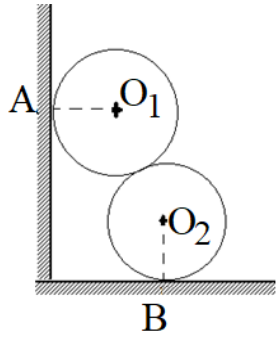
**Bài 11.** Thanh AB với chiều dài l được treo bằng khớp vào điểm A ( hình vẽ ). Cho rằng bỏ qua được ma sát ở khớp, hãy xác định vận tốc góc $\omega_0$ bé nhất cần phải truyền cho thanh để thanh có đạt tới vị trí nằm ngang.




ĐS: $\omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{l}}$

**Bài 12.** Một đĩa tròn đồng chất bán kính R, bề dày h. Đĩa đang quay với tốc độ góc $\omega_0$ quanh trục thẳng đứng đi qua tâm đĩa vuông góc với mặt đĩa thì người ta đặt nhẹ nó xuống mặt sàn ngang. Hệ số ma sát giữa đĩa và sàn là $\mu$. Hãy xác định số vòng mà đĩa quay được cho tới lúc dừng lại?

**ĐS:** $N = \dfrac{3R\omega_0^2}{16\pi.\mu.g}$

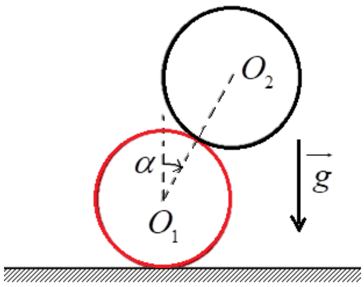


Hình 2.31P

**Bài 13.** Hai quả cầu cùng bán kính R, khối lượng m, dựa vào tường. Do quả cầu ở dưới bị đẩy nhẹ về phía bên phải nên quả cầu ở trên trượt xuống theo phương thẳng đứng. Hệ bắt đầu chuyển động không vận tốc đầu. Tìm vận tốc cực đại của quả cầu dưới. Bỏ qua ma sát.

ĐS: $v_2 = \dfrac{4}{9}\sqrt{3gR}$

**Bài 14.** Hai quả cầu rắn, đồng nhất, bán kính bằng nhau, được đặt lên nhau. Quả cầu 1 nằm dưới được giữ cố định. Quả cầu 2 ở trên, ban đầu nằm tại đỉnh quả cầu 1, sau đó bắt đầu lăn xuống. Gọi α là góc hợp bởi đường thẳng đứng và đường nối tâm của hai quả cầu, k là hệ số ma sát trượt giữa hai mặt cầu. Xác định vị trí quả cầu 2 trượt lên quả cầu 1 theo góc α.

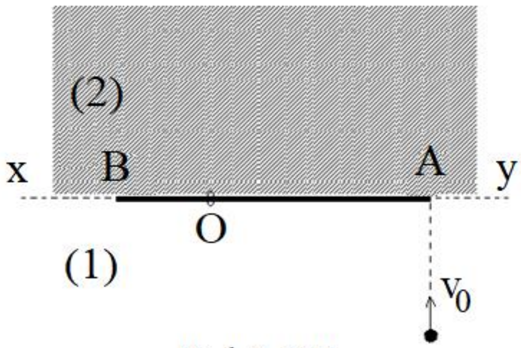


Hình 2.32P

ĐS: $\alpha = 47,5^0$

**Bài 14.**

Một thanh cứng AB đồng chất có tiết diện nhỏ và đều, chiều dài 3$l$=30cm, khối lượng 3m=300g phân bố đều dọc theo thanh và dễ dàng quay quanh trục quay cố định thẳng đứng đi qua điểm O trên thanh và OB=$l$. Ban đầu thanh AB được đặt nằm ngang dọc trên đường thẳng xy, xy là đường thẳng ranh giới giữa hai phần của mặt phẳng ngang (1) và (2), phần mặt phẳng (1) trơn nhẵn; phần mặt phẳng (2) đủ rộng và nhám. Một vật nặng coi là chất điểm có khối lượng m được cung cấp với vận tốc đầu $v_0$ theo hướng vuông góc với AB, trượt không ma sát trên phần mặt phẳng (1), đến đập vào đầu A của thanh. Biết va chạm là hoàn toàn đàn hồi. Hệ



Hình 2.33P

số ma sát giữa thanh và vật với sàn đều bằng k=0,2.

1. Khi $v_0$= 10 m/s. Hãy xác định:

a) tốc độ góc của thanh và tốc độ của vật nặng sau khi vừa va chạm xong.

b) phản lực đàn hồi cực đại của trục quay tác dụng lên thanh AB khi va chạm.

c) góc quay cực đại của thanh AB sau va chạm.

2. Tìm giá trị $v_0$ để thanh AB quay vừa đúng 1 vòng thì dừng lại. Khi đó hãy xác định quãng đường tối đa vật nặng đi được sau khi va chạm?

Lấy gia tốc trọng trường g=10m/s$^2$.

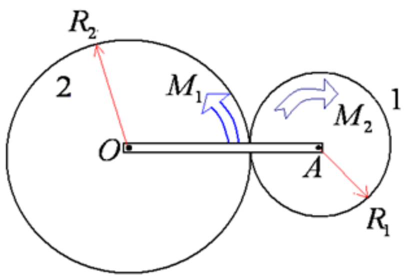
3. MỞ RỘNG. Giả sử thanh không có trục quay cố định. Với $v_0$= 10 m/s hãy tìm tốc độ góc của thanh, góc quay cực đại của thanh AB sau va chạm.

ĐS: 1a. $\omega=\frac{4}{7}\frac{v_0}{l}=\frac{400}{7}rad/s; v_1=\frac{1}{7}v_0=\frac{10}{7}m/s$; 1b. $F_{dh}=\frac{48}{49l}mv_0^{\,2}\approx 9,8N$;

1c. $\varphi = 31x2\pi + \frac{W_1-31|A_{ms}|}{|A_{ms1}|}x2\pi \simeq 62,5\pi$.

2. $v_0=\frac{7}{4}\sqrt{\frac{5kg\pi l}{3}}=1,79m/s$; $S=\frac{v_0^{\,2}}{49.2.kg}=\frac{5}{96}\pi l=0,016m$

**Bài 16**. Cơ hệ như hình vẽ. Biết bánh răng có bán kính $R_2$ cố định, bánh răng bán kính $R_1$ là một đĩa đồng chất, khối lượng $m_1$. Tay quay OA là thanh đồng chất có khối lượng m có trục quay cố định đi qua O và vuông góc với mặt phẳng các đĩa (Bỏ qua kích thước các răng so với kích thước đĩa).



Hình 2.34P

Hệ thống chuyển động từ trạng thái nghỉ do tác dụng của một ngẫu lực phát động có mômen **không đổi** bằng $M_1$ đặt vào tay quay OA. Bánh răng $R_1$ chịu tác dụng của một ngẫu lực cản có mômen là $M_2$ **không đổi**. Bỏ qua mat sát. Xác định vận tốc của tay quay OA theo góc quay của nó và gia tốc góc tay quay.

ĐS: $\omega=\frac{2}{R_1+R_2}\sqrt{\frac{3M}{2m+3m_1}\varphi}$; $\varepsilon=\frac{6M}{(2m+3m_1)(R_1+R_2)^2}$

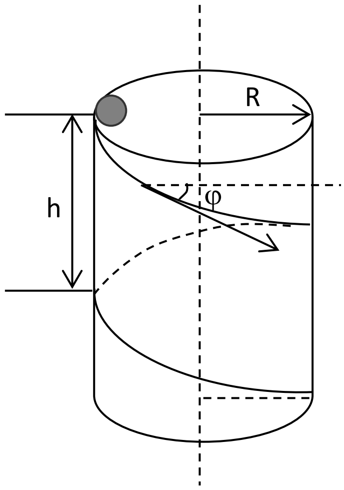
**Bài 17.**

Một máng nhẹ uốn thành đường xoắn ốc hình trụ thẳng đứng bán kính R, có thể quay tự do quanh trục đối xứng thẳng đứng (Hình 2.35P). Biết vòng xoắn nghiêng 1 góc $\varphi = \frac{\pi}{4}$ so với phương ngang. Một vật có khối lượng m được thả không vận tốc ban đầu cho trượt không ma sát xuống theo máng. Coi khối lượng của máng bằng khối lượng của vật.

**a.**Xác định vận tốc của vật tại thời điểm vật trượt xuống được một độ cao bằng h.

**b.** Tính tốc độ góc quay của máng.

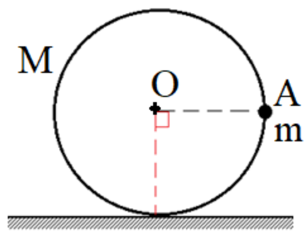
ĐS: a. $v = \sqrt{\frac{5gh}{3}}$ ; b. $\omega = -\frac{1}{R}\sqrt{\frac{gh}{3}}$



*Hình 2.35P*

**Bài 18.** Người ta gắn chặt vào vành tròn khối lượng M đặt dựng đứng trên bàn một vật nhỏ coi là chất điểm có khối lượng m=$\frac{M}{3}$ tại điểm A như hình vẽ. Tìm giá trị lớn nhất của hệ số ma sát k giữa vành và mặt bàn để vành tròn bắt đầu lăn không trượt.

ĐS: $k_{\min} = \frac{F_{ms}}{N} = \frac{m(M+m)}{2M^2+4Mm+m^2} = \frac{4}{31}$



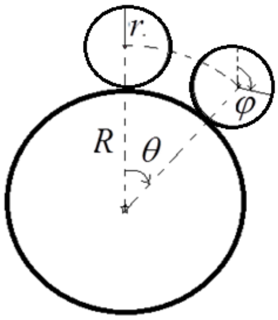
Hình 2.36P

**Bài 19.** Một quả cầu đồng chất có khối lượng m và bán kính r lăn không trượt trên bề mặt bên ngoài của một quả cầu lớn hơn đứng yên có bán kính R như hình vẽ. Gọi θ là góc cực của quả cầu nhỏ đối với hệ trục tọa độ với gốc được đặt ở tâm của quả cầu lớn, với trục z là trục thẳng đứng. Quả cầu nhỏ bắt đầu lăn không trượt từ vị trí đỉnh của quả cầu lớn (θ = 0).

a. Tính vận tốc ở tâm của quả cầu nhỏ như là hàm của θ.

b. Tính góc mà tại đó quả cầu nhỏ rời khỏi quả cầu lớn.

c. Nếu bây giờ cho phép trượt với một hệ số ma sát là μ ( coi hệ số ma sát nghỉ cực đại bằng ma sát trượt) thì ở điểm nào quả cầu nhỏ sẽ bắt đầu trượt?

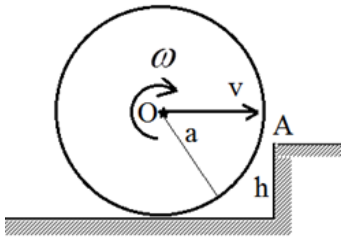


Hình 2.37P

ĐS: a. $v = \sqrt{\frac{10(R+r)(1-\cos\theta)g}{7}}$ ;b. $\theta_1 = \arccos\frac{10}{17}$;

c. $\theta_2 = \arccos\left(\dfrac{179\mu^2 + \sqrt{756\mu^2 + 4}}{289\mu^2 + 4}\right)$

**Bài 20.** Một quả cầu rắn đồng chất có bán kính a lăn với vận tốc v trên một bề mặt bằng phẳng và va chạm không đàn hồi với một bậc có độ cao h < a (Hình 2.38P). Hãy tìm vận tốc nhỏ nhất theo h và a để quả bóng có thể lăn qua bậc đó. Biết rằng không xảy ra sự trượt tại điểm va chạm; thời gian va chạm rất ngắn và momen quán tính của một khối cầu rắn đối với trục đi qua tâm của nó là $\frac{2}{5}Ma^2$.



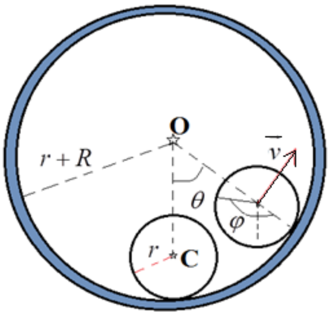
Hình 2.38P

ĐS: $v \geq \dfrac{a\sqrt{70gh}}{7a - 5h}$

**Bài 21.** Một quả bóng hình cầu tâm C bán kính r chuyển động trong mặt phẳng thẳn đứng, ở mặt trong của một trụ rỗng. Trụ rỗng có trục đối xứng O nằm ngang, bán kính mặt trong R+r như hình vẽ. Xem xét hai trường hợp: (i) lăn không trượt và (ii) trượt không ma sát mà không lăn.

a. Trong mỗi trường hợp thì vận tốc tối thiểu $v_1$ của quả cầu tại đáy vòng tròn phải bằng bao nhiêu để nó không rơi tại vị trí đỉnh của vòng tròn?

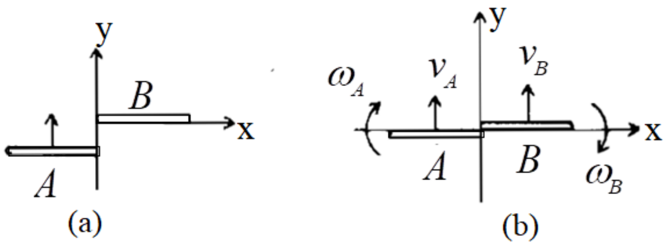
b. Trong trường hợp trượt và với $v_1$ nhỏ hơn 10% thì tại vị trí nào trên vòng tròn bắt đầu xảy ra sự rơi?



Hình 2.39P

ĐS: a. $v_1 = \sqrt{5gR}$; b. $\theta_r = 133{,}1^0$

**Bài 22.** Hai chiếc que đồng chất A và B dài 1m, có khối lượng tương ứng là A nặng 1kg và B nặng 2kg. Chúng được đặt song song với nhau trên một mặt phẳng nằm ngang không ma sát (x, y). Vị trí ban đầu của que B là y = 0, x = 0 tới x = 1m. Que A đang chuyển động với vận tốc $v_0$ =10m/s theo chiều dương của trục y và nó mở rộng từ x = (-1 + e)m tới x = em, (e ≪ 1m) như mô tả trên hình 2.40P. Que A đạt tới y = 0 tại thời điểm t = 0 và va chạm đàn hồi với B. Bỏ qua khả năng có những va chạm sau đó, hãy tìm chuyển động tiếp theo của các que A và B. Kiểm tra tính ngang bằng của năng lượng trước và sau va chạm.

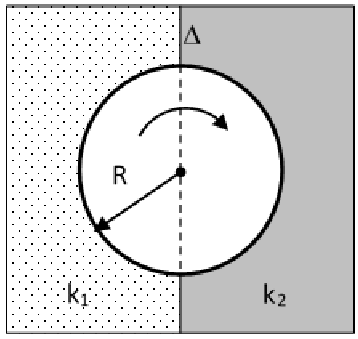


Hình 2.40P

ĐS: $v_A = 10 - \frac{X}{m_A} = \frac{20}{3} m/s$ ; $v_B = \frac{X}{m_B} = \frac{5}{3} m/s$;

$\omega_A = \frac{6X}{m_A} = 20 rad/s$ ; $\omega_B = \frac{6X}{m_B} = 10 rad/s$

**Bài 23.** Một đĩa phẳng đồng chất, khối lượng M và bán kính R đang quay với vận tốc góc $\omega_o$ quanh trục thẳng đứng đi qua tâm thì rơi nhẹ lên mặt sàn nằm ngang. Lực cản của sàn tác dụng lên phần đĩa có diện tích $\Delta S$ có vận tốc $\vec{v}$ được xác định bởi công thức $\vec{F_C} = -k.\Delta S\vec{v}$ với k là hệ số cản. Mặt sàn gồm hai phần được ngăn cách nhau bởi đường thẳng $\Delta$, có hệ số cản tương ứng là $k_1$ và $k_2$ ( $k_2 > k_1$). Tại thời điểm ban đầu tâm đĩa nằm trên đường thẳng $\Delta$.




1. Xác định độ lớn gia tốc góc và gia tốc khối tâm của đĩa tại thời điểm ban đầu.
2. Tìm khoảng cách mà tâm đĩa bị dịch đi từ thời điểm ban đầu cho đến khi dừng lại.

ĐS: 1. $a_G = \frac{2(k_2 - k_1)\omega_0 R^3}{3M}$, $\gamma = -\frac{\pi(k_1 + k_2)\omega_0 R^2}{2M}$;

2. $L = \dfrac{M\omega_0}{\frac{3\pi}{8}\frac{(k_1 + k_2)^2}{k_1 - k_2} - \frac{4}{3}(k_1 - k_2)}$

**Bài 24.** Một cái đĩa đồng chất có bán kính R quay quanh tâm với tốc độ góc $\omega_o$. Người ta đặt nhẹ nhàng đĩa trên một mặt phẳng ngang. Hệ số ma sát giữa đĩa và mặt phẳng là $\mu$. Hỏi sau thời gian bao lâu thì đĩa dừng lại. Cho gia tốc trọng trường là g.

ĐS: $t = \dfrac{3\omega_o R}{4\mu g}$

**Bài 25.**

Một lăng trục lục giác đều cạnh a, khối lượng m phân bố đều. Mômen quán tính của lăng trụ là $I = \dfrac{5}{12}ma^2$ các mặt của lăng trụ hơi lõm để khi lăn trên mặt phẳng nghiêng lăng trụ tiếp xúc mặt phẳng nghiêng bằng các cạnh coi là vật rắn. Gọi $\omega_1, \omega_2$ lần lượt là vận tốc góc của lăng trụ ngay trước và sau va chạm. Tìm tỉ số $\dfrac{\omega_2}{\alpha_1}$ biết ma sát đủ lớn để khối trụ lăn nhưng không nảy lên.

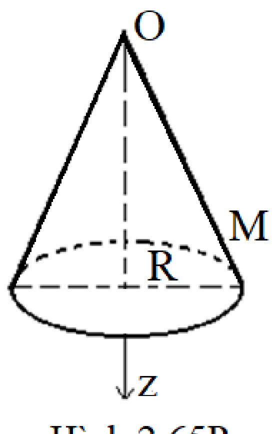
ĐS: 11/17

**Bài 26.** Một vật A hình nón đặc**,** đồng chất, khối lượng m phân bố đều theo thể tích, bán kính đáy là R và chiều cao h. Vật được đặt trên mặt phẳng nghiêng có góc nghiêng $\beta = 30^0$ so với phương ngang. Ban đầu vật đứng yên, đường sinh mặt nón nằm dọc trên đường dốc chính mặt phẳng nghiêng sao cho đáy ở trên, đỉnh ở dưới.

1. Tính mômen quán tính của vật A đối với trục đối xứng của nó và xác định vị trí khối tâm G.

2. Xác định mô men quán tính của hình nón đối với trục T đi qua đỉnh O và vuông góc với trục đối xứng Oz của nó.

3. Đặt nón lên mặt phẳng nghiêng, buông không vận tốc đầu. Nón lăn không trượt. Tìm vận tốc cực đại khối tâm G của nón.



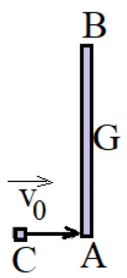
Hình 2.65P

ĐS:1. $I_z = 0{,}3mR^2$; $z_G = \dfrac{3}{4}h$

2. $I_T = \dfrac{3m}{5}\left[h^2 + \dfrac{R^2}{4}\right]$;3. $v_G = \dfrac{4}{3}\sqrt{\dfrac{5gh}{3+\dfrac{R^2}{2h^2}}\dfrac{h}{\sqrt{R^2+h^2}}}$

# II.2. VA CHẠM VẬT RẮN

**Bài 1.** Một thanh cứng AB đồng chất tiết diện đều, có khối lượng m, chiều dài $l$ nằm yên trên mặt phẳng ngang nhẵn. Một vật nhỏ C coi là chất điểm cũng có khối lượng m, trượt trên mặt phẳng ngang vận tốc $\vec{v_0}$, có phương vuông góc với thanh và va chạm vào đầu A của thanh (Hình 2.51P). Gọi G là khối tâm của thanh. Hãy tìm vận tốc khối tâm G của thanh và tốc độ góc của thanh sau khi vừa va chạm. Xét bài toán trong hai trường hợp:



Hình 2.51P

a. Va chạm hoàn toàn đàn hồi.

b. Va chạm mềm, sau va chạm vật C dính chặt vào đầu A.

ĐS: a. $v_G = \frac{2v_0}{5}$; $\omega = \frac{12v_0}{5l}$; b. $v_{G'} = \frac{v_0}{2}$; $\omega = \frac{6}{5}\frac{v_0}{l}$

**Bài 2.** Một thanh đồng nhất AB khối lượng m, chiều dài l có thể quay tự do quanh trục nằm ngang đi qua đầu A, ban đầu thanh đang đứng yên ở vị trí thẳng đứng. Một viên đạn khối lượng m bay với vận tốc $v_0$ theo phương ngang đến va chạm mềm rồi dính vào đầu B của thanh. Tìm vận tốc của viên đạn ngay sau va chạm.

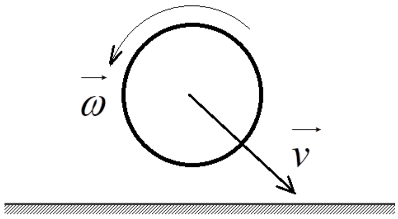
ĐS: $\frac{3v_0}{4}$

**Bài 3.** Trên mặt bàn nằm ngang nhẵn có một thanh đồng nhất AB có khối lượng m và chiều dài 2l. Một viên bi khối lượng m chuyển động với vận tốc $v_0$ theo phương vuông góc với thanh đến va chạm tuyệt đối đàn hồi vào đầu B của thanh. Tìm vận tốc của đầu A ngay sau va chạm.

ĐS: $\frac{2v_0}{5}$

**Bài 4.** Một quả bóng siêu đàn hồi đặc, khối lượng m, bán kính R. Bóng bay tới va chạm vào mặt sàn ngang với vận tốc v và vận tốc góc $\omega$. Chỗ mà quả bóng tiếp xúc với sàn có ma sát giữ cho điểm tiếp xúc không trượt. Do có ma sát nên va chạm là không đàn hồi tuy nhiên có thể bỏ qua sự biến thiên của thành phần pháp tuyến $v_y$ và độ biến thiên động năng bóng.

a. Xác định thành phần tiếp tuyến $v_x$' của v' và $\omega$' của quả bóng sau va chạm theo $v_x$ và $\omega$ trước va chạm? Biện luận?



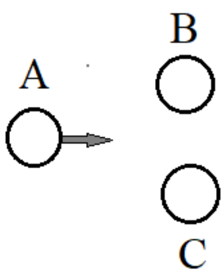
b.Tính vận tốc điểm tiếp xúc A của bóng trước và sau va chạm? Giải thích kết quả?

c.Xét $\omega = 0$ và $v_x > 0$.

ĐS: a. $\omega' = -\frac{1}{7}\left(3\omega + 10\frac{v_x}{R}\right)$; $v_x' = \frac{3v_x - 4\omega R}{7}$; b. $\overrightarrow{v_{A'}} = -\overrightarrow{v_A}$

**Bài 5.**

Ba vòng đệm nhỏ giống nhau A, B, C, nằm yên trên một mặt phẳng ngang, nhẵn, người ta truyền cho vòng A vận tốc $\vec{v}$ và nó đến và chạm đồng thời với cả hai vòng B, C (hình vẽ). Khoảng cách giữ hai tâm của các vòng B, C trước khi va chạm bằng N lần đuờng kính mỗi vòng. Giả sử các va chạm là hoàn toàn đàn hồi. Xác định vận tốc của vòng A sau va chạm. Tính giá trị của N để vòng A: bật ngược lại, dừng lại, tiếp tục tiến lên?




ĐS: * Vận tốc A sau va chạm là v' = $\frac{N^2 - 2}{6 - N^2}v$

* Để A bật ngược trở lại thì $0 < N < \sqrt{2}$.

* Để A đứng yên thì $N = \sqrt{2}$.

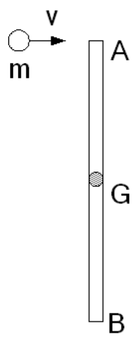
* Để A tiếp tục tiến lên phía trước $2 \geq N > \sqrt{2}$.

**Bài 6.** Hai quả cầu giống nhau rất nhẵn va chạm đàn hồi vào nhau với vận tốc song song có độ lớn v và 2v. Đường thẳng đi qua tâm của quả cầu này và có phương của vận tốc là tiếp tuyến của quả cầu kia. Tính góc mà sau va chạm vận tốc của mỗi quả cầu với hướng ban đầu của nó.

ĐS: * Góc giữa $\vec{v_A}$'và $\vec{v_A}$ là : $180^0 - 79^0 = 101^0$. Góc giữa $\vec{v_B}$' và $\vec{v_B}$ là: $180^0 - 46^0 = 134^0$

**Bài 7.** Một thanh AB đồng chất tiết diện đều, khối lượng m chiều dài l, đặt trên mặt phẳng ngang và dễ dàng quay quanh trục quay cố định đi qua trọng tâm G và vuông góc mặt phẳng nằm ngang.

Ban đầu nằm yên. Một hòn bi khối lượng m chuyển động với vận tốc $v_0$ (theo phương nằm ngang và có hướng vuông góc với thanh AB) đập vào đầu A của thanh. Va chạm là hoàn toàn đàn hồi. Biết hệ số ma sát giữa thanh và mặt phẳng nằm ngang là μ. Tìm góc quay cực đại của thanh sau va chạm.

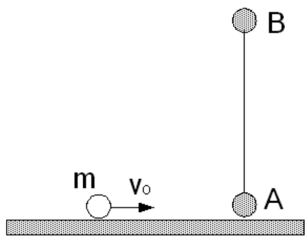



ĐS: $\phi = \frac{3}{2}\frac{v_0^2}{\mu g l}$

**Bài 8.**

Một thanh cứng AB khối lượng không đáng kể chiều dài l, ở hai đầu có gắn 2 viên bi giống nhau, mỗi viên có khối lượng m. Ban đầu thanh được giữ đứng yên ở trạng thái thẳng đứng, viên bi 2 ở trên , bi 1 ở dưới tiếp xúc với mặt phẳng ngang trơn.

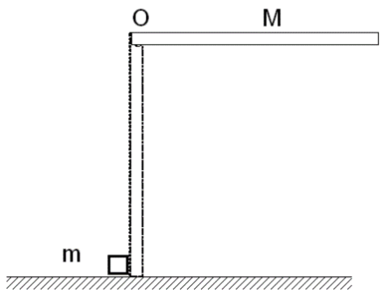
Một viên bi thứ 3 có khối lượng m chuyển động với vận tốc $v_0$ hướng vuông góc với AB đến va chạm xuyên tâm và dính vào bi 1. Hãy tìm điều kiện $v_0$ để hệ 2 quả cầu 1 và 3 không rời mặt phẳng ngang? Vận tốc của quả cầu 2 bằng bao nhiêu khi sắp chạm vào mặt phẳng ngang.




ĐS: $v_0^2 \leq 12gl$ ; : $v_2 = \sqrt{\frac{7}{9}v_0^2 + 2gl}$ ; $\beta = \angle(\vec{v_2}, \vec{v_0})$ thì $tg\beta = \frac{3}{v_0}\sqrt{\frac{2v_0^2}{3} + 2gl}$

**Bài 9.** Một thanh khối lượng M chiều dài l có thể quay tự do quanh trục cố định O nằm ngang đi qua một đầu thanh. Từ khi vị trí nằm ngang đầu thanh kia được thả ra. Khi rơi đến vị trí thẳng đứng thì nó va chạm hoàn toàn đàn hồi với một vật nhỏ khối lượng m nằm trên mặt bàn. Bỏ qua sức cản của không khí và ma sát ở trục quay của thanh.

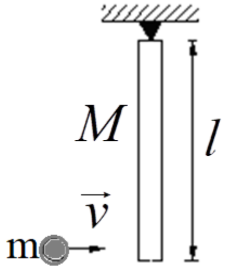
a. xác định vận tốc của vật m ngay sau va chạm.



b. Xác định khoảng cách s mà vật m đi được sau va chạm nếu hệ số ma sát giữa vật và mặt bàn là μ không phụ thuộc vào vận tốc của vật. Biết rằng ngay sau va chạm thanh đứng lại và vật chuyển động tịnh tiến trên bàn.

ĐS: a. $v=\dfrac{2M}{M+3m}\sqrt{3gl}$ ; b. $s=\dfrac{6M^2l}{\mu(M+3m)^2}$

**Bài 10.** Một chất điểm chuyển động với vận tốc v tới va chạm vào đầu A của thanh kim loại M, chiều dài l được treo vào O ở một đầu của thanh. Coi va chạm đàn hồi. Vận tốc của chất điểm sau va chạm v' của chuyển động cùng phương chiều với $\vec{v}$ và liên kết là hoàn hảo.




a)v' = ? và $\omega_t$ =?

b) Góc lệch cực đại $\theta_m$ của thanh khỏi phương thẳng đứng

c) Sự mất mát động năng tương đối Q của chuyển động theo tỉ số n = $\frac{m}{M}$, khi nào thì $Q_{max}$?

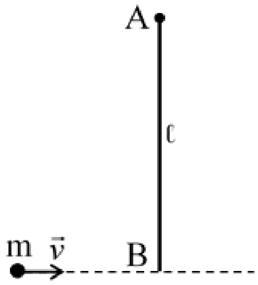
ĐS: a. v' = $\dfrac{3m-M}{3m+M}.v$; $\omega$ = $\dfrac{6m}{3m+M}.\dfrac{v}{l}$; b. $\sin\theta_m$ = $\dfrac{v}{3+\dfrac{M}{m}}.\sqrt{\dfrac{6}{gl}}$ ; c. $Q=\dfrac{12}{9n+\dfrac{1}{n}+6}$

$, n=3\to Q_{\max}=1$

**Bài 11.**

Một thanh cứng AB đồng chất dài ℓ, khối lượng M có thể quay không ma sát trong mặt phẳng thẳng đứng quanh một trục nằm ngang cố định xuyên qua A (hình 1), ban đầu thanh ở vị trí cân bằng. Một chất điểm khối lượng m chuyển động thẳng đều theo phương nằm ngang với vận tốc v tới va chạm vào đầu B của thanh, gắn chặt vào đó và chuyển động cùng với thanh. Cho gia tốc rơi tự do là g, bỏ qua lực cản không khí.

**1.** Biết sau va chạm thanh dao động với biên độ góc nhỏ. Chứng tỏ rằng dao động của thanh là điều hòa. Tìm góc lệch cực đại của thanh so với phương thẳng đứng.



Hình 1

**2.** Tìm giá trị tối thiểu vận tốc v của chất điểm m trước khi va chạm để thanh có thể quay tròn quanh A.

ĐS: 1. $\theta_{max} = \frac{3mv_0}{(M+3m)\omega l}$. với $\omega = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{g(M+2m)}{l(M+3m)}}$.

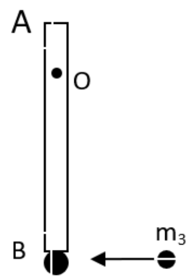
**Bài 12.** Thanh ABC khối lượng M, chiều dài 2L, gấp lại tại trung điểm B đặt trên mặt phẳng nằm ngang. Vật m chuyển động với vận tốc $\vec{v_0}$ trên mặt phẳng nằm ngang theo phương vuông góc với BC, va chạm với thanh tại C. Coi va chạm là đàn hồi, bỏ qua ma sát. Tìm điều kiện của m để sau va chạm vật bị bật ngược trở lại.

ĐS: $\frac{M}{m} < \frac{5}{29}$.

**Bài 13.** Một vành đai có bán kính R lăn không trượt với vận tốc $v_0$ trên mặt phẳng ngang rồi va cạnh hoàn toàn không đàn hồi vào một cái bậc có chiều cao h (h<R). Vành đai sẽ có vận tốc là bao nhiêu khi nó trèo lên bậc? Với vận tốc tối thiểu là bao nhiêu vành đai có thể vượt qua bậc? Giả sử không có sự trượt trong suốt quá trình.

ĐS: $v_0 \geq \frac{8}{3}\frac{gh}{R(1-\sin\alpha)}$

**Bài 14.** Một cái thước đồng chất AB khối lượng $m_1 = 200$g, chiều dài l = 80cm, có trục quay cố định nằm ngang đi qua điểm O trên thanh và cách đầu A đoạn OA = 20cm. Đầu B của thước có gắn chặt một quả cầu nhỏ C khối lượng $m_2 = 100$g. Hệ đang cân bằng thì người ta bắn theo phương ngang vào quả cầu C một vật nhỏ khối lượng $m_3 = 100$g với vận tốc v. Biết va chạm là tuyệt đối đàn hồi và sau va chạm thước đạt góc lệch lớn nhất so với phương thẳng đứng là $60^0$.

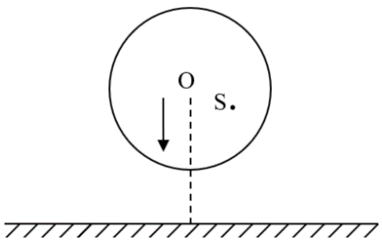



Cho g = 9,8m/s$^2$. Bỏ qua lực cản của không khí và ma sát ở trục quay.

1. Tính vận tốc góc của thước ngay sau va chạm?
2. Tính vận tốc v của $m_3$ ngay trước va chạm?

**ĐS: a.** $\omega$ = 4,23 (rad/s); 2. v=3,16 (m/s).

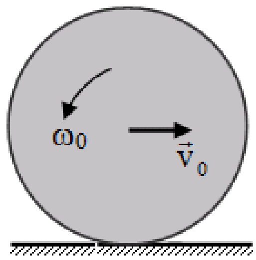
**Bài 15.** Một quả cầu không đồng chất khối lượng m, chuyển động với vận tốc $\vec{v_0}$, đập vuông góc lên một chướng ngại vật nặng và rắn nằm ngang. Tâm khối S của quả cầu cách tâm hình học O một khoảng cách D.




Vị trí của quả cầu và chướng ngại ngay trước khi va chạm được biết như trên hình vẽ. Trước khi va chạm quả cầu không quay. Giả thiết rằng do hậu quả của va chạm xảy ra rất nhanh, tổng năng lượng của quả cầu không bị thay đổi. Tính vận tốc khối tâm của quả cầu. Sau va chạm, nếu biết giữa quả cầu và vật chướng ngại không xuất hiện ma sát, có thể bỏ qua biến dạng của chúng. Mô men quán tính của quả cầu tính qua tâm khối S bằng I và công nhận I > $mv^2$.

ĐS: $v_S = -v_0 . \dfrac{1 - \dfrac{mD^2}{I}}{1 + \dfrac{mD^2}{I}}$

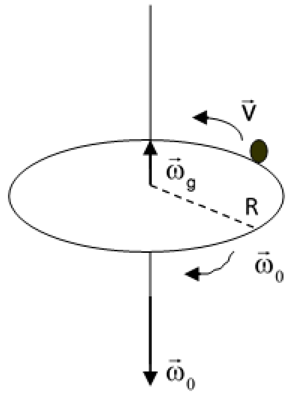
**Bài 16.** Một khối trụ đồng chất khối lượng 20kg bán kính 20cm có thể chuyển động trên một mặt phẳng ngang. Hệ số ma sát trượt giữa khối trụ và mặt phẳng ngang $\mu=0,1$. Lấy $g=10m/s^2$. Ở thời điểm ban đầu truyền cho khối trụ một chuyển động quay xung quanh khối tâm với tốc độ góc $\omega_0$ = 65rad/s và vận tốc của khối tâm $v_0$ = 5m/s. Bỏ qua ma sát lăn, tính công của lực ma sát.




ĐS: A = - 1080 J.

**Bài 17.** Một quả cầu đặc, đồng chất có khối lượng $m = 2\ kg$, bán kính $R$ lăn không trượt theo một mặt phẳng nằm ngang với vận tốc $v_1 = 10\ m/s$ đến va chạm vào một bức tường thẳng đứng và bật trở ra vẫn lăn không trượt với vận tốc $v_2 = 0,8v_1$. Tính nhiệt lượng tỏa ra trong quá trình va chạm.

ĐS: $Q = 50,4J$




**Bài 18.** Một con gián khối lượng m bò ngược chiều kim đồng hồ theo mép một cái khay nhiều ô ( một cái đĩa tròn lắp trên một trục thẳng đứng ), bán kính R, mômen quán tính I, với ổ trục không ma sát. Vận tốc của con gián ( đối với trái đất ) là v, còn khay quay theo chiều kim đồng hồ với vận tốc góc $\omega_0$. Con gián tìm được mẩu vụn bánh mì ở mép khay và dừng lại.

a) Vận tốc góc của khay sau khi con gián dừng lại, là bao nhiêu?

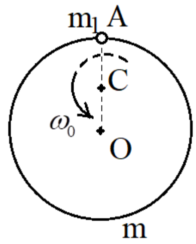
b) Cơ năng của hệ có bảo toàn không?

ĐS: a. $\omega = \dfrac{mRv - I\omega_0}{I + mR^2}$; b. $K_2 < K_1$: Động năng( cơ năng ) của hệ bị giảm

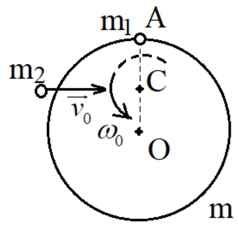
**Bài 19.**

**1.** Một khung mảnh, hình tròn tâm O, bán kính R, cứng, đồng chất tiết diện đều, khối lượng m. Trên khung tại điểm A người ta gắn chặt một viên bi thứ nhất rất nhỏ coi như chất điểm, có khối lượng $m_1$=m. Gọi C là khối tâm của hệ khung và bi . Hệ đặt nằm trên mặt sàn phẳng nằm ngang nhẵn. Sau đó người ta xoay hệ quay trên mặt phẳng ngang quanh khối tâm C với vận tốc góc $\omega_0$ (Hình 1a), với C đứng yên.

Tính momen động lượng đối trục thẳng đứng qua khối tâm C và động năng của hệ theo m, R và $\omega_0$ .



Hình 1a



Hình 1b

**2.** Khi hệ khung- bi đang xoay (nhìn từ trên xuống khung quay theo chiều ngược kim đồng hồ) thì người ta dùng viên nhỏ bi thứ 2, khối lượng $m_2$ =m, cho trượt trên mặt phẳng ngang với vận tốc $\vec{v_0}$ bắn vào khung, véc tơ $\vec{v_0}$ hướng vào C. Thời điểm bi thứ 2 va chạm vào khung là lúc OA vuông góc với $\vec{v_0}$ (Hình 1b).

Biết rằng: va chạm hoàn toàn đàn hồi; thời gian va chạm rất ngắn, bỏ qua mọi ma sát; khi va chạm các vật chỉ chuyển động trên mặt sàn nằm ngang; bi thứ nhất vẫn dính chặt trên khung; trong đó $\omega_0 R = v_0$

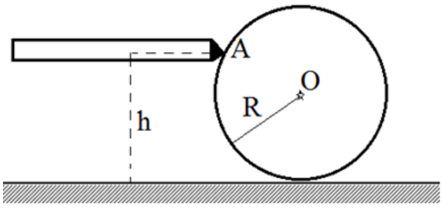
Sau va chạm, gọi: $v_1$ tốc độ của bi thứ nhất, $v_2$ là tốc độ bi thứ 2, gọi $v_C$ là tốc độ khối tâm của hệ khung và bi thứ nhất, $\omega$ là tốc độ góc khung. Coi m. R, $v_0$ là những giá trị đã biết.

Hãy tìm $v_1$, $v_2$, $v_C$ và $\omega$.

ĐS:

1. $L = \dfrac{3}{2} mR^2\omega_0$; 2. $v_1 = \dfrac{\sqrt{93}}{26} v_0$, $v_2 = \dfrac{\sqrt{61}}{13} v_0$, $v_C = \dfrac{2\sqrt{3}}{13} v_0$, $\omega = \dfrac{15}{13}\dfrac{v_0}{R}$

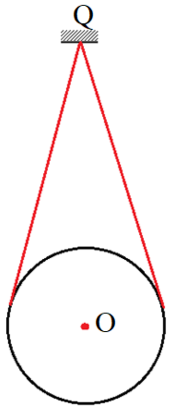
**Bài 20.** Một quả bóng bi-a có bán kính R và khối lượng M bị chọc bởi một chiếc gậy bi-a ở độ cao h so với bàn bi-a (Hình 2.43P). Cho momen quán tính của quả bóng bi-a là $\frac{2}{5}MR^2$. Hãy tìm độ cao h để ở đó quả bóng bị chọc lăn trên bàn mà không trượt. Bỏ qua ma sát giữa bi-a và sàn.




Hình 2.43P

ĐS: $h = \frac{7}{5}R$

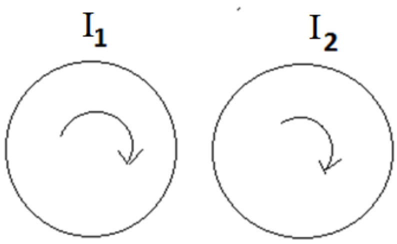
**Bài 21**. Một con lắc thử đạn có dạng trụ khối lượng M, bán kính R treo trên 2 sợi chỉ không dãn (hình vẽ). Viên đạn có khối lượng m chuyển động với vận tốc v dọc theo trục khối trụ và viên đạn quay quanh trục của nó vận tốc $\omega$, xuyên vào và mắc ở tâm của nó. Khoảng cách từ điểm treo đến tâm con lắc là L. Con lắc có thể di chuyển không ma sát về mọi hướng. Viên đạn có thể coi như một khối trụ đồng chất bán kính r (r << R). Xác định chiều chuyển động của con lắc so với quỹ đạo viên đạn ngay sau khi viên đạn mắc vào nó. Giả thiết rằng trong thời gian viên đạn xuyên vào con lắc, con lắc không kịp lệch một khoảng đáng kể.




Hình 2.44P

**ĐS:** $\alpha = \arctan\left(\dfrac{\omega r^2}{2v_0L\left[\dfrac{m}{M+m}(\dfrac{r^2}{2L^2}) + \dfrac{M}{M+m}(\dfrac{R^2}{2L^2}) + 1\right]}\right)$

**Bài 22**. Truyền cho hai đĩa, có cùng bán kính, cùng tốc độ góc $\omega_0$ và sau đó cho chúng tiếp xúc nhau và sau một khoảng thời gian nào đó hệ chuyển sang một trạng thái mới được thành lập. Các trục của đĩa không chuyển động, bỏ qua ma sát ở các trục. Mô men quán tính của các đĩa đối với trục quay của chúng là $I_1$ và $I_2$. Hãy tìm:



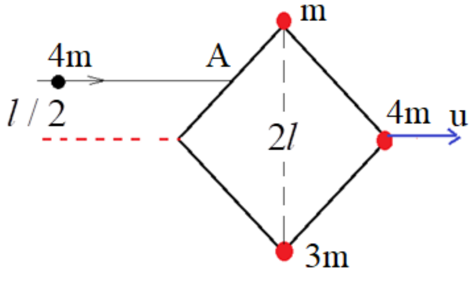

Hình 2.45P

a. Độ biến thiên momen xung lượng của hệ.

b. Độ giảm cơ năng hệ.

ĐS: a. $|\Delta L| = L_{O1} - L_{O1}' = ... = \frac{4I_1I_1}{I_1 + I_2}\omega_0$ ;b. $|\Delta K| = \frac{2I_1I_2}{I_1 + I_2}\omega_0^2$

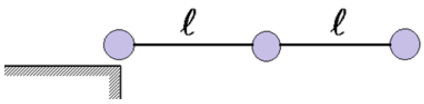
**Bài 23.** Một khung cứng hình vuông, chuyển động tịnh tiến không quay với vận tốc u trên mặt phẳng nhẵn nằm ngang. Trên ba đỉnh của hình người ta gắn ba quả cầu khối lượng m, 4m và 3m (Hình 2.46P). Chiều dài đường chéo hình vuông là $2l$. Một quả cầu bằng đất nặn khối lượng 4m đuổi theo hệ. Va chạm không đàn hồi xảy ra tại điểm A, cách một khoảng $\frac{l}{2}$ so với đường chéo mà hệ chuyển động dọc theo nó trước khi va chạm. Biết rằng sau va chạm tâm quán tính của cả hệ (hệ 4 vật) có vốc tốc 2u. Bỏ qua ma sát và khối lượng khung, xác định vận tốc góc Ω của hệ.



Hình 2.46P

ĐS: $\omega = \frac{18}{29}\frac{u}{l}$

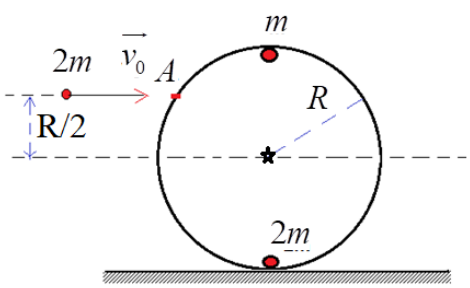
**Bài 24.** Một hệ nằm ngang, gồm ba quả cầu nhỏ giống nhau, được nối với nhau bằng một que cứng không trọng lượng, độ dài $l$. Hệ rơi với vận tốc không đổi $v_0$ và quả cầu bên trái va vào gờ của một bề mặt nằm ngang (hình vẽ). Xác định vận tốc góc $\omega$ của hệ ngay sau khi va chạm, coi va chạm là đàn hồi tuyệt đối.



Hình 2.47P

ĐS: $\frac{6v_0}{5l}$

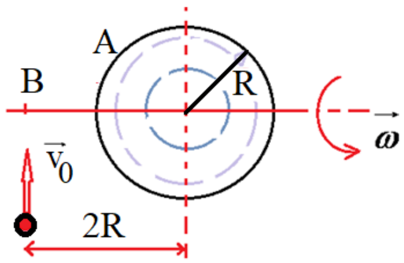
**Bài 25**. Một hệ gồm hai quả cầu nặng, gắn chặt vào một vòng dây đang chuyển động tịnh tiến không quay trên một bề mặt nhẵn nằm ngang (Hình 2.48P). Khối lượng của các quả cầu là m và 2m, bán kính vòng dây R. Một quả cầu bằng đất nặn khối lượng 2m có vận tốc $v_0$ chuyển động ngược chiều về phía hệ, $v_0$ song song với vectơ vận tốc của hệ. Quả cầu đất va vào vòng dây và dính luôn vào vòng tại điểm A ở khoảng cách R/2 tính từ đường kính mà hệ chuyển động dọc theo nó trước khi va chạm. Bỏ qua khối lượng của vòng dây và ma sát với bề mặt nằm ngang, tìm vận tốc góc Ω của hệ sau va chạm và vận tốc u của vòng nếu biết rằng ban đầu tâm quán tính của hệ vòng dây chuyển động về phía ngược lại với cùng vận tốc u.



Hình 2.48P

ĐS: $\Omega = \frac{25v_0}{88R}$; $u = \frac{v_0}{4}$

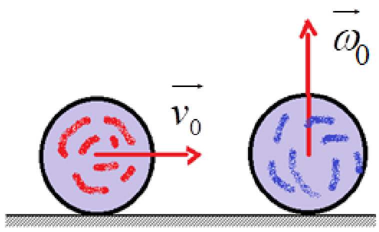
**Bài 26.** Một quả cầu đồng chất khối lượng phân bố đều, bán kính R nối liền với một nan hoa AB khối lượng không đáng kể. AB nằm trên đường kéo dài của đường kính quả cầu. Quả cầu và nan hoa được cho quay quanh trục đi qua tâm của chúng đến vận tốc góc $\omega$ (trục quay qua nan hoa). Một chất điểm vận tốc $\vec{v_0}$ bay cách tâm cầu một khoảng 2R đến va chạm đàn hồi tuyệt đối vào nan hoa. Vận tốc $\vec{v_0}$ vuông góc với nan hoa và nằm trong mặt phẳng đi qua tâm quả cầu (trong mặt phẳng hình vẽ**)**. Sau va chạm chất điểm dừng lại, góc lệch lớn nhất của nan hoa so với mặt phẳng trên (mặt phẳng chứa AB và $\vec{v_0}$ ) là $\varphi$. Xác định $\varphi$, nếu $\frac{R\omega}{v_0} = 50$. Bỏ qua ma sát. *Coi quả cầu chuyển động xảy ra trong không gian tự do.*



Hình 2.49P

*ĐS:* $\varphi = \frac{1}{55} rad = 1^0$

**Bài 27.** Một quả cầu đặc đồng chất nhẵn, bán kính r, nằm trên mặt bàn nằm ngang quay nhanh quanh đường kính thẳng đứng của nó với vận tốc góc $\omega_0$ (Hình 2.50P). Một quả cầu thứ hai giống hệt có vận tốc $v_0$ tới va chạm vào nó. Va chạm là đàn hồi tuyệt đối và không có sự truyền chuyển động quay. Quả cầu thứ nhất bắt đầu chuyển động trượt trên mặt bàn. Hệ số ma sát trượt không phụ thuộc vào vận tốc. Tìm góc $\alpha$ giữa trục quay tức thời của quả cầu thứ nhất với đường thẳng đứng tại thời điểm t bất kỳ, khi quả cầu vẫn chưa ngừng trượt. Tìm độ lớn của góc khi quả cầu này chuyển động chỉ có lăn thuần túy. Bỏ qua ma sát lăn và ma sát quay. Xét trường hợp khi $v_0$ và $\omega_0$ liên hệ với nhau bằng hệ thức $v_0 = \omega_0 r$.

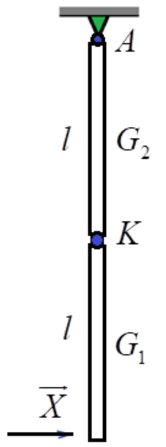


Hình 2.50P

Đáp số: $\tan\alpha = \frac{5}{2}\frac{kgt}{r\omega_0}; \tan\alpha_1 = \frac{5}{7}\frac{v_0}{r\omega_0}$

**Bài 28.**

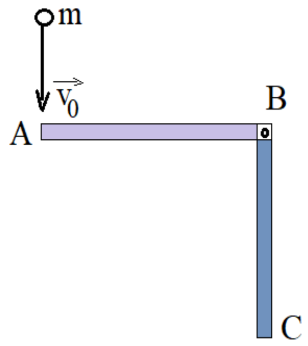
Hai thanh giống nhau nối với nhau bằng một khớp và treo trên trục nằm ngang đi qua đầu của thanh phía trên. Tác dụng vào đầu dưới của thanh phía dưới một xung lực theo phương ngang (Hình 2.52P). Tìm tỷ số giữa vận tốc góc của các thanh sau khi tác dụng lực.



Hình 2.52P

ĐS $\frac{\omega_1}{\omega_2} = -5$

**Bài 29.** Một thước gấp gồm hai đoạn giống nhau AB và CB đồng chất tiết diện đều, mỗi đoạn có chiều dài $l$, khối lượng $\frac{m}{2}$, nối với nhau qua chốt B và đặt chúng trên mặt phẳng ngang nhẵn như hình 2.53P. Ban đầu hai đoạn của thước vuông góc nhau và đang đứng yêu. Sau đó một hòn bi khối lượng $m$ chuyển động trên mặt phẳng ngang với vận tốc $\overrightarrow{v_0}$ theo phương vuông góc thanh AB và đập vào đầu A. Biết va chạm hoàn toàn đàn hồi. Tính vận tốc bi, vận tốc khối tâm thước và tốc độ góc của thước quanh khối tâm sau khi vừa va chạm trong hai trường hợp:



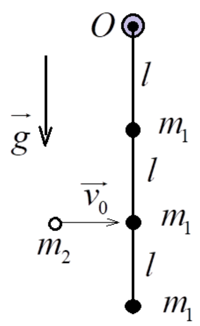
Hình 2.53P

a. Chốt B gắn cố định hai đoạn thước.

b. Chốt B tự do.

ĐS: a. Bi $v_1 = \frac{27}{47}v_0$; thước $\omega = \frac{72}{40}\frac{v_0}{l}$;; $v_2 = \frac{20}{47}v_0$; b. Bi $v_1 = \frac{27}{37}v_0$; thước $v_2 = \frac{28}{37}v_0$; $\omega_2 = \frac{72}{37}\frac{v_0}{l}$; $v_3 = -\frac{8}{37}v_0$

**Bài 30.** Ba quả cầu nhỏ, khối lượng mỗi quả đều là $m_1$ gắn trên một thanh cứng nhẹ, cách nhau một khoảng bằng $l$. Thanh có thể quay quanh chốt nằm ngang tại điểm O không ma sát. Khi các quả cầu đang đứng yên tại vị trí cân bằng theo phương thẳng đứng thì có một viên đạn khối lượng $m_2$, bay ngang trúng quả cầu giữa như hình vẽ với vận tốc $v_0$. Ngay sau vừa va chạm viên đạn quay ngược lại với vận tốc $\vec{v}$ ($\vec{v}$ ngược hướng với $\vec{v}_0$). Cho gia tốc trọng trường là g. Hỏi sau va chạm thanh cứng quay được một góc bao nhiêu quanh điểm O?



Hình 2.54P

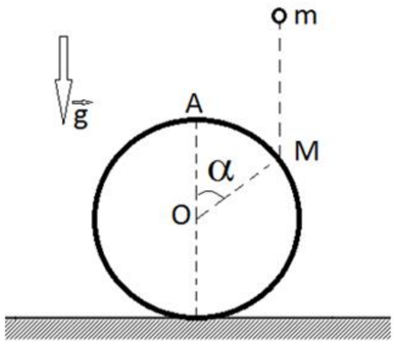
ĐS:

-Điều kiện để thanh cứng quay tròn quanh O, khi đó $\alpha = \pi$ và $\omega'^2 > 0$.

Khi đó $\rightarrow \frac{m_2(v_0 - v)}{7m_1} > \sqrt{\frac{12gl}{7}}$

-Nếu $\frac{m_2(v_0-v)}{7m_1} \le \sqrt{\frac{12gl}{7}}$ thì góc quay cực đại quanh O là $\alpha_{max}$ được xác định bằng biểu thức $\cos\alpha_{max} = 1 - \frac{7}{6gl}\left[\frac{m_2(v_0-v)}{7m_1}\right]^2$

**Bài 31.** Một quả cầu rỗng, cứng, có khối lượng m phân bố đều trên mặt cầu, tâm O bán kính R có đỉnh A, được đặt trên sàn nằm ngang nhẵn. Một hòn bi nhỏ coi là chất điểm có khối lượng m được thả rơi tự do từ độ cao so với sàn h=(2R+$\frac{R\sqrt{2}}{2}$), rơi chạm vào điểm M trên mặt cầu (Hình 2.55P). Coi mặt sàn rất cứng, *quả cầu rỗng không nảy lên khi va chạm*; *thời gian va chạm rất ngắn*. Biết góc $\angle MOA = \alpha = 45^0$.



Hình 2.55P

Hãy tìm vận tốc tịnh tiến khối tâm mỗi vật và tốc độ góc quả cầu rỗng trong hai trường hợp:

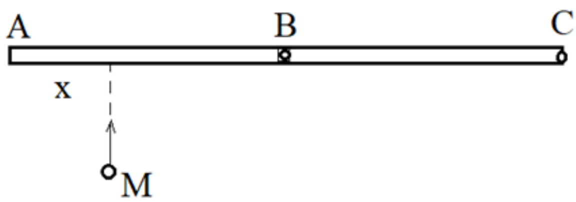
a. Va chạm hoàn toàn đàn hồi.

b. Va chạm mềm *(sau va chạm quả cầu nhỏ dính trên mặt cầu).*

*ĐS:* a. Bi $v_1 = \frac{\sqrt{5}}{3}v_0$; quả cầu $v_2 = \frac{2}{3}v_0$, $\omega = 0$; b. Bi $v_1 = \frac{3}{17}\sqrt{10gR}$, quả cầu $\omega = \frac{6\sqrt{2}}{17}\frac{v_0}{R}$, $v_2 = \frac{3}{17}\sqrt{2gR}$

**Bài 32.** Hai thanh nhỏ giống nhau, cùng khối lượng m và chiều dài $l$ được nối với nhau bằng chốt tự do B, chốt C cố định như hình vẽ. Hai thanh có thể quay không ma sát quanh các chốt. Ban đầu hệ hai thanh thẳng hàng và cùng nằm trên một mặt phẳng ngang nhẵn.

Một vật nhỏ khối lượng M=3m, chuyển động theo phương vuông góc hai thanh, đập vào thanh AB ở vị trí cách đầu A một đoạn x.



Hình 2.56P

a. Tìm x để sau va chạm hai thanh chuyển động cùng tốc độ góc.

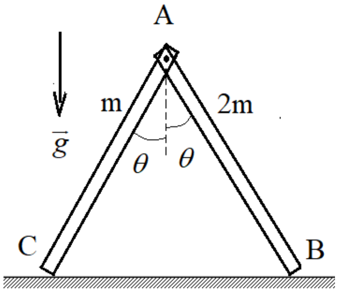
b. Khi đó vận tốc vật và vận tốc góc các thanh là bao nhiêu?

ĐS: a. $x = \frac{3l}{5}$

*Lưu ý: Cùng tốc độ góc khác với cùng vận tốc góc*

**Bài 33.** Hai thanh nhỏ AB và AC đồngchất,tiết diện đều, có cùng chiều dài $l$, khối lượng phân bố đều dọc thanh. Hai thanh liên kết với nhau bởi chốt liên kết tự do A ở một đầu mỗi thanh. Chốt liên kết A có dạng là một cái trục rất nhỏ luôn vuông góc với mặt phẳng ABC. Thanh thứ nhất (AB) có khối lượng 2m; thanh thứ hai (AC) có khối lượng m và chốt liên kết có khối lượng không đáng kể. Coi hai thanh dễ dàng quay quanh chốt liên kết và bỏ qua mọi ma sát.

1. Khi hai thanh đặt trên cùng mặt phẳng thẳng đứng, đầu A ở trên, B và C tựa trên mặt phẳng ngang. Ban đầu AB và AC có phương gần như thẳng đứng. Sau đó buông hệ tự do, đầu B bắt đầu trượt sang phải và C trượt sang trái trên sàn và ba điểm A, B, C luôn nằm trên một mặt phẳng thẳng đứng. Gọi $\theta$ là góc tạo bởi phương mỗi thanh cứng và phương thẳng đứng (Hình 1a).



Hình 1a

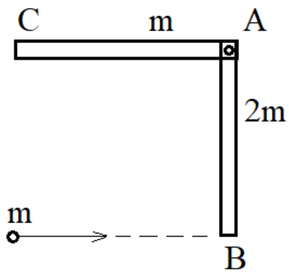
Đặt $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$.

a. Hãy xác định $\omega$ theo $\theta$, gia tốc rơi tự do g và $l$.

b. Hãy tìm $\omega$ khi chốt liên kết tự do A sắp chạm đất

2. Khi hệ hai thanh đặt nằm yên trên cùng mặt phẳng ngang và vuông góc nhau. Ta dùng viên bi dẻo có khối lượng m, chuyển động trên mặt phẳng ngang theo phương song song CA, có vận tốc $\vec{v_0}$, đến va chạm mềm vào đầu B của thanh thứ nhất (Hình 1b). Sau va chạm, bi dính chặt vào đầu B của thanh thứ nhất và cùng chuyển động.

Tìm vận tốc góc của thanh thứ nhất và vận tốc thanh thứ 2 sau khi vừa va chạm.



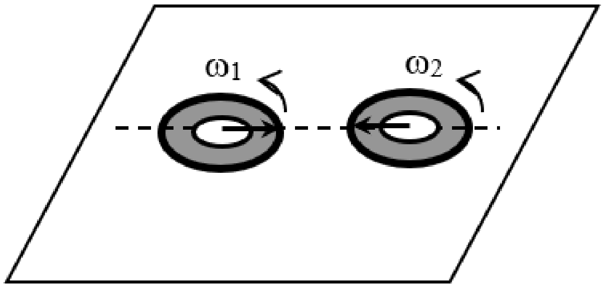
Hình 1b

ĐS: 1a. $\omega = 6\sqrt{\dfrac{g}{l}\dfrac{(1-\cos\theta)}{(\sin^2\theta + 11)}}$; 1b. $\omega = \sqrt{\dfrac{3g}{l}}$;

2. $\omega_1 = \dfrac{3}{4}\dfrac{v_0}{l}$; $v_2 = -\dfrac{v_0}{8}$

**Bài 34.** Hai chiếc đĩa tròn đồng chất giống nhau chuyển động trên mặt phẳng nằm ngang rất nhẵn, theo đường thẳng nối tâm các đĩa, đến gặp nhau. Các đĩa này quay cùng chiều quanh trục thẳng đứng qua tâm của chúng với các vận tốc góc tương ứng là $\omega_1$ và $\omega_2$.

Tác dụng của lực ma sát giữa các đĩa và mặt bàn không đáng kể, còn tác dụng của lực ma sát xuất hiện ở điểm tiếp xúc hai đĩa với nhau thì đáng kể. Biết các đĩa có khối lượng m, có dạng trụ tròn thẳng đứng, hai đáy phẳng, bán kính R; phần tâm đĩa có khoét một lỗ thủng hình trụ tròn đồng tâm với vành đĩa, bán kính R/2.




1. Tính mômen quán tính đối với trục quay nói trên của mỗi đĩa.

2. Hãy xác định vận tốc góc của các đĩa sau va chạm, biết rằng vào thời điểm va chạm kết thúc, tốc độ của các điểm va chạm trên các đĩa theo phương vuông góc với đường nối tâm của chúng là bằng nhau.

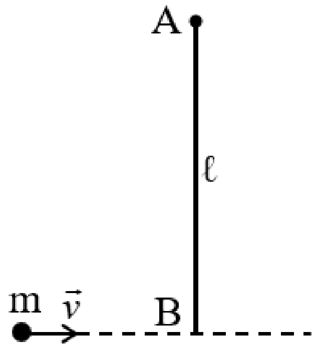
3. Xác định thành phần vận tốc tương đối của hai điểm tiếp xúc nhau của hai đĩa theo phương vuông góc với đường nối tâm của chúng ngay sau lúc va chạm.

ĐS:1. $\frac{5mR^2}{8}$; 2. $\omega_1' = \frac{9\omega_1 - 4\omega_2}{13}$; $\omega_2' = \frac{9\omega_2 - 4\omega_1}{13}$; $v_{1\perp} = \frac{5(\omega_1 + \omega_2)R}{26}$;

3. $v_\perp = \frac{(\omega_1 - \omega_2)R}{2}$

# CHƯƠNG III.
# DAO ĐỘNG VẬT RẮN

**Bài 1.** Một thanh cứng AB đồng chất dài ℓ, khối lượng M có thể quay không ma sát trong mặt phẳng thẳng đứng quanh một trục nằm ngang cố định xuyên qua A (hình 1), ban đầu thanh ở vị trí cân bằng. Một chất điểm khối lượng m chuyển động thẳng đều theo phương nằm ngang với vận tốc v tới va chạm vào đầu B của thanh, gắn chặt vào đó và chuyển động cùng với thanh. Cho gia tốc rơi tự do là g, bỏ qua lực cản không khí.

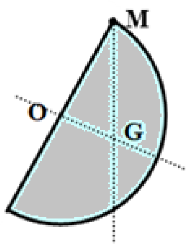



1. Biết sau va chạm thanh dao động với biên độ góc nhỏ. Chứng tỏ rằng dao động của thanh là điều hòa. Tìm góc lệch cực đại của thanh so với phương thẳng đứng.

2. Tìm giá trị tối thiểu vận tốc v của chất điểm m trước khi va chạm để thanh có thể quay tròn quanh A.

ĐS: 1. $\theta_{\max} = \dfrac{3mv_0}{(M+3m)\omega l}$ với $\omega = \sqrt{\dfrac{3}{2}\dfrac{g(M+2m)}{l(M+3m)}}$ ; 2. $v_0 = \dfrac{1}{m}\sqrt{\dfrac{2(M+2m)(M+3m)gl}{3}}$

**Bài 2.** Một vật rắn có dạng tấm phẳng, mỏng, đồng chất hình bán nguyệt tâm O, khối lượng m, bán kính R. Tấm phẳng có thể chuyển động quay trong mặt phẳng thẳng đứng, không ma sát quanh trục cố định vuông góc với mặt phẳng của tấm qua M nằm trên đường kính và cách O một khoảng bằng R. *( hình vẽ).*



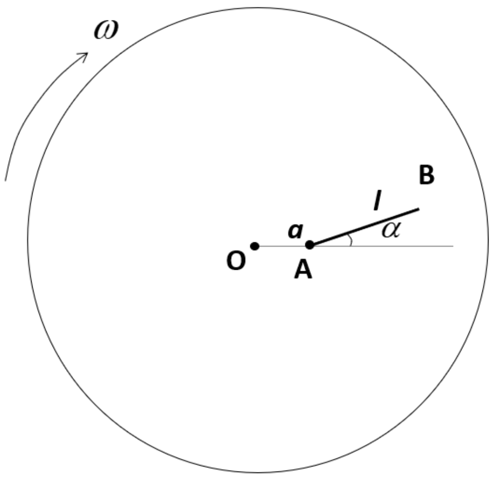

1. Xác định vị trí khối tâm G của tấm phẳng.

2. Xác định chu kì dao động nhỏ của tấm phẳng quanh trục quay.

3. Bây giờ ta xét trường hợp trục quay cố định vuông góc với mặt phẳng của tấm qua tâm O. Trên đường OG qua khối tâm, người ta gắn thêm một vật nhỏ khối lượng $m_1 = m/2$ vào tấm, cách O một đoạn x. Cho hệ dao động nhỏ quanh trục qua O. Tìm x để chu kỳ dao động của hệ là nhỏ nhất, tìm chu kì đó.

ĐS: 1. $z_G = \frac{4R}{3\pi}$; 2. $T = 2\pi\sqrt{\frac{9\pi R}{2g\sqrt{9\pi^2+16}}}$; 3. $T_O = T_{O\min} = 2\pi\sqrt{\frac{\left(-16+2\sqrt{9\pi^2+64}\right)R}{3\pi g}}$ khi $x = \frac{-8+\sqrt{9\pi^2+64}}{3\pi}R$

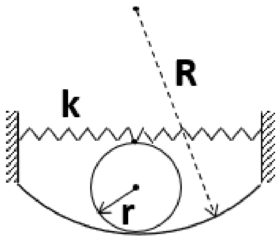
**Bài 3.** Một cái đĩa nhẵn nằm ngang có thể quay quanh một trục thẳng đứng đi qua tâm O của đĩa. Trên đĩa có một thanh AB dài *l* có thể quay quanh một trục thẳng đứng qua A gắn vào đĩa và cách trục O của đĩa một khoảng a. Vị trí ban đầu của thanh AB hợp với đường thẳng OA một góc $\alpha$ nhỏ như hình 1. Quay đĩa quanh O với vận tốc góc $\omega$ không đổi.




Chứng minh rằng, đối với đĩa thanh AB dao động điều hoà và tìm tần số góc $\omega_0$ của dao động của thanh.

ĐS: $\omega_0 = \omega\sqrt{\frac{3a}{2l}}$

**Bài 4.** Một hình trụ đặc đồng chất, có trọng lượng P, bán kính r đặt trong một mặt lõm bán kính cong R như hình vẽ. Ở điểm trên hình trụ người ta gắn hai lò xo có độ cứng như nhau.Tìm chu kỳ dao động nhỏ của hình tru với giả thiết hình trụ lăn không trượt . Xét trường hợp: không có lò xo, khi mặt lõm là mặt phẳng.

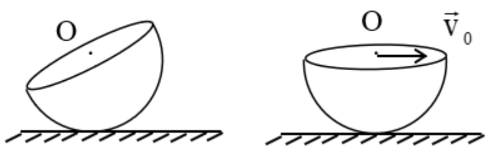



ĐS: T = $\frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2}{3}\frac{g}{(R-r)} + \frac{16k}{m}}}$

**Bài 5.**

Cho một bán cầu đặc đồng chất, khối lượng m, bán kính R, tâm O.

1. Chứng minh rằng khối tâm G của bán cầu cách tâm O của nó một đoạn là d = 3R/8.




Hình 1 Hình 2

2. Đặt bán cầu trên mặt phẳng nằm ngang. Đẩy bán cầu sao cho trục đối xứng của nó nghiêng một góc nhỏ so với phương thẳng đứng rồi buông nhẹ cho dao động (Hình 1). Cho rằng bán cầu không trượt trên mặt phẳng này và ma sát lăn không đáng kể. Hãy tìm chu kì dao động của bán cầu.

3. Giả thiết bán cầu đang nằm cân bằng trên một mặt phẳng nằm ngang khác mà các ma sát giữa bán cầu và mặt phẳng đều bằng không (Hình 2). Tác dụng lên bán cầu trong khoảng thời gian rất ngắn một xung của lực $\vec{X}$ nào đó theo phương nằm ngang, hướng đi qua tâm O của bán cầu sao cho tâm O của nó có vận tốc $\vec{v}_0$.

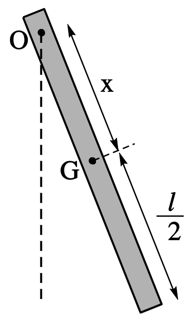
a)Tính năng lượng đã truyền cho bán cầu.

b) Mô tả định tính chuyển động tiếp theo của bán cầu. Coi $v_0$ có giá trị nhỏ.

Cho biết gia tốc trọng trường là g; mô men quán tính của quả cầu đặc đồng chất khối lượng M, bán kính R đối với trục quay đi qua tâm của nó là $I = \frac{2}{5}MR^2$.

ĐS : 2. $T = 2\pi\sqrt{\frac{26R}{15g}}$ ; 3a. $E \approx 0,32\frac{mv_0^2}{2}$; 3b. Khối tâm bán cầu chuyển động với thành phần vận tốc theo phương ngang bằng $v_G$ không đổi. Bán cầu dao động quanh khối tâm.

**Bài 6.** Một cái thước có chiều dài $l$, dao động nhỏ quanh một trục đi qua O, cách trọng tâm G một đoạn x.



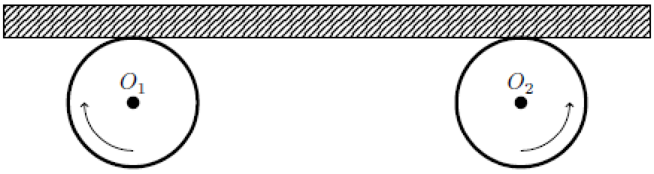

a) Tìm chu kì dao động của thước theo $l$ và x.

b) Với giá trị nào của $\frac{x}{l}$ thì chu kì là cực tiểu ?

c) Nếu $l$ = 1,00 m và g = 9,8 m/s$^2$ thì chu kì có giá trị cực tiểu bằng bao nhiêu ?

ĐS: a. $T = 2\pi\sqrt{\frac{l^2+12x^2}{12gx}}$ ; b. $\frac{x}{l} = \frac{1}{\sqrt{12}}$ ; c. $T_{min} \approx 1,53$ s.

**Bài 7 .** Một thanh đồng chất, tiết diện đều, được đặt nằm ngang trên hai xilanh giống nhau đang quay với vận tốc góc bằng nhau nhưng ngược chiều. Khoảng cách giữa hai trục quay $O_1$, $O_2$ là *l*. Hệ số ma sát trượt giữa thanh và xilanh là μ. Lúc đầu thanh ở VTCB.



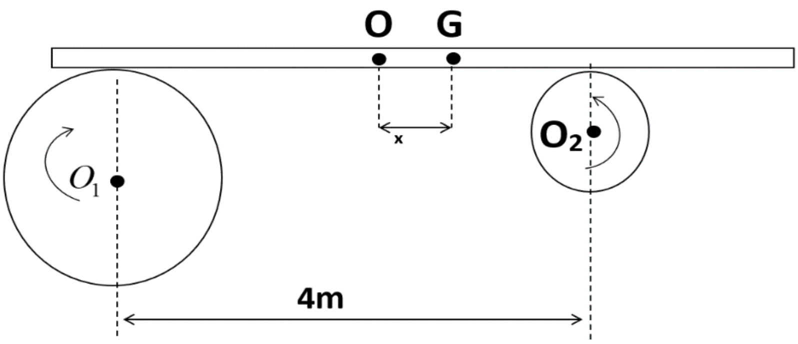

a) Chứng tỏ rằng nếu thanh bị lệch một chút khỏi VTCB theo phương ngang thì nó sẽ dao động điều hoà.

b) Tìm tần số góc của dao động. Áp dụng bằng số *l* = 30cm, μ = 0,2.

c) Kết quả sẽ như thế nào nếu đổi chiều quay của cả hai xilanh và nếu độ lệch của thanh như cũ ?

ĐS: b. $\omega = \sqrt{\frac{2\mu g}{l}}$.; c. $a = \frac{2\mu g}{l}x$

**Bài 8.** Hai hình trụ bán kính  khác nhau quay theo chiều ngược nhau quanh các trục song song nằm ngang với các tốc độ góc $\omega_1 = \omega_2 = \omega = 2rad/s.$ (hình vẽ 4). Khoảng cách giữa các  trục theo phương ngang là 4m. Ở thời điểm t=0, người ta đặt một tấm ván đồng chất có tiết diện đều lên các hình trụ, vuông góc với các trục quay sao cho nó ở vị trí nằm ngang, đồng thời tiếp xúc bề mặt với hai trụ, còn điểm giữa của nó thì nằm trên đường thẳng đứng đi qua trục của hình trụ nhỏ có bán kính: r = 0,25m. Hệ số ma sát giữa ván và các trụ là $\mu = 0,05; g = 10m/s^2$.




1. Xác định thời điểm mà vận tốc dài của một điểm trên vành trụ nhỏ bằng vận tốc của ván.

2. Tìm sự  phụ thuộc của độ dịch chuyển nằm ngang của tấm ván theo thời gian.

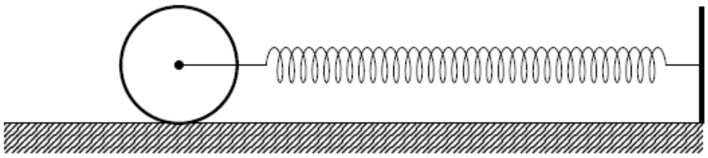
ĐS: 1. $t_1 = \pi/3(s)$

2. + với $0 \le t \le \frac{\pi}{3}(s)$ tọa độ khối tâm của ván là: $x = 2.\cos(0{,}5t)(cm)$

+ với $\frac{\pi}{3}(s) \le t \le 4{,}5(s)$: tọa độ khối tâm của ván: $x = \sqrt{3} - 0{,}5.(t - \frac{\pi}{3})(cm)$

+với $t \ge 4{,}5(s)$: tọa độ khối tâm của ván: $x = 1.\cos(0{,}5t\text{-}0{,}68)(m)$

**Bài 9.** Một xy lanh đặc khối lượng m được gắn vào đầu tự do của một lò xo có độ cứng k. Xy lanh có thể lăn không trượt trên một mặt phẳng nằm ngang (Hình 1).

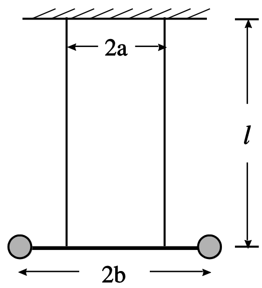


Hình 1

Kéo xy lanh cho lò xo dãn ra một đoạn nhỏ rồi buông nhẹ. Chứng minh rằng xy lanh dao động điều hòa và tìm chu kỳ dao động của nó.

ĐS: $T = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{2k}}$

**Bài 10.** Một quả tạ đôi gồm hai quả cầu, khối lượng m, được gắn vào hai đầu một thanh nhẹ, dài 2b. Thanh được treo ở vị trí nằm ngang trên hai dây không dãn, mỗi dây dài *l*. Khoảng cách giữa hai dây là 2a. Hãy tìm chu kì dao động của tạ đôi.



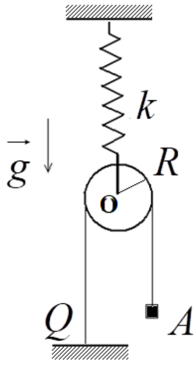

ĐS: $T = \frac{2\pi b}{a}\sqrt{\frac{l}{g}}$

**Bài 11.** Một vật hình trụ đặc, tiết diện thẳng hình tròn tâm C, bán kính R, khối lượng m = 12 kg phân bố đều có thể chuyển động lăn không trượt trên mặt phẳng ngang. Tại đỉnh Q của hình trụ người ta gắn hai lò xo nhẹ có cùng độ cứng k = 36 $\frac{N}{m}$, đầu còn lại của mỗi lò xò giữ cố định, sao cho hai lò xo nằm ngang và khi cân bằng lò xo không biến dạng (**Error! Reference source not found.**). Lăn vật đến vị trí tâm C cách vị trí cân bằng một đoạn 2 cm << R, rồi thả không vận tốc.

Tính tốc độ cực đại của các điểm C và Q khi vật chuyển động và thời gian từ lúc bắt đầu chuyển động đến khi hai điểm trên đạt tốc độ cực đại lần đầu.

Đáp số: $v_C = 8\ \frac{cm}{s}$, $v_Q = 16\frac{cm}{s}$, t = 0,39 s.

**Bài 12**. Cho hệ cơ học gồm: một lò xo nhẹ, độ cứng k; một ròng rọc khối lượng M, bán kính R, mômen quán tính đối với trục quay O là I; vật nặng A khối lượng m; dây nối nhẹ không dãn, vắt qua ròng rọc, một đầu dây nối với điểm cố định Q, một đầu còn lại nối với vật nặng khối lượng A. Ròng rọc O và vật nặng A được treo nhờ lò xo và dây trên phương thẳng đứng.



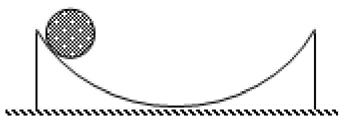
Hình 2.66P

a) Tìm độ biến dạng lò xo khi hệ cân bằng.

b) Từ vị trí cân bằng, kéo vật A thẳng đứng xuống dưới một đoạn nhỏ rồi buông tay. Chứng minh hệ dao động điều hòa. Tìm biểu thức tính chu kì. Bỏ qua ma sát lăn, coi ròng rọc chỉ lăn không trượt trên dây.

ĐS: a. $\Delta l_0 = \frac{2mg + Mg}{k}$ ; b. $T = 2\pi\sqrt{\frac{M + 4m + \frac{I}{R^2}}{k}}$

**Bài 13.***(Trích đề QG 2005)* Cho cơ hệ như hình vẽ, quả cầu đặc có khối lượng m, bán kính r lăn không trượt trong máng có bán kính R. Máng đứng yên trên mặt phẳng nằm ngang.



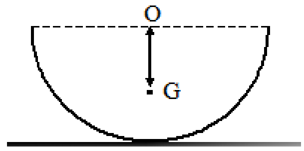
Tìm chu kì dao động nhỏ của quả cầu. Cho biết momen quán tính của quả cầu đặc $I_G = \frac{2}{5}mr^2$

ĐS: $T = 2\pi\sqrt{\frac{7(R - r)}{5g}}$

**Bài 14.** Một thanh đồng chất AB = 2l có momen quán tính $I = \frac{m\ell^2}{3}$ đối với trục vuông góc với thanh và đi qua trọng tâm G của thanh. Thanh trượt không ma sát bên trong một nửa vòng tròn bán kính $R = \frac{2\ell}{\sqrt{3}}$. Chứng minh thanh dao động điều hòa và tìm chu kì dao động.

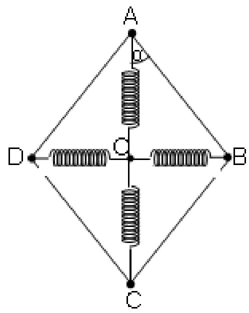
ĐS : $T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$

**Bài 15.** Một nửa vòng xuyến mảnh bán kính R, khối lượng m thực hiện các dao động ( lăn không trượt) trên mặt nhám nằm ngang. Ở vị trí cân bằng khối tâm G của nửa vòng xuyến ở dưới tâm O đoạn d = 2R/π. Tìm chu kì dao động $T_1$ ứng với các biên độ nhỏ?




ĐS: $T = 2\pi\sqrt{\frac{R(\pi-2)}{g}}$

**Bài 16.** Bốn thanh giống nhau có cùng chiều dài b, khối lượng m và momen quán tính đối với trục vông góc và đi qua điểm giữa là: $I = \frac{1}{12}mb^2$, được liên kết bởi 4 lò xo giống nhau có độ cứng k, khối lượng không đáng kể(hình vẽ) tạo thành hình thoi ABCD có tâm là O. Bỏ ma ma sát giữa các khớp nối.



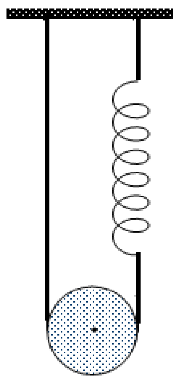

Cơ hệ nằm trên một mặt sàn nằm ngang không ma sát, độ biến dạng của lò xo được xác định thông qua góc α tạo bởi giữa đường chéo AC và cạnh AB. Các lò xo có chiều dài tự nhiên khi α = π/4. Đầu tiên hệ được giữ cho biến dạng góc $\alpha_o$ rồi buông ra không vận tốc đầu.

1. Xác định phương trình vi phân của góc α.

2. Trong trường hợp mà $\alpha_o$ gần π/4. Tìm chu kì dao động nhỏ của hệ và xác định biểu thức của α theo thời gian.

ĐS: $1.\ \alpha'' = \frac{3k}{2m}\sin(\alpha - \frac{\pi}{4})$; $2.\ T = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{3k}}$

**Bài 17.** Một sợi dây đỡ một đĩa có bán kính R và khối lượng m. Một đầu dây buộc vào giá đỡ, còn đầu kia nối với một lò xo nhẹ có độ cứng k. Kích thích cho đĩa dao động trong mặt phẳng của đĩa. Chứng minh đĩa dao động điều hòa và tìm chu kì dao động của đĩa. Biết đĩa không trượt trên dây.



**ĐS:** $T = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{8k}}$

**Bài 18.** Một dây dẫn mảnh đồng chất, khối lượng m được gập lại thành vòng dây hình chữ D có bán kính R.

1. Xác định vị trí khối tâm của vòng dây.

2. Tìm chu kì dao động nhỏ của vòng dây:

a) đối với trục nằm ngang đi qua $O_1$ là trung điểm của đường kính AB và vuông góc với mặt phẳng vòng dây.

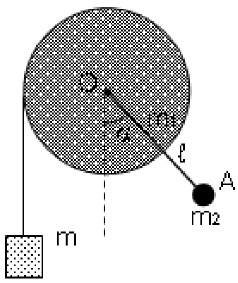
b) đối với trục nằm ngang đi qua $O_2$ là điểm chính giữa của AB và vuông góc với mặt phẳng vòng dây.

ĐS:1. $OG = \frac{2R}{2+\pi}$; 2a. $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{(2+3\pi)R}{6g}}$ ; 2b. $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{2(3\pi-2)}{3\pi}\frac{R}{g}}$

**Bài 19.** Trên một hình trụ cố định bán kính R đặt 1 tấm ván có khối lượng không đáng kể chiều dài 2L theo phương vuông góc với trục hình trụ, mỗi đầu của nó gắn một vật nặng m. Tính chu kì dao động nhỏ của hệ.

ĐS: $T=\frac{2\pi L}{\sqrt{Rg}}$

**Bài 20.** Dao động của cái ròng rọc. Một cái tời tạo từ một vật hình trụ bán kính R, momen quán tính $I_o$ với tay quay có cánh tay dài l và khối lượng $m_1$ còn tay cầm có khối lượng $m_2$. Người ta treo vào tời vật có khối lượng m. Tĩnh chu kì dao động nhỏ của hệ. Bỏ qua khối lượng dây treo và lực cản của chuyển động.

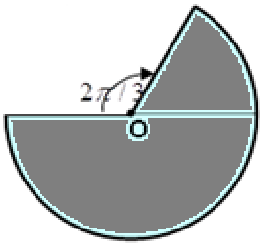


ĐS: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{2(I_o + \dfrac{m_1\ell^2}{3} + m_2\ell^2 + mR^2)}{(m_1 + 2m_2)g\ell\cos\alpha_o}}$

**Bài 21.** Một tấm phẳng, hình tròn, đồng chất, bán kính R, bị khoét một phần có góc ở tâm $2\pi/3$, khối lượng là m, chuyển động quay không ma sát quanh trục cố định đi qua O, vuông góc với mặt phẳng của tấm (hình vẽ).

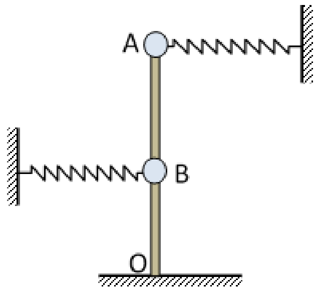
1- Tìm vị trí khối tâm G của tấm.

2- Trên đường thẳng đi qua O và G, người ta gắn thêm một vật nhỏ khối lượng $m_1 = m/2$, cách O một đoạn x. Cho hệ dao động nhỏ quanh trục qua O. Tìm x để chu kỳ dao động của hệ là nhỏ nhất.



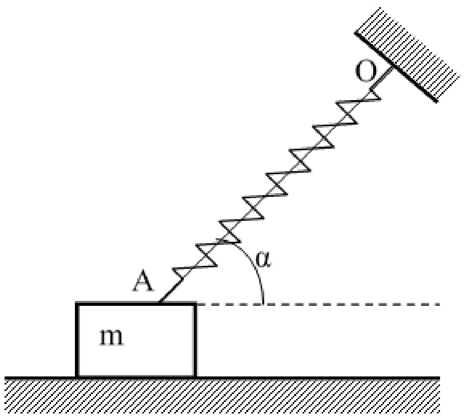

ĐS: 1. $x_G = \dfrac{R\sqrt{3}}{2\pi}$; 2. $x = \dfrac{\sqrt{3+\pi^2} - \sqrt{3}}{\pi}R$

**Bài 22.** Hai hòn bi có cùng khối lượng m. Một hòn được gắn vào A của thanh OA thẳng đứng có chiều dài l; một hòn được gắn tại B (OB = L/3). Hai lò xo có cùng độ cứng k được móc vào thanh AB như hình vẽ. Khối lượng của thanh và các lo xo là không đáng kể, ban đầu thanh thẳng đứng và các lò xo không bị biến dạng. Chứng minh rằng với dao động nhỏ thì hệ dao động điều hòa. Tính chu kì dao động.



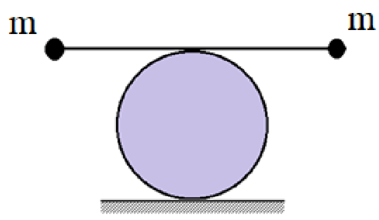

**ĐS:** $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{5ml}{5kl - 6mg}}$

**Bài 23. ( Chọn đội thi APHO 2003)** Một vật khối lượng m đặt trên mặt bàn nằm ngang nhẵn. Vật được nối với lò xo có độ cứng k và có trục nghiêng so với mặt phẳng ngang một góc α như hình vẽ. Cho chiều dài tự nhiên của lò xo là $l_0$ và ở vị ban đầu lo xo không bị biến dạng. Kéo vật theo mặt phẳng ngang một đoạn nhỏ. Tìm chu kỳ dao động của vật theo phương ngang. Bỏ qua mọi ma sát.




**ĐS:** $T = 2\pi\dfrac{1}{\cos\alpha}\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

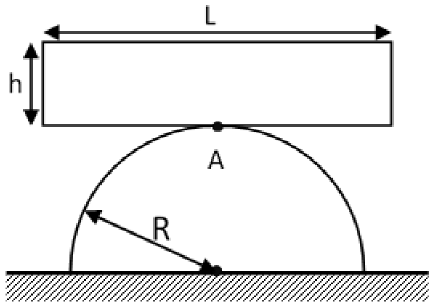
**Bài 24.** Trên một khối trụ nhám đứng yên, bán kính R (Hình 2.68P) có đặt (vuông góc với đường sinh của khối trụ) một thanh không trọng lượng dài $2l$ với hai quả cầu nhỏ khối lượng m ở hai đầu. Tìm chu kỳ dao động nhỏ của thanh.



Hình 2.68P

ĐS: $T = \dfrac{2\pi l}{\sqrt{gR}}$

**Bài 25.** Một tấm ván dài L, dày h, khối lượng m được đặt cân bằng trên nữa bán cầu bán kính R gắn cố định trên mặt phẳng nằm ngang như hình vẽ. Cho ma sát giữa nghỉ giữa tấm ván và bán cầu là rất lớn và bỏ qua ma sát lăn. Tìm chu kỳ dao động của tấm ván khi lệch ra vị trí cân bằng một góc nhỏ.

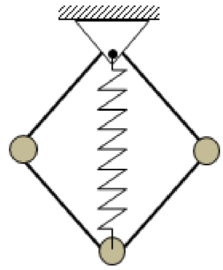



ĐS: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\left(L^2 + 4h^2\right)}{6g\left(2R - h\right)}}$

**Bài 26.** Một cơ hệ gồm ba quả cầu nhỏ giống nhau, mỗi quả cầu có khối lượng m, được nối với nhau bằng các thanh cứng nhẹ, dài l nhờ các bản lề. Tại vị trí cân bằng, cơ hệ có dạng một hình vuông nhờ được giữ bởi loxo thẳng đứng, có độ cứng k như hình vẽ.

a. Tìm chiều dài tự nhiên của lo xo.

b. Xác định chu kỳ dao động nhỏ của hệ theo phương thẳng đứng.

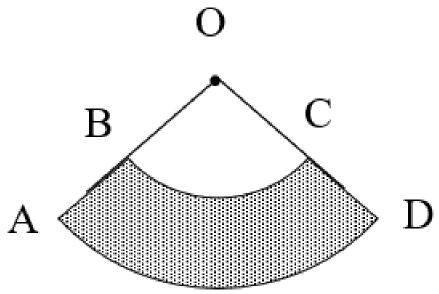


ĐS: a. $l_0 = l\sqrt{2} - \Delta l = l\sqrt{2} - \dfrac{2mg}{k}$; b. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{2m}{k}}$

**Bài 27.** Một vật đồng chất, có dạng là một bản mỏng phẳng ABCD (hình vẽ) với BC và AD là hai cung tròn đồng tâm bán kính $R_1$ = 2,2m và $R_2$ = 2,8m, OBA và OCD là hai bán kính, góc ở tâm $\angle BOC = \alpha_0 = 100^0$. Vật được treo lên điểm cố định O bằng hai dây treo nhẹ, không giãn OB và OC (OB = OC = $R_1$). Cho vật dao động trong mặt phẳng thẳng đứng OAD. Bỏ qua ma sát. Hãy tính:

a. Mô men quán tính của vật đối với trục quay đi qua O và vuông góc với mặt phẳng OAD.

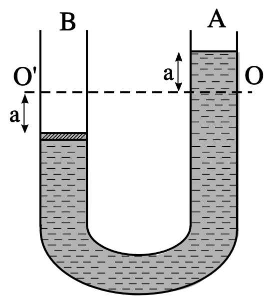
b. Chu kì dao động nhỏ của vật.




ĐS: a. $I = \frac{1}{4}\rho\alpha_0(R_2^4 - R_1^4)$

b. $T = \pi\sqrt{\frac{3\alpha_0(R_2^4 - R_1^4)}{2g(R_2^3 - R_1^3)\sin\frac{\alpha_0}{2}}} \approx 3,4021(s)$

**Bài 28.** Một bình thông nhau có tiết diện đều S. Bình đựng một chất lỏng không chịu nén, có khối lượng riêng ρ ; cột chất lỏng ở trong bình dài *l*. Trên mặt cột chất lỏng ở nhánh B có một pittông mỏng, khối lượng không đáng kể (Hình vẽ). Người ta ấn pittông xuống dưới mức cân bằng ban đầu một đoạn bằng a rồi buông tay. Bỏ qua mọi ma sát.



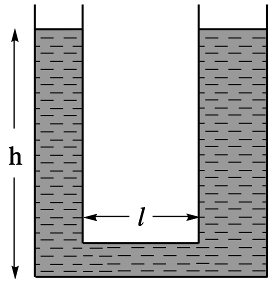

a) Tại sao khối chất lỏng lại dao động ?

b) Chứng minh rằng khối chất lỏng DĐĐH và xác định chu kì dao động.

c) Tính tốc độ cực đại của khối chất lỏng.

ĐS: b.: $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}$.;c) $v_{max} = A\omega = a\omega = a\sqrt{\frac{2g}{l}}$.

**Bài 29 .** Một chất lỏng, khối lượng riêng ρ, chứa trong một ống hình chữ U có phần ống nằm ngang dài *l*. Tiết diện của các phần của ống là $S_1$, $S_2$ và $S_3$. Khi cân bằng, mực chất lỏng có độ cao là h. Cho chất lỏng dao động tự do. Chứng minh rằng chất lỏng dao động điều hoà và tìm tần số của dao động. Bỏ qua tác dụng của sức căng mặt ngoài và độ nhớt của chất lỏng. Bỏ qua phần nước ở hai góc khi xét chuyển động.



ĐS: $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{h + l\dfrac{S_1S_2}{(S_1+S_2)S_3}}}$

**Bài 30.** Một quả cầu đặc, đồng chất, bán kính R, có khối lượng riêng $\rho_0$, có thể nổi trong một chất lỏng, có khối lượng riêng $\rho_L$. Người ta gọi X là phần của đường kính thẳng đứng chìm trong chất lỏng và $\alpha = \dfrac{\rho_0}{\rho_L}$.

a) Với giá trị nào của α thì quả cầu chìm hoàn toàn hoặc chìm một nửa ?

b) Chứng minh rằng sự cân bằng của quả cầu được diễn tả bằng một hệ thức có dạng $b - X = \dfrac{c}{X^2}$. Hãy cho biết sự phụ thuộc của b và c vào R và α.

c) Quả cầu cân bằng với 0 < X < 2R. Người ta ấn nhẹ quả cầu xuống rồi thả ra. Xác định chuyển động của quả cầu.

ĐS: a. α = 0,5; b. b = 3R và c = $4\alpha R^3$; c.Vật dao động điều hoà với tần số góc $\omega = \sqrt{\dfrac{3gX(2R-X)}{4\alpha R^3}}$.

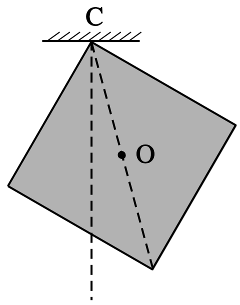
**Bài 31.** Một xe chở khách khởi hành với gia tốc a. Lúc đầu cánh cửa hé mở. Hỏi khi cánh cửa tự động đóng sập lại thì xe chạy được bao xa ? Cho biết bề rộng của cánh cửa bằng *l*.

ĐS : $S = \dfrac{\pi^2 l}{12}$

**Bài 32.** Một vật đứng yên trên một mặt phẳng nghiêng, có góc nghiêng α = 0,10 rad so với phương ngang. Hệ số ma sát nghỉ giữa vật và mặt phẳng nghiêng là μ. Cho mặt phẳng nghiêng dao động điều hoà với biên độ A = 4,9 cm theo một phương nằm trong mặt phẳng nghiêng. Hỏi cần phải rung mặt phẳng nghiêng theo phương nào và với tần số f tối thiểu là bao nhiêu để vật bắt đầu trượt trên mặt phẳng nghiêng.

ĐS: $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g(\mu - \alpha)}{A}}$

**Bài 33.** Một khối lập phương có cạnh a, khối lượng m, được treo thẳng đứng tại một trong các cạnh của nó. Hãy tìm:



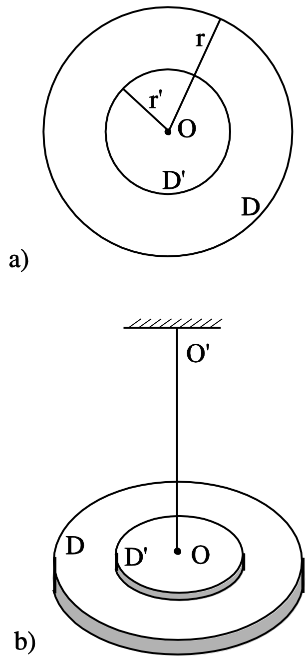

a) Momen quán tính của nó đối với trục quay C.

b) Phương trình vi phân của dao động nhỏ của khối và chu kì dao động.

c) Chiều dài của con lắc đơn đồng bộ (tức là có cùng chu kì với con lắc vật lí).

ĐS: a. $I_C = \frac{2}{3}ma^2$; b. $T = 2\pi\sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{a}{g}}$; c. $l = \frac{2\sqrt{2}}{3}a$.

**Bài 34.** Một hệ S được tạo thành từ hai đĩa đồng chất D và D', cùng khối lượng riêng, cùng độ dày, cùng trục và gắn chặt với nhau. Đĩa D có khối lượng m = 200 g và bán kính r = 1 cm, đĩa D' có bán kính $r' = \frac{r}{2}$. Người ta dùng hệ S làm con lắc xoắn, dây treo OO' trùng với trục đối xứng của hệ. Biết chu kì của con lắc là 6,5 s và biên độ góc $\theta_m$ = 1,3 rad, hãy tính:




a) Hằng số xoắn của dây OO'.

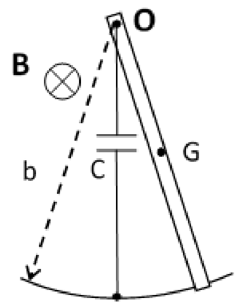
b) Tốc độ góc cực đại của con lắc.

c) Động năng cực đại của hệ S.

ĐS: a. $K = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 I_O \approx 0{,}993.10^{-3}$ N.m.

b. $\theta'_{max} = \sqrt{\frac{K}{I_O}}\theta_m \approx 1{,}26$ rad/s; c. $K_{max} = 0{,}84.10^{-3}$ J

**Bài 35.** Một thanh kim loại mảnh đồng chất có khối lượng m có thể dao động xung quanh trục nằm ngang O đi qua một đầu của thanh như một con lắc (hình vẽ). Đầu dưới của thanh tiếp xúc với một sợi dây được uốn thành một vòng cung có bán kính b. Tâm của sợi dây này được nối với điểm treo O qua một tụ điện có điện dung C. Hệ được đặt trong từ trường đều hướng theo phương ngang vuông góc với mặt phẳng dao động của thanh. Bỏ qua ma sát và điện trở của thanh, của dây dẫn. Các chỗ tiếp xúc điện đều lý tưởng.




1) Xác định tính chất chuyển động được thực hiện sau khi thanh lệch khỏi phương thẳng đứng một góc nhỏ $\alpha_0$ rồi thả ra không vận tốc ban đầu.

2) Nếu thay tụ điện bởi điện trở R thì chuyển động của thanh khác như thế nào?

ĐS: 1. Dao động điều hòa, tần số góc $\omega = \sqrt{\dfrac{2g}{\dfrac{4}{3}b + \dfrac{CB^2b^3}{m}}}$.

2. Dao động tắt dần, với phương trình $\theta'' + 2\beta\theta' + \omega_0^2\theta = 0$, trong đó $2\beta = \dfrac{3B^2b^2}{4mR}$ và $\omega_0^2 = \dfrac{3g}{2b}$

+ Nếu $\beta < \omega_0$ thì phương trình trên có nghiệm: $\theta(t) = \theta_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi)$, với

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \sqrt{\left(\frac{3g}{2b}\right)^2 - \left(\frac{3B^2b^2}{8mR}\right)^2}$$

Còn $\theta_0$ và $\varphi$ được xác định từ điều kiện ban đầu, tại t = 0 vật có:

$$\begin{cases} \theta(0) = \theta_0\cos\varphi = \alpha_0 \\ \theta'(0) = \theta_0\beta\cos\varphi + \theta_0\omega\sin\varphi \end{cases} = 0$$

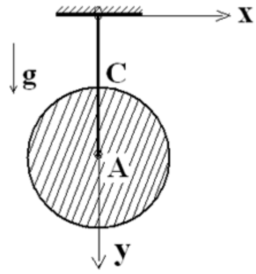
Do đó: $\theta_0 = \dfrac{\alpha_0}{\cos\varphi} = \alpha_0\dfrac{\omega_0}{\omega}$, còn $\varphi = \arctan\left(-\dfrac{\beta}{\omega}\right)$.

+ Nếu $\beta \geq \omega_0$: con lắc chuyển động không tuần hoàn về vị trí cân bằng.

**Bài 36**. Xét một con lắc kép: Một thanh OA đồng nhất tiết diện đều, khối lượng m chiều dài 2R, khối tâm C và mômen quán tính đối với trục vuông góc với thanh đi qua C là $I_C = \frac{1}{3}mR^2$.

Một đĩa đồng nhất khối lượng m, bán kính R; có tâm đặt tại A và mô men quán tính đối với trục đối xứng qua tâm đĩa và vuông góc mặt đĩa là $\frac{1}{2}$ $mR^2$. Đĩa liên kết với thanh nhờ một cái chốt tại tâm đĩa và vuông góc mặt đĩa.

- Hệ có thể quay trong mặt phẳng thẳng đứng (Oxy) và quanh trục nằm ngang Oz đi qua O vuông góc mặt đĩa, bỏ qua ma sát giữa trục quay Oz và thanh OA.



Hình 2.69P

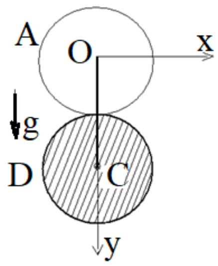
1. Đĩa và thanh liên kết chặt với nhau. Tính chu kì $T_1$ dao động của hệ.

2. Đĩa và thanh có thể quay tự do đối với nhau quanh chốt liên kết. Tính chu kì $T_2$ của những dao động bé của thanh quanh trục Oz.

ĐS: 1. $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{35R}{18g}}$ ; 2. $T_2 = \frac{8}{3}\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$

**Bài 37.** Một thanh đồng nhất OC có khối lượng m, dài 2R, mômen quán tính đối với trục Oz là $I_1 = \frac{4}{3}mR^2$) có thể quay không ma sát quanh trục Oz trong mặt phẳng thẳng đứng Oxy.

Một đĩa D đồng chất khối lượng m, có tâm đặt ở C, bán kính R, mômen quán tính đối với trục đi qua C và vuông góc mặt đĩa là $I_2 = \frac{1}{2}mR^2$. Đĩa D nối với thanh OC ở C nhờ một khớp. Thanh và đĩa có thể quay tự do với nhau không ma sát trong mặt phẳng Oxy quanh trục qua C và song song trục Oz.



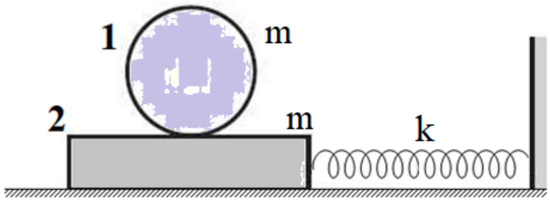
Hình 2.70P

Trong quá trình chuyển động của thanh OC, đĩa D lăn không trượt trên một hình trụ A cố định. Trụ A có trục đối xứng nằm trên Oz, bán kính R và được giữ cố định.

Từ vị trí cân bằng, thanh OC có phương thẳng đứng, đầu C ở dưới, người ta kéo thanh OC cho nghiêng một góc nhỏ và buông ra không vận tốc đầu. Tính chu kì dao động bé của thanh OC.

ĐS: $T = \frac{2}{3}\pi\sqrt{\frac{22R}{g}}$

**Bài 38**. Một tấm gỗ có khối lượng m, có thể trượt tự do trên sàn nằm ngang không ma sát, được nối với tường bằng một lò xo nhẹ độ cứng k nằm ngang. Một trụ đặc đồng chất, khối lượng m, có thể tự do lăn không trượt trên tấm gỗ. Nếu kéo tâm gỗ ra khỏi vị trí cân bằng một đoạn bé và buông. Chứng minh tấm gỗ dao động điều hòa và tìm chu kì?

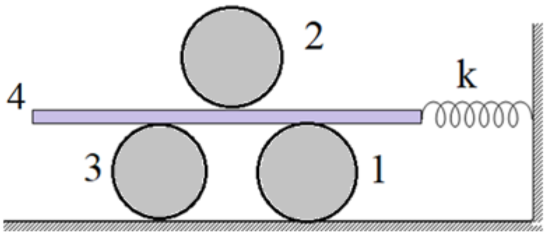


Hình 2.83P

ĐS: $T = 2\pi\sqrt{\frac{4m}{5k}}$

**Bài 39.**

Cho ba vật hình trụ giống nhau, đồng chất, tiết diện đều, mỗi trụ có khối lượng m, bán kính R. Hai trụ thứ 1 và 3 đặt trên sàn nằm ngang, trụ 2 nằm trên tấm ván 4 rất cứng, ván này đặt trên hai trụ 1, 2. Ván được gắn với một đầu lò xo độ cứng k, một đầu lò xo còn lại gắn với tường. Hệ cơ học được biểu diễn như hình vẽ, các trục hình trụ, trục lò xo đều song song mặt phẳng ngang. Biết khi chuyển động, các trụ chỉ lăn không trượt, các trục đối xứng các trụ luôn xong song nhau. Bỏ qua khối lượng ván và lò xo. Hãy tìm chu kì dao động bé của hệ trong hai trường hợp:



Hình 2.84P

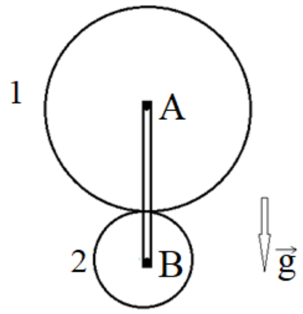
a. Ván 4 có khối lượng không đáng kể.

b. Ván 4 có khối lượng m.

ĐS: a. $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{13m}{12k}}$ ; b. $T = \frac{5}{\sqrt{3}}\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

**Bài 40.** Có hai đĩa đồng đồng chất có cùng khối lượng m, bán kính đĩa 1 là 2R và đĩa 2 là R. Tại tâm của hai đĩa có hai trục quay A và B có kích thước rất nhỏ cùng nằm ngang và vuông góc với hai mặt đĩa. Trục quay A cố định, trục quay B có thể di chuyển tự do. Hai trục quay nối với nhau bằng một thanh cứng rất nhẹ để giữ cho đĩa 2 không rơi và giữ cho hai vành đĩa một khoảng hở rất nhỏ không tiếp xúc nhau. *Khối lượng các trục quay không đáng kể và khi các đĩa chuyển động luôn bỏ qua ma sát ở hai trục quay.*

Ban đầu khi hệ đứng yên, AB thẳng đứng và đĩa 2 nằm bên dưới thì tác dụng lên đầu B thanh cứng một xung lực $\overrightarrow{X}$ theo phương ngang dọc theo mặt đĩa 2.



Hình 2.59P

**1.**Tìm giá trị cực tiểu của X để trục B đĩa 2 quay được một vòng quanh đĩa 1. Xét bài toán trong hai trường hợp:

**a.** Đĩa 1 được giữ cố định.

**b.** Đĩa 1 gắn chặt với thanh cứng và dễ dàng quay quanh trục A.

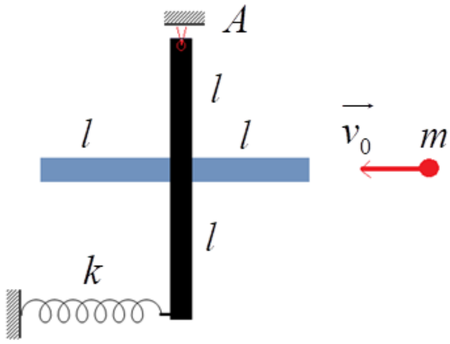
**2.** Khi giá trị X nhỏ thì thanh AB chỉ thực hiện dao động bé. Tìm chu kì dao động bé của đầu B thanh cứng trong hai trường hợp:

**a.** Đĩa 1 gắn chặt với thanh cứng và dễ dàng quay quanh trục A. Tính biên độ dao động bé của đầu B.

**b.** Đĩa 1 cố định và đĩa 2 lăn không trượt trên vành đĩa 1(khi cho hai đĩa luôn tiếp xúc nhau).

ĐS: 1a. $X \geq 2m\sqrt{3gR}$; 1b. $X \geq 2m\sqrt{\frac{11}{3}gR}$; 2a. $T = 2\pi\sqrt{\frac{11R}{3g}}$; $A = 3\frac{X}{m}\sqrt{\frac{3R}{11g}}$; 2b. $T = 6\pi\sqrt{\frac{R}{2g}}$; $A = \frac{X}{m}\sqrt{\frac{2R}{g}}$

**Bài 41.** Hai thanh nhỏ có cùng chiều dài $2l$ và khối lượng m được hàn chặt vuông góc với nhau tạo thành hình chữ thập (Hình 2.60P). Hệ chữ thập này nằm trên mặt bàn nhẵn nằm ngang và có thể quay quanh trục thẳng đứng đi qua đầu A của một đầu thanh. Đầu kia của thanh này được giữ bằng một lò xo có độ cứng k như hình vẽ. Một qủa cầu nhỏ khối lượng m bay với vận tốc $\overrightarrow{v_0}$ dọc theo trục của thanh thứ hai và đập vào đầu mút của thanh này, coi va chạm hoàn toàn đàn hồi. Coi sau va chạm hệ dao động bé.



Hình 2.60P

a. Xác định biên độ góc $\varphi_0$ và chu kỳ dao động của hệ.

b. Hệ chữ thập này nằm **trên mặt thẳng đứng** và có thể quay quanh trục nằm ngang đi qua đầu A của một đầu thanh. Xác định biên độ góc $\varphi_0$ và chu kỳ dao động của hệ.

c.Giải lại câu b trong trường hợp va chạm mềm.

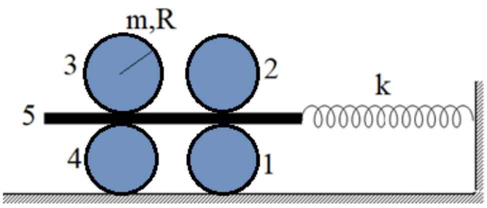
***ĐS:***

***a.*** $\varphi_0 = \frac{2\sqrt{6}}{11}\frac{v}{l}\sqrt{\frac{m}{k}}$; $T = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{3k}}$ ***( đã công nhận dao động điều hòa thì trong bài toán này ta phải cho*** $\varphi_0 < 10^0$***)***

***b.*** $\varphi_0 = \dfrac{\frac{6}{11}\frac{v}{l}}{\sqrt{\frac{3}{4}(\frac{g}{l}+\frac{2k}{m})}}$; $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\frac{3}{4}(\frac{g}{l}+\frac{2k}{m})}}$

**Bài 42.**

Cho bốn vật hình trụ giống nhau, đồng chất, tiết diện đều, mỗi trụ có khối lượng m, bán kính R. Hai trụ thứ 1 và 4 đặt trên sàn nằm ngang, trụ 2 và 3 nằm trên tấm ván 5 rất cứng, ván này đặt trên hai trụ 1, 4. Ván được gắn với một đầu lò xo độ cứng k, một đầu lò xo còn lại gắn với tường cố định. Hệ cơ học được biểu diễn như hình vẽ, các trục đối xứng các trụ, trục lò xo đều song song mặt phẳng ngang. Biết khi chuyển động, các trụ chỉ lăn không trượt, các trục đối xứng các trụ luôn xong song nhau và vuông góc với trục lò xo, khối tâm các trụ luôn nằm trên cùng một mặt phẳng thẳng đứng. Bỏ qua khối lượng lò xo. Hãy tìm chu kì dao động bé của hệ trong hai trường hợp:




Hình 2.85P

a. Ván 5 có khối lượng không đáng kể.

b. Ván 5 có khối lượng m.

ĐS: a. $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{17m}{12k}}$ ; b. $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{29m}{12k}}$

**Bài 43.**

Một thanh cứng AB , có tiết diện đều (tiết diện hình chữ nhật) và nhỏ, chiều dài của thanh AB= $l$ và khối lượng m đã biết (Hình 1a). Biết mật độ khối lượng dài của thanh tăng tuyến tính dọc thanh từ A đến B, mật độ khối lượng dài tại B là $\lambda_0$ và gấp đôi mật độ khối lượng dài tại A.


Hình 1a

**1.** Hãy xác định :

**a.** Giá trị $\lambda_0$ theo m, $l$

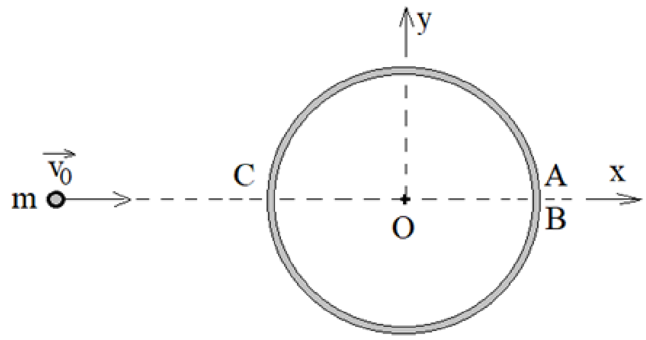
**b.** Vị trí khối tâm của thanh AB.

**2.** Gọi C là trung điểm AB. Thanh AB nói trên được uốn thành một vòng tròn (có đầu A trùng đầu B) tạo ra một cái vành chắc chắn có tâm O đường kính AC. Chọn hệ tọa độ Oxy, gốc tọa độ tại tâm O, Ox nằm dọc trên CA và hướng từ C đến A, Oy vuông góc AC (Hình 1b).

Hãy xác định:

**a.** Vị trí khối tâm vành ($x_G$, $y_G$).

**b.** Momen quán tính của vành đối với trục quay đi qua O và vuông góc với mặt phẳng chứa vành.



Hình 1b

**3.** Vành nói trong ý (2), được đặt nằm yên trên mặt phẳng ngang nhẵn.

Một vật nhỏ hình cầu cũng có khối lượng m (bi có đường kính bằng bề dày vành) coi là chất điểm, chuyển động với vận tốc $\vec{v_0}$, trượt không ma sát trên mặt phẳng ngang, dọc theo đường thẳng CA hướng đến tâm O và va chạm với vành tại C  Xét bài toán trong hai trường hợp va chạm đàn hồi và va chạm mềm.

**a.** Trong trường hợp chạm hoàn toàn đàn hồi, hãy tìm vận tốc khối tâm của mỗi vật (bi, vành) và vận tốc góc của vành sau va chạm.

**b.** Trong trường hợp chạm mềm, sau va chạm bi dính chặt vào vành. Hãy tìm vận tốc khối tâm của hệ hai vật (bi và vành) và tốc độ góc của vành.

**4.** Bây giờ ta đặt vành trên mặt sàn nằm ngang, sao cho mặt phẳng chứa vành thẳng đứng và coi vành lăn không trượt trên sàn. Hãy tìm chu kì dao động bé của vành khi kích thích dao động.

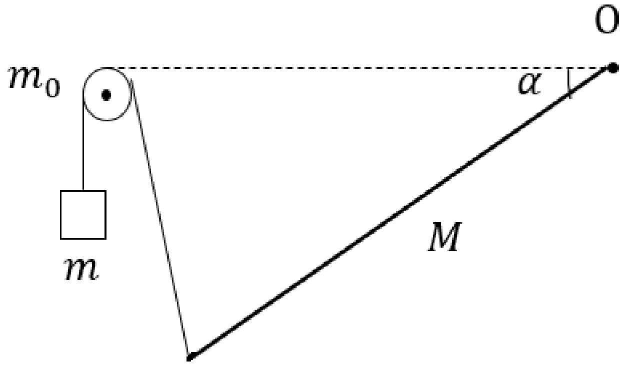
*Ghi chú: trong bài toán này, các giá trị $l, m, v_0$ và gia tốc rơi tự do g coi như đã biết.*

ĐS: 1a. $\lambda_0 = \dfrac{4m}{3l}$; 1b. $X_G = \dfrac{5}{9}l$; 2a. $x_G = 0$; $y_G = -\dfrac{l}{6\pi^2}$ ;2b. $I_O = \dfrac{ml^2}{4\pi^2}$; 3a.

$\omega_G = \dfrac{2v_0}{\left[3 - \dfrac{1}{6\pi^2}\right]l}$; $v_G = \dfrac{18\pi^2 - 2}{18\pi^2 - 1}v_0$; $v = \dfrac{v_0}{18\pi^2 - 1}$; 3b. $v_{Gh} = \dfrac{v_0}{2}$; $\omega_{Gh} = \dfrac{6\pi^2}{\left[(27\pi^2 - 2)\right]}\dfrac{v_0}{l}$;

4. $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\frac{(3\pi-1)}{\pi}}$

**Bài 44.** Một thanh cứng đồng chất, chiều dài $\ell$, khối lượng $M$ có thể quay tự do không ma sát quanh một điểm treo cố O định trên một bức tường thẳng đứng. Đầu dưới cùng của thanh có buộc một sợi dây mảnh, mềm, nhẹ và không dãn. Đầu còn lại của sợi dây nhẹ trên có buộc một vật nặng khối lượng $m = M\sqrt{3}/6$, sợi dây này vắt qua một ròng rọc cố định khối lượng $m_0 = m$ có bán kính rất nhỏ so với $\ell$ và cùng thuộc một mặt phẳng nằm ngang với O (hình 3). Biết rằng ròng rọc có thể được coi là một hình trụ đặc và cách O một khoảng $\ell' = \ell$, dây không trượt trên ròng rọc trong tất cả các chuyển động của hệ, gia tốc trọng trường tại nơi treo cơ hệ này là $g$.




Xác định góc hợp bởi thanh $M$ và phương nằm ngang khi hệ cân bằng.

Kéo $m$ xuống dưới một đoạn $A \ll \ell$ rồi buông nhẹ không vận tốc ban đầu. Tìm tần số góc dao động và tính vận tốc góc cực đại của thanh.

*Gợi ý:* Với $x \ll 1$, thì

$$\sin(\alpha + x) \approx \sin\alpha + x\cos\alpha - \frac{1}{2}x^2\cos\alpha.$$

**ĐS:** $\dot{\varepsilon}_{\max} = \frac{2\sqrt{30}}{\sqrt{81+48\sqrt{3}}}\frac{A}{\ell}\sqrt{\frac{g}{\ell}}; \omega = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{27+16\sqrt{3}}}\sqrt{\frac{g}{\ell}}$

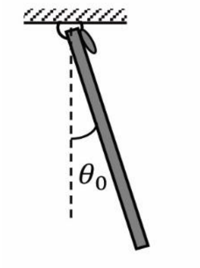
**Bài 45.** Một con lắc bao gồm thanh cứng đồng chất dài $L$, khối lượng $M$. Thanh đó quay quanh một đầu và dao động trong mặt phẳng thẳng đứng.

**1.**Với dao động góc nhỏ.

**a)** Hãy tìm tần số góc dao động của riêng thanh.

**b)** Các nhà cổ sinh vật học mới khám phá ra đường đi của một khủng long có các dấu chân của cùng một chân cách nhau $A$ = 4.0 m, chiều dài $L$ của chân khủng long là 3,23m. Coi chân khủng long chuyển động như là dao động điều hòa con lắc trên, tìm tốc độ đi bộ của khủng long?

**2.**Một con bọ khối lượng *M/3* có thể bò dọc theo thanh. Ban đầu, con bọ ở điểm chốt của thanh và thanh lại đứng yên ở một góc $\theta_0$ ($\theta_0 \ll 1rad$) so với đường thẳng đứng như hình vẽ. Thanh được thả ra không vận tốc ban đầu. Với *t > 0* con bọ bò chậm với vận tốc không đổi *V* (với điều kiện $V \ll a\omega$, $\omega$ là tần số góc dao động của con lắc, *a* là khoảng cách từ con bọ đến trục quay) dọc theo thanh hướng theo điểm cuối của thanh.

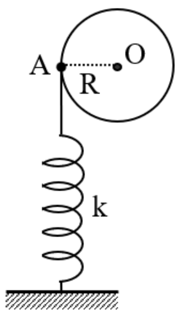



**a)** Tìm tần số góc dao động $\omega$ của con lắc khi con bọ bò được một đoạn là *a* dọc theo thanh.

**b)** Tìm biên độ dao động của con lắc khi con bọ bò tới điểm cuối cùng của thanh *(a = L).*

**ĐS: 1a.** $\omega = \sqrt{\dfrac{3g}{2L}}$; 1b. $v \approx 1.2m/s$; 2a. $\omega = \sqrt{\dfrac{g(2a+3L)}{2(L^2+a^2)}}$; 2b. $\theta_{max} = \left(\dfrac{3}{10}\right)^{\frac{1}{4}}\theta_0$

**Bài 46.** Một đĩa tròn đồng chất, khối lượng m, bán kính R, có thể quay quanh một trục cố định nằm ngang đi qua tâm O của đĩa. Lò xo có độ cứng k, một đầu cố định, một đầu gắn với điểm A của vành đĩa như hình 2. Khi OA nằm ngang thì lò xo có chiều dài tự nhiên. Xoay đĩa một góc nhỏ $\alpha_0$ rồi thả nhẹ. Coi lò xo luôn có phương thẳng đứng và khối lượng lò xo không đáng kể.

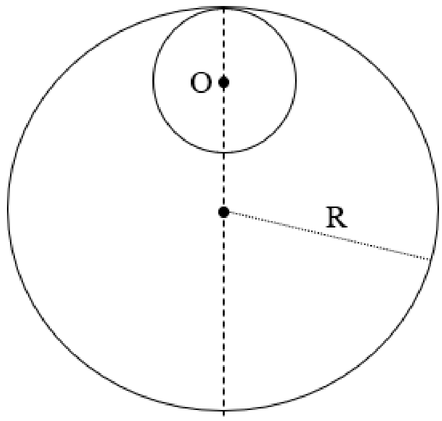



a. Bỏ qua mọi sức cản và ma sát. Tính chu kì dao động của đĩa.

b. Thực tế luôn tồn tại sức cản của không khí và ma sát ở trục quay. Coi mômen cản $M_C$ có biểu thức là $M_C = \dfrac{kR^2}{200}$. Tính số dao động của đĩa trong trường hợp $\alpha_0 = 0{,}1rad$.

ĐS : a. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{2k}}$; b. $n = \dfrac{\alpha_0}{2(\alpha_1 - \alpha_2)} = 5$

**Bài 47.** Một chiếc vòng khối lượng M, bán kính R, bề dày không đáng kể, mô-men quán tính đối với trục đi qua tâm $MR^2$, được treo trên một chiếc vòng tay nhỏ bán kính r (r < R), tâm của vòng nhỏ tại O (hình 6). Cho chiếc vòng lớn dao động với biên độ góc nhỏ trong mặt phẳng thẳng đứng. Biết chuyển động của vòng lớn trên vòng nhỏ là lăn không trượt. Cho gia tốc trọng trường là g và bỏ qua sức cản không khí.



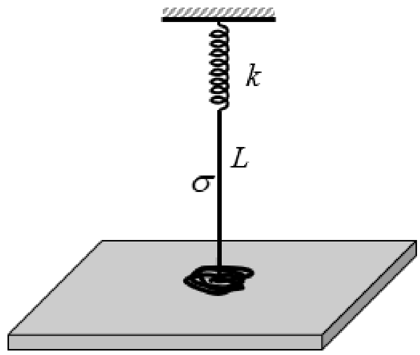

1. Cho vòng nhỏ cố định, bán kính r vô cùng nhỏ ($r \approx 0$). Tìm chu kì dao động của vòng lớn.

2. Cho vòng nhỏ bán kính $r \neq 0$ và vẫn cố định. Tìm chu kì dao động của vòng lớn.

3. Trong trường hợp vòng nhỏ có khối lượng m, bán kính $r \neq 0$, mô-men quán tính đối với trục đi qua tâm là $mr^2$ và có thể quay không ma sát quanh trục cố định đi qua O. Tìm chu kì dao động của hệ.

ĐS: a. $T = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$; b. $T = 2\pi\sqrt{\frac{2(R-r)}{g}}$; c. $T = 2\pi\sqrt{\frac{(R-r)}{g}(\frac{2m+M}{m+M})}$

**Bài 48.** Một dây mềm, không giãn có khối lượng phân bố theo chiều dài với mật độ khối lượng là $\sigma$. Dây được treo vào một lò xo nhẹ có độ cứng *k*. Đầu trên lò xo được giữ cố định như hình.




Khi hệ nằm cân bằng, một phần dây xếp chồng lên nhau trên mặt bàn, phần còn lại nằm trong không khí và có phương thẳng đứng. Chiều dài dây tính từ mặt bàn đến điểm treo là *L*. Nâng điểm treo dây lên một đoạn nhỏ *b* theo phương đứng rồi buông ra. Cho gia tốc trọng trường là *g*. Hãy xác định sự phụ thuộc biên độ dao động của hệ theo thời gian.

Cho rằng: *L* >>*b*. Dây mảnh và dài. Trong quá trình dao động thì phần dây được kéo lên khỏi mặt bàn coi như nằm theo phương thẳng đứng và mép dưới của dây không tách khỏi bàn. Không có ma sát giữa các phần của dây với nhau.

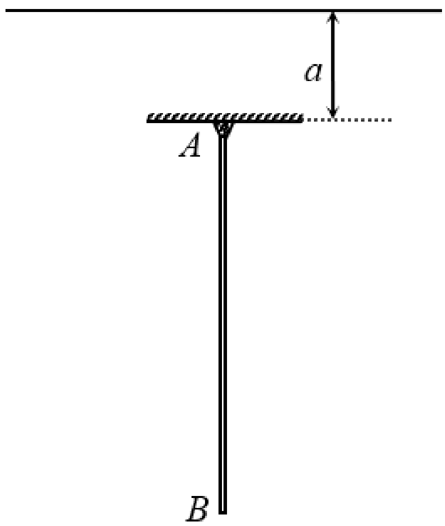
ĐS: $A(t) = \frac{1}{\frac{1}{b} + \frac{2\omega t}{3\pi L}}$

**Bài 49.** Một khối trụ rỗng giữa, có tiết diện thẳng là hình vành khăn, bán kính trong $R_1$, bán kính ngoài $R_2$, có mật độ khối phụ thuộc vào bán kính r bởi biểu thức: $\rho = \frac{18r}{5\pi(R_1^4 + R_2^4)}$ (kg/m$^3$) với $R_1 \le r \le R_2$. Khối trụ bắt đầu lăn không trượt bên trong một vành trụ nhám bán kính $R > R_2$ từ vị trí xác định bởi góc $\varphi_o$ nhỏ.

Hãy xác định chu kì dao động của khối trụ?

ĐS: $T = 2\pi . \sqrt{\dfrac{1+\dfrac{3}{5}.\dfrac{(R_2^5 - R_1^5)}{(R_2^3 - R_1^5)R_2^2}}{g(R - R_2)}}$

**Bài 50.** Thanh mảnh AB chiều dài *l*, có khối lượng trên một đơn vị chiều dài phụ thuộc khoảng cách từ A theo công thức $\rho(x) = \rho_0\left(1+\dfrac{x}{l}\right)$ ($\rho_0$=*const*). Thanh có thể quay tự do trong mặt phẳng thẳng đứng quanh một trục nằm ngang cố định qua A. Bỏ qua mọi ma sát, lực cản không khí.




1. Tính chu kỳ nhỏ của thanh quanh vị trí cân bằng.

2. Thanh AB được tích điện đều với mật độ điện dài $\lambda_1 > 0$. Trong mặt phẳng của thanh, phía trên trục quay một đoạn a có một dây dẫn thẳng dài vô hạn nằm ngang tích điện đều với mật độ điện dài $\lambda_2 > 0$.Tính chu kỳ dao động nhỏ của thanh quanh vị trí cân bằng. (Trong quá trình dao động coi $\lambda_1, \lambda_2 = const$).

ĐS: 1. $T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{7l}{10g}}$; **2.**

$$T_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{10g}{7l} + \dfrac{6\lambda_1\lambda_2}{7\pi\varepsilon_0\rho_0 l^3}\left[l - a\ln(1+\dfrac{l}{a})\right]}}.$$

**Bài 51.** (***Trích đề thi chọn học sinh vào đội tuyển dự olympic vật lý châu á năm 2004***)

Để đo gia tốc trọng trường g, người ta có thể dùng con lắc rung, gồm một lá thép phẳng chiều dài l, khối lượng m, một đầu của lá thép gắn chặt vào điểm O của giá, còn đầu kia gắn một chất điểm khối lượng M. ở vị trí cân bằng lá thép thẳng đứng. Khi làm lá thép lệch khỏi vị trí cân bằng một góc nhỏ $\theta$ (radian) thì sinh ra momen lực c.θ (c là một hệ số không đổi) kéo lá thép trở về vị trí ấy (xem hình vẽ). Trọng tâm của lá thép nằm tại trung điểm của nó và momen quán tính của riêng lá thép đối với trục quay qua O là $ml^2/3$.

a, Tính chu kì T các dao động nhỏ của con lắc.

b, Cho l = 0,20m, m = 0,01kg, M = 0,10kg. Để con lắc có thể dao động, hệ số c phải lớn hơn giá trị nào? Biết g không vượt quá $9{,}9 m/s^2$.

c, Cho l, m, M có các giá trị như ở mục b, c = 0,208. Nếu đo được T = 10s thì g có giá trị bằng bao nhiêu?

d, Cho l, m, M, c có các giá trị cho ở mục c. Tính độ nhạy của con lắc, xác định bởi $\frac{dT}{dg}$, dT là biến thiên nhỏ của T ứng với biến thiên nhỏ dg của g quanh giá trị trung bình $g_0 = 9{,}8m/s^2$. Nếu ở gần $g_0$, gia tốc $g$ tăng $0{,}01m/s^2$ thì T tăng hay giảm bao nhiêu?

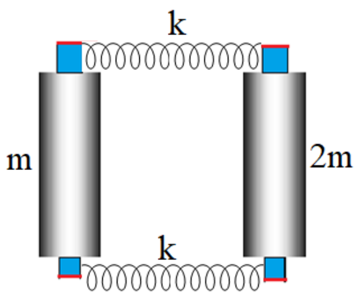
e, Xét một con lắc đơn có chiều dài L = 1m cũng dùng để đo g. Tính độ nhạy của con lắc đơn ở gần giá trị trung bình $g_0$; g tăng $0{,}01m/s^2$ thì chu kì T của con lắc đơn tăng hay giảm bao nhiêu? So sánh độ nhạy của hai con lắc.

ĐS: a. T = $2\pi\sqrt{\dfrac{l^2(M+\frac{m}{3})}{c-gl(M+\frac{m}{2})}}$ ; b. $c > gl(M+\frac{m}{2})$ hay $c > 0{,}2079$ ; c. $g = 9{,}83m/s^2$ ;

d. $\frac{dT}{dg} \approx 48$, $g$ tăng $0{,}01m/s^2$ thì $T$ tăng $0{,}48s$ ;

e. $\frac{dT}{dg} = -\frac{T}{2g}$. Con lắc đơn có $L = 1m$ thì $T \approx 2s$. Với $g \approx 9{,}8m/s^2$ thì $\frac{dT}{dg} \approx -0{,}1$; $g$ tăng $0{,}01m/s^2$ thì $T$ giảm $0{,}001s$, không đo được. Vậy con lắc rung nhạy hơn con lắc đơn là: $\theta = \dfrac{3mv_0}{(M+3m)\omega l}\sin(\omega t)$ với $\omega = \sqrt{\dfrac{3}{2}\dfrac{g(M+2m)}{l(M+3m)}}$ và góc lệch cực đại $\theta_{max} = \theta_0 = \dfrac{3mv_0}{(M+3m)\omega l}$

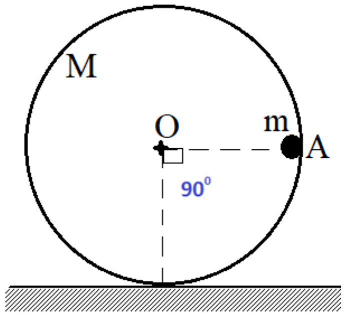
**Bài 52**. Hai khối trụ có bán kính R, khối lượng m và 2m nằm trên mặt bàn nằm ngang. *Các khối trụ có phân bố khối lượng khác nhau theo bán kính. Mô men quán tính của các khối trụ đối với trục đối xứng bằng nhau và bằng* $I_1 = I_2 = \frac{mR^2}{2}$. Các trục của khối trụ nối với nhau bằng hai lò xo không trọng lượng có cùng độ cứng k và chiều dài tự nhiên $\ell_0$ (hình vẽ). Tại thời điểm ban đầu các lò xo dãn đến độ dài $\ell$, còn các khối trụ đứng yên. Xác định chu kỳ dao động nhỏ và biên độ dao động của khối tâm, nếu các khối trụ lăn không trượt trên mặt bàn còn các lò xo có thể làm việc ở trạng thái nén hoặc dãn.



Hình 2.61P

ĐS: $T = 2\pi\sqrt{\frac{15m}{32k}}$; $A = \frac{l - l_0}{24}$

**Bài 53.** Người ta gắn chặt vào một vành tròn khối lượng M đặt dựng đứng trên bàn một vật nhỏ khối lượng $m = \frac{M}{3}$ gắn tại điểm A (Hình 2.62P).




Hình 2.62P

a. Tìm giá trị lớn nhất của hệ số ma sát k giữa vành và mặt bàn để vành tròn bắt đầu lăn không trượt.

b. Tìm chu kì dao động bé của hệ trong mặt phẳng thẳng đứng.

ĐS: a. $k \geq \frac{4}{31}$; b. $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{6R}}} = \pi\sqrt{\frac{24R}{g}}$

**Bài 54.** Một vật hình trụ đặc đồng chất có trục đối xứng O, khối lượng m, bán kính R và chiều dài hữu hạn. Người ta khoét vật này bởi một mặt trụ rỗng cùng chiều dài, có trục đối xứng $O_1$ bán kính $OO_1$=R/2. Gọi A là phần trụ đặc còn lại (gọi tắt là trụ A) có khối lượng còn lại là $m_A$ (Hình 2.74Pa), có khối tâm G. Coi như m, R và gia tốc rơi tự do g đã biết.

**1.** Hãy xác định:

a. Khối lượng $m_A$ theo m.

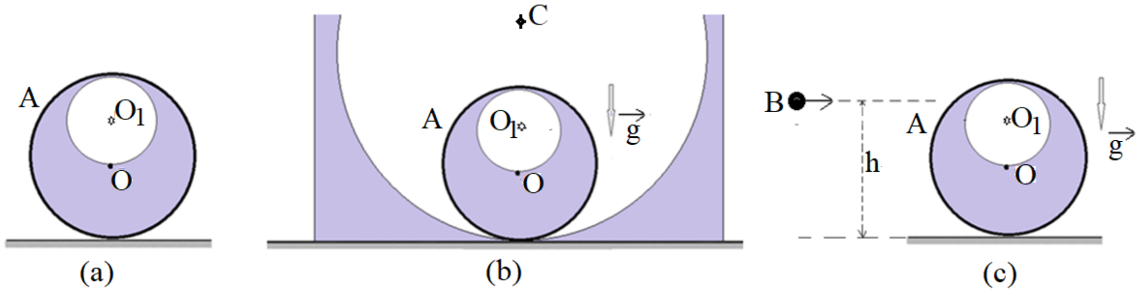
b. Vị trí khối tâm G của trụ A theo R.

c. Momen quán tính của trụ đặc A đối với trục quay O.

d. Từ vị trí như hình 1 trên mặt phẳng ngang, kích thích cho vật A dao động bé. Tính chu kì dao động. *Biết rằng trụ A chỉ lăn không trượt.*

**2.** Một máng trụ C có mặt trong hình trụ, bán kính 3R đặt nằm ngang trên giá cố định. Người ta đặt trụ A vào mặt trong máng trụ C, sao cho các đường sinh của các mặt trụ song song nhau và khi trụ A ở vị trí thấp nhất thì $OO_1$ thẳng đứng, O nằm dưới (Hình 2.74b). Tìm chu kì dao động bé của trụ A trong điều kiện lăn không trượt mặt trong máng trụ C.

**3.** Bây giờ ta đặt trụ A đặt nằm yên trên một mặt sàn khác nằm ngang nhẵn, có đường sinh mặt trụ song song mặt sàn. Một vật B rất nhỏ được coi là chất điểm, có khối lượng $m_B = \frac{m}{4}$ chuyển động song song mặt phẳng ngang ở độ cao h=$(1+\frac{\sqrt{2}}{2})R$ so mặt sàn với vận tốc $\vec{v_0}$ đến va chạm hoàn toàn đàn hồi với vật A. Biết véc tơ $\vec{v_0}$ có phương vuông góc đường sinh trụ A và nằm trong mặt phẳng thẳng đứng đi qua khối tâm G của trụ A (Hình 2.74c). Cho rằng khi va chạm, trọng lực tác dụng lên vật B không đáng kể so với áp lực của mặt trụ A tác dụng lên vật B. Bỏ qua ma sát. Ngay sau va chạm, vật B chuyển động vận tốc $\vec{v}$, khối tâm G trụ A có vận tốc $\overrightarrow{v_G}$ và trụ A quay với tốc độ góc $\omega$. Hãy tìm độ lớn các véc tơ $\vec{v}$, $\overrightarrow{v_G}$ và $\vec{\omega}$.



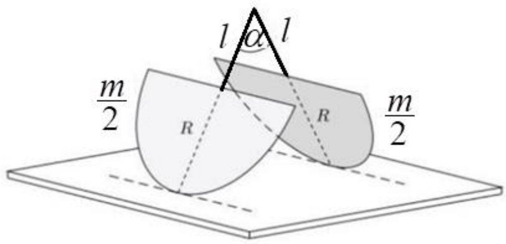

Hình 2.74P

**1.a**. $m_A = \frac{3}{4}m$; **1.b**. $OG = \frac{R}{6}$; **1c**. $I_G = \frac{37}{96}mR^2$; $I_O = \frac{13}{32}mR^2$; **1d.** $T = \pi\sqrt{\frac{29R}{g}}$

2. $T = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{29R}{g}}$

3. $\omega = \frac{8}{87}\frac{v_0}{R}$; $v_G = \frac{74}{261}v_0$; $v = \frac{225,4}{261}v_0$

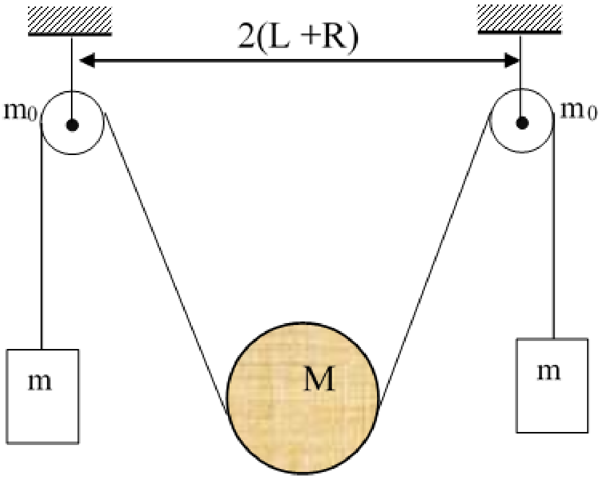
**Bài 55 (Rudolf 2014)**. Một đĩa tròn, mỏng, khối lượng m, bán kính R được cắt dọc theo đường kính đĩa thành hai phần bằng nhau, trên cả hai phần có gắn các thanh không khối lượng, chiều dài $l$ được cố định dọc theo trục đối xứng trong mặt phẳng của mỗi phần. Sau đó các đầu tự do của thanh được nối với nhau, sao cho góc giữa chúng là $\alpha$ và các đường cắt của các nửa cái đĩa là song song với nhau (Hình 2.80P). Hệ này được đặt trên một sàn phẳng nằm ngang bắt đầu dao động. Tính tần số dao động bé của hệ.




Hình 2.80P

ĐS: $T = 2\pi\sqrt{\frac{3\pi + (15\pi - 32)\cos^2\frac{\alpha}{2}}{16\cos\frac{\alpha}{2}}}\sqrt{\frac{R}{g}}$

**Bài 57. (Chọn đội tuyển olympic 2013 ngày thứ nhất).** Treo hệ gồm hai vật $m_1$và $m_2$ giống hệt nhau có cùng khối lượng m và một quả cầu đặc đồng chất có khối lượng M, bán kính R vào hai ròng rọc cố định bằng hai sợi dây mảnh, mềm nhẹ, không dãn đủ dài. Các sợi dây nối vào quả cầu tại hai điểm ở hai đầu một đường kính song song với mặt phẳng nằm ngang như hình vẽ. Hai ròng rọc giống hệt nhau có dạng hình trụ đặc, đồng chất, khối lượng $m_0$, bán kính r và nằm trên cùng độ cao, cách nhau một khoảng 2(L+R). Biết r << L và ròng rọc có trục vuông góc với mặt phẳng hình vẽ. Bỏ qua ma sát ở trục quay và lực cản của không khí. Giả thiết nằng dây không trượt trên ròng rộc. Gia tốc rơi tự do là g.

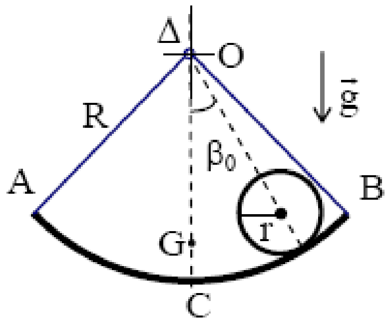



a.Xác định điều kiện để hệ cân bằng và tính khoảng cách từ tâm hình học của M đến mặt phẳng chưa hai trục của ròng rọc khi hệ cân bằng.

b.Từ vị trí cân bằng kéo vật M xuống phía dưới một đoạn nhỏ A theo phương thẳng đứng rồi buông nhẹ. Tìm chu kỳ dao động của các vật.

ĐS: a. ĐK $M < 2m;\ H = \dfrac{LM}{\sqrt{4m^2 - M^2}}$ b. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}\sqrt{\dfrac{4Mm^2 + 2M^2m + m_0M^2}{\left(4m^2 - M^2\right)^{3/2}}}$

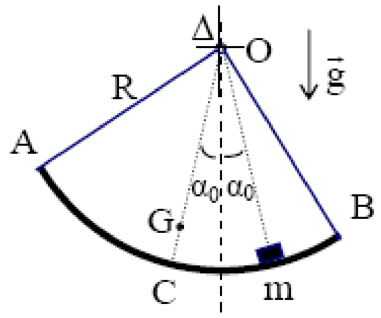
**Bài 57. (Trích đề thi HSGQG 2011)** Cho vật 1 là một bản mỏng đều, đồng chất, được uốn theo dạng lòng máng thành một phần tư hình trụ AB cứng, ngắn, có trục Δ, bán kính R và được gắn với điểm O bằng các thanh cứng, mảnh, nhẹ. Vật 1 có thể quay không ma sát quanh một trục cố định (trùng với trục Δ) đi qua điểm O. Trên hình vẽ, OA và OB là các thanh cứng cùng độ dài R, OAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với trục Δ, chứa khối tâm G của vật 1, C là giao điểm của OG và lòng máng.




1. Tìm vị trí khối tâm G của vật 1.

2. Giữ cho vật 1 luôn cố định rồi đặt trên nó vật 2 là một hình trụ rỗng, mỏng, đồng chất, cùng chiều dài với vật 1, bán kính r nằm dọc theo đường sinh của vật 1. Kéo vật 2 lệch ra khỏi vị trí cân bằng một góc nhỏ rồi thả nhẹ.

a) Tìm chu kì dao động nhỏ của vật 2. Biết rằng trong quá trình dao động, vật 2 luôn lăn không trượt trên vật 1.

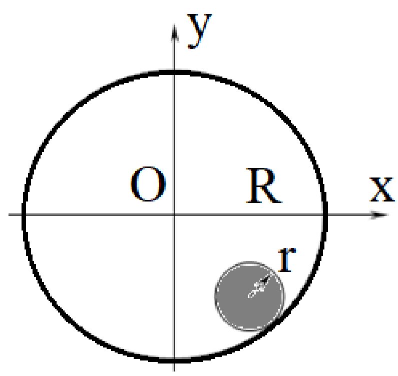



b) Biết là hệ số ma sát nghỉ giữa vật 1 và vật 2. Tìm giá trị lớn nhất của góc để trong quá trình dao động điều hoà, vật 2 không bị trượt trên vật 1.

3. Thay vật 2 bằng một vật nhỏ 3. Vật 3 nằm trong mặt phẳng OAB. Kéo cho vật 1 và vật 3 lệch khỏi vị trí cân bằng sao cho G và vật 3 nằm về hai phía mặt phẳng thẳng đứng chứa Δ, với các góc lệch đều là như hình vẽ, rồi thả nhẹ. Bỏ qua ma sát. Tìm khoảng thời gian nhỏ nhất để vật 3 đi tới C.

ĐS: 1. $OG = y_G = \frac{2\sqrt{2}R}{\pi}$.; 2a. $T = 2\pi\sqrt{\frac{2(R-r)}{g}}$ ; 2b. $\beta_0 \le \frac{1}{2}\left(\sqrt{8+\frac{1}{\mu^2}}-\frac{1}{\mu}\right)$.3. $t_{min} = \frac{\pi}{\omega_1+\omega_1}$.

**Bài 58. (APHO 2009):** Một hình trụ có thành mỏng, khối lượng M và mặt trong nhám với bán kính R có thể quay quanh trục nằm ngang cố định. Trục Z vuông góc với trang giấy và đi ra ngoài trang giấy. Một hình trụ khác, nhỏ hơn, đồng chất, có khối lượng m và bán kính r lăn không trượt quanh trục riêng của nó trên bề mặt trong của M; trục này song song với OZ

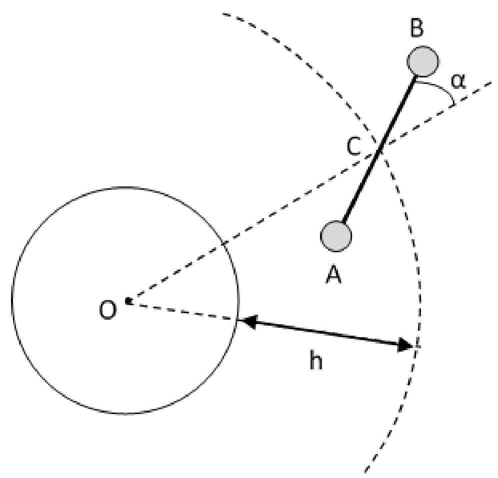



**a,** Xác định chu kì dao động nhỏ của m khi M bị bắt buộc quay với tốc độ góc không đổi. Viết kết quả theo R, r, g

**b,** Bây giờ M có thể quay (dao động) tự do, không bị bắt buộc, quanh trục Oz của nó, trong khi m thực hiện dao động nhỏ bằng cách lăn trên bề mặt trong của M. Hãy tìm chu kì dao động này.

**ĐS: a.** $T = 2\pi\sqrt{\frac{3(R-r)}{2g}}$ ; b. $T = 2\pi\sqrt{\frac{(R-r)}{g}.\frac{(3M+m)}{(2M+m)}}$

**Bài 59.( Trích đề thi chọn đội olympic 2013 ngày thứ 2).** Trái Đất coi như hình cầu khối lượng M, tâm O, bán kính R. Hệ quy chiếu gắn với Trái Đất được xem như hệ quy chiếu quán tính. Từ mặt đất, một vệ tinh nhân tạo được phóng lên theo quỹ đạo tròn quanh Trái Đất ở độ cao h so với mặt đất. Khi vệ tinh đang chuyển động ổn định ở độ cao h, vệ tinh tự động mở các tấm pin mặt trời ra hai bên. Khi đó có thể coi gần đúng vệ tinh như một hệ gồm hai chất điểm A,B có khối lượng giống nhau m, được nối với thanh cứng nhẹ, dài 2l, có khối tâm C đặt ở độ cao h. Thanh cứng nằm trong mặt phẳng quỹ đạo và tạo với phương OC một góc α. AB chỉ có thể quay quanh trục vuông góc với mặt phẳng quỹ đạo và đi qua C.




a.Tìm các giá trị α ứng với các vị trí cân bằng của vệ tinh.

b.Khi vệ tinh chuyển động, tấm pin mặt trời dao động nhỏ quanh vị trí cân bằng bền. Tìm chu kỳ dao động đó.

ĐS: a. Khi α = 0 là vị trí cân bằng bền, $\alpha = 90^0$ là cân bằng không bền của hệ.

b. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{(R+h)^3}{3GM}}$

**Bài 60. (IPHO 2011).**

1. Hai vật khối lượng M và m quay quanh khối tâm của chúng trên các quỹ đạo tròn bán kính lần lượt là R và r. Tìm tốc độ góc $\omega_0$ của đường nối M và m theo R, r, M, m và hằng số hấp dẫn vũ trụ G.

2. Một vật thứ ba có khối lượng rất nhỏ $\mu$ (so với M và m) chuyển động tròn quanh tâm của hệ sao cho khoảng cách giữa $\mu$ đến M và m không đổi. Cho rằng khối lượng rất nhỏ này không tuyến tính với M và m. Tìm các giá trị sau theo R và r:

**a.** Khoảng cách từ $\mu$ đến M.
**b.** Khoảng cách từ $\mu$ đến m.
**c.** Khoảng cách từ $\mu$ đến khối tâm của hệ.

3. Xét trường hợp M = m. Nếu μ dao động bé dọc theo phương bán kính $O\mu$ thì tần số gốc dao động của $\mu$ quanh vị trí cân bằng (tương đối) của nó là bằng bao nhiêu, tính theo $\omega_0$? Cho rằng momen động lượng của $\mu$ là bảo toàn.

**ĐS:1.** $\omega_0 = \sqrt{\frac{G(M+m)}{(r+R)^3}}$; 2. $r_2 = r_1 = \rho = r + R$; Khi đó tam giác nối μ , m, M là tam giác đều, khoảng cách từ $\mu$ đến khối tâm của hệ: $a = \sqrt{(r+R)^2 - Rr}$;

3.Tần số góc $\omega = \frac{\sqrt{7}}{2}\omega_0$

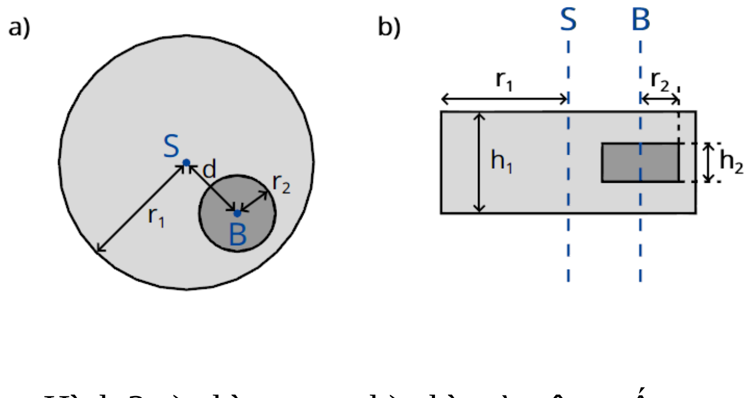
**Bài 61 (Apho 2017).** Ta xét một hình trụ đặc bằng gỗ có bán kính $r_1$ và độ dày $h_1$. Ở một chỗ nào đó trong hình trụ gỗ, một đĩa kim loại có bán kính $r_2$ và độ dày $h_2$ chiếm chỗ của gỗ. Đĩa kim loại được đặt sao cho trục đối xứng B của nó song song với trục đối xứng S của hình trụ gỗ. Đĩa được đặt cách đều mặt trên và mặt dưới của hình trụ gỗ. Ta gọi khoảng cách giữa S và B là d. Khối lượng riêng của gỗ là $\rho_1$, khối lượng riêng của kim loại là $\rho_2 > \rho_1$. Tổng khối lượng của hình trụ gỗ và đĩa kim loại bên trong là M.

Trong phần này, ta đặt hình trụ gỗ lên mặt sàn sao cho nó có thể lăn tự do sang phải hoặc sang trái. Hình 17 là hình ảnh nhìn ngang và nhìn từ trên xuống của dụng cụ này.

Mục đích của nhiệm vụ này là xác định kích thước và vị trí của đĩa kim loại.

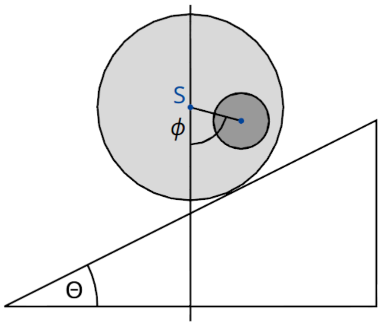
Trong phần tiếp theo, khi được yêu cầu biểu thị kết quả theo các giá trị đã cho, em luôn có thể coi các giá trị sau là đã biết: $r_1$, $h_1$, $\rho_1$, $\rho_2$, M.

Mục tiêu là xác định $r_2$, $h_2$ và d qua các phép đo gián tiếp.




Hình 2 a) nhìn ngang b) nhìn từ trên xuống

Ta gọi b là khoảng cách giữa khối tâm C của cả hệ vật và trục đối xứng S của hình trụ gỗ. Để tìm khoảng cách này, ta thiết kế thí nghiệm như sau: đặt hình trụ gỗ lên một tấm đế nằm ngang sao cho nó ở trạng thái cân bằng bền. Ta từ từ nghiêng tấm đế đến một góc Θ (xem Hình 3). Do có lực ma sát nghỉ, hình trụ gỗ có thể lăn tự do mà không trượt. Hình trụ lăn xuống mặt nghiêng một chút rồi sau đó đứng yên ở trạng thái cân bằng bền trên mặt nghiêng sau khi đã quay đi một góc ϕ mà ta có thể đo được.

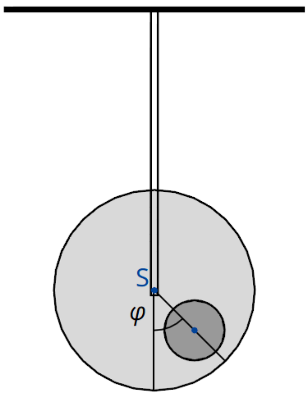



Hình 3. Hình trụ trên tấm đế nghiêng

a) Hãy tìm biểu thức của b theo $r_1$, $h_1$, $\rho_1$, $\rho_2$, M, góc $\phi$ và góc nghiêng $\Theta$ của tấm đế.

Từ đây trở đi, ta coi như đã biết gía trị của b.

Tiếp theo, ta đo moment quán tính $I_S$ của hệ đối với trục đối xứng S. Muốn vậy, treo hình trụ gỗ ở trục đối xứng của nó vào một thanh cứng. Sau đó ta quay hình trụ đi một góc nhỏ $\varphi$ khỏi vị trí cân bằng và thả tay ra. Xem mô hình trên Hình 4. Ta thấy rằng $\varphi$ mô tả một chuyển động tuần hoàn với chu kỳ T.




Hình 4. Hệ treo

b) Hãy tìm phương trình chuyển động của $\varphi$. Hãy biểu thị mô men quán tính $I_S$ của hệ đối với trục đối xứng S theo T, b và các đại lượng đã biết : $r_1$, $h_1$, $\rho_1$, $\rho_2$, M. Em có thể giả thiết rằng ta chỉ làm lệch nhẹ khỏi vị trí cân bằng, do vậy $\varphi$ luôn là rất bé.

Từ các phép đo trong các câu hỏi a) và b), bây giờ ta muốn xác định hình dạng và vị trí của đĩa kim loại bên trong hình trụ gỗ.

c) Hãy tìm biểu thức cho khoảng cách d theo b và các đại lượng $r_1$, $h_1$, $\rho_1$, $\rho_2$, M. Biểu thức có thể bao gồm các biến $r_2$ và $h_2$, các biến này sẽ được tính trong câu hỏi e).

d) Hãy tìm biểu thức của mô men quán tính $I_S$ theo b và các đại lượng $r_1$, $h_1$, $\rho_1$, $\rho_2$, M. Biểu thức có thể bao gồm các biến $r_2$ và $h_2$, các biến này sẽ được tính trong câu hỏi e).

e) Dùng tất cả các kết quả bên trên, em hãy viết biểu thức cho $h_2$ và $r_2$ theo b, T và các đại lượng $r_1$, $h_1$, $\rho_1$, $\rho_2$, M. Em có thể biểu diễn $h_2$ như là hàm của $r_2$.

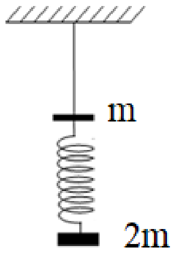
ĐS: a) $b = \dfrac{r_1 \sin\Theta}{\sin\phi}$ b) $I_S = \dfrac{MgbT^2}{4\pi^2}$ c) $d = \dfrac{Mb}{\pi r_2^2 h_2(\rho_2 - \rho_1)}$

d) $I_S = \dfrac{1}{2}\pi h_1 \rho_1 r_1^4 + \dfrac{1}{2}\pi h_2(\rho_2 - \rho_1) r_2^4 + \dfrac{b^2 M^2}{\pi r_2^2 h_2(\rho_2 - \rho_1)}$

e) $r_2 = \sqrt{\dfrac{2}{M - \pi r_1^2 h_1 \rho_1}\left(\dfrac{MbgT^2}{4\pi^2} - \dfrac{1}{2}\pi h_1 \rho_1 r_1^4 - \dfrac{b^2 M^2}{M - \pi r_1^2 h_1 \rho_1}\right)}$ , $h_2 = \dfrac{M - \pi r_1^2 \rho_1 h_1}{\pi r_2^2(\rho_2 - \rho_1)}$

# CHƯƠNG IV.
# DAO ĐỘNG CHẤT ĐIỂM
## IV.1 VIẾT PHƯƠNG TRÌNH DAO ĐỘNG ĐIỀU HÒA

**Bài 1.** Cho hệ như **hình vẽ.** Khi hệ ở trạng thái cân bằng lò xo giãn 30cm. Đốt sợi dây treo.

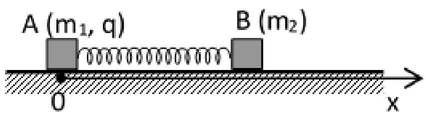



**1.** Xác định gia tốc của các vật ngay sau khi đốt dây.

**2.** Sau bao lâu thì lò xo sẽ đạt đến trạng thái không biến dạng lần đầu tiên? Xác định vận tốc của các vật ở thời điểm đó.

ĐS: 2. $t = \pi / 20(s)$, $v_m \approx 3,57 m/s$, $v_{2m} \approx 0,57 m/s$.

**Bài 2**. Trên mặt phẳng nằm ngang nhẵn có hai vật nhỏ A và B ($m_A$ = m, $m_B$ = 2m) nối với nhau bởi một lò xo nhẹ có độ cứng k có chiều dài tự nhiên $\ell_0$. Vật A được tích điện dương q và cách điện với lò xo còn vật B thì không tích điện. Lúc đầu lò xo không co dãn, tại thời điểm t = 0, bật một điện trường đều có cường độ $\vec{E}$, có phương dọc theo trục của lò xo và hướng từ A sang B như hình vẽ. Cho rằng vùng không gian có điện trường nói trên đủ rộng.

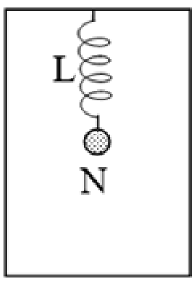



a. Tìm khoảng cách cực đại, cực tiểu giữa hai vật khi chúng chuyển động.

b. Viết phương trình chuyển động của mỗi vật đối với trục tọa độ Ox gắn với sàn, gốc tọa độ trùng vị trí ban đầu của A, chiều dương hướng từ A sang B.

ĐS: a. $l_{min} = l_0 - \dfrac{4qE}{3k}$; $l_{max} = l_0$; b. Phương trình chuyển động của vật A: $u_1 = -\dfrac{4qE}{9k}\cos(\sqrt{\dfrac{3k}{2m}}.t)$, của B: $u_2 = \dfrac{2F}{9k}\cos(\sqrt{\dfrac{3k}{2m}}.t) = \dfrac{2qE}{9k}\cos(\sqrt{\dfrac{3k}{2m}}.t)$

**Bài 3**. Con lắc lò xo treo thẳng đứng vào trần thang máy, lò xo L có độ cứng k = 50N/m, chiều dài khi không biến dạng là $\ell_0$ = 30cm, vật nặng N khối lượng m = 500g buộc vào đầu dưới của lò xo (hình vẽ 2). Lấy g = 10m/s$^2$. Ban đầu thang máy đứng yên.




Tại gốc thời gian cung cấp cho N vận tốc hướng xuống thẳng đứng có độ lớn 40cm/s, thì N thực hiện một dao động điều hòa.

a) Chọn chiều dương hướng xuống. Viết phương trình li độ.

b) Tính chiều dài cực đại và cực tiểu của lò xo khi hệ dao động.

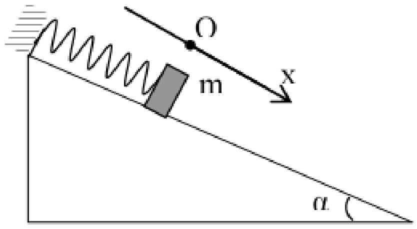
c) Cho thang máy đi lên nhanh dần đều gia tốc có độ lớn $2m/s^2$, vật N vẫn dao động điều hòa quanh vị trí cân bằng O cùng biên độ. Tính độ lớn lực đàn hồi cực đại và cực tiểu tác dụng lên N.

Tại một thời điểm, vật N đang qua vị trí cân bằng O và đi lên thì nó rời khỏi lò xo và sau 0,8 giây vật N chạm sàn thang máy, tính khoảng cách từ O đến sàn.

Đáp số: a) $x = 4\cos\left(10t - \frac{\pi}{2}\right)$cm b) 8N và 4 N c) 3,52 m

**Bài 4.** Con lắc lò xo như hình vẽ. Vật nhỏ khối lượng m = 200g, lò xo lí tưởng có độ cứng k = 1N/cm, góc $\alpha = 30^0$. Lấy $g = 10m/s^2$.

a/ Chọn trục tọa độ như hình vẽ, gốc tọa độ trùng với vị trí cân bằng. Viết phương trình dao động. Biết tại thời điểm ban đầu lò xo bị dãn 2cm và vật có vận tốc $v_0 = 10\sqrt{15}$ cm/s hướng theo chiều dương.



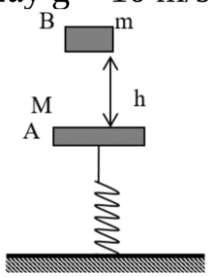

b/ Tại thời điểm $t_1$ lò xo không biến dạng. Hỏi tại $t_2 = t_1 + \frac{\pi}{4\sqrt{5}}$s, vật có tọa độ bao nhiêu?

c/ Tính tốc độ trung bình của m trong khoảng thời gian $\Delta t = t_2 - t_1$.

ĐS: a. $x = 2\cos(10\sqrt{5}t - \frac{\pi}{3})$cm; b. Tọa độ $x_2 = \sqrt{3}$ cm, $x'_2 = -\sqrt{3}$ cm; c. $v_{tb}$ = 26,4m/s hoặc $v_{tb}$ = 30,6m/s.

**Bài 5.** Cho cơ hệ như hình vẽ. Lò xo có khối lượng không đáng kể, có độ cứng K = 40 N/m mang đĩa A có khối lượng M = 60g. Thả vật B có khối lượng m = 100g rơi tự do từ độ cao

h = 10 cm so với đĩa A. Va chạm giữa vật B và đĩa A là va chạm mềm. Lấy $g = 10 m/s^2$.



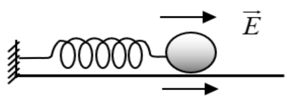

a. Tính biên độ và chu kỳ dao động điều hòa của hệ .

b. Tính khoảng thời gian lò xo giãn trong một chu kỳ.

ĐS: a. $A \approx 6,1cm, T \approx 0,4s$ ; $\tau \approx 0,1s$

**Bài 6.**

Một con lắc lò xo gồm một vật nhỏ có khối lượng $m_1 = 100g$, được tích điện đến điện tích q = 2μC và một lò xo có độ cứng 40N/m được đặt trên mặt phẳng nằm ngang không ma sát. Ban đầu (t = 0) khi vật nhỏ đang nằm yên ở vị trí cân bằng thì người ta đặt con lắc vào điện trường đều có phương nằm ngang như hình vẽ, cường độ điện trường $E = 10^6$ V/m. Khi con lắc dao động điều hòa đến thời điểm $t = \frac{19}{12}T$ thì ngừng tác dụng điện trường (cho E = 0) đồng thời bắn một vật khối lượng $m_2 = m_1$ với vận tốc bằng vận tốc cực đại của $m_1$ (lúc trước khi ngừng tác dụng điện trường) vào vật $m_1$ theo hướng cùng chiều chuyển động với $m_1$ khi đó. Tìm biên độ dao động của vật trước và sau khi bắn trong các trường hợp sau:

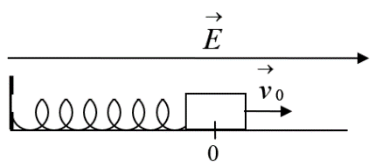



a) Va chạm là va chạm mềm

b) Va chạm là hoàn toàn đàn hồi.

ĐS: a. 10,73 cm; b. 10,59 cm.

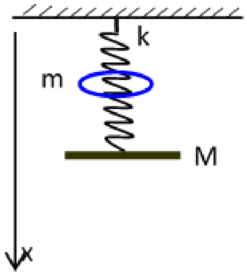
**Bài 7.** Một vật nặng có khối lượng m, điện tích dương q được gắn vào lò xo có độ cứng k khối lượng không đáng kể tạo thành con lắc lò xo nằm ngang. Điện tích trên vật nặng không thay đổi khi con lắc dao động. Kích thích cho con lắc dao động điều hòa với biên độ A. Tại thời điểm vật nặng đi qua vị trí cân bằng và có vận tốc hướng ra xa gốc lò xo, người ta bật một điện trường đều có cường độ E, cùng hướng với vận tốc của vật. Tìm thời gian từ lúc bật điện trường đến thời điểm con lắc dừng lại lần đầu tiên.




ĐS: $$\Delta t = \frac{\pi - \arccos\frac{Eq}{\sqrt{E^2q^2 + A^2k^2}}}{\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

**Bài 8.**

Một đĩa có khối lượng M=0,3 kg treo dưới một lò xo nhẹ có hệ số đàn hồi là k=200 N/m. Một chiếc vòng khối lượng m=0,2kg rơi từ độ cao h = 3,75 cm so với mặt đĩa xuống đĩa, va chạm hoàn toàn mềm với đĩa. Sau va chạm, đĩa và vòng dao động điều hoà.



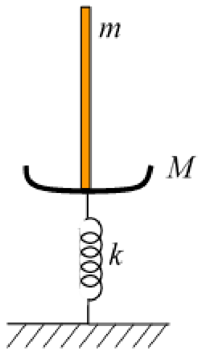

1. Viết phương trình dao động của hệ. Lấy trục tọa độ ox thẳng đứng, hướng xuống dưới, gốc toạ độ là VTCB của hệ, gốc thời gian là thời điểm ngay sau va chạm.

2.Tính biên độ dao động lớn nhất của hệ để trong quá trình dao động thì vòng không bị nảy lên khỏi đĩa

Bỏ qua mọi ma sát, sức cản. Lấy g = 10 m/s$^2$.

ĐS: 1. $x = 2cos(20t - \frac{2\pi}{3})$ (cm); 2. 2,5cm

**Bài 9.** Một sợi dây xích mềm đồng chất tiết diện đều, có chiều dài l, khối lượng m được treo cân bằng, đầu dưới chạm vào một đĩa có khối lượng M . Đĩa được gắn với một lò xo có độ cứng k đầu dưới của lò xo cố định. Người ta thả cho xích rơi xuống va chạm mềm với đĩa. Coi rằng sau va chạm hệ dao động điều hoà theo phương thẳng đứng.




a, Lập biểu thức tính vận tốc của hệ sau va chạm.

b, Lập biểu thức năng lượng dao động của hệ.

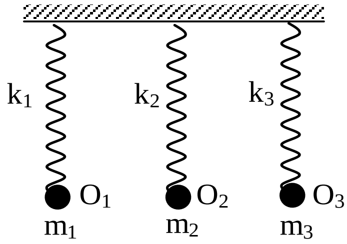
ĐS: a. $V = \frac{2m}{3(M+m)}\sqrt{2gl}$ ; b. $E = \frac{4m^2gl}{M+m} + \frac{m^2g^2}{2k}$

**Bài 10. 1.**Ba vật nhỏ khối lượng lần lượt là $m_1$, $m_2$ và $m_3$ (với $m_1 = m_2 = \frac{m_3}{2} = 100\ gam$) được treo vào 3 lò xo lí tưởng có độ cứng lần lượt $k_1$, $k_2$, $k_3$ (với $k_1 = k_2 = \frac{k_3}{2} = 40\ N/m$). Tại vị trí cân bằng, ba vật cùng nằm trên một đường thẳng nằm ngang và cách đều nhau

($O_1O_2 = O_2O_3 = 1{,}5\ cm$) như hình vẽ 3. Kích thích đồng thời cho cả ba vật dao động điều

hòa theo các cách khác nhau: Từ vị trí cân bằng truyền cho $m_1$ vận tốc 60cm/s hướng

thẳng đứng lên trên; $m_2$ được thả nhẹ nhàng từ một điểm phía dưới vị trí cân bằng, cách vị trí cân bằng một đoạn 1,5cm. Chọn trục Ox hướng thẳng đứng xuống dưới, gốc O tại vị trí cân bằng, gốc thời gian ($t = 0$) lúc các vật bắt đầu dao động.




*Hình vẽ 3*

a. Viết các phương trình dao động điều hòa của vật $m_1$ và vật $m_2$. Nếu vào thời điểm t vật $m_1$ ở vị trí có li độ $x_1 = 2cm$ và đang giảm thì sau đó $\frac{\pi}{20}s$ vật $m_2$ có tốc độ là bao nhiêu?

b. Tính khoảng cách lớn nhất giữa $m_1$ và $m_2$ trong quá trình dao động.

c. Viết phương trình dao động của vật $m_3$ để trong suốt quá trình dao động ba vật luôn nằm trên cùng một đường thẳng?

**2.** Một con lắc lò xo có độ cứng $k = 40\ N/m$, vật nhỏ khối lượng $m = 100(g)$ đặt trên mặt bàn nằm ngang. Hệ số ma sát trượt giữa vật và mặt bàn là $\mu = 0,16$. Ban đầu giữ vật sao cho lò xo bị nén 10(cm) rồi thả nhẹ. Lấy $g = 10(m/s^2)$. Xác định:

a. Tốc độ của vật lúc gia tốc của nó đổi chiều lần thứ 4.

b. Quãng đường vật đi được cho đến khi dừng hẳn.

**Bài 11.** Một con lắc lò xo treo thẳng đứng gồm vật nhỏ có khối lượng m = 250g và một lò xo nhẹ có độ cứng k = 100N/m. Kéo vật m xuống theo phương thẳng đứng đến vị trí lò xo giãn 7,5cm rồi thả nhẹ. Chọn gốc toạ độ ở vị trí cân bằng của vật, trục tọa độ thẳng đứng, chiều dương hướng xuống dưới, chọn gốc thời gian là lúc thả vật. Lấy $g = 10m/s^2$ và $\pi^2 \approx 10$. Coi vật dao động điều hòa.

1. Viết phương trình dao động

2. Tìm thời gian từ lúc thả vật đến khi vật tới vị trí lò xo không biến dạng lần đầu tiên.

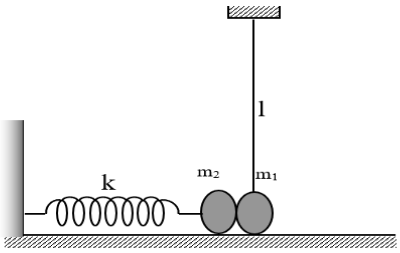
3. Xác định độ lớn lực đàn hồi tại thời điểm động năng bằng ba lần thế năng.

4. Xác định khoảng thời gian lò xo bị giãn trong một chu kì.

ĐS: 1. $x = 5\cos 20t\ (cm)$ ; 2. $\frac{\pi}{30}(s)$; 3. 5N ; 4. $\frac{\pi}{15}(s)$

**Bài 12.**

Con lắc đơn gồm quả cầu nhỏ khối lượng $m_1$ = 100g và sợi dây lý tưởng chiều dài là l = 1,0m. Con lắc lò xo gồm lò xo có khối lượng không đáng kể, độ cứng k = 25$\frac{N}{m}$ và quả cầu nhỏ khối lượng $m_2 = m_1$ (hình vẽ bên). Lấy $g = 10\frac{m}{s^2}$; $\pi^2 = 10$. Bố trí hai con lắc sao cho khi hệ cân bằng lò xo không biến dạng, sợi dây thẳng đứng. Kéo $m_1$ lệch khỏi vị trí cân bằng để sợi dây lệch một góc nhỏ $\alpha_0 = 0,1$ rad rồi thả nhẹ.




a/ Tìm vận tốc của $m_2$ ngay sau khi va chạm với $m_1$ và độ nén cực đại của lò xo. Coi va chạm là tuyệt đối đàn hồi (bỏ qua mọi ma sát).

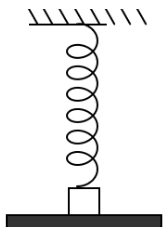
b/ Tìm chu kì dao động của hệ.

c/ Vẽ đồ thị biểu diễn sự phụ thuộc của vận tốc theo thời gian của con lắc lò xo. Chọn gốc thời gian là lúc va chạm.

ĐS: a. 0,314 (m/s), 2cm; b. 2s.

**Bài 13.**

Một con lắc gồm một vật nặng có khối lượng m=100g được treo vào đầu dưới của một lò xo thẳng đứng đầu trên cố định. Lò xo có độ cứng K=20N/m, vật m được đặt trên một giá đỡ nằm ngang(hình vẽ). Ban đầu giữ giá đỡ để lò xo không bị biến dạng, rồi cho giá đỡ chuyển động thẳng xuống nhanh dần đều với gia tốc $a=2m/s^2$. Lấy $g=10m/s^2$.



**1-** Hỏi sau bao lâu thì vật rời khỏi giá đỡ?

**2-** Cho rằng sau khi rời giá đỡ vật dao động điều hoà.Viết phương trình dao động của vật. Chọn gốc thời gian lúc vật vừa rời giá đỡ, gốc tọa độ ở vị trí cân bằng, trục tọa độ thang đứng, chiều dương hướng xuống.

ĐS: 2. $x = A\sin(\omega t + \varphi) = 3\sin(10\sqrt{2}t - \frac{\pi}{9})cm$.

**Bài 14.** Một con lắc lo xo gồm vật nặng M=300g,độ cứng k=200N/m như (hình vẽ 3). Khi M đang

ở vị trí cân bằng thả vật m=200g từ độ cao h=3,75cm so với M.Sau va chạm hệ M và m bắt đầu dao động điều hòa . Bỏqua ma sát,lấy g=10m/s$^2$ .Coi va chạm giữa m và M là hoàn toàn không đàn hồi.

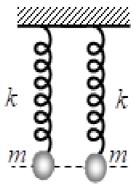
a.Tính vận tốc của m ngay trước va chạm,và vận tốc của hai vật ngay sau va chạm

b.Viết phương trình dao động của hệ (M+m) chọn gốc thời gian là lúc va chạm , trục tọa độ 0x thẳng đứng hướng lên gốc 0 là vị trí cân bằng của hệ sau va chạm.

c. Tính biên độ dao động cực đại của hai vật để trong quá trình dao động vật m không rời khỏi M

ĐS: a. $50\sqrt{3}$ cm/s; $20\sqrt{3}$ cm; b. x=2cos(20t+$\frac{\pi}{3}$) (cm); c. 2,5cm

**Bài 15.**



Hình 1

Hai con lắc lò xo giống hệt nhau được treo thẳng đứng, sát nhau trên cùng một giá cố định nằm ngang. Mỗi con lắc gồm: lò xo nhẹ có độ cứng $k = 0,2(N/cm)$; vật nhỏ có khối lượng $m$ như hình 1. Chọn trục $Ox$ có gốc tọa độ trùng với vị trí cân bằng của vật, phương thẳng đứng, chiều dương hướng xuống dưới. Bỏ qua mọi ma sát, lấy $g = 10(m/s^2)$. Kích thích cùng lúc cho hai vật dao động điều hòa với phương trình lần lượt: $x_1 = 4\cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{3}\right)(cm)$, $x_2 = 4\sqrt{2}\cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{12}\right)(cm)$.

a) Phải kích thích thế nào để hai con lắc dao động theo hai phương trình trên?

b) Tìm lực cực đại tác dụng lên giá treo con lắc.

c) Kể từ thời điểm $t_1 = \frac{1}{24}(s)$ đến thời điểm $t_2 = \frac{1}{3}(s)$ thì thời gian mà khoảng cách giữa hai vật theo phương $Ox$ không nhỏ hơn $2\sqrt{3}(cm)$ là bao nhiêu?

ĐS: a. Con lắc 1, lúc t = 0 thì kéo vật xuống một đoạn dưới vị trí cân bằng 2cm rồi truyền cho vật tốc độ $8\pi\sqrt{3}$ cm/s hướng lên trên

+ Con lắc 2 lúc t = 0 thì kéo vật xuống một đoạn dưới vị trí cân bằng 5,46cm rồi truyền cho vật tốc độ 18,4 cm/s hướng lên trên.

b. $F_{max} \approx$ 4,32 N; c. $\Delta t = \frac{T}{4} = 0{,}125s$

**Bài 16.** Con lắc lò xo được treo vào điểm 0 cố định. Lò xo có khối lượng không đáng kể và có độ cứng là K, vật nặng có kích thước nhỏ và khối lượng m. Bỏ qua ma sát.

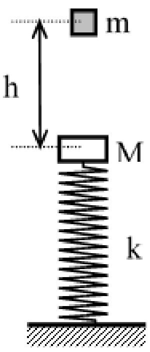
Vật nặng đang ở vị trí cân bằng thì tác dụng lên nó một lực theo phương thẳng đứng có cường độ F = $F_0$cos(ω>t). Cho gia tốc trọng trường là g.

a) Chứng minh vật dao động điều hòa với tần số ω.

b) Tìm biên độ dao động cưỡng bức và vẽ đồ thị biên độ A theo *Cù* - Nêu nhận xét về sự phụ thuộc của A vào ω.

ĐS: $A = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2}$

**Bài 17.** Một con lắc lò xo gồm vật nặng có khối lượng $M = 300g$, lò xo nhẹ có độ cứng $k = 200N/m$. Khi M đang ở vị trí cân bằng thì thả nhẹ vật $m = 200g$ rơi từ độ cao $h = 3{,}75cm$ so với M như hình 1. Coi va chạm giữa m và M là hoàn toàn mềm. Sau va chạm, hệ M và m bắt đầu dao động điều hòa. Lấy $g = 10m/s^2$. Bỏ qua mọi ma sát và lực cản môi trường.



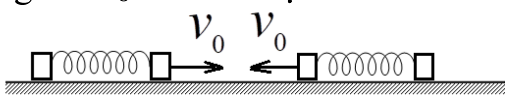
Hình 1

a, Viết phương trình dao động của hệ (M+m). Chọn gốc thời gian là lúc va chạm, trục tọa độ Ox thẳng đứng hướng lên, gốc O tại vị trí cân bằng của hệ sau va chạm.

b, Tính biên độ dao động cực đại của hệ vật để trong quá trình dao động vật m không rời khỏi M.

ĐS: a. $x = 2\cos\left(20t + \frac{\pi}{3}\right)cm$; b. 2,5cm

**Bài 18.** Hai hệ vật giống nhau, mỗi hệ gồm hai vật khối lượng m nối với nhau bằng một lò xo độ cứng k và chuyển động với vận tốc không đổi $v_o$ đến va chạm đàn hồi với nhau. Tại một thời điểm nào đó khoảng cách hai vật va chạm bằng L. Xác định khoảng thời gian tiếp theo đó để hai vật cách nhau L bỏ qua mọi ma sát và lực cản?




ĐS: Xét trường hợp $v_o$. $\sqrt{\frac{m}{2k}} > \frac{L}{2} : \theta_1 = \frac{L}{2v_0} + \sqrt{\frac{m}{2k}} \arcsin \frac{L}{2v_0}\sqrt{\frac{2k}{m}}$

Xét trường hợp $v_o$. $\sqrt{\frac{m}{2k}} = \frac{L}{2}: \theta_2 = \frac{L}{2v_0} + \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{2k}}$

Xét trường hợp $v_o.\sqrt{\frac{m}{2k}} < \frac{L}{2}$: $\theta_3 = \frac{L}{v_0} + \pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$

**Bài 19.** Một con lắc lò xo nằm ngang có độ cứng $K = 40(N/m)$, vật nhỏ khối lượng $m = 100(g)$. Ban đầu giữ vật sao cho lò xo bị nén 10(cm) rồi thả nhẹ.

**1.** Bỏ qua mọi ma sát, vật dao động điều hoà.

**a)** Viết phương trình dao động của vật, chọn gốc O là vị trí cân bằng của vật, chiều dương là chiều chuyển động của vật lúc thả, gốc thời gian lúc thả vật.

**b)** Xác định thời điểm lò xo nén 5cm lần thứ 2010 kể từ lúc thả.

**2.** Thực tế có ma sát giữa vật và mặt bàn với hệ số ma sát trượt giữa vật và mặt bàn là $\mu = 0,1$. Lấy $g = 10(m/s^2)$. Tính tốc độ của vật lúc gia tốc của nó đổi chiều lần thứ 4.

**ĐS: 1a.** $x = 10.\cos(20t + \pi)(cm)$ **; 1b.** $t_{2010} = \frac{6029\pi}{60}(s)$ **; 2.** $v_4 = 1,65(m/s)$

**Bài 20.** Một vật nhỏ dao động điều hòa trên trục tọa độ Ox với biên độ 10cm và đạt gia tốc lớn nhất tại li độ $x_1$. Sau đó, vật lần lượt đi qua các điểm có li độ $x_2$, $x_3$, $x_4$, $x_5$, $x_6$, $x_7$ trong những khoảng thời gian bằng nhau $\Delta t = 0,1s$. Biết thời gian vật đi từ $x_1$ đến $x_7$ hết một nửa chu kì.

1. Tìm khoảng cách nhỏ nhất và khoảng cách lớn nhất giữa hai điểm gần nhau liên tiếp.

2. Tìm tốc độ trung bình lớn nhất của chất điểm chuyển động trong 0,8s.

ĐS:1. 5cm, 1,34cm; 2. 37,5cm/s.

**Bài 21.** Hai con lắc lò xo giống nhau treo thẳng đứng, sát nhau trên cùng một giá nằm ngang gồm: lò xo nhẹ có độ cứng k = 0,2N/cm; vật nhỏ có khối lượng m. Chọn hệ trục tọa độ theo phương thẳng đứng, chiều dương hướng xuống dưới, gốc tọa độ trùng với vị trí cân bằng của vật. Lấy g = 10m/s$^2$. Kích thích cùng lúc cho hai vật dao động với phương trình của vật 1 là $x_1$ = 6cos $(20t - \frac{\pi}{3})$ cm và phương trình của vật 2 là $x_2 = 6\sqrt{3}$ cos$(20t + \frac{\pi}{6})$ cm.

1. Phải kích thích thế nào để hai con lắc dao động với hai phương trình trên.

2. Tìm khoảng cách dài nhất giữa hai vật trong quá trình dao động.

3. Tìm lực cực đại tác dụng lên giá treo con lắc.

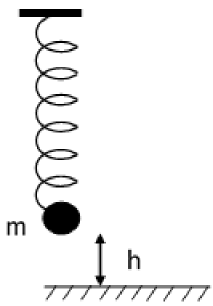
ĐS: **1.** Con lắc 1. Tại thời điểm t = 0 thì

kéo vật xuống một đoạn dưới vị trí cân bằng 3cm rồi cấp cho vật vận tốc $60\sqrt{3}$ cm/s theo chiều hướng xuống dưới

Con lắc 2. Tại thời điểm t = 0 thì kéo vật xuống một đoạn dưới vị trí cân bằng 9cm rồi cấp cho vật vận tốc $60\sqrt{3}$ cm/s theo chiều hướng lên trên.

**2.**12cm; **3.** 3,4N

**Bài 22.** Một lò xo treo thẳng đứng, đầu trên được gắn cố định, đầu dưới gắn vật nặng có khối lượng m = 0,2 kg. Ở vị trí cân bằng (VTCB) lò xo giãn 16 cm. Lấy $g = \pi^2 \approx 10$ m/$s^2$.




**a)** Tính độ cứng của lò xo và chu kỳ dao động $T_0$ của hệ.

**b)** Vật m đang đứng yên ở VTCB, tác dụng lên m một lực theo phương thẳng đứng hướng xuống dưới có độ lớn 2,5 N trong thời gian 1 s. Tìm biên độ dao động và quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó.

**c)** Vật m đang đứng yên ở VTCB, tác dụng lên m một lực theo phương thẳng đứng hướng xuống dưới có độ lớn 105 N trong thời gian $3.10^{-3}$ s. Tìm biên độ dao động của vật.

**d)** Vật đang dao động tự do với biên độ như phần c, người ta đặt một bản cứng cố định, nằm ngang cách vị trí cân bằng một đoạn h =10 cm (hình vẽ). Khi dao động vật va chạm đàn hồi vào bản này. Tính chu kỳ mới của dao động.

ĐS: a. $k = 12,5N/m$ ;$T_0 = 0,8s$ ; b. $A = 20cm$ , $S = 100cm$ ; c. $A = 20cm$ ;

d. $T = \frac{2}{3}T_0 \approx 0,53$ s

**Bài 23.** Một con lắc lò xo treo thẳng đứng gồm vật nặng có khối lượng m = 100(g) và lò xo nhẹ có độ cứng k = 100(N/m). Nâng vật nặng lên theo phương thẳng đứng đến vị trí lò xo không bị biến dạng, rồi truyền cho nó vận tốc $10\sqrt{30}$ (cm/s) thẳng đứng hướng lên. Chọn gốc thời gian là lúc truyền vận tốc cho vật nặng. Chọn trục tọa độ Ox thẳng đứng, chiều dương hướng xuống, gốc tọa độ O ở vị trí cân bằng. Lấy g = 10(m/s$^2$); $\pi^2 \approx 10$.

1. Nếu sức cản của môi trường không đáng kể, con lắc lò xo dao động điều hòa. Tính:

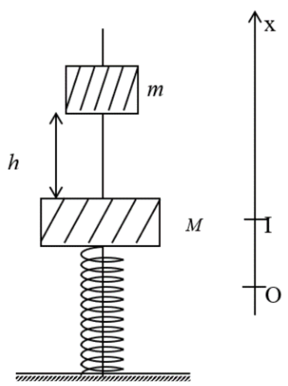
- Độ lớn của lực đàn hồi mà lò xo tác dụng vào vật lúc t = 1/3(s).

- Tốc độ trung bình của vật trong khoảng thời gian 1/6(s) đầu tiên.

2. Nếu lực cản của môi trường tác dụng lên vật nặng có độ lớn không đổi và bằng $F_C$ = 0,1(N) Hãy tìm tốc độ lớn nhất của vật sau khi truyền vận tốc.

ĐS: 1. 3N ; 36cm/s ; 2. $0,586(m/s)$

**Bài 24.** Một con lắc lò xo gồm vật nặng khối lượng M = 300g, một lò xo có độ cứng k = 200N/m được lồng vào một trục thẳng đứng như hình 2 . Khi M đang ở vị trí cân bằng, thả một vật m = 200g từ độ cao h = 3,75cm so với M. Coi ma sát không đáng kể, lấy g = 10m/s$^2$, va chạm là hoàn toàn mềm.




a) Tính vận tốc của m ngay trước khi va chạm và vận tốc của hai vật ngay sau va chạm.

b) Sau va chạm hai vật cùng dao động điều hòa. Lấy t = 0 là lúc va chạm. Viết phương trình dao động của hai vật. Chọn hệ tọa độ như hình vẽ, I là vị trí cân bằng của M trước va chạm, O là vị trí cân bằng của hai vật sau va chạm.

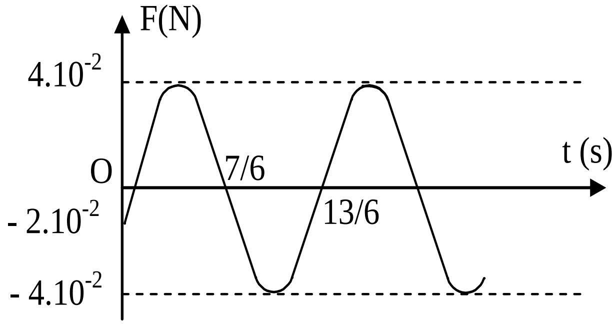
c) Tính biên độ dao động cực đại của hai vật để trong quá trình dao động m không rời khỏi M.

ĐS : a $0,866 m/s$; $0,346 m/s$; b. $x = 2.\cos(20t + \frac{\pi}{3})(cm)$ ; c. 2,5cm

**Bài 25.**

1) Một vật có khối lượng $m = 100(g)$, dao động điều hoà theo phương trình có dạng $x = A\cos(\omega t + \varphi)$. Biết đồ thị lực kéo về theo thời gian F(t) như hình vẽ. Lấy $\pi^2 = 10$. Viết phương trình dao động của vật.

2) Một chất điểm dao động điều hòa với chu kì T và biên độ 12(cm). Biết trong một chu kì, khoảng thời gian để vận tốc có độ lớn không vượt quá $24\pi\sqrt{3}$ (cm/s) là $\frac{2T}{3}$. Xác định chu kì dao động của chất điểm.




3) Một con lắc lò xo đặt trên mặt phẳng nằm ngang có $k = 100$ (N/m), $m = 500(g)$. Đưa quả cầu đến vị trí mà lò xo bị nén 10cm, rồi thả nhẹ. Biết hệ số ma sát giữa vật và mặt phẳng nằm ngang là μ = 0,2. Lấy g = 10(m/s$^2$). Tính vận tốc cực đại mà vật đạt được trong quá trình dao động.

ĐS: 1. x= 4cos(πt + π/3) cm; 2. 0,5s; 3. $90\sqrt{2}$ (cm/s).

**Bài 26.** Một con lắc lò xo treo thẳng đứng gồm vật nhỏ khối lượng m = 250g và một lò xo nhẹ có độ cứng k = 100 N/m. Kéo vật m xuống dưới theo phương thẳng đứng đến vị trí lò xo giãn 7,5 cm rồi thả nhẹ. Chọn gốc tọa độ ở vị trí cân bằng của vật, trục tọa độ thẳng đứng, chiều dương hướng lên trên, gốc thời gian là lúc thả vật. Cho g = 10m/s$^2$. Coi vật dao động điều hòa

a. Viết phương trình dao động
b. Tính thời gian từ lúc thả vật đến thời điểm vật đi qua vị trí lò xo không biến dạng lần thứ nhất.
c. Thực tế trong quá trình dao động vật luôn chịu tác dụng của lực cản có độ lớn bằng $\frac{1}{50}$ trọng lực tác dụng lên vật, coi biên độ dao động của vật giảm đều trong từng chu kì tính số lần vật đi qua vị trí cân bằng kể từ khi thả.

ĐS: a. $x = 5\cos(20t + \pi)(cm)$; b. $\frac{\pi}{30}(s)$; c. 50 lần

**Bài 27.** Một con lắc đơn gồm quả cầu kim loại khối lượng m = 0,1kg được treo vào một điểm A cố định bằng một đoạn dây mảnh có độ dài l = 5m. Đưa quả cầu ra khỏi vị trí cân bằng cho đến khi dây treo nghiêng với góc thẳng đứng một góc $\alpha_0$ = 9$^0$ rồi buông cho nó dao động điều hòa. Lấy g =π$^2$ = 10 m/s$^2$.

a. Viết phương trình dao động của con lắc theo li độ góc và li độ dài ? Chọn gốc thời gian lúc buông vật.

b.Tính động năng của nó sau khi buông một khoảng thời gian t = $\frac{\pi}{6\sqrt{2}}$ (s)? Xác định cơ năng toàn phần của con lắc?

c. Xác định lực căng của dây treo con lắc khi vật đi qua vị trí cân bằng?

ĐS: a. $\alpha = \frac{\pi}{20}\cos(\sqrt{2}t)$ rad; s = $\frac{\pi}{4}\cos(\sqrt{2}t)$ m; b. 0,015625J; 0,0625J; c. 5,123N

**Bài 28.** Một con lắc đơn gồm một vật nhỏ có khối lượng m = 2 gam và một dây treo mảnh, chiều dài l, được kích thích cho dao động điều hòa. Trong khoảng thời gian Δt con lắc thực hiện được 40 dao động. Khi tăng chiều dài con lắc thêm một đoạn bằng 7,9 cm, thì cũng trong khoảng thời gian Δt nó thực hiện được 39 dao động. Lấy gia tốc trọng trường g = 9,8 m/s$^2$ .

a) Kí hiệu chiều dài mới của con lắc là l’. Tính l, l’ và các chu kì dao động T, T’ tương ứng.
b) Để con lắc với chiều dài l’ có cùng chu kỳ dao động như con lắc chiều dài l, người ta truyền cho vật điện tích q = + 0,5.10$^{-8}$ C rồi cho nó dao động điều hòa trong một điện trường đều $\vec{E}$ có đường sức thẳng đứng. Xác định chiều và độ lớn của vectơ cường độ điện trường.

ĐS: a. $l = 152,1cm$, $l' = 160\,cm$, $T \approx 2,475(s)$, $T' \approx 2,538(s)$.

b. $\vec{E}$ có chiều hướng xuống, cùng chiều với $\vec{P}$, $E \approx 2,04.10^5 V/m$

**Bài 29.** Một con lắc lò xo được treo thẳng đứng gồm vật nặng khối lượng m = 1kg, lò xo nhẹ có độ cứng k = 100N/m. Đặt giá B nằm ngang đỡ vật m để lò xo có chiều dài tự nhiên. Cho giá B chuyển động đi xuống với gia tốc a = 2m/s$^2$ không vận tốc ban đầu.

a. Tính thời gian từ khi giá B bắt đầu chuyển động cho đến khi vật rời giá B.

b. Chọn trục tọa độ có phương thẳng đứng, chiều dương hướng xuống, gốc tọa độ tại vị trí cân bằng của vật, gốc thời gian là lúc vật rời giá B. Viết phương trình dao động điều hòa của vật.

ĐS: a. $t = \sqrt{\frac{2m(g - a)}{ka}} = 0,283$ s; b. x = 6cos(10t - 1,91) cm.

**Bài 30.** Một sợi dây cao su nhẹ đàn hồi có độ cứng k = 25N/m đầu trên được giữ cố định, đầu dưới treo vật m = 625g. Cho g = 10m/s$^2$, $\pi^2 = 10$.

1) Kéo vật rời khỏi vị trí cân bằng theo phương thẳng đứng hướng xuống dưới một đoạn bằng 5cm rồi thả nhẹ cho vật dao động điều hòa. Chọn gốc thời gian là lúc thả vật, gốc tọa độ tại vị trí cân bằng, chiều dương hướng xuống.

a) Viết phương trình dao động của vật.

b) Tính tốc độ trung bình của vật kể từ lúc bắt đầu chuyển động đến lúc vật qua vị trí có x = -2,5cm lần thứ 2.

2) Vật đang ở vị trí cân bằng, truyền cho vật vận tốc 2m/s hướng thẳng đứng xuống dưới. Xác định độ cao cực đại của vật so với vị trí cân bằng.

ĐS: 1a. $x = 5\cos 2\pi t(cm)$.; 1b. $18,75(cm/s)$. 2. $h_{max}$ = 32,5cm.

**Bài 31.** Một con lắc đơn gồm dây treo dài $\ell = 1(m)$ gắn một đầu với vật có khối lượng m. Lấy g = 10(m/s$^2$), $\pi^2$ = 10.

**a.** Treo con lắc đơn trên vào một giá cố định trong trường trọng lực. Người ta kéo vật ra khỏi vị trí cân bằng để dây treo lệch góc 0,02rad về bên phải, rồi truyền cho vật một vận tốc 4π(cm/s) về bên trái cho vật dao động điều hòa. Chọn hệ quy chiếu có gốc ở vị trí cân bằng, chiều dương hướng sang trái, chọn thời điểm ban đầu là lúc vật qua vị trí cân bằng lần đầu. Viết phương trình li độ góc của vật.

**b.** Người ta đem con lắc đơn nói trên gắn vào trần xe ôtô, ôtô đang đi lên dốc chậm dần đều với gia tốc 5(m/s$^2$). Biết dốc nghiêng một góc $30^0$ so với phương ngang. Tính chu kì dao động của con lắc trong trường hợp trên.

ĐS: a. s = $2\sqrt{5}$ cos(πt - π/2) (cm); b. $T' = 2\pi\sqrt{\frac{1}{5\sqrt{3}}} \approx 2,135(s)$

**Bài 32.**

**1.** Một con lắc đơn có chiều dài $l = 40cm$, quả cầu nhỏ có khối lượng $m = 600g$ được treo tại nơi có gia tốc rơi tự do $g = 10m/s^2$. Bỏ qua sức cản không khí. Đưa con lắc lệch khỏi phương thẳng đứng một góc $\alpha_0 = 0,15rad$ rồi thả nhẹ, quả cầu dao động điều hoà.

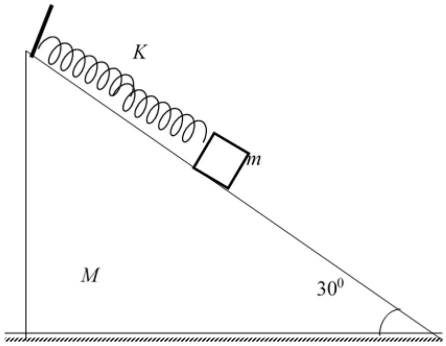
a) Tính chu kì dao động T và tốc độ cực đại của quả cầu.

b) Tính sức căng dây treo khi quả cầu đi qua vị trí cân bằng.

c) Tính tốc độ trung bình của quả cầu sau n chu kì.

d) Tính quãng đường cực đại mà quả cầu đi được trong khoảng thời gian 2T/3 và tốc độ của quả cầu tại thời điểm cuối của quãng đường cực đại nói trên.

**2.** Một lò xo nhẹ có độ cứng $K$, đầu trên được gắn vào giá cố định trên mặt nêm nghiêng một góc $\alpha$ so với phương ngang, đầu dưới gắn vào vật nhỏ có khối lượng $m$ (hình vẽ 1). Bỏ qua ma sát ở mặt nêm và ma sát giữa nêm với sàn ngang. Nêm có khối lượng M. Ban đầu nêm được giữ chặt, kéo m lệch khỏi vị trí cân bằng một đoạn nhỏ rồi thả nhẹ vật và đồng thời buông nêm. Tính chu kì dao động của vật m so với nêm.

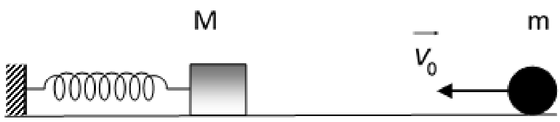



ĐS: 1a. $1,257(s)$; $30cm/s$; 1b. 6,135N; 1c. 19,1 cm/s; 1d. 18cm .

$$2.T = 2\pi\sqrt{\frac{m(M + m.\sin^2\alpha)}{K.(M + m)}}$$

**Bài 33**. Một khối gỗ khối lượng M=400g được treo vào lò xo có độ cứng k=100N/m. Một viên bi khối lượng m=100g được bắn đến với vận tốc $v_0$= 50cm/s va chạm vào khối gỗ. Sau va chạm hệ dao động điều hòa.

Xác định chu kì và biên độ dao động.




Biết va chạm tuyệt đối đàn hồi.

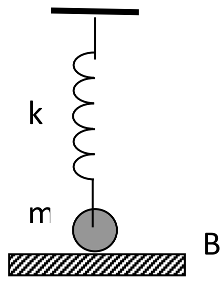
ĐS: $T = \frac{2\pi}{5}(s)$; $A = 4(cm)$

**Bài 34.** 1) Một vật thực hiện đồng thời hai dao động điều hòa cùng phương có phương trình: $x_1 = A_1\cos(2\pi t)(cm)$ và $x_2 = 2,5\sqrt{3}\cos(2\pi t + \varphi_2)(cm)$. Phương trình dao động tổng hợp thu được là: $x = 2,5\cos(2\pi t + \varphi)(cm)$. Biết $\varphi < \varphi_2$ và $A_1$ đạt giá trị lớn nhất. Xác định $A_{1(max)}$, $\varphi_2$ và φ.

2) Một con lắc lò xo treo thẳng đứng như hình 2. Vật có khối lượng m = 1kg, lò xo nhẹ có độ cứng k = 100N/m. Đặt giá B nằm ngang đỡ vật m để lò xo có chiều dài tự nhiên. Cho giá B chuyển động xuống nhanh dần đều không vận tốc đầu với gia tốc a = $2m/s^2$. Lấy $g = 10m/s^2$.

a) Tính thời gian từ khi giá B bắt đầu chuyển động cho đến khi vật m rời giá B.

b) Sau khi rời giá B thì vật m dao động điều hòa. Viết phương trình dao động của vật. Chọn trục tọa độ thẳng đứng, chiều dương hướng xuống, gốc tọa độ tại vị trí cân bằng của vật m, gốc thời gian là lúc vật m đi qua vị trí lò xo giãn 7cm hướng về vị trí cân bằng.



Hình 2

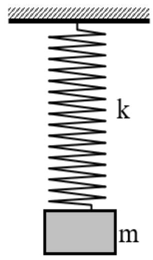
c) Xác định thời điểm vật đi qua vị trí có động năng gấp 3 lần thế năng lần thứ 2013.

ĐS: 1. $A_{1max} = 5(cm)$, $\varphi_2 = \frac{5\pi}{6}$; φ = π/3

2 a. $t = \sqrt{0,08}(s)$ 2b. $x = 6\cos(10t - \frac{2\pi}{3})\ (cm)$ ; c. $t = \frac{3019\pi}{30}(s)$

**Bài 35.**

Cho con lắc lò xo gồm lò xo nhẹ có độ cứng $k = 50N/m$, vật nặng kích thước nhỏ có khối lượng $m = 500g$ (Hình 2). Kích thích cho vật dao động điều hòa theo phương thẳng đứng. Chọn gốc thời gian là lúc vật qua vị trí có li độ $x = 2,5cm$ với tốc độ $25\sqrt{3}\,cm/s$ theo phương thẳng đứng hướng xuống dưới. Chọn trục tọa độ Ox theo phương thẳng đứng, chiều dương hướng lên trên, gốc O trùng với vị trí cân bằng của vật. Lấy $g = 10m/s^2$.



**Hình 2**

a) Viết phương trình dao động của vật.

b) Tính khoảng thời gian ngắn nhất để vật đi từ vị trí có li độ $x_1 = -2,5cm$ đến vị trí có li độ $x_2 = 2,5cm$.

c) Tính quãng đường đi được của vật kể từ lúc bắt đầu dao động đến khi tới vị trí có động năng bằng thế năng lần thứ hai.

ĐS:a. $x = 5\cos(10t + \frac{\pi}{3})\ (cm)$; b. 0,1s; c. 8,96cm.

**Bài 36.** Một con lắc lò xo treo thẳng đứng. Đầu trên của lò xo cố định, đầu còn lại gắn với vật nhỏ có khối lượng m = 100 (g), lò xo nhẹ có độ cứng k = 25 (N/m). Từ vị trí cân bằng kéo vật theo phương thẳng đứng xuống dưới một đoạn 8 (cm) rồi thả nhẹ cho vật dao động điều hòa. Chọn trục tọa độ thẳng đứng, gốc tọa độ ở vị trí cân bằng của vật, chiều dương hướng từ trên xuống, gốc thời gian là lúc thả vật. Cho g = 10(m/s$^2$), $\pi^2 = 10$ .

a) Viết phương trình dao động của vật.

b) Tính cơ năng, thế năng và động năng của hệ khi vật có li độ x = 4 (cm)

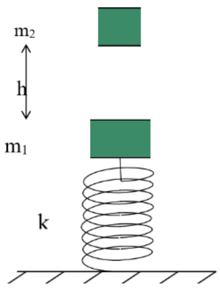
c) Xác định khoảng thời gian lò xo bị giãn trong một chu kỳ dao động.

ĐS: a. $x = 8\cos(5\pi t)\ \ (cm)$; b. 0,08J; 0,02J; 0,06J; c.4s/15

**Bài 37.** Con lắc lò xo đặt thẳng đứng (như hình vẽ 4), đầu dưới gắn chặt vào mặt sàn, đầu trên gắn vật $m_1$= 300g đang đứng yên ở vị trí cân bằng, độ cứng của lò xo là k = 200 N/m. Từ độ cao h = 3,75cm so với $m_1$, người ta thả rơi tự do vật $m_2$ = 200 g, va chạm mềm với $m_1$. Sau va chạm cả hai vật cùng dao động điều hoà theo phương thẳng đứng. Lấy g = 10 m/s$^2$, bỏ qua mọi ma sát.

**a.** Tính vận tốc của $m_1$ ngay sau va chạm.

**b.** Hãy viết phương trình dao động của hệ hai vật $m_1$ và $m_2$.




**Bài 38.** Một lò xo lý tưởng treo thẳng đứng, đầu trên của lò xo được giữ cố định, đầu dưới treo một vật nhỏ có khối lượng m = 100g, lò xo có độ cứng k = 25N/m. Từ vị trí cân bằng nâng vật lên theo phương thẳng đứng một đoạn 2cm rồi truyền cho vật vận tốc $10\pi\sqrt{3}$ cm/s theo phương thẳng đứng, chiều hướng xuống dưới. Chọn gốc thời gian là lúc truyền vận tốc cho vật, chọn trục tọa độ có gốc trùng vị trí cân bằng của vật, chiều dương thẳng đứng xuống dưới. Cho g = 10m/s$^2$; $\pi^2 \approx 10$.

**1.** Chứng minh vật dao động điều hòa và viết phương trình dao động của vật.

**2.** Xác định thời điểm lúc vật qua vị trí mà lò xo bị giãn 6cm lần thứ hai. Xác định hướng và độ lớn của lực tác dụng lên điểm treo tại thời điểm đó.

ĐS: 1. $x = 4\cos\left(5\pi t - \dfrac{2\pi}{3}\right)$(cm); 2. $t = 0{,}2\,(\mathrm{s})$; $F = 1{,}5\,(\mathrm{N})$

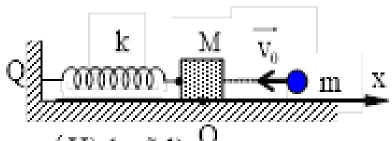
**Bài 39.** Một con lắc lò xo được treo thẳng đứng gồm vật nặng khối lượng m = 1kg, lò xo nhẹ có độ cứng k = 100N/m. Đặt giá B nằm ngang đỡ vật m để lò xo có chiều dài tự nhiên. Cho giá B chuyển động đi xuống với gia tốc a = 2m/s$^2$ không vận tốc ban đầu.

a. Tính thời gian từ khi giá B bắt đầu chuyển động cho đến khi vật rời giá B.

b. Chọn trục tọa độ có phương thẳng đứng, chiều dương hướng xuống, gốc tọa độ tại vị trí cân bằng của vật, gốc thời gian là lúc vật rời giá B. Viết phương trình dao động điều hòa của vật.

ĐS: a. 0,283s; b. x = 6cos(10t - 1,91) (cm)

**Bài 40.** Cho cơ hệ như hình vẽ, lò xo lý tưởng có độ cứng k = 100 N/m được gắn chặt vào tường tại Q, vật M = 200 g được gắn với lò xo bằng một mối nối hàn. Vật M đang ở vị trí cân bằng, một vật m = 50 g chuyển động đều theo phương ngang với tốc độ $v_0$ = 2 m/s tới va chạm hoàn toàn mềm với vật M. Sau va chạm hai vật dính vào nhau và dao động điều hòa. Bỏ qua ma sát giữa vật M với mặt phẳng ngang.



(Hình vẽ 1)

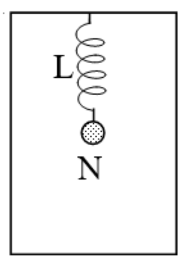
**a)** Chọn trục tọa độ như hình vẽ, gốc O tại vị trí cân bằng, gốc thời gian t = 0 lúc xảy ra va chạm. Viết phương trình dao động của hệ vật.

**b)** Sau một thời gian dao động, mối hàn gắn vật M với lò xo bị lỏng dần, ở thời điểm t hệ vật đang ở vị trí lực nén của lò xo vào Q cực đại. Sau khoảng thời gian ngắn nhất là bao nhiêu (tính từ thời điểm t) mối hàn sẽ bị bật ra? Biết rằng, kể từ thời điểm t mối hàn có thể chịu được một lực nén tùy ý nhưng chỉ chịu được một lực kéo tối đa là 1 N.

ĐS: a. x = 2cos(20t + π/2)(cm); b. $t_{min}$ = π/30 (s)

**Bài 41.**

Con lắc lò xo treo thẳng đứng vào trần thang máy, lò xo L có độ cứng k = 50N/m, chiều dài khi không biến dạng là $\ell_0$ = 30cm, vật nặng N khối lượng m = 500g buộc vào đầu dưới của lò xo (hình vẽ 2). Lấy g = 10m/s$^2$. Ban đầu thang máy đứng yên.




Tại gốc thời gian cung cấp cho N vận tốc hướng xuống thẳng đứng có độ lớn 40cm/s, thì N thực hiện một dao động điều hòa.

a) Chọn chiều dương hướng xuống. Viết phương trình li độ.

b) Tính chiều dài cực đại và cực tiểu của lò xo khi hệ dao động.

c) Cho thang máy đi lên nhanh dần đều gia tốc có độ lớn $2m/s^2$, vật N vẫn dao động điều hòa quanh vị trí cân bằng O cùng biên độ. Tính độ lớn lực đàn hồi cực đại và cực tiểu tác dụng lên N.

Tại một thời điểm, vật N đang qua vị trí cân bằng O và đi lên thì nó rời khỏi lò xo và sau 0,8 giây vật N chạm sàn thang máy, tính khoảng cách từ O đến sàn.

Đáp số: a) $x = 4\cos\left(10t - \frac{\pi}{2}\right)$cm b) 8N và 4 N c) 3,52 m

**Bài 42.** Trong một thang máy đứng yên có treo một con lắc lò xo và một con lắc đơn. Con lắc lò xo gồm một vật, khối lượng m = 250 g và một lò xo có độ cứng k = 12 N/m. Con lắc đơn có biên độ góc là $8^o$. Chu kì dao động của hai con lắc bằng nhau.

1. Tính chu kì dao động của hai con lắc và chiều dài của con lắc đơn. Lấy g = 9,8 $m/s^2$.

2. Thang máy chuyển động nhanh dần đều lên trên với gia tốc $a = \frac{1}{10}g$. Hỏi chu kì, VTCB và biên độ dao động của hai con lắc thay đổi như thế nào ?

ĐS: 1. 0,91s, 0,21m; 2. Chu kì của con lắc đơn giảm đi, chỉ còn bằng 0,953T ≈ 0,85 s.

Vị trí cân bằng và biên độ thay đổi.

**Bài 43.** Một con lắc lò xo treo thẳng đứng gồm vật nhỏ khối lượng m = 250g và một lò xo nhẹ có độ cứng k = 100 N/m. Kéo vật m xuống dưới theo phương thẳng đứng đến vị trí lò xo giãn 7,5 cm rồi thả nhẹ. Chọn gốc tọa độ ở vị trí cân bằng của vật, trục tọa độ thẳng đứng, chiều dương hướng lên trên, gốc thời gian là lúc thả vật. Cho g = $10m/s^2$. Coi vật dao động điều hòa

a) Viết phương trình dao động

b) Tính thời gian từ lúc thả vật đến thời điểm vật đi qua vị trí lò xo không biến dạng lần thứ nhất.

c) Thực tế trong quá trình dao động vật luôn chịu tác dụng của lực cản có độ lớn bằng

$\frac{1}{50}$ trọng lực tác dụng lên vật, coi biên độ dao động của vật giảm đều trong từng chu kì tính số lần vật đi qua vị trí cân bằng kể từ khi thả.

ĐS: a) $x = 5\cos(20t + \pi)(cm)$; b) $t = \frac{\pi}{30}(s)$; c) 50 lần.

**Bài 44.** Một con lắc lò xo nằm ngang có độ cứng $K = 40(N/m)$, vật nhỏ khối lượng $m = 100(g)$. Ban đầu giữ vật sao cho lò xo bị nén 10($cm$) rồi thả nhẹ.

**1.** Bỏ qua mọi ma sát, vật dao động điều hoà.

**a)** Viết phương trình dao động của vật, chọn gốc O là vị trí cân bằng của vật, chiều dương là chiều chuyển động của vật lúc thả, gốc thời gian lúc thả vật.

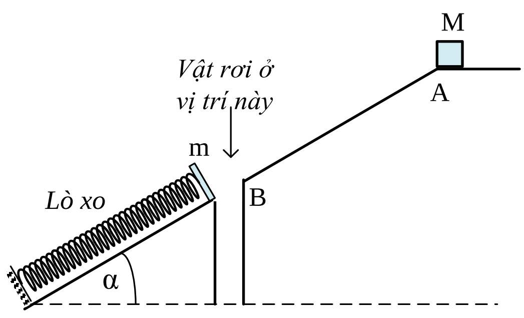
**b)** Xác định thời điểm lò xo nén 5$cm$ lần thứ 2010 kể từ lúc thả.

**2.** Thực tế có ma sát giữa vật và mặt bàn với hệ số ma sát trượt giữa vật và mặt bàn là $\mu = 0,1$. Lấy $g = 10(m/s^2)$. Tính tốc độ của vật lúc gia tốc của nó đổi chiều lần thứ 4.

**ĐS:** 1) a) $x = 10.\cos(20t + \pi)(cm)$; b) $t_{2010} = \frac{6029\pi}{60}(s)$

2) $v_4 = 1,65(m/s)$

**Bài 45.** Một cơ hệ dao động như hình vẽ. Lò xo không khối lượng có độ cứng k nối với một tấm phẳng nhỏ B khối lượng m trên mặt phẳng nghiêng góc α so với phương ngang. Quá trình dao động của hệ được mô tả như sau: Lò xo đẩy tấm phẳng đi từ B đến A thì dừng lại, ngay sau đó một vật khối lượng M được đặt nhẹ lên tấm làm cho tấm phẳng và vật chuyển động xuống đến vị trí B thì vật rơi xuống một lỗ sau đó tấm phẳng lại chuyển động đi lên đến điểm A thì dừng và nhận một vật có khối lượng M và đi xuống. Quá trình lặp được đi lặp lại. Khoảng cách giữa hai vị trí A,B là L, hệ số ma sát động và hệ số ma sát tĩnh của vật cũng như tấm phẳng với mặt phẳng ngang đều bằng μ. Chuyển động về phía A hay B đều là chuyển động điều hòa



a) Gọi $\mu_0$ là hệ số ma sát ứng với trường hợp vật M bắt đầu trượt trên mặt phẳng nghiêng (khi không chịu tác dụng của lò xo), cho hệ số ma sát $\mu = \frac{\mu_0}{2}$ . Tính μ theo g, α, M.

b) Để cho hệ thống này để hoạt động, cần phải có tỷ lệ chính xác giữa khối lượng M của vật và khối lượng m của tấm phẳng. Sao cho khi di chuyển xuống khối và tấm chỉ dừng lại ở điểm B, khi đi lên chỉ dừng lại ở điểm A. Tìm tỷ lệ $R = \frac{M}{m}$

c) Vật chuyển động từ A về B mất thời gian $T_0$, tấm phẳng chuyển động từ B về A mất thời gian T'. Tính tỉ sô $T_0$/T'.

d) Tấm phẳng chỉ dao động một số ít lần sau khi nhận được vật cuối cùng. Xác định vị tri tấm dừng lại so với điểm B.

ĐS: a) $\mu = \frac{\tan\alpha}{2}$ ; b) $R = \frac{M}{m} = 2$ ; c) $\frac{T_0}{T'} = \sqrt{3}$ ; d)

**Bài 46.** Một con lắc đơn gồm dây treo dài $\ell = 1(m)$ gắn một đầu với vật có khối lượng m.

Lấy g = 10(m/s$^2$), $\pi^2$ = 10.

a) Treo con lắc đơn trên vào một giá cố định trong trường trọng lực. Người ta kéo vật ra khỏi vị trí cân bằng để dây treo lệch góc 0,02rad về bên phải, rồi truyền cho vật một vận tốc 4π(cm/s) về bên trái cho vật dao động điều hòa. Chọn hệ quy chiếu có gốc ở vị trí cân bằng, chiều dương hướng sang trái, chọn thời điểm ban đầu là lúc vật qua vị trí cân bằng lần đầu. Viết phương trình li độ góc của vật.

b) Người ta đem con lắc đơn nói trên gắn vào trần xe ôtô, ôtô đang đi lên dốc chậm dần đều với gia tốc 5(m/s$^2$). Biết dốc nghiêng một góc $30^0$ so với phương ngang. Tính chu kì dao động của con lắc trong trường hợp trên.

ĐS: a) $\alpha = 0{,}02\sqrt{5}\cos(\pi t - \pi/2)$ (rad); b) $T' \approx 2{,}135(s)$

**Bài 47.** Một con lắc đơn có chiều dài $l = 40cm$, quả cầu nhỏ có khối lượng $m = 600g$ được treo tại nơi có gia tốc rơi tự do $g = 10m/s^2$. Bỏ qua sức cản không khí. Đưa con lắc lệch khỏi phương thẳng đứng một góc $\alpha_0 = 0{,}15rad$ rồi thả nhẹ, quả cầu dao động điều hoà.

a) Tính chu kì dao động T và tốc độ cực đại của quả cầu.

b) Tính sức căng dây treo khi quả cầu đi qua vị trí cân bằng.

c) Tính tốc độ trung bình của quả cầu sau n chu kì.

d) Tính quãng đường cực đại mà quả cầu đi được trong khoảng thời gian 2T/3 và tốc độ của quả cầu tại thời điểm cuối của quãng đường cực đại nói trên.

ĐS: a) $T = 1{,}257(s)$; $v_{max} = 30cm/s$; b) $\tau = 6{,}135(N)$;

c) $\overline{V} = 19{,}1(cm/s)$; d) $S_{max} = 18cm$; $|v| = 18\sqrt{3}(cm/s)$

**Bài 48.** Một con lắc đơn gồm một vật nhỏ có khối lượng m = 2 *gam* và một dây treo mảnh, chiều dài *l*, được kích thích cho dao động điều hòa. Trong khoảng thời gian $\Delta t$ con lắc thực hiện được 40 dao động. Khi tăng chiều dài con lắc thêm một đoạn bằng 7,9 *cm*, thì cũng trong khoảng thời gian $\Delta t$ nó thực hiện được 39 dao động. Lấy gia tốc trọng trường g = 9,8 $m/s^2$ .

a) Kí hiệu chiều dài mới của con lắc là *l'*. Tính *l, l'* và các chu kì dao động *T, T'* tương ứng.

b) Để con lắc với chiều dài *l'* có cùng chu kỳ dao động như con lắc chiều dài *l*, người ta truyền cho vật điện tích q = + $0{,}5.10^{-8}\,C$ rồi cho nó dao động điều hòa trong một điện trường đều $\vec{E}$ có đường sức thẳng đứng. Xác định chiều và độ lớn của vectơ cường độ điện trường.

ĐS: a) $l = 152{,}1cm$; $T \approx 2{,}475(s)$; $l' = 160cm$; $T' \approx 2{,}538(s)$

b) $E \approx 2{,}04.10^5 V/m$; hướng xuống

**Bài 49.** Một con lắc đơn gồm quả cầu kim loại khối lượng m = 0,1kg được treo vào một điểm A cố định bằng một đoạn dây mảnh có độ dài l = 5m. Đưa quả cầu ra khỏi vị trí cân bằng cho đến khi dây treo nghiêng với góc thẳng đứng một góc $\alpha_0 = 9^0$ rồi buông cho nó dao động điều hòa. Lấy g $= \pi^2 = 10$ m/s$^2$.

a) Viết phương trình dao động của con lắc theo li độ góc và li độ dài ? Chọn gốc thời gian lúc buông vật.

b) Tính động năng của nó sau khi buông một khoảng thời gian t = $\frac{\pi}{6\sqrt{2}}$ (s)? Xác định cơ năng toàn phần của con lắc?

c) Xác định lực căng của dây treo con lắc khi vật đi qua vị trí cân bằng?

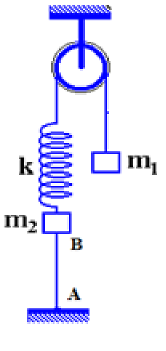
**ĐS:** a) $\alpha = \frac{\pi}{20}\cos(\sqrt{2}t)$ rad; s = $\frac{\pi}{4}\cos(\sqrt{2}t)$ m

b) 0,015625J

c) 5,123N

## IV.2. CON LẮC LÒ XO

**Bài 1.** Cho hệ cơ học như hình 1, biết lò xo nhẹ có độ cứng $k = 100N/m$, vật nặng khối lượng $m_1 = 0,4kg$ và $m_2 < m_1$. Lấy $g = 10m/s^2$. Bỏ qua khối lượng ròng rọc; dây nối nhẹ không dãn. Bỏ qua mọi ma sát.



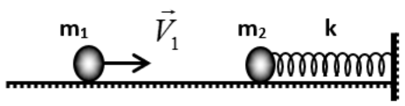
Hình 1

a) Xác định độ biến dạng của lò xo khi hệ ở trạng thái cân bằng.

b) Kéo $m_1$ xuống theo phương thẳng đứng và giữ nó bằng một lực có độ lớn 3N rồi sau đó thả nhẹ để $m_1$ dao động . Hỏi khối lượng lớn nhất của $m_2$ bằng bao nhiêu để nó còn đứng yên trong khi vật $m_1$ dao động.

ĐS: a. 4cm; b. $m_{2\max} = 0,1kg$

**Bài 2.** Hình bên có một con lắc lò xo gồm lò xo nhẹ có độ dài tự nhiên $l_0$ = 20cm, độ cứng k = 480N/m gắn với vật có khối lượng $m_2$ = 300g ở trên mặt bàn nằm ngang nhẵn. Vật có khối lượng $m_1$ = 100g chuyển động với vận tốc $v_1$ = 0,8m/s dọc theo phương trục của lò xo đến va chạm xuyên tâm với $m_2$.




1/ Nếu va chạm là hoàn toàn đàn hồi. Hãy:

a.Tìm vận tốc của hai vật ngay sau va chạm và mô tả chuyển động của chúng sau va chạm.

b.Viết phương trình dao động của vật có khối lượng $m_2$

2/ Nếu là va chạm mềm. Hãy:

a. Mô tả chuyển động của hai vật sau va chạm.

b. Tìm biên độ và tần số dao động của con lắc lò xo.

c. Tìm chiều dài cực đại và cực tiểu của lò xo.

ĐS: 1a. $v_1' = -0{,}4$m/s ; $v_2' = 0{,}4$m/s; 1b. x = sin40t ( cm)

2a. x = 0,5sin40t (cm)

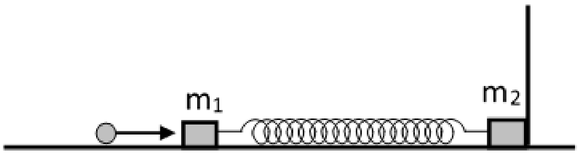
b. Khi chưa tách $m_1$ $m_2$ hệ có $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} = 20\sqrt{3}$ (rad/s)

Biên độ khi đó $A_1 = \frac{v_{max}}{\omega_1} = \frac{10^{-2}}{\sqrt{3}}m = \frac{1}{\sqrt{3}}cm = \frac{\sqrt{3}}{3}cm$

Sau khi tách ra $m_2$ có $\omega_2$ = 40rad/s $A_2$ = 0,5cm.

2c. $l_{max}$ = 20,5cm ; $l_{min}$ = 19,423cm

**Bài 3.** Cho cơ hệ gồm hai vật nhỏ có khối lượng $m_1 = m_2 = m$ = 100 g được nối với nhau bằng một lò xo rất nhẹ có độ cứng k = 150 N/m; chiều dài tự nhiên $l_0$ = 50 cm . Hệ được đặt trên một mặt phẳng ngang trơn nhẵn ( hình vẽ ). Ban đầu lò xo không dãn ; $m_2$ tựa vào tường trơn và hệ vật đang đứng yên thì một viên đạn có khối lượng m / 2 bay với vận tốc $\vec{v_0}$ ( $V_0$ = 1,5 m/s ) dọc theo trục của lò xo đến ghim vào vật $m_1$




a) Tính khoảng thời gian $m_2$ tiếp xúc với tường kể từ lúc viên đạn ghim vào $m_1$ và tính vận tốc của khối tâm của hệ khi $m_2$ rời khỏi tường

b) Sau khi hệ vật rời khỏi tường, tính chiều dài cực đại và cực tiểu của lò xo trong quá trình hệ vật nói trên chuyển động

ĐS: a. 0,1s; 0,3 m/s; b. 51cm; 49cm.

**Bài 4.** Một khối gỗ khối lượng M=400g được treo vào lò xo có độ cứng k=100N/m. Một viên bi khối lượng m=100g được bắn đến với vận tốc $v_0$= 50cm/s va chạm vào khối gỗ. Sau va chạm hệ dao động điều hòa.

Xác định chu kì và biên độ dao động.

Biết va chạm tuyệt đối đàn hồi.

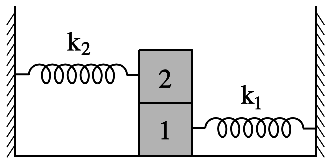
ĐS: $\frac{2\pi}{5}(s)$; $4cm$

**Bài 5.** Trên một mặt phẳng nằm ngang, nhẵn, có một hệ gồm hai quả cầu, khối lượng $m_1$, $m_2$ được gắn vào hai đầu của một lò xo dài *l*, độ cứng k. Truyền cho quả cầu $m_1$ một vận tốc đầu $v_0$ hướng đến quả cầu $m_2$. Hãy khảo sát chuyển động của hệ.

ĐS : -Khối tâm của hệ chuyển động thẳng đều với vận tốc $v_G = \frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2}$.

- Hai quả cầu DĐĐH đối với khối tâm với tần số góc $\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$, trong đó $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

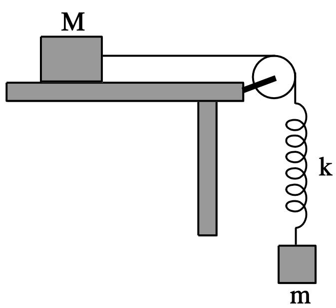
**Bài 6.** Một hệ dao động gồm hai vật chồng lên nhau, mỗi vật gắn với một lò xo, đầu kia của lò xo gắn vào giá đỡ. Lò xo 1 có độ cứng $k_1$ = 10 N/m, lò xo 2 có độ cứng $k_2$ = 20 N/m. Mỗi vật có khối lượng m = 100 g. Hệ số ma sát nghỉ giữa vật 1 và sàn bằng không, giữa hai vật bằng 0,5. Ở VTCB, lò xo 1 dãn ra một đoạn bằng 2 cm.




Hãy xác định tần số và biên độ dao động cực đại để hai vật dao động giống như một vật.

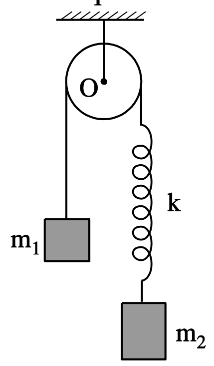
ĐS: 1,9 Hz; 6cm.

**Bài 7.** Một vật, khối lượng M, nằm yên trên mặt bàn nằm ngang và một con lắc lò xo được nối với nhau bằng một sợi dây nhẹ, không dãn, vắt qua một ròng rọc lí tưởng, cố định. Hệ số ma sát nghỉ giữa vật M và mặt bàn là $\mu$ = 0,3. Tỉ số $\frac{M}{m} = 8$. Vật m thực hiện dao động điều hoà theo phương thẳng đứng với chu kì T= 0,5s. Hỏi biên độ dao động có thể lớn nhất bằng bao nhiêu ?




ĐS: $A_{max}$ = 6,3 cm.

**Bài 8.** Một hệ cơ học như hình. Khối lượng của ròng rọc không đáng kể. Bỏ qua ma sát ở trục O. $m_2 > m_1$. Tại thời điểm thả cho hệ tự do thì lò xo không biến dạng.

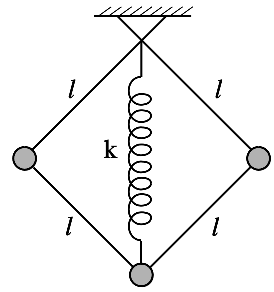



a) Chứng minh rằng hệ dao động điều hoà.

b) Tìm biên độ dao động.

ĐS: $A = \dfrac{2m_1m_2g}{k(m_1+m_2)}$.

**Bài 9.** Một cơ hệ gồm ba quả cầu nhỏ giống nhau, mỗi quả có khối lượng m, được nối với nhau bằng các thanh cứng nhẹ, dài *l* nhờ các bản lề. Tại VTCB cơ hệ có dạng một hình vuông nhờ được giữ bởi một lò xo thẳng đứng, có độ cứng k.




a) Tìm chiều dài tự nhiên $l_0$ của lò xo.

b) Dịch chuyển quả cầu dưới khỏi VTCB một đoạn nhỏ x theo phương thẳng đứng (lên hoặc xuống). Hãy xác định độ biến thiên thế năng của hệ.

c) Giả sử tại VTCB người ta truyền cho quả cầu dưới một vận tốc v theo phương thẳng đứng. Hãy xác định động năng của hệ.

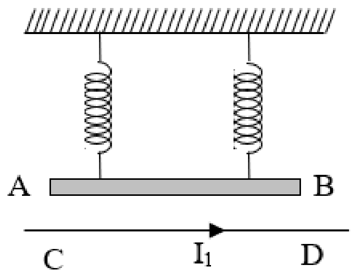
d) Hãy xác định chu kì dao động nhỏ của quả cầu dưới theo phương thẳng đứng.

ĐS : a. $l_0 = l\sqrt{2} - \dfrac{2mg}{k}$;b. $\dfrac{1}{2}kx^2$.; c. $W_{he} = mv^2$; d. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{2m}{k}}$

**Bài 10.** Xét sơ đồ thì nghiệm như trên hình 3. CD là một sợi dây dẫn thẳng có dòng điện $I_1$ chạy qua, AB là một thanh kim loại có khối lượng m, có chiều dài *l* .

Thanh AB được treo vào hai lò xo giống nhau, có độ cứng k. Dòng điện có cường độ $I_2$ chạy qua thanh AB.

a) Tìm chiều của $I_2$ để cho lực tương tác giữa dây C và thanh AB là lực hút.

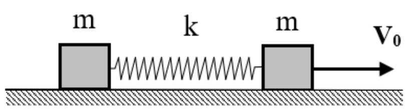



b) Xác định vị trí cân bằng của hệ.

c) Tìm chu kì của dao động nhỏ quanh vị trí cân bằng. Giả thiết mọi dịch chuyển đều thực hiện trong mặt phẳng thẳng đứng.

ĐS: b. Cân bằng không bền $x_{01} = \dfrac{d_0 - \sqrt{d_0^2 - \dfrac{\mu_0.I_1.I_2.l}{k\pi}}}{2}$; cân bằng bền $x_{02} = \dfrac{d_0 + \sqrt{d_0^2 - \dfrac{\mu_0.I_1.I_2.l}{k\pi}}}{2}$; c. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{2k - \dfrac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi .x_{02}^2}}}$

**Bài 11.** Hai vật cùng khối lượng m đặt trên mặt phẳng ngang không ma sát, chúng liên kết với nhau bằng một lò xo có độ cứng k. Cung cấp cho vật bên phải vận tốc $V_0$ hình H3. Mô tả chuyển động của hệ. Sau bao lâu độ biến dạng của lò xo cực đại lần đầu?




ĐS: $t = \dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{m}{2k}}$

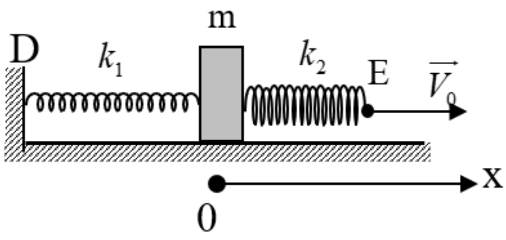
**Bài 12.** Hai vật có cùng khối lượng m, nối với nhau bằng một lò xo lí tưởng và chuyển động với một vận tốc nào đó trên phần nhẵn của mặt bàn nằm ngang. Vectơ vận tốc hướng theo trục lò xo và lò xo chưa biến dạng cho tới khi vật thứ nhất đi vào một dải ráp trên mặt bàn (qua dải này, mặt bàn lại nhẵn).

Dải ráp này vuông góc với vận tốc của hai vật và có bề rộng bằng L (xem hình vẽ bên). Hệ số ma sát giữa vật thứ nhất và dải ráp là $\mu$, còn vật thứ hai chuyển động trên toàn mặt bàn đều không có ma sát. Hỏi độ cứng của lò xo cần có giá trị bằng bao nhiêu để vận tốc ban đầu cần thiết cho hai vật vượt qua được dải ráp là cực tiểu? Tính giá trị cực tiểu đó.

ĐS: $v_{\min} = \sqrt{\mu g L}$ ; $k = \dfrac{n^2\pi^2 m\mu g}{2L}$ với $n = 1, 2, ....$

Với mỗi giá trị của n (số chu kỳ) ta có một giá trị tương ứng của $k$.

**Bài 13.** Cho cơ hệ như hình 4, các lò xo lí tưởng có độ cứng là $k_1;k_2$. Lò xo $k_1$ có một đầu gắn chặt vào giá D, đầu còn lại gắn vào vật nặng m coi là chất điểm. Lò xo $k_2$ một đầu gắn vào vật m, đầu E còn lại để tự do. Ban đầu các lò xo không biến dạng, người ta kéo đầu E của lò xo $k_2$ với vận tốc không đổi $V_0$ dọc theo trục của lò xo như hình 4. Bỏ qua mọi ma sát lực cản, chọn trục tọa độ như hình vẽ.




1. Chọn gốc thời gian $t_0 = 0$ là lúc bắt đầu kéo đầu E của lò xo $k_2$.Viết phương trình biểu diễn sự phụ thuộc tọa độ của vật theo thời gian.

2. Nếu $k_1 = k_2 = k$

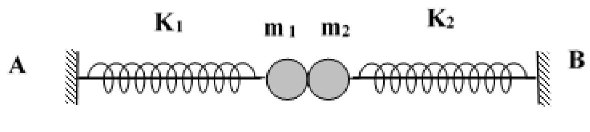
a. Kể từ khi kéo đầu E của lò xo thì sau bao lâu vật nặng đạt vận tốc bằng $V_0$ lần đầu tiên? Khi đó vật có tọa độ bao nhiêu?

b. Đến thời điểm vật nặng đạt vận tốc $V_0$ lần đầu tiên thì chỗ gắn lò xo $k_1$ với điểm D bị bung ra. Chọn gốc thời gian là lúc lò xo $k_1$ bị bung ra. Viết phương trình biểu diễn sự phụ thuộc tọa độ của vật theo thời gian.

ĐS: 1. $x = \frac{k_2V_0}{k_1+k_2}\left(t - \sqrt{\frac{m}{k_1+k_2}}cos(\omega t - \pi/2)\right)$; 2a $t = \pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$, $x = \left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{2k}}\right)V_0$

2b. $x = V_0\left[\pi\sqrt{\frac{m}{2k}} + t + \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{2k}}cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \pi)\right]$

**Bài 14.** Cho cơ hệ như hình 3: Hai lò xo lí tưởng có độ cứng lần lượt là $K_1$ và $K_2$; hai vật $m_1$ và $m_2$ có khối lượng bằng nhau. Ban đầu các lò xo không biến dạng, hai vật tiếp xúc nhau và có thể trượt không ma sát dọc thanh cứng AB nằm ngang. Kéo vật $m_2$ để lò xo $K_2$ bị nén một đoạn $A_2$ theo chiều dương rồi thả nhẹ. Va chạm giữa 2 vật là xuyên tâm đàn hồi.




Hình 3

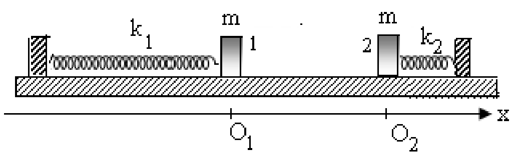
**a.**Tính độ nén cực đại $A_1$ của lò xo $K_1$ sau va chạm. Mô tả chuyển động và tính chu kì dao động của hệ.

**b.**Vẽ dạng đồ thị của dao động của hệ kể từ lúc thả $m_2$($K_2$ >$K_1$)

**ĐS: a.**$A_1 = \sqrt{\frac{k_2}{k_1}}A_2$.

**Bài 15.** Một lò xo nhẹ có chiều dài $l_0$, độ cứng k = 16 N/m được cắt ra thành hai lò xo, lò xo thứ nhất có chiều dài $l_1 = 0,8\,l_0$, lò xo thứ hai có chiều dài $l_2 = 0,2\,l_0$. Hai vật nhỏ 1 và 2 có khối lượng bằng nhau $m_1 = m_2 = 500$ g đặt trên mặt phẳng nhẵn nằm ngang và được gắn vào tường nhờ các lò xo trên (*hình 2*) Khoảng cách giữa hai vật khi hai lò xo chưa biến dạng là $O_1O_2 = 20$ cm. Lấy gần đúng $\pi^2 = 10$.

a.Tính độ cứng $k_1$ và $k_2$ của mỗi lò xo.




b. Người ta kích thích cho hai vật dao động dọc theo trục x: Vật thứ nhất bị đẩy về bên trái còn vật thứ hai bị đẩy về bên phải rồi đồng thời buông nhẹ để hai vật dao động điều hòa. Biết động năng cực đại của hai vật bằng nhau và bằng 0,1(J). Kể từ lúc thả các vật, sau khoảng thời gian ngắn nhất là bao nhiêu khoảng cách giữa chúng là nhỏ nhất, tính khoảng cách nhỏ nhất đó.

ĐS: a. $k_1 = 20$N/m ; $k_2 = 80$N/m; b. $t_{min} = 1/3$ (s); $d_{min} = 12,5$cm

**Bài 16.** Cho cơ hệ gồm vật M, các ròng rọc $R_1$, $R_2$ và dây treo có khối lượng không

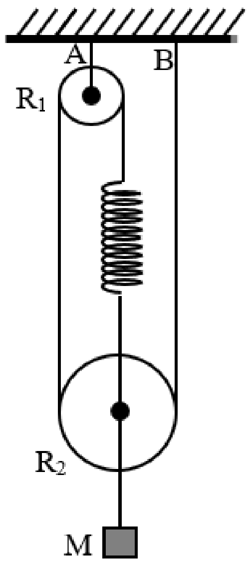
đáng kể, ghép với nhau như hình 1. Các điểm A và B được gắn cố định vào

giá đỡ. Vật M có khối lượng m=250(g), được treo bằng sợi dây buộc vào

trục ròng rọc $R_2$. Lò xo có độ cứng k=100 (N/m), khối lượng không đáng kể,

một đầu gắn vào trục ròng rọc $R_2$, còn đầu kia gắn vào đầu sợi dây vắt qua

$R_1$, $R_2$ đầu còn lại của dây buộc vào điểm B. Bỏ qua ma sát ở các ròng rọc,




coi dây không dãn. Kéo vật M xuống dưới vị trí cân bằng một đoạn 4(cm) rồi

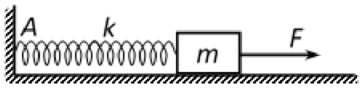
buông ra không vận tốc ban đầu.

1) Chứng minh rằng vật M dao động điều hoà.

2) Viết phương trình dao động của vật M.

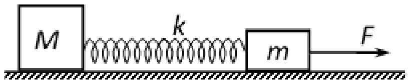
ĐS: x = 4sin(60t+ ð/2) (cm)

**Bài 17.** Vật nặng có khối lượng *m* nằm trên một mặt phẳng nhẵn nằm ngang, được nối với một lò xo có độ cứng *k*, lò xo được gắn vào bức tường đứng tại điểm A như hình 5a. Từ một thời điểm nào đó, vật nặng bắt đầu chịu tác dụng của một lực không đổi *F* hướng theo trục lò xo như hình vẽ.



Hình bài 5a

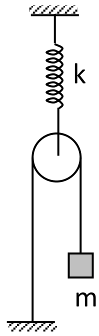
a) Hãy tìm quãng đường mà vật nặng đi được và thời gian vật đi hết quãng đường ấy kể từ khi bắt đầu tác dụng lực cho đến khi vật dừng lại lần thứ nhất.



Hình bài 5b

b) Nếu lò xo không không gắn vào điểm A mà được nối với một vật khối lượng *M* như hình 5b, hệ số ma sát giữa *M* và mặt ngang là $\mu$. Hãy xác định điều kiện độ lớn của lực *F* để sau đó vật *m* dao động điều hòa.

ĐS : a. $t = \pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. ; $S = \frac{2F}{k}$. ; b. $F < \frac{\mu mg}{2}$.




**Bài 18.** Cho cơ hệ như hình vẽ. Lò xo nhẹ có độ cứng k = 100N/m; vật nhỏ khối lượng m = 50g; bỏ qua lực cản không khí và ma sát tại trục ròng rọc, dây nhẹ không dãn. Lấy g = 10m/s$^2$.

**1.** Xét trường hợp ròng rọc có khối lượng không đáng kể. Tại thời điểm t = 0, nâng vật đến vị trí lò xo không biến dạng rồi thả nhẹ. Chọn trục toạ độ Ox hướng xuống, gốc toạ độ O trùng với vị trí cân bằng của vật. Chứng minh vật dao động điều hoà, viết phương trình. Tính lực căng lớn nhất và nhỏ nhất của dây treo vật khi vật dao động.

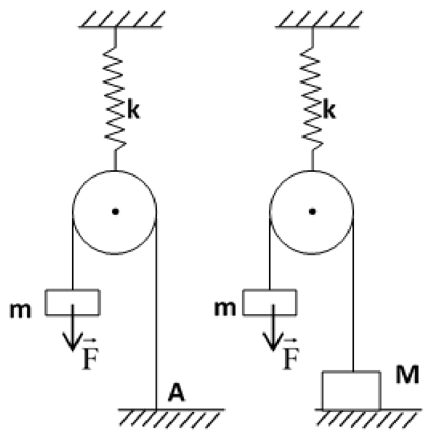
**2.** Ròng rọc là một đĩa tròn đặc đồng chất có bán kính R = 2cm khối lượng M = 100g. Từ vị trí cân bằng kéo vật m xuống một đoạn nhỏ rồi thả nhẹ. Cho rằng dây không trượt trên ròng rọc.Chứng tỏ m dao động điều hòa, tìm chu kì.

ĐS: 1. x = 2cos(10$\sqrt{5}$t + π) cm; $T_{max}$ = 1N;$T_{min}$ = 0; 2. $T = 2\pi\sqrt{\frac{8m+3M}{2k}}$ ≈ 0,37s

**Bài 19.** Cho cơ hệ gồm có một vật nặng có khối lượng m được buộc vào sợi dây không dãn vắt qua ròng rọc C, một đầu dây buộc cố định vào điểm A.

Ròng rọc C được treo vào một lò xo có độ cứng k. Bỏ qua hối lượng của lò xo, ròng rọc và của dây nối. Từ một thời điểm nào đó vật nặng

bắt đầu chịu tác dụng của một lực $\vec{F}$ không đổi như hình vẽ




a. Tìm quãng đường mà vật m đi được và khoảng thời gian kể từ lúc

vật bắt đầu chịu tác dụng của lực $\vec{F}$ đến lúc vật dừng lại lần thứ nhất

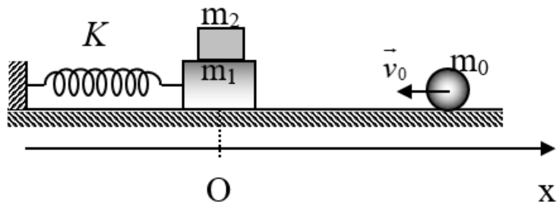
b. Nếu dây không cố định ở A mà nối với một vật khối lượng M (M>m)

Hãy xác định độ lớn của lực F để sau đó vật dao động điều hòa

ĐS : a. $S = \dfrac{8F}{k}$; b. $F \leq Mg$

**Bài 20**. Cho con lắc lò xo lí tưởng $K = 100N/m$, $m_1 = 200gam$, $m_2 = 50gam$, $m_0 = \dfrac{1}{12}\ kg$. Bỏ qua lực cản không khí, lực ma sát giữa vật $m_1$ và mặt sàn.

Hệ số ma sát giữa vật $m_1$ và $m_2$ là $\mu_{12} = 0,6$. Cho $g = 10m/s^2$.




1. Giả sử $m_2$ bám $m_1$, $m_0$ có vận tốc ban đầu $v_0$ đến va chạm đàn hồi xuyên tâm với $m_1$, sau va chạm hệ $(m_1 + m_2)$ dao động điều hoà với biên độ $A = 1\ cm$ .

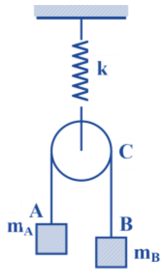
   a. Tính $v_0$.

   b. Chọn gốc thời gian ngay sau va chạm, gốc toạ độ tại vị trí va chạm, chiều dương của trục toạ độ hướng từ trái sang phải (*hình vẽ*). Viết phương trình dao động của hệ $(m_1 + m_2)$. Tính thời điểm hệ vật đi qua vị trí x = + 0,5 *cm* lần thứ 2011 kể từ thời điểm t = 0.

2. Vận tốc $v_0$ phải ở trong giới hạn nào để vật $m_1$ và $m_2$ không trượt trên nhau (bám nhau) trong quá trình dao động ?

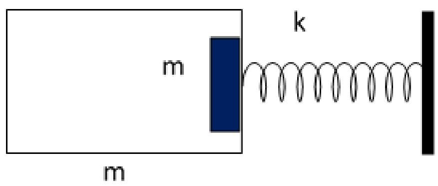
ĐS: 1a. $v_0 = 40cm/s$; 1b. $x = \cos(20t + \pi/2)cm$; $t \approx 315,75s$; 2. $v_0 < 0,6m/s$

**Bài 21.** Hai vật A và B có khối lượng lần lượt là $m_A$ = m và $m_B$ = 2m được nối với nhau bằng một sợi dây không dãn, không khối lượng, vắt qua ròng rọc động C. Ròng rọc là một đĩa tròn đồng chất, khối lượng $m_C$ = 2m, bán kính R. Hệ thống được buộc vào đầu một lò xo có độ cứng k; đầu còn lại của lò xo buộc vào một điểm cố định. Ở thời điểm ban đầu, giữ hệ đứng yên và lò xo có chiều dài tự nhiên. Xác định gia tốc của các vật A và B .




ĐS: $a_A = \frac{g}{4}\left(1 - 5\cos\sqrt{\frac{4k}{19m}}\ t\right); a_B = \frac{g}{4}\left(1 + 3\cos\sqrt{\frac{4k}{19m}}\ t\right)$

**Bài 22.** Một vật nhỏ khối lượng m nằm trên mặt bàn nằm ngang trong một cái khung cứng. Khung có chiều dài L và khối lượng m được nối vào một điểm tựa cố định bằng một lò xo có độ cứng k (H:2). Ban đầu vật nằm tiếp xúc với cạnh phải của khung,lò xo không biến dạng. Sau đó, khung được đẩy về phía bên phải sao cho cạnh trái của nó tiếp xúc với vật và buông ra. Do va chạm đàn hồi giữa vật và khung nên hệ thực hiện dao động. Bỏ qua bề rộng của vật so với L, bỏ qua mọi ma sát. Tìm chu kì dao động của vật nặng.




ĐS: $T = 2(\pi + 1)\sqrt{\frac{m}{k}}$

**Bài 23.** Hai vật A, B có cùng khối lượng m được nối với nhau bằng một lò xo có khối lượng không đáng kể, độ cứng k. Hệ số ma sát trượt giữa mỗi vật và mặt sàn là μ. Lực ma sát nghỉ cực đại tác dụng lên mỗi vật có cường độ là 3μmg/2.

Lúc đầu A được kéo bằng một lực có phương nằm ngang, độ lớn $F = 2\mu mg$. Đến khi B bắt đầu chuyển động, người ta điều chỉnh độ lớn của lực F sao cho A luôn chuyển động với vận tốc không đổi.

1. Viết phương trình chuyển động và vận tốc của vật A.

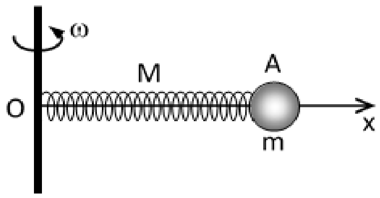
2. Khảo sát chi tiết chuyển động của vật B đối với mặt sàn. Tìm chu kỳ chuyển động của vật B. Biểu thị sự phụ thuộc vận tốc của vật B đối với mặt sàn theo thời gian.

ĐS: 1. $x_A = \dfrac{\mu mg}{k}\left[1+\sin\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t-\dfrac{\pi}{2}\right)\right]; v_A = \mu g\sqrt{\dfrac{m}{k}}\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t-\dfrac{\pi}{2}\right)$

2. $t_1 = \dfrac{2\pi}{3}\sqrt{\dfrac{m}{k}}$, $t_2 = \dfrac{7\pi}{3}\sqrt{\dfrac{m}{k}}$, $t_3 = \left(\dfrac{7\pi}{3}+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{\dfrac{m}{k}}$, $T = \left(\dfrac{5\pi}{3}+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{\dfrac{m}{k}}$.

$$\begin{cases} 0 \le t < t_1 : v_B^* = 0; \\ t_1 + nT \le t < t_2 + nT : v_B^* = \mu g\sqrt{\dfrac{m}{k}}\left[\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t - \dfrac{3\pi}{2}\right) + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right] \quad (n = 0, 1, 2, 3, ...) \\ t_2 + nT \le t < t_3 + nT : v_B^* = 0 \end{cases}$$

**Bài 24.** Một lò xo có độ cứng k, chiều dài tự nhiên $L_0$ và có khối lượng M phân bố đều theo chiều dài khi không bị biến dạng. Một đầu lò xo được gắn cố định ở O, đầu kia gắn với quả cầu A khối lượng m, kích thước nhỏ. Quả cầu có thể dịch chuyển không ma sát trên một trục nằm ngang Ox. Người ta quay trục Ox với tốc độ góc ω không đổi quanh một trục thẳng đứng đi qua đầu O của lò xo. Gọi chiều dài của lò xo khi hệ cân bằng là L.




1. Tìm L trong hai trường hợp sau:

   a) Bỏ qua khối lượng m so với M $(m \ll M)$.

   b) Khối lượng m đáng kể so với M.

2. Tìm động năng của hệ gồm quả cầu và lò xo khi hệ cân bằng.

Cho biết: $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$; $\int \dfrac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \dfrac{a^2}{2}\left(\arcsin\dfrac{x}{a} - \dfrac{x}{a}\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}\right)$.

ĐS: 1a. $L = L_0\sqrt{\dfrac{k}{Mw^2}}\tan\sqrt{\dfrac{Mw^2}{k}}$; 1b. $L = \dfrac{\dfrac{k}{\omega^2 M}}{\sqrt{\dfrac{k}{\omega^2 M}\cdot\dfrac{1}{\tan\sqrt{\dfrac{M\omega^2}{k}}}} - \dfrac{m}{M}}L_0$. với điều kiện

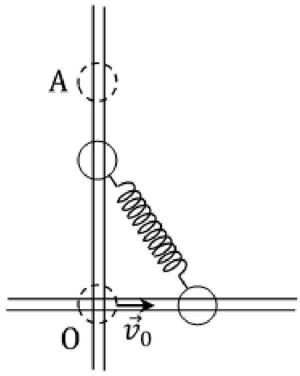
$$m < \sqrt{\frac{kM}{\omega^2}}.\frac{1}{\tan\sqrt{\frac{M\omega^2}{k}}}$$

$$2.\ W = \frac{w^2}{2}\left\{\sqrt{\frac{kL_0}{r_0w^2}}\frac{kL_0+2C}{2w^2}\left(\arcsin\frac{L}{\sqrt{\frac{kL_0+2C}{2r_0w^2}}} - \frac{L}{\sqrt{\frac{kL_0+2C}{2r_0w^2}}}\sqrt{1-\frac{L^2}{\frac{kL_0+2C}{2r_0w^2}}}\right) + mL^2\right\}.$$

Trong đó: $C = mw^2L + \frac{(mw^2L)^2}{2kL_0} + r_0w^2\frac{L^2}{2}$.

**Bài 25.**

1. Hai quả cầu nhỏ có cùng khối lượng $m = 10g$ được nối với nhau bằng một lò xo nhẹ, có chiều dài tự nhiên $L = 10cm$ và độ cứng $k = 100N/m$. Hai quả cầu này có thể trượt không ma sát trên mặt phẳng nằm ngang dọc theo hai thanh. Ban đầu lò xo không biến dạng, 2 quả nằm ở $A$ và $O$ như hình vẽ. Truyền cho quả cầu ở $O$ vận tốc $v_0 = 2m/s$. Tính độ dãn tỉ đối lớn nhất của lò xo.

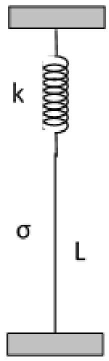



2. Giải lại bài toán trên trong trường hợp các quả cầu có thể chuyển động không ma sát trên mặt phẳng nằm ngang.

ĐS: 1.$\frac{\Delta\ell}{\ell} \approx 0{,}0721$; 2. $\frac{\Delta\ell}{\ell} \approx 0{,}0378$

**Bài 26. (Trích đề thi Olimpic Vật lí Boston, Mĩ  năm 2000)**

Một dây thừng có khối lượng riêng σ được treo vào một lò xo có độ cứng k. Đầu trên lò xo được giữ cố định (Hình vẽ). Khi hệ nằm cân bằng, một phần dây thừng xếp đống nằm trên mặt bàn, phần cón lại nằm trong không khí, có phương thẳng đứng) có chiều dài L tính từ mặt bàn đến điểm treo. Nâng dây thừng lên một đoạn nhỏ b rồi buông ra. Hãy xác định biên độ của dao động là hàm của thời gian.




Giả thiết:

a) L >> b.

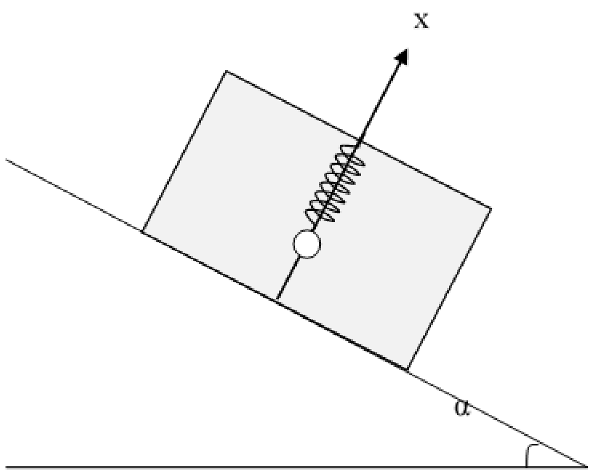
b) Dây thừng mảnh, sao cho kích thước của lớp xếp đống trên mặt bàn rất nhỏ so với b.

c) Chiều dài của phần dây thừng xếp đống trên mặt bàn có trí số sao cho trong quá trình dao động mép dưới của dây thừng không tách khỏi bàn.

d) Không có ma sát giữa các phần của dây thừng với nhau.

ĐS: A(t) = $\dfrac{1}{\dfrac{1}{b}+\dfrac{2\omega t}{3\pi L}}$ . Sau khoảng thời gian lớn: A(t) $\approx \dfrac{3\pi L}{2\omega t}$. Đặt n = $\dfrac{\omega t}{2\pi}$ thì A(t) $\approx \dfrac{3L}{4n}$

**Bài 27.** Trên mặt phẳng nghiêng góc α có một cái hòm rỗng hình hộp chữ nhật có khối lượng M, trong hòm có một vật nhỏ khối lượng m có thể chuyển động không ma sát dọc theo một thanh vuông góc với mặt phẳng nghiêng. Vật được nối với nóc hòm qua lò xo. Hệ số ma sát giữa hòm và mặt phẳng nghiêng là μ = tanα. Ban đầu hòm được giữ đứng yên. Vào thời điểm t = 0 thì hòm được thả đồng thời vật cũng bắt đầu dao động tự do với phương trình $x = A\sin\left(\dfrac{2\pi}{T}t\right)$ dọc theo thanh.

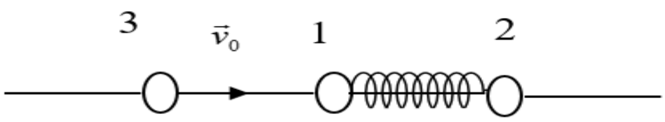



1.Tỉ số M/m phải thỏa mãn điều kiện nào để hòm không bị nảy lên?

2.Tìm vận tốc trung bình của hòm sau khoảng thời gian lớn so với chu kì T.

ĐS: a. $\dfrac{M}{m} \geq \dfrac{4\pi^2}{gT^2}.\dfrac{A}{\cos\alpha}+1$ ; b. $\bar{v} = \dfrac{m}{m+M}.\dfrac{2\pi}{T}A\tan\alpha$.

**Bài 28.** Ba quả cầu có thể trượt không ma sát trên một thanh cứng,mảnh nằm ngang.Biết khối lượng 2 quả cầu 1 và 2 là $m_1 = m_2 = m$ ;lò xo có độ cứng K và khối lượng không đáng kể.Quả cầu 3 có khối lượng $m_3 = \dfrac{m}{2}$ .Lúc đầu 2 quả cầu 1,2 đứng yên,lò xo



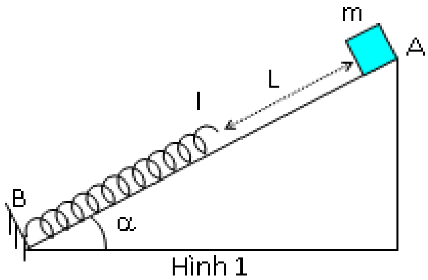
có độ dài tự nhiên $l_0$.Truyền cho $m_3$ vận tốc $\vec{v}_0$ đến va chạm đàn hồi vào quả cầu 1

**1.** Sau va chạm,khối tâm G cuả các quả cầu 1,2 chuyển động như thế nào?Tìm vận tốc cuả G.

**2.** Chứng minh rằng hai quả cầu 1 và 2 dao động điều hoà ngược pha quanh vị trí cố định đối với G.Tìm chu kỳ và biên độ dao động cuả các vật.

ĐS: 1. Sau va chạm: $v_1 = \dfrac{2v_0}{3}, v_2 = 0,\ v_G = \dfrac{v_0}{3}$

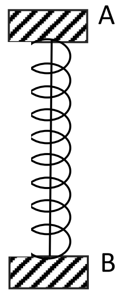
**Bài 29.** Trên một mặt phẳng nghiêng góc $\alpha = 30^0$ so với phương ngang có một lò xo nhẹ, độ cứng k = 25 N/m, một đầu gắn vào điểm cố định B. Một vật khối lượng m = 250 g ở cách đầu I còn lại của lò xo một khoảng L = 2,5 cm trượt không vận tốc ban đầu xuống dưới (Hình 1). Biết rằng khi tới I vật chỉ tiếp xúc với lò xo chứ không bị gắn chặt vào lò xo. Bỏ qua ma sát. Lấy g = 10 m/s$^2$.




1. Tìm độ nén cực đại của lò xo và vận tốc cực đại của vật.
2. Tìm thời gian ngắn nhất kể từ lúc vật bắt đầu trượt từ A cho đến khi vật lại quay trở về A.

ĐS: 1. $\Delta l_{max} = \Delta l + A = 0{,}121m$ ; $v_{max} = \omega A = 0{,}5\sqrt{2}$ m/s; 2. 0,672s

**Bài 30.** Một cơ hệ gồm hai vật A, B giống nhau, cùng khối lượng m, nối với nhau bằng một sợi dây sao cho một lò xo nhẹ, chiều dài tự nhiên $l_0$, độ cứng k, bị nén lại giữa hai khối đó. B nằm trên đất (hình vẽ).

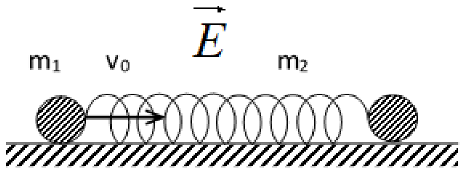



1. Tìm độ co ban đầu tối thiểu của lò xo để B được nâng lên khỏi mặt đất khi đốt dây nối.

2. Nếu độ co ban đầu của lò xo là 7mg/k thì khối tâm hệ được nâng lên độ cao bao nhiêu?

ĐS: 1. $\Delta l_{\min} = \dfrac{3mg}{k}$; 2. $\dfrac{8mg}{k}$

**Bài 31.** Trên một mặt phẳng nằm ngang, nhẵn, có một hệ gồm hai quả cầu, khối lượng $m_1$, $m_2$ được gắn vào hai đầu của một lò xo có chiều dài tự nhiên là $l$, độ cứng k. Truyền cho quả cầu $m_1$ một vận tốc đầu $v_0$ hướng đến quả cầu $m_2$. Hãy khảo sát chuyển động của hệ.




***ĐS:*** Hai quả cầu dao động ngược pha nhau

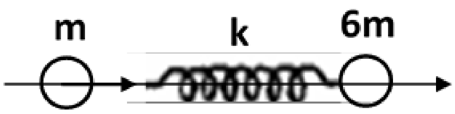
cùng chu kì: $T_1 = T_2 = 2\pi\sqrt{\dfrac{\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}}{k}}$ .

Vật 1 có biên độ dao động $A_1 = \dfrac{m_2v_0}{m_1+m_2}\sqrt{\dfrac{\mu}{k}}$, vật 2: $A_2 = \dfrac{m_1v_0}{m_1+m_2}\sqrt{\dfrac{\mu}{k}}$

Độ nén cực đại và độ dãn cực đại của lò xo là $A = v_0\sqrt{\dfrac{\mu}{k}}$

**Bài 32.**

Hai quả cầu đồng chất, cùng bán kính R có thể trượt không ma sát trên một thanh cứng nằm ngang. Một lò xo nhẹ có độ cứng k, chiều dài tự nhiên 6R được gắn vào quả cầu có khối lượng 6m. Quả cầu có khối lượng m chuyển động với vận tốc $v_0$ đến va chạm vào lò xo Tìm độ biến dạng cực đại của lò xo và thời gian $\tau$ mà quả cầu có khối lượng m tiếp xúc với lò xo.




ĐS: $\Delta l_{max} = v_0\sqrt{\dfrac{6m}{7k}}; \tau = \pi\sqrt{\dfrac{6m}{7k}}$

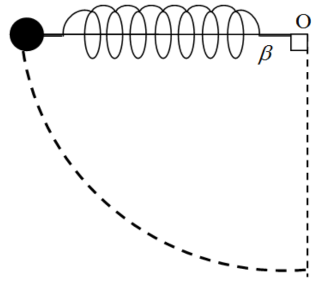
**Bài 33.** Một quả cầu có khối lượng m= 2kg treo ở một đầu một sợi dây có khối lượng không đáng kể và không co dãn. Bỏ qua ma sát và sức cản. Lấy g= 10m/s$^2$.

a) Kéo quả cầu khỏi vị trí cân bằng một góc $\alpha_m$ rồi thả ra ( vận tốc ban đầu bằng không). Thiết lập biểu thức lực căng dây của dây treo khi quả cầu ở vị trí lệch một góc $\alpha$ so với vị trí cân bằng. Tìm vị trí của quả cầu trên quĩ đạo để lực căng đạt cực đại. Tinh độ lớn của lực căng cực đại nếu góc $\alpha_m$=60$^0$.

b) Phải kéo quả cầu khỏi vị trí cân bằng một góc bằng bao nhiêu để khi thả cho dao động, lực căng cực đại gấp 3 lần trọng lượng của quả cầu.

c) Thay sợi dây treo quả cầu bằng một lò xo có trọng lượng không đáng kể. Độ cứng của lò xo là k= 500N/m, chiều dài ban đầu $l_0$=0,6m. Lò xo có thể dao động trong mặt phẳng thẳng đứng xung quanh điểm treo O. Kéo quả cầu khỏi vị trí cân bằng một góc

$\beta = 90^0$ rồi thả ra. Lúc bắt đầu thả, lò xo ở trạng thái không bị nén dãn. Xác định độ dãn của lò xo khi quả cầu đến vị trí cân bằng.

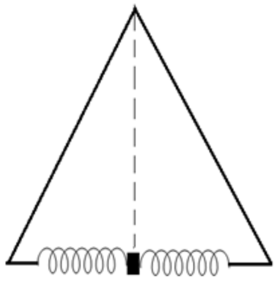



ĐS: a) $T = mg(3\cos\alpha - 2\cos\alpha_m)$;

$T_{\max} = mg(3 - 2\cos\alpha_m) = 40(N)$

b) $\alpha_m = 90^0$; c) $\Delta l$ =0,104(m).

**Bài 34**. Một tam giác cân tạo bởi ba thanh mảnh quay với vận tốc không đổi $\omega$ = 4rad/s trong mặt phẳng ngang (trùng với mặt phẳng tam giác) quanh trục thẳng đứng đi qua đỉnh của nó (hình vẽ). Ở cạnh đáy của tam giác một quả cầu nhỏ khối lượng m = 0,1kg được nối với hai đỉnh kề nhau bằng hai lò xo giống nhau mỗi chiếc có độ cứng k = 3,2 N/m. Tìm tần số dao động của quả cầu trên thanh? Bỏ qua ma sát.

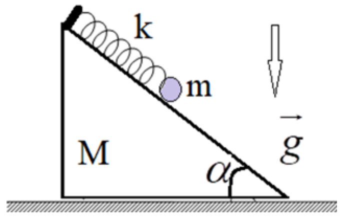


Hình 1.36P

ĐS: $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2K}{m} - \omega^2} \approx 1{,}1s$

**Bài 35**. Cho hệ như hình 1.37P. Vật khối lượng m nối với lò xo có độ cứng k dao động trên mặt nghiêng của nêm. Góc giữa mặt nghiêng của với phương ngang là α. Nêm có khối lượng M và có thể chuyển động tự do trên mặt phẳng ngang. Tìm chu kì dao động nhỏ của hệ. Bỏ qua mọi ma sát.

**ĐS:** $T = 2\pi\sqrt{\frac{m\left(M + m\sin^2\alpha\right)}{k\left(M + m\right)}}$




Hình 1.37P

**Bài 36.** Hai vật nhỏ 1 và 2 có khối lượng lần lượt là $m_1$ và $m_2$ được nối với nhau bằng một lò xo và nằm yên trên mặt phẳng ngang nhẵn, lúc đầu lò xo không biến dạng. Sau đó người ta truyền đồng thời cho hai vật các vận tốc ban đầu, cụ thể: vật 1 đạt vận tốc $\vec{v_1}$, vật 2 đạt vận tốc $\vec{v_2}$ .Biết lò xo có độ cứng k và khối lượng không đáng kể. Gọi G là khối tâm hệ hai vật trên. Hãy tìm các kết quả theo yêu cầu của bài toán trong hệ quy chiếu khối tâm G trong các trường hợp dưới đây:

**a.**Trường hợp 1. Các véc tơ vận tốc $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ đều có phương nằm ngang và $\vec{v_1}$ vuông góc với $\vec{v_2}$ . Hãy tìm cơ năng hệ hai vật.

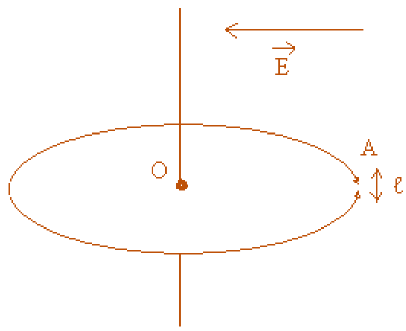
**b.**Trường hợp 2. Các véc tơ $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ ngược chiều nhau và trùng với trục lò xo. Tìm chu kì và biên độ dao động mỗi vật.

ĐS: a. $E_G = K_G|_{t=0} = \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{(m_1+m_2)}\left[v_1^2+v_2^2\right]$;

b. $\begin{cases} T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{m_1m_2}{(m_1+m_2)k}} \\ T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k_2}} = 2\pi\sqrt{\frac{m_1m_2}{(m_1+m_2)k}} \end{cases}$ ; $\begin{cases} A_1 = \frac{m_2}{(m_1+m_2)}(v_1+v_2)\sqrt{\frac{m_1m_2}{k(m_1+m_2)}} \\ A_2 = \frac{m_1}{(m_1+m_2)}(v_1+v_2)\sqrt{\frac{m_1m_2}{k(m_1+m_2)}} \end{cases}$

## IV.3. DAO ĐỘNG CỦA ĐIỆN TÍCH – HỆ ĐIỆN TÍCH

**Bài 1.** Một vòng dây mảnh, khối lượng M, bán kính R, mảng điện tích Q > 0 phân bố đều. Trên vòng dây có một khe hở nhỏ, chiều dài ℓ. Vòng dây được đặt trong mặt phẳng nằm ngang và có thể quay quanh trục thẳng đứng qua tâm O của vòng. Ban đầu vòng dây đứng yên. Đưa vòng dây vào điện trường đều có cường độ điện trường $\vec{E}$ song song với mặt phẳng vòng dây. Quay vòng lệch khỏi vị trí cân bằng góc α nhỏ.



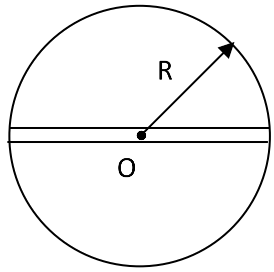

Chứng minh vòng dao động đều hòa. Tìm chu kỳ dao động.

**ĐS:** $T = 2\pi\sqrt{\frac{2\pi.mR^2}{\ell QE}}$

**Bài 2.** Ba đồng xu nhỏ đồng chất, khối lượng m được nối với nhau bằng hai sợi dây nhẹ, không dẫn điện, mỗi dây có chiều dài d. Mỗi đồng xu này có điện tích q. Các đồng xu này được đặt trên một mặt phẳng nhẵn nằm ngang và cách điện (góc hợp bởi giữa các sợi dây này gần bằng 180°). Sau đó người ta thả tự do cho các đồng xu này dao động, người ta nhận thấy chu kỳ dao động của các đồng xu là T. Tìm điện tích q của mỗi đồng xu.

ĐS: $q \approx \frac{4\pi}{T}\sqrt{\frac{md^3/3}{1/4\pi\varepsilon_0}}$

**Bài 3.** Một quả cầu tích điện tích khối với điện tích Q, bán kính R được giữ cố định. Người ta tạo ra một rãnh rất nhỏ dọc theo một đường kính của quả cầu

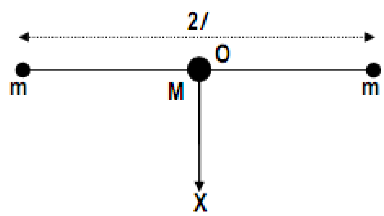



(Coi rãnh nhỏ này không ảnh hưởng đến sự phân bố điện tích của quả cầu ). Có một hạt nhỏ có khối lượng m, tích điện tích q, ngược dấu với Q, bắt đầu chuyển động với động năng $K_0$, từ tâm của quả cầu dọc theo rãnh. Trong quá trình chuyển động của hạt m, ta chỉ tính đến lực tĩnh điện.

a) Hãy xác định giá trị $K_0$ sao cho hạt m vừa vặn đi đến được mép của quả cầu thì dừng lại tức thời.

b) Mất bao nhiêu thời gian để hạt m đi được đến mép quả cầu với giá trị động năng $K_0$ vừa tìm được từ ý a.

ĐS: a. $K_0 = \frac{-qQ}{8\pi\varepsilon_0 R}$; b. $\Delta t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{4\pi\varepsilon_0 m}{-qQ}}$.




**Bài 4.** Ba quả cầu nhỏ có khối lượng m, M, m cùng điện tích q nối với nhau bằng hai dây nhẹ không dãn và không dẫn điện, chiều dài l. Chọn trục tọa độ có gốc O trùng với vị trí quả cầu M khi hệ cân bằng , trục Ox vuông góc với hai dây. Tìm chu kỳ dao động nhỏ của hệ theo phương Ox. Bỏ qua ảnh hưởng của trọng lực.

ĐS: $T = 2\pi\sqrt{\frac{4Mml^3}{kq^2(M+2m)}}$

**Bài 5**. Hai điện tích bằng nhau (+q) được cố định ở hai đầu một đoạn thẳng dài 2a. Một điện tích dương Q với khối lượng m đặt ở trung điểm của hệ và có thể chuyển động.

1) CMR : chuyển động của Q là không ổn định với các dịch chuyển nhỏ vuông góc với đoạn thẳng và ổn định với các dịch chuyển nhỏ dọc theo đoạn thẳng.

2) Nếu Q được chuyển một khoảng cách x < a. Tìm điện thế ở vị trí của Q do 2 điện tích (+q) gây ra.

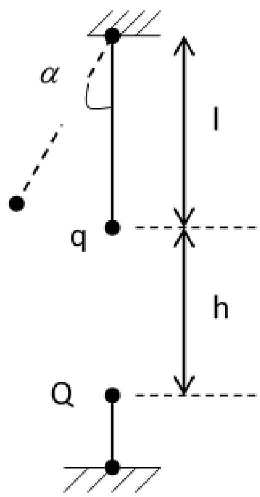
3) Dùng khai triển nhị thức, khai triển biểu thức cho thế đó và chỉ giữ lại số hạng có bậc thấp nhất của x. Xác định độ lớn của lực tĩnh điện tác dụng lên Q khi nó dịch đi x.

4) Nếu Q được thả ra ở độ dịch x đó : Tìm tần số góc của dao động của Q quanh trung điểm của đoạn thẳng.

Chú ý : $(1 \pm x)^n = 1 \pm \frac{n\,x}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + ...$ (với x << 1)

ĐS: 2. $V = \frac{k.q}{x+a} + \frac{k.q}{a-x}$ ; 3. $F = \frac{4kQqx}{a^3}$ ; 4. $\omega = \sqrt{\frac{4kQq}{ma^3}}$

**Bài 6.** Một con lắc đơn chiều dài l, quả nặng có khối lượng m, tích điện q. Phía dưới vị trí cân bằng của con lắc có một điện tích điểm Q được giữ cố định. Khi con lắc cân bằng quả nặng và Q cùng nằm trên đường thẳng đứng, khoảng cách từ vị trí cân bằng đến điện tích điểm Q bằng h (hình vẽ). Bỏ qua lực cản không khí.Tính chu kì dao động nhỏ của con lắc.




**ĐS:** $\omega = \sqrt{\frac{g}{l} - \frac{qQ(h+l)}{4\pi\varepsilon_0.m.h^3.l}}$

với điều kiện $mg > \frac{qQ(h+l)}{4\pi\varepsilon_0 mh^3}$ nếu q.Q> 0

**Bài 7. Nguyên tử Thomson.**

Một nguyên tử hdro được biểu diễn bằng 1 hạt nhân có điện tích e chuẩ một khối cầu bán kính k, ở bên trong khối cầu có điện tích e được phân bố đều electron có điện tích –e, có khả năng vận động bên trong khối cầu tích điện dương.

1) Electron vận động trong quả cầu có bán kính R chịu lực nào? Vị trí cân bằng của nó ở đâu?

2) Bản chất quỹ đại của electron, giả thiết nằm trong khối cầu là gì? Tìm giá trị trung bình của momen lưỡng cực của nguyên tử này?

3) Đặt một trường $\overrightarrow{E_0}$ lên nguyên tử này, hạt nhân được giả thiết đứng yên nuế electron vẫn còn ở bên trong quả cầu bán kính R, thì có những thay đổi gì đối với các kết quả trên do có trường đặt vào? Chứng tỏ rằng momen lưỡng cực trung bình có dạng $\langle\vec{P}\rangle = \alpha\varepsilon_0\overrightarrow{E_0}$ , trong đó $\alpha$ là hệ số phân cực của nguyên tử. Hỏi thứ nguyên của α và cỡ lớn của nó.

4) Với giá trị nào của trường ngoài thì nguyên tử này sẽ bị ion hóa?

ĐS: 1. : $\vec{f} = -\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\vec{r}$ hướng về 0.Vị trí cân bằng của electron là tại 0.

2. Quỹ đạo là một hình elip tâm O. Mô men lưỡng cực tức thời của nguyên tử $\vec{P} = -e\vec{r}$ . Giá trị trung bình của nó bằng 0.

3.Quỹ đạo của electron vẫn có hình dạng như cũ nhưng bị lệch đi một đoạn không đổi:

elip sẽ có tâm tại $\vec{r} = \dfrac{4\pi\varepsilon_0 R^3}{e}\overrightarrow{E_0}$

- Giá trị trung bình của momen lưỡng cực : $P = 4\pi\varepsilon_0 R^3 E_0$; $\alpha = 4\pi R^3$ thứ nguyên: $[m^3]$

4. $E_0$ cỡ $10^{11}$V/m rất lớn.

**Bài 8.** Mẫu nguyên tử Thomson)

1. Mẫu nguyên tử Thomson cho nguyên tử Hiđrô được biểu diễn bằng một hạt nhân có điện tích e chiếm một khối cầu tâm O bán kính R, ở bên trong khối cầu điện tích e được phân bố đều. Electron có điện tích –e có khả năng vận động ở bên trong khối cầu tích điện dương.

a. Xác định quỹ đạo của electron trong khối cầu, biết tại t=0 nó có vị trí $\vec{r}_0$ và vận tốc $\vec{v}_0$ vuông góc với $\vec{r}_0$ so với tâm khối cầu.

b. Đặt một điện trường $\overrightarrow{E_0}$ lên nguyên tử này, hạt nhân được giả thiết đứng yên, electron vẫn còn bên trong khối cầu bán kính R thì quỹ đạo của nó có gì thay đổi? Tính mômen lưỡng cực trung bình của nguyên tử khi đó.

2. Một hệ điện tích tạo ra thế có đối xứng cầu: $V(r)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(1+\frac{r}{a}\right)\exp\left(-\frac{2r}{a}\right)$, với q>0, a là hằng số dương. Hãy tính điện tích Q(r) nằm trong quả cầu bán kính r. Nêu tính chất của phân bố điện tích tương ứng với thế trên. Hãy định nghĩa năng lượng liên kết của hệ này và tìm biểu thức của năng lượng liên kết đó.

ĐS: 1a. Quỹ đạo là một elip có tâm O, phương trình chuyển động $\vec{r}(t)=\vec{r}_0.\cos\omega t+\frac{\vec{v}_0}{\omega}\sin\omega t$ ; $\omega=\sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mR^3}}$

1b. Quỹ đạo của êlectron vẫn là một elip như câu a nhưng tâm O' của nó bị lệch đi một vectơ không đổi: $\overrightarrow{OO'}=-\frac{4\pi\varepsilon_0 R^3}{e}\overrightarrow{E_0}$

+ Mô men lưỡng cực tức thời của nguyên tử: $\vec{p}=-e.\vec{r'}$ với $\vec{r'}=\overrightarrow{O'M}$

Do đó, mômen lưỡng cực trung bình của nguyên tử: $\langle\vec{p}\rangle=4\pi\varepsilon_0 R^3\overrightarrow{E_0}$

3. $Q(r)=q\left(1+\frac{2r}{a}+\frac{2r^2}{a^2}\right)\exp(-\frac{2r}{a})$ ; năng lượng liên kết W=$\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$

**Bài 9**. Một hình vuông ABCD có cạnh $a\sqrt{2}$ có tâm ở O, tại mỗi đỉnh của hình vuông ta đặt một điện tích +q.

a) Xác định điện thế do các điện tích ở đỉnh gây ra tại tâm hình vuông.

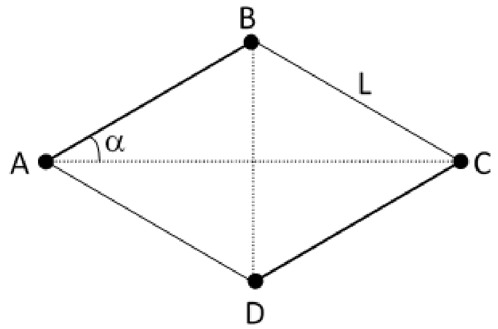
b) Chứng minh rằng điểm O là vị trí cân bằng bền của một điện tích thử (điểm) Q = +q trong mặt phẳng của hình vuông, và là vị trí cân bằng không bền theo trục đi qua tâm O và vuông góc với mặt phẳng của hình vuông.

c) Tính chu kì dao động nhỏ của điện tích Q trong mặt phẳng hình vuông.

d) Nếu Q = - q thì có thay đổi gì trong các kết quả trên.

ĐS: a. $V_O = \dfrac{q}{\pi\varepsilon_0 a}$; c. $T = \dfrac{2\pi}{q}\sqrt{\pi\varepsilon_0 m a^3}$.

**Bài 10.** Bốn hạt nhỏ A, B, C, D có cùng khối lượng m và đều mang điện tích dương, được nối với nhau bằng bốn sợi dây mảnh có cùng chiều dài L trong không khí. Các dây không giãn, khối lượng của dây không đáng kể. Từng cặp hai hạt A và C, B và D có điện tích bằng nhau. Biết điện tích của mỗi hạt A, C bằng q. Khi hệ cân bằng, bốn điện tích ở bốn đỉnh của hình thoi ABCD có góc ở các đỉnh A, C là 2α (hình vẽ). Bỏ qua tác dụng của lực hấp dẫn và lực cản của môi trường.




a) Tính điện tích Q của mỗi hạt B, D.

b) Kéo hai hạt A, C về hai phía ngược nhau theo phương AC sao cho mỗi hạt lệch khỏi vị trí cân bằng ban đầu một đoạn nhỏ rồi buông cho dao động. Tìm chu kì dao động.

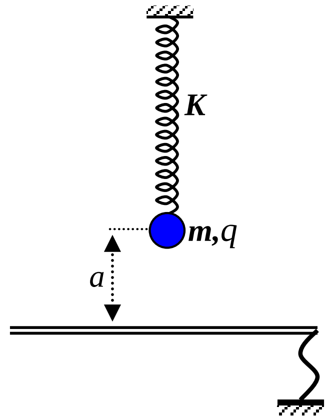
c) Giả thiết khi các điện tích đang nằm yên ở vị trí cân bằng thì các dây đồng thời bị đốt đứt tức thời. Tìm tỉ số gia tốc của hạt A so với gia tốc của hạt B ngay sau khi đốt dây.

ĐS: a. $Q = q\sqrt{tg^3\alpha}$ **; b.** $T = \sqrt{\dfrac{4mL^3\cos^3\alpha}{3kq^2}}$; c. $\dfrac{a_1}{a_2} = \text{cotg}\alpha$

**Bài 11.** Một lò xo nhẹ, cách điện, một đầu gắn chặt vào giá cố định, đầu còn lại treo quả cầu kim loại nhỏ khối lượng m, tích điện q. Hệ được đặt trong không khí và khi cân bằng quả cách một thành phẳng bằng kim loại đã nối đất một khoảng a (hình vẽ)

1) Từ vị trí cân bằng người ta kéo quả cầu xuống dưới, cách VTCB một đoạn $x_0$ ($x_0$ <<

2a) rồi thả nhẹ. Chứng minh quả cầu dao động điều hòa. Lập biểu thức tính chu kì và viết phương trình dao động của quả cầu.



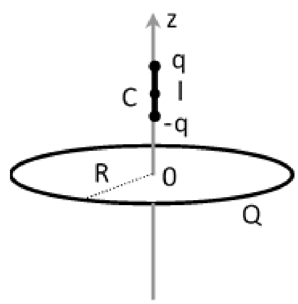

2) Nghiên cứu sự biến đổi mật độ điện tích hưởng ứng trên mặt vật dẫn tại điển M cách vị trí cân bằng của quả cầu khoảng 2a.

$$ĐS: 1.\ \omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{q^2}{16\pi m\varepsilon_0 a^3}}\ ; \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{k}{m}} \times \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{16k\pi\varepsilon_0 a^3}}}$$

$, \ x = x_0\cos\omega t$

2. Khi đó $\sigma \approx \frac{q}{16\pi a^2}\left(1 + \frac{3}{4a}x_0\cos\omega t\right)$

**Bài 12.** Đặt trong chân không một vòng dây mảnh, tròn, bán kính R, tâm O, mang điện tích dương Q phân bố đều. Dựng trục Oz vuông góc với mặt phẳng của vòng dây và hướng theo chiều vectơ cường độ điện trường của vòng dây tại O (hình vẽ). Một lưỡng cực điện có vectơ mômen lưỡng cực $\vec{p}$ và có khối lượng m chuyển động dọc theo trục Oz mà chiều của $\vec{p}$ luôn trùng với chiều dương của trục 0z (Lưỡng cực điện là một hệ thống gồm hai hạt mang điện tích cùng độ lớn q nhưng trái dấu, cách nhau một khoảng cách l không đổi (l << R), C là trung điểm của l. Vectơ mômen lưỡng cực điện là vectơ hướng theo trục lưỡng cực, từ điện tích âm đến điện tích dương, có độ lớn p = ql, khối lượng của lưỡng cực là khối lượng của hai hạt). Bỏ qua tác dụng của trọng lực.




1. Xác định tọa độ $z_0$ của C khi lưỡng cực ở vị trí cân bằng bền và khi lưỡng cực ở vị trí cân bằng không bền? Tính chu kì T của dao động nhỏ của lưỡng cực quanh vị trí cân bằng bền.

2. Giả sử lúc đầu điểm C nằm ở điểm O và vận tốc của lưỡng cực bằng không. Tính vận tốc cực đại của lưỡng cực khi nó chuyển động trên trục Oz.

ĐS: 1. + $z = r\sqrt{2}$, tại điểm đó thế năng cực tiểu, là cân bằng bền.Chu kỳ $T = \frac{\pi r^2 3^{\frac{5}{4}}}{2}\sqrt{\frac{m}{kpQ}}$

+ z = - r/$\sqrt{2}$, tại điểm đó thế năng cực đại, là cân bằng không bền.

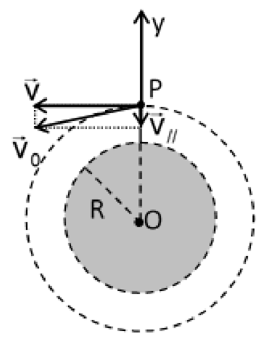
2. $v_{max} = \frac{2}{r.3^{3/4}}\sqrt{\frac{kpQ}{m}}$

**Bài 13.** Một hạt mang điện - q (q > 0), khối lượng m chuyển động trong điện trường gây bởi các ion dương. Các ion dương phân bố đều với mật độ điện tích ρ trong vùng không gian dạng khối trụ, bán kính R, trục đối xứng là xx' và đủ dài.

Giả sử các lực khác tác dụng lên hạt là rất nhỏ so với lực điện và trong khi chuyển động hạt không va chạm với các ion dương. Xét hai trường hợp sau:

**1.** Hạt chuyển động trong mặt phẳng chứa trục đối xứng xx':

Lúc đầu hạt ở điểm M cách trục một đoạn a < R và có vận tốc $\vec{v}_0$ hướng theo phương của trục. Giá trị $v_0$ phải bằng bao nhiêu để sau khi hạt đi được một khoảng L (tính dọc theo trục) thì nó tới điểm N nằm cùng phía với M so với trục xx' và cách trục một đoạn a/2?




**2.** Hạt chuyển động trong mặt phẳng vuông góc với trục đối xứng xx':

Lúc đầu hạt ở điểm P cách trục một khoảng b > R, có vận tốc $\vec{v}_0$ nằm trong mặt phẳng vuông góc với trục đối xứng. Lấy giao điểm O của mặt phẳng này với trục xx' làm tâm, vẽ một vòng tròn bán kính b qua P và phân tích $\vec{v}_0 = \vec{v} + \vec{v}_{//}$, trong đó $\vec{v}$ có phương tiếp tuyến với vòng tròn còn $\vec{v}_{//}$ hướng dọc theo phương bán kính. Giả sử $\vec{v}_{//} << \vec{v}$.

a. Chứng minh rằng hạt chuyển động tuần hoàn theo phương bán kính đi qua hạt.

b. Tìm độ lớn của v và chu kì T.

c. Tính khoảng cách l từ P tới hạt sau khoảng thời gian t = n. $\frac{T}{2}$ (n nguyên, dương).

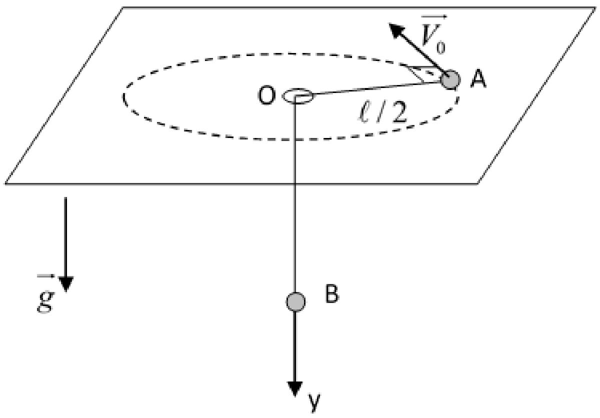
ĐS: 1. $v_0 = \frac{3L}{\pi}\sqrt{\frac{q\rho}{2m\varepsilon_0}}$ hoặc $v_0 = \frac{L}{2\pi(k \pm \frac{1}{6})}\sqrt{\frac{q\rho}{2m\varepsilon_0}}$ với k=1,2,3,

2. b. $v = R\sqrt{\frac{q\rho}{2m\varepsilon_0}}$ ; $T = \frac{2\pi b}{R}\sqrt{\frac{m\varepsilon_0}{q\rho}}$ ; c. $l = 2b\left|\sin\frac{n\pi\sqrt{2}}{4}\right|$ (n nguyên, dương).

## IV.4. MỘT SỐ DAO ĐỘNG ĐIỀU HÒA KHÁC.

**Bài 1.** Hai vật nhỏ A và B giống nhau có khối lượng m được nối với nhau bởi dây nhẹ không giãn chiều dài $\ell$ rồi vắt qua một lỗ nhỏ O trong mặt phẳng nằm ngang như hình 4. Ban đầu giữ vật B cố định sao cho phần dây OA dài là $\frac{\ell}{2}$ rồi truyền cho vật A vận tốc ban đầu $V_0$ nằm trong mặt phẳng ngang và có phương vuông góc với dây OA như hình vẽ. Ngay khi A chuyển động thì người ta thả vật B ra tự do. Bỏ qua mọi ma sát lực cản.

1. Tìm điều kiện của $V_0$ theo $g;\ell$ để sau khi thả vật B tự do, vật B đứng yên ?



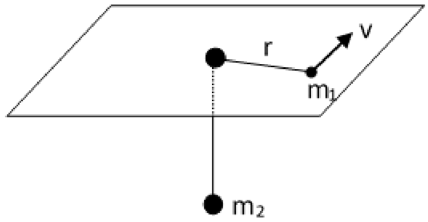

2. Khi $V_0 = \sqrt{\frac{g\ell}{2}}$, từ vị trí cân bằng của B, dịch chuyển B một đoạn nhỏ theo phương thẳng đứng Oy. Chứng minh rằng sau đó B dao động điều hòa. Tính chu kì dao động của vật B. Cho biết $\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)^n \approx \frac{1}{2}+n.a$ nếu $|a| << \frac{1}{2}$
.

3. Với $V_0 = \sqrt{\frac{g\ell}{3}}$ , xác định vị trí của A tại đó vật B đạt vận tốc cực đại. Tính vận tốc cực đại này theo $g;\ell$.

ĐS:1. $V_0 = \sqrt{\frac{g\ell}{2}}$ ; 2. $T = 2\pi\sqrt{\frac{16\ell}{3g}}$ ; 3. $r = \frac{\ell}{\sqrt[3]{12}} \approx 0,43679\ell, V_{max} = \sqrt{\frac{g\ell}{2}\left[\frac{4}{3}-\frac{3}{\sqrt[3]{12}}\right]} \approx 0,107151\sqrt{g\ell}$

**Bài 2 .** Một vật $m_1$ chuyển động quanh một lỗ trống trên mặt phẳng của cái bàn nằm ngang không ma sát. Vật được nối với một lò xo xuyên qua lỗ. Một vật $m_2$ được buộc vào đầu kia của lò xo. Khoảng cách từ $m_1$ đến lỗ trống là r, vận tốc của $m_1$ là v.

a) Biết ban đầu $m_1$ cách lỗ trống đoạn $R_0$ và có vận tốc $v_0$. Tìm phương trình xác định bán kính quỹ đạo lớn nhất và nhỏ nhất




b) Tìm tần số dao động của bán kính quỹ đạo khi quỹ đạo chỉ hơi lệch so với vòng tròn.

ĐS: a. 2 $m_2gr^3 - 2Cr^2 + m_1h^2 = 0$, nghiệm của phương trình này là giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất của r.

b. $f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{3m_2g}{(m_1 + m_2)R_0}}$

**Bài 3. a.** Một hạt có khối lượng m được đặt trong một trường điện ở đó năng lượng điện của hạt phụ thuộc vào x với $U(x) = U_0$ (1- cos ax), $U_0$ và a là những hằng số. Tìm chu kỳ dao động nhỏ mà hạt thực hiện quanh vị trí cân bằng.

b. Giải bài tập trên nếu năng lượng điện của hạt có dạng $U(x) = a/x^2 - b/x$; với a, b là những hằng số dương.

ĐS: a. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{a^2U_0}}$ ; b. $T = 2\pi\dfrac{\sqrt{8ma^3}}{b^2}$

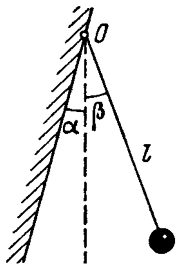
**Bài 4.** Tìm chu kỳ dao động nhỏ thẳng đứng của một quả cầu có khối lượng m = 40g được gắn vào tâm của một sợi dây căng nằm ngang có độ dài l = 1,0 m. Sức căng của sợi dây coi như không đổi và bằng F = 10 N.

ĐS: $T = \pi\dfrac{\sqrt{ml}}{F} = 0,2s$

**Bài 5.** Xác định chu kỳ dao động nhỏ của một con lắc toán học là một hòn bi treo vào một sợi dây chỉ, dài l = 20 cm, nếu nó nằm trong chất lỏng lý tưởng có khối lượng riêng $\eta$ = 3,0 lần nhỏ hơn khối lượng riêng của hòn bi.

ĐS: $T = 2\pi\sqrt{\frac{\eta l}{g(\eta - 1)}} = 1,1s$

**Bài 6 :** Một quả bóng được treo bởi một sợi dây mảnh dài **l** tại điểm O trên tường, tạo một góc nhỏ $\alpha$ với phương thẳng đứng ( hình vẽ). Sau đó sợi dây và bóng đã đi lệch một góc nhỏ $\beta$ ($\beta > \alpha$) và chuyển động tự do. Giả thiết va chạm của bóng với tường là tuyệt đối đàn hồi. Tìm chu kỳ dao động của con lắc này.

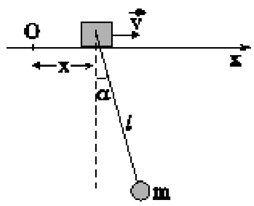



ĐS: $T = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\left(\pi - \arccos\frac{\alpha}{\beta}\right)$

**Bài 7.** Một con lắc đơn được treo vào một giá đỡ, giá đỡ này dao động theo phương ngang nhờ ngoại lực theo phương trình x = Acosωt.

a) Hãy lập phương trình chuyển động của con lắc khi góc lệch $\alpha$ nhỏ.

b) Hãy tìm nghiệm của phương trình khi con lắc đã dao động ổn định.

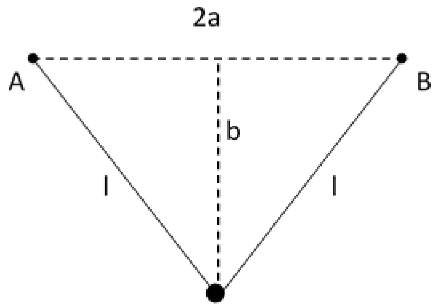



ĐS: a. $\alpha'' + \omega_0^2\alpha = \frac{A\omega^2}{l}\cos\omega t$ (với $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$)

b. Nghiệm tổng quát của phương trình là: $\alpha = \frac{A\omega^2}{l(\omega_0^2 - \omega^2)}\cos\omega t + B\cos(\omega_0 t + \varphi)$

Hiện tượng cộng hưởng xảy ra nếu $\omega \approx \omega_0$. Còn nếu $\omega \neq \omega_0$ thì chuyển động của con lắc là ổn định.

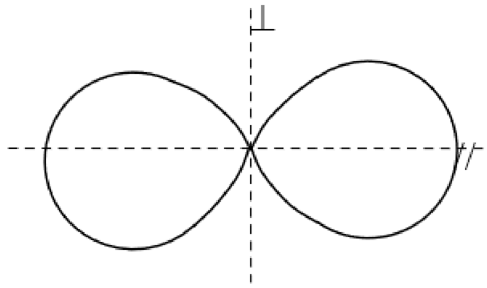
**Bài 8.** Luồn một hạt cườm nhỏ vào một sợi dây có chiều dài 2l. Treo hai đầu dây vào hai điểm A và B có cùng độ cao và cách nhau 2a.




a.Tìm chu kỳ dao động nhỏ trong mặt phẳng vuông góc với đoạn thẳng AB.

b. Tìm chu kỳ dao động nhỏ trong mặt phẳng thẳng đứng song song với đoạn thẳng AB.

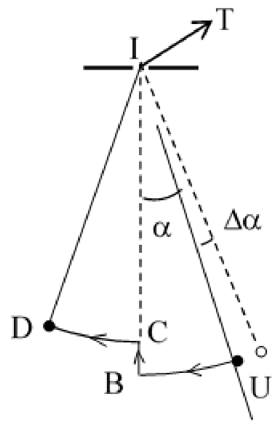
c. Với tỷ số b/a bằng bao nhiêu thì quỹ đạo hạt cườm chiếu lên mặt phẳng ngang có dạng như hình vẽ.



**ĐS: a.** $T_{\perp} = 2\pi\sqrt{\dfrac{b}{g}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{\sqrt{l^2 - a^2}}{g}}$;

b. $T_{\parallel} = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g\sqrt{1-\left(\dfrac{a}{l}\right)^2}}}$ ;c. $\dfrac{l}{a} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

**Bài 9.** Một con lắc đơn có chiều dài L thực hiện dao động nhỏ trong mặt phẳng thẳng đứng. Để tăng biên độ dao động người ta làm như sau: cứ mỗi lần vật đi qua vị trí cân bằng thì dây được rút ngắn bớt một đoạn nhỏ ΔL << L qua một lỗ hẹp ở điểm treo, còn khi vật đến vị trí biên thì dây lại được thả ra một đoạn ΔL. Hãy ước tính độ tăng biên độ góc tỷ đối Δα/α sau mỗi chu kỳ dao động.




ĐS: $\dfrac{\Delta\alpha}{\alpha} = 3\dfrac{\Delta L}{L}$

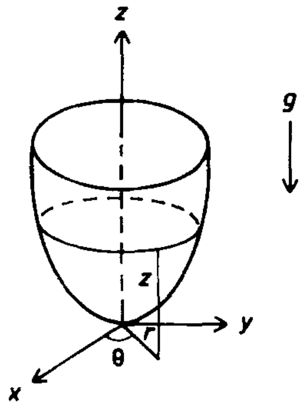
**Bài 10.** Một chất điểm khối lượng m chuyển động trong trường xuyên tâm O có biểu thức lực xuyên tâm có dạng $F(r)$.

a) Ở quỹ đạo tròn ổn định, hạt có vận tốc $v_0$ và bán kính quỹ đạo tròn là $r_0$. Tìm liên hệ giữa $v_0, r_0$

b) Một tác động nhỏ làm hạt lệch khỏi quỹ đạo ổn định. Tìm điều kiện để hạt dao động quanh quỹ đạo ổn định và tìm tần số góc dao động đó.

ĐS: a. $m\frac{v_0^2}{r_0} = -F(r_0)$; b. Điều kiện $\frac{3F(r_0)}{r_0} + F'(r_0) < 0$

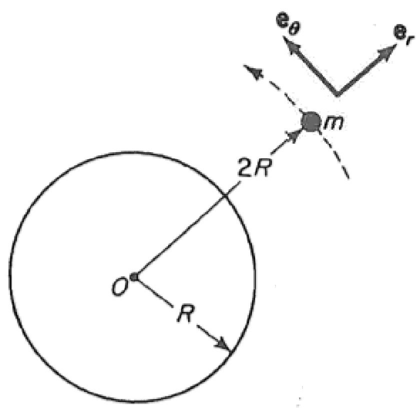
Tần số góc $\omega = \sqrt{\frac{1}{m}\left(\frac{3F(r_0)}{r_0} + F'(r_0)\right)}$




**Bài 11.** Một hạt chuyển động không ma sát trong vách một hình đối xứng được cho bởi phương trình $z = \frac{b}{2}(x^2 + y^2)$ với b là hệ số cố định. Hạt đang chuyển động ổn định ở độ cao z = $z_0$ nhưng bị hơi ấn xuống dưới. Tìm tần số góc dao động nhỏ của hạt quanh quỹ đạo tròn ổn định.

ĐS: $\omega = \sqrt{\frac{4gb}{1+2bz_0}}$

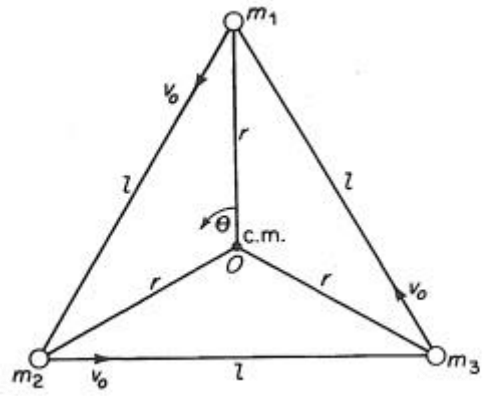
**Bài 12.** Một vệ tinh khối lượng m lúc đầu chuyển động ở quỹ đạo tròn bán kính 2R đối với Trái Đất. Sau đó vệ tinh chịu một lực đẩy độ lớn $10^{-4}mg_0$ theo phương $e_\theta$ trong khoảng thời gian một vòng quay. Tính sự thay đổi nhỏ của vận tốc và bán kính quỹ đạo vệ tinh giữa 2 thời điểm bắt đầu và ngừng tác dụng lực.




ĐS: Sau thời gian $\Delta t = \frac{2\pi R}{v_0}$ thì: $\frac{\Delta r}{r_0} = 16\pi.10^{-4}$

$\frac{\Delta v}{v_0} = -8\pi 10^{-4}$

**Bài 13.** Ba hạt cùng khối lượng m được đặt ở 3 đỉnh của 1 tam giác đều cạnh $\ell$. Ban đầu truyền cho chúng vận tốc đầu $v_0 = \sqrt{\frac{GM}{\ell}}$ có phương và chiều như hình vẽ. Giả sử rằng chỉ có trọng lực tác dụng. Tính $r_{\min}$ và $r_{\max}$ trong chuyển động tiếp theo của các vật. Tính chu kì chuyển động của hệ.




ĐS : $r_{\max} = c(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}), r_{\min} = c(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}), T = 2\pi\sqrt{\frac{c^3}{3Gm}}$

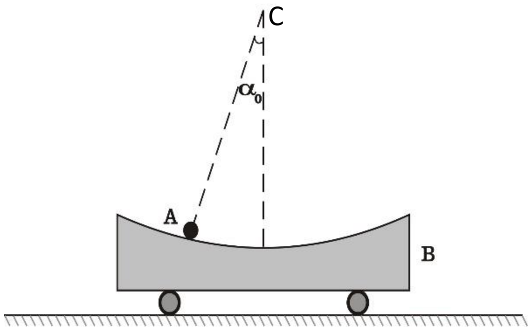
**Bài 14.** Một xe lăn B khối lượng M, phần trên của nó có dạng là một phần của mặt cầu tâm C, bán kính R. Xe đặt trên mặt sàn nằm ngang và trọng tâm của xe nằm trên đường thẳng đứng đi qua tâm mặt cầu. Một hòn bi A rất nhỏ, có khối lượng m được đặt trên mặt cầu của xe (hình 2). Bi A được giữ ở vị trí bán kính mặt cầu qua nó hợp với phương thẳng đứng góc $\alpha_0$ và hệ đứng yên. Bỏ qua mọi ma sát, cho gia tốc trọng trường là g.

1. Xe lăn được giữ cố định. Thả cho bi A chuyển động không vận tốc đầu.

a. Tìm vận tốc của A và áp lực của A nén lên B tại vị trí bán kính qua A hợp với phương thẳng đứng góc $\alpha < \alpha_0$.

b. Giả thiết góc $\alpha_0$ rất bé, hãy chứng minh A dao động điều hòa và tính chu kì dao động của nó?

2.Giả thiết góc $\alpha_0$ rất bé, đồng thời giải phóng A và B không vận tốc đầu. Chứng minh hệ dao động điều hòa. Tìm chu kì dao động của hệ, biên độ dao động của A, B và áp lực cực đại mà A nén lên B trong quá trình dao động?



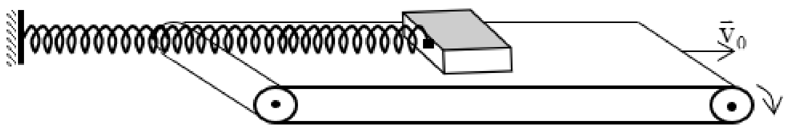

Hình 2

ĐS: 1a. $v = \sqrt{2gR(\cos\alpha - \cos\alpha_0)}$ ; $Q = N = mg(3\cos\alpha - 2\cos\alpha_0)$. 1b. $T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$

ĐS: 2. $T = 2p\sqrt{\dfrac{R}{g(1+\dfrac{m}{M})}}$; $A_1 = \dfrac{MR\alpha_0}{M+m}$; $A_2 = \dfrac{mR\alpha_0}{M+m}$;

$N_{max} = 3mg + 2mg\dfrac{m}{M} - 2mg(1+\dfrac{m}{M})\cos a_0$.

**Bài 15.** Trên một băng chuyền chuyển động theo phương ngang người ta đặt một vật có gắn vào đầu lò xo, đầu kia của lò xo gắn cố định (Hình 2), nhờ đó vật dao động tắt dần.




**a.** Tìm độ biến dạng cực đại và cực tiểu trong quá trình dao động và chu kì dao động của vật

**b.** Tìm quy luật chuyển động của vật x(t) và vẽ đồ thị tọa độ theo thời gian.

Cho biết: khối lượng vật m = 100g, độ cứng lò xo k = 10N/m, vận tốc băng chuyền $v_0$ = 5cm/s.

Hệ số ma sát trượt $\mu$ = 0,25, hệ số ma sát nghỉ $\mu_0$ = 0,3.

ĐS: a. $x_{max} = \dfrac{\mu mg}{k} + \sqrt{\left(\dfrac{(\mu_0-\mu)mg}{k}\right)^2 + \left(\dfrac{v_0}{\omega_0}\right)^2} = 3,2cm$;

$x_{min} = \dfrac{\mu mg}{k} - \sqrt{\left(\dfrac{(\mu_0-\mu)mg}{k}\right)^2 + \left(\dfrac{v_0}{\omega_0}\right)^2} = 1,8cm$

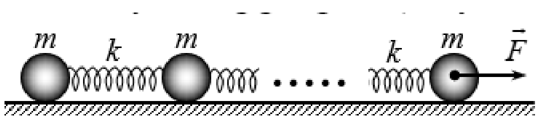
**Bài 16.** Trong một xilanh đứng yên nằm ngang, đóng kín hai đầu, có một pitông khối lượng M. Pitông có thể chuyển động trong xilanh không ma sát. TTCB của pitông ở giữa xi lanh. Giữa pitông và hai mặt đáy của xilanh có hai quả cầu giống nhau khối lượng m<<M đang bay dọc theo trục xi lanh. Biết rằng khi pitông ở TTCB thì tần số va chạm của mỗi quả cầu vào pitông là f (va chạm là tuyệt đối đàn hồi). Nếu pitông từ từ dịch khỏi VTCB một đoạn nhỏ thì pitông bắt đầu dao động điều hoà. Hãy xác định chu kì dao động của pitông?

ĐS: $T = \dfrac{\pi}{\sqrt{6}f}.\sqrt{\dfrac{M}{m}}$

**Bài 17.** Một con lắc đơn được treo vào trần một toa của đoàn tàu hoả. Khi tàu đứng yên, con lắc dao động bé với chu kì T. Tính chu kì dao động bé của con lắc khi đoàn tàu này chuyển động với tốc độ không đổi v trên một đường ray nằm trên mặt phẳng nằm ngang có dạng một cung tròn bán kính cong R. Cho biết gia tốc trọng trường là g; bán kính cong R là rất lớn so với chiều dài con lắc và khoảng cách giữa hai thanh ray. Bỏ qua mọi sự mất mát năng lượng.

ĐS: $T' = \dfrac{T\sqrt{gR}}{\sqrt[4]{v^4 + g^2R^2}}$

**Bài 18.** Có N quả cầu giống nhau, khối lượng mỗi quả là m được nối với nhau bằng các lò xo nhẹ có độ cứng k thành một dãy như hình 1. Tác dụng một lực không đổi $\vec{F}$ hướng nằm ngang vào một trong hai quả cầu ở hai đầu dãy. Khi hệ chuyển động ổn định (tất cả các quả cầu chuyển động giống nhau), hãy tìm độ biến dạng tổng cộng của tất cả các lò xo trong hai trường hợp:

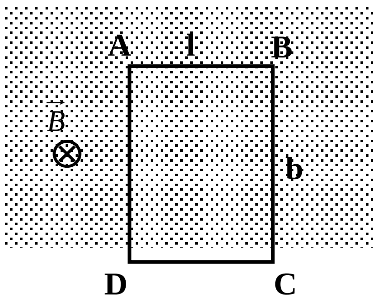



**a)** Hệ chuyển động trên sàn ngang với hệ số ma sát giữa sàn và các quả cầu là μ.

**b)** Hệ chuyển động không có ma sát với sàn ngang nhưng ở trong một môi trường nhớt với lực cản của môi trường $\vec{F}_c = -\beta\vec{v}$. Trong đó β là hằng số đối với môi trường đã cho, v là vận tốc chuyển động của các quả cầu.

ĐS: a. $\Delta x = \dfrac{F}{k}.\dfrac{(N-1)}{2}$.; b. $\Delta x \approx \dfrac{FN}{2k}$.

**Bài 19.** Một khung dây dẫn kín hình chữ nhật ABCD ($AB = l$; $BC = b$), khối lượng m được giữ đứng yên và mặt phẳng khung nằm trong mặt phẳng thẳng đứng. Khung được đặt trong từ trường đều có véc tơ cảm ứng từ $\vec{B}$ vuông góc với mặt phẳng khung sao cho chỉ có cạnh CD không nằm trong từ trường như hình vẽ 1. Ở thời điểm ban đầu ($t = 0$) người ta thả nhẹ khung dây.




*Hình vẽ 1*

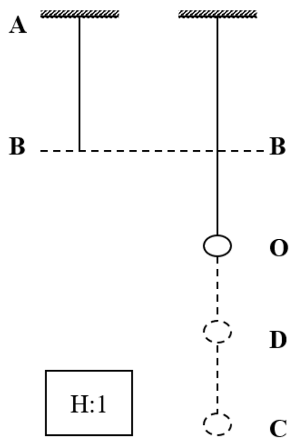
a. Giả sử khung có điện trở thuần R, độ tự cảm của khung không đáng kể, chiều dài b đủ lớn sao cho khung đạt tới vận tốc giới hạn (vận tốc không đổi) trước khi ra khỏi từ trường. Tìm vận tốc giới hạn của khung và nhiệt lượng tỏa ra trên khung đến khi cạnh AB của khung vừa ra khỏi từ trường?

b. Giả sử khung được làm từ vật liệu siêu dẫn và có độ tự cảm L. Cũng giả thiết b đủ lớn để khung không ra khỏi từ trường trong quá trình chuyển động. Chọn trục Ox hướng thẳng đứng từ trên xuống, gốc O tại vị trí ban đầu của cạnh CD. Biết trong quá trình khung chuyển động, cạnh CD không chuyển động vào vùng có từ trường. Viết phương trình chuyển động của khung?

Giả thiết khung dây không bị biến dạng trong quá trình chuyển động.

ĐS: a. $v = \dfrac{mgR}{B^2l^2}$; $Q = mg\left(b - \dfrac{m^2gR^2}{2B^4l^4}\right)$; b. $x = \dfrac{gmL}{B^2l^2}\left[\cos\left(\dfrac{Bl}{\sqrt{mL}}t + \pi\right) + 1\right] - \dfrac{b}{2}$

**Bài 20.** Một dây cao su nhẹ đàn hồi có chiều dài AB = $l_0$ = 1m, có lực đàn hồi tuân theo định luật Húc: F = kx. Một đầu dây được treo ở A, đầu kia gắn vật có khối lượng m = 0,2kg. Dây giãn đoạn OB và vật nằm vị trí cân bằng O. Kéo vật xuống đoạn OC = 0,10 m rồi buông ra. Vật dao động điều hòa theo phương thẳng đứng với chu kì T = 2s (hình 1).




**a.**Hãy tìm:

Hệ số đàn hồi của dây.

Vận tốc của vật ở vị trí OD = 0,05 m.

Thời gian để vật đi từa C đến D.

Động năng cực đại của vật.

**b.** Khối lượng m được nâng lên đến vị trí A rồi được thả rơi tự do. Tìm thời gian để vật m quay lại A lần thứ nhất (Chu kỳ dao động).

**c.** Vẽ đồ thị vận tốc của vật m theo thời gian trong chuyển động ở ý (b).

ĐS: a. $k = 2\left(\dfrac{N}{m}\right)$, $v = 0,27(m/s)$, $\Delta t = \dfrac{1}{3}(s)$, $W_{dmax} = 0,01(J)$; b. $t = 2,286(s)$

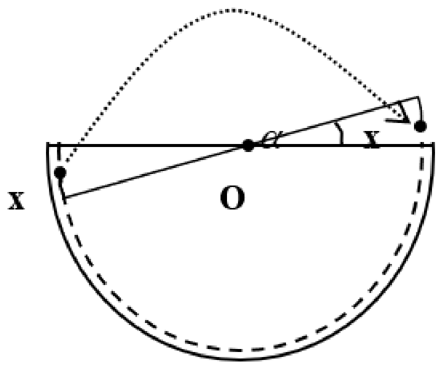
**Bài 21.** Từ điểm A trong lòng một cái chén tròn M đặt trên mặt sàn phẳng nằm ngang, người ta thả một vật m nhỏ (hình vẽ). Vật m chuyển động trong mặt phẳng thẳng đứng, đến B thì quay lại. Bỏ qua ma sát giữa chén M và m.

**a.**Tìm thời gian để m chuyển động từ A đến B. Biết A ở cách điểm giữa I của chén một khoảng rất ngắn so với bán kính R. Chén đứng yên.

**b.** Tìm điều kiện về hệ số ma sát nghỉ giữa chén và sàn.

ĐS: a. $\Delta t = \pi\sqrt{\frac{R}{g}}$; b. $\mu \geq \frac{m\sin 2\alpha}{2\left(M + m\cos^2\alpha\right)}$

**Bài 22.** Một thanh dài l=40cm được uốn thành nửa vòng tròn nhờ các nan hoa có khối lượng không đáng kể . Người ta gắn vào nửa vòng tròn này một trục quay nằm ngang đi qua tâm vòng tròn. Hãy tìm tần số góc của những dao động bé của nửa vòng tròn xung quanh vị trí cân bằng nếu trục quay vuông góc với mặt phẳng đó. Lấy g=9,8 m/s$^2$.




ĐS: $\omega = \sqrt{\frac{2g}{l}}$ =7 (rad/s)

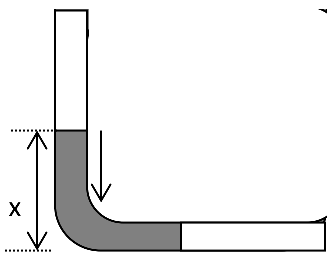
**Bài 23.** Một thanh không trọng lượng được uốn thành 1/3 vòng tròn bán kính R=5cm. Nhờ các nan hoa có khối lượng không đáng kể, người ta gắn cung tròn này vào một trục quay nằn ngang đi qua tâm vòng tròn và vuông góc với mặt phẳng của nó. Người ta gắn vào 2 đầu cung tròn 2 vật nặng như nhau. Hãy tìm tần số góc của những dao động bé của cung tròn xung quanh vị trí cân bằng. Lấy g=9,8 m/s$^2$.

ĐS: $\omega = \sqrt{\frac{g}{2R}}$ = 10 (rad/s)

**Bài 24.** Một thanh có khối lượng M=20g và chiều dài l=118cm được uốn  thành một nửa vòng tròn, và nhờ các nan hoa có khói lượng không đáng kể người ta gắn nửa vòng tròn này vào một trục quay nằm ngang đi qua tâm vòng tròn và vuông góc với mặt phẳng của nó. Người ta gắn vào giữa thanh một vật nặng m=100g. Hãy tìm tần số góc của những dao động bé của nửa vòng tròn xung quanh vị trí cân bằng. Lấy g=9,8 m/s$^2$ và $\pi$ =3.14.

ĐS: $\omega = \sqrt{\frac{\pi m + 2M}{m + M}\frac{g}{l}}$ =5 (rad/s)

**Bài 25.** Một ống dài được uốn thành góc vuông được đặt sao cho một nhánh thẳng đứng. Trong nhánh thẳng đứng người ta dữ một sợi dây dài l=90cm sao cho một đầu của nó nằm ở điểm uốn của ống. Hỏi qua thời gian bao lâu (tính ra mili giây) sau khi buông tay ra thì nó trượt được một nửa vào nhánh nằm ngang của ống? Bỏ qua ma sát. lấy g=10m/s$^2$ và $\pi$ =3,14.




ĐS: $T = \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{l}{g}}$ =314 ms

**Bài 26.** Một chất điểm khối lượng m chuyển động trong trường xuyên tâm O có biểu thức lực xuyên tâm có dạng $F(r) = \frac{-K}{r^n}$. Một tác động nhỏ làm hạt lệch khỏi quỹ đạo ổn định. Tìm điều kiện để hạt dao động quanh quỹ đạo ổn định.

ĐS: $n < 3$

**Bài 27.** Xét chuyển động của các e trong 1 từ trường đối xứng trục. Giả thiết tại z = 0 (xOy), thành phần bán kính của từ trường bằng 0 ($\vec{B}(z{=}0) = B_r\vec{k}$). Các electron tại z = 0 chuyển động tròn bán kính R.

a) Xác định mối quan hệ giữa momen động lượng và bán kính quỹ đạo.

b) Trong máy Betatron, các e được gia tốc bởi 1 từ trường biến thiên. Lấy $B_{av}$ là giá trị trung bình của từ trường trên mặt phẳng quỹ đạo( trong quỹ đạo), từ thông qua quỹ đạo là $\varphi_B = B_{av}\pi R^2$. Tại bán kính R, lấy từ trường là $B_0$

b1) Giả thiết $B_{av}$ thay đổi 1 lượng $\Delta B_{av}$ và $\Delta B_0$, hỏi phải có liên hệ gì giữa $\Delta B_{av}$ và $\Delta B_0$ để e vẫn chuyển động trên quỹ đạo tròn bán kính R khi động lượng của chúng tăng.

b2) Giả thiết thành phần z của từ trường biến thiên theo quy luật $B_z(r) = \frac{A}{r^n}$. Tìm tần số dao động theo phương bán kính (xét sự lệch nhỏ khỏi VTCB theo phương bán kính ). Tìm điều kiện n để có ổn định.

ĐS: a. $L = mVR = eBR^2$; b1. $\Delta B_0 = \frac{\Delta B_{av}}{2}$; b2. Tần số: $f = \frac{eA}{2\pi m r^n}\sqrt{2-n}$; n<2

**Bài 28.** Một dây kim loại cứng, mảnh được uốn sao cho nếu đặt trục 0y trùng với một phần của dây thì phần còn lại của nó trùng với đồ thị hàm số $y = ax^3$ với $x > 0$. Quay đều dây trên theo phần thẳng đứng của dây với vận tốc góc ω. Hạt khối lượng m được đặt sao cho có thể chuyển động không ma sát dọc theo dây. Xác định các vị trí cân bằng có thể và nghiên cứu dao động nhỏ xung quanh vị trí cân bằng.

ĐS: $T = \frac{2\pi}{\omega}\sqrt{1+9a^2x_0^4}$

**Bài 29.** Một phần tử khối lượng m được treo để di chuyển không ma sát trên trục z'z. Nó chịu phản lực trục và lực hút từ chất điểm khối lượng M (không đổi) đặt tại điểm A. Khoảng cách từ A tới trục là a.Thời điểm ban đầu t = 0, phần tử nằm tại O ( hình chiếu của A lên trục) với vận tốc $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_z \quad (v_0 > 0)$.

1. Người ta có thể nói gì về chuyển động sau đó của phần tử.

2. Trong trường hợp chuyển động bị hạn chế, xác định các đặc tính của nó khi phần tử ở vị trí lân cận O. Gọi $T_0$ là chu kì của một chuyển động, hãy đưa ra biểu thức theo $T_0$.

ĐS: $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2a^2}{v_c^2}}$

**Bài 30.** Một hạt cườm chuyển động không ma sát trên một chiếc vòng C đang quay với vận tốc góc không đổi ω xung quanh một trục thẳng đứng (Az) tiếp tuyến tại A với vòng tròn.

1. Xác định một hay nhiều vị trí cân bằng tương đối của hạt cườm, biết rằng hạt cườm không thể bứt ra khỏi vòng tròn.

2. Hãy nghiên cứu các chuyển động nhỏ xung quanh vị trí cân bằng bền. Tính chu kỳ liên kết trong trường hợp g = 10m/s$^2$ ; R = 0,1m ; ω = 10rad.s$^{-1}$.

Cho phương trình Sinx – (1 + sinx)cosx = 0 có nghiệm x = 63$^0$ và x = 208$^0$ .

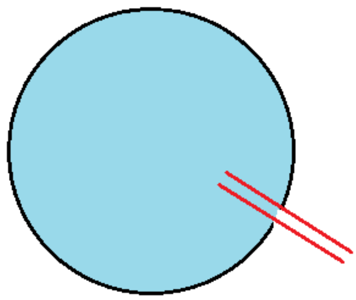
ĐS: 1. Vị trí ứng với $\theta_1 = 63^0$ có $\dfrac{d^2U}{d\theta^2} > 0 \rightarrow$ Cân bằng bền.

Vị trí ứng với $\theta_2 = 208^0$ có $\dfrac{d^2U}{d\theta^2} < 0 \rightarrow$ Cân bằng không bền.

2.

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{\cos\theta_1 + \sin\theta_1 + \cos 2\theta_1}} \approx 0,72(s)$$

**Bài 31.** Người ta thổi một bong bong xà phòng có khối lượng $m = 0,01g$ và hệ số căng bề mặt là $\sigma = 0,01N/m$ thông qua một ống ngắn hở hai đầu (Hình vẽ). Tích điện cho bong bóng đến điện tích $Q = 5,4.10^{-8}C$. Màng bong bóng xà phòng coi là một vật dẫn, điện tích phân bố đều trên bề mặt.



1- Trong trạng thái cân bằng tĩnh điện, hãy xác định cường độ điện trường trên bề mặt của màng bong bóng. So sánh với cường độ điện trường do mặt phẳng vô hạn tích điện đều gây ra và giải thích kết quả thu được.

2- Chứng minh rằng một diện tích $dS$ bất kỳ của mặt ngoài màng bong bóng sẽ chịu tác dụng của lực tĩnh điện $d\vec{F} = \dfrac{Q^2 dS}{32\pi^2\varepsilon_0 R^4}\vec{n}$ do các điện tích trên diện tích còn lại gây ra, với $\vec{n}$ là véc tơ đơn vị pháp tuyến ngoài của $dS$ còn R là bán kính của màng.

3- Xác định bán kính $R_0$ của bong bóng ở trạng thái cân bằng.

4. Tính chu kì dao động nhỏ của bong bóng nếu khi dao động, bán kính thay đổi một lượng nhỏ và nó vẫn giữ nguyên dạng hình cầu.

ĐS: 3. $R_0 = \left( \dfrac{Q^2}{128\pi^2 \varepsilon_0 \sigma} \right)^{1/3} = 3cm$ 4. $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{m}{48\pi\sigma}} = \sqrt{\dfrac{m\pi}{12\sigma}} = 16s$.

**Bài 32.** Sao là thiên thể giống mặt trời, với nhiệt độ cao nên các sao đều tồn tại ở trạng thái khí. Coi mật độ khí của sao là đồng đều. Có những sao có thể giãn nén tuần hoàn coi gần đúng là dao động điều hòa, khi ta quan sát chúng sẽ thấy cường độ ánh sáng thay đổi tuần hoàn và ta gọi là sao biến quang do giãn nén. Hãy tính chu kì dao động nhỏ của các sao này theo mật độ khối lượng trung bình và hệ số đoạn nhiệt $\gamma = \dfrac{5}{3}$.

Gợi ý: Xét một lớp khí ở vành ngoài, nó sẽ chịu lực hấp dẫn của khối khí bên trong nhưng có áp suất chống đỡ lại. Bằng phương pháp biến phân thay $R = R_0 + \delta R$ và $p = p_0 + \delta p$ đồng thời sử dụng phương trình khí giãn đoạn nhiệt.

ĐS: $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{R_0^3}{GM(3\gamma - 4)}}$.

**Bài 33.** Bạn được tặng một cái hộp. Khi bạn mở nắp hộp ra, thì thật bất ngờ, một chú hề bật ra. Đó là hộp bất ngờ. Bài toán sau xét về mô hình của đồ chơi này.

Cho hai vật nhỏ (có thể coi như những chất điểm) có khối lượng tương ứng là m và M được gắn với nhau bằng một lò xo có độ cứng k, chiều dài tự nhiên $\ell$ và khối lượng không đáng kể. Hai vật m và M được lồng vào một trục thẳng đứng có thể trượt không ma sát dọc theo trục. Gắn trục toạ độ Oz dọc theo trục, gốc O ở mặt sàn và có chiều hướng lên trên (hình bên).

Ở trạng thái nghỉ, vật m nằm trên sàn và có toạ độ $z_0 = 0$, vật M nằm ở đầu trên của lò xo và có toạ độ $z_a$.

1. Ta nén vật M cho đến khi nó có toạ độ $z_b$ (với $z_b < z_a$) rồi thả nó ra với vận tốc ban đầu bằng không (coi lúc đó là thời điểm t = 0). Hỏi cần nén vật M ít nhất đến điểm có toạ độ $z_b$ bằng bao nhiêu để khi lò xo dãn ra, vật m bị nâng lên khỏi mặt sàn?

2. Giả sử điều kiện ở ý 1 được thoả mãn, hãy xác định toạ độ $z_c$ và vận tốc $v_c$ của vật M ở thời điểm $t_c$, lúc mà vật m bắt đầu bị nâng lên khỏi mặt sàn. Biểu thị $z_c$ và $v_c$ theo k, m, M, $\ell$, $z_b$.

3. Hãy xác định độ cao cực đại $z_{Gmax}$ mà khối tâm G của hệ hai vật m, M đạt được khi vật m được nâng lên khỏi mặt sàn. Biểu thị $z_{Gmax}$ theo k, m, M, $\ell$, $z_b$.

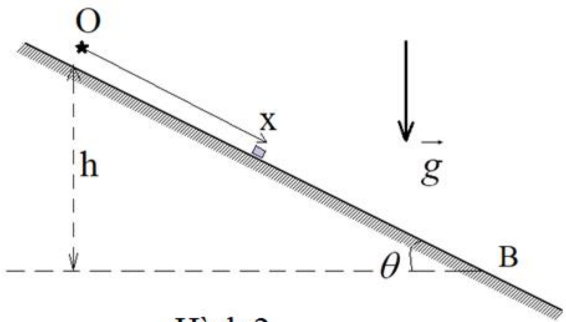
ĐS: 1. $z_b \le \ell - \dfrac{(2M+m)g}{k}$

2. $z = z(t_1) = z_a + (z_b - z_a)\cos\omega t_1$ ; $v_c = \left(\ell - \dfrac{Mg}{k} - z_b\right)\sqrt{\dfrac{k}{M}}\sqrt{1-\left(\dfrac{(M+m)g}{Mg-k(\ell-z_b)}\right)^2}$

3. $z_{G\max} = \dfrac{Mg}{2k} + \dfrac{M}{M+m}(\ell - \dfrac{Mg}{k}) + \dfrac{kM}{2g(M+m)^2}(\ell - \dfrac{Mg}{k} - z_b)^2.$

# IV.5. DAO ĐỘNG TẮT DẦN- CƯỠNG BỨC

**Bài 1.**Một vật nhỏ trượt không vận tốc ban đầu tại một điểm O, trượt xuống dọc trục Ox trên một mặt phẳng nghiêng có góc nghiêng $\theta$. Biết rằng hệ số ma sát trượt giữa vật và mặt phẳng nghiêng thay đổi theo quy luật sau: $\mu(x) = \alpha x$, trong đó x là khoảng cách từ O đến vị trí của vật, $\alpha$ là một hằng số dương. Sau khi hạ xuống độ cao theo phương thẳng đứng một đoạn h, vật dừng lại tại điểm B (Hình 2). Coi hệ số ma sát nghỉ bằng hệ số ma sát trượt.



Hình 2

a.Tìm vị trí cân bằng có tọa độ $x_0$ của vật theo $\alpha$ và $\theta$.

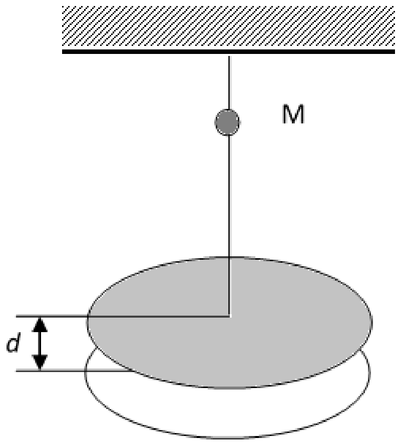
b.Chọn mốc thời gian lúc buông vật. Viết phương trình chuyển động x(t). Tìm $\alpha$ theo h và $\theta$.

c.Tìm vận tốc lớn nhất của vật trong quá trình chuyển động theo h và g.

d.Tìm thời gian chuyển động của vật từ O đến B theo h, $\theta$ và g.

ĐS: a. $x_0 = \dfrac{\tan\theta}{\alpha}$; b. $x = \dfrac{\tan\theta}{\alpha}\left\{1+\cos\left[(\sqrt{\alpha g\cos\theta})t+\pi\right]\right\}$, $\alpha = \dfrac{2\sin^2\theta}{h\cos\theta}$; c. $v_{max} = \sqrt{\dfrac{gh}{2}}$; d. $t = \dfrac{\pi}{\sin\theta}\sqrt{\dfrac{h}{2g}}$

**Bài 2.** Trên hình vẽ biểu diễn sơ lược một dụng cụ để đo hệ số nhớt $\eta$ của một chất khí. Ở phía trên một đĩa đứng yên, người ta treo một đĩa thứ hai bằng một sợi dây đàn hồi mảnh. Góc quay của đĩa này được xác định bằng một gương M. Lượng giảm loga của sự tắt dần $\Lambda$ của dao động xoắn của đĩa trong chất khí cần nghiên cứu và chu kỳ dao động tự do của đĩa trong chân không $\tau$ được xác định bằng thực nghiệm. Tìm công thức để tính $\eta$. Cho biết: bán kính $a$ của các đĩa, khoảng cách d giữa các đĩa (d<<a), momen quán tính của đĩa là I.




ĐS: $\eta = \dfrac{4Id}{\pi a^4}\dfrac{\Lambda}{\tau}$.

**Bài 3.** Một chất khí lấp đầy khoảng không gian giữa hai hình trụ đồng trục rất dài. Các bán kính của các hình trụ là $r_1$ và $r_2$ ($r_1 < r_2$). Hình trụ ngoài quay với vận tốc góc không đổi, hình trụ trong đứng yên. Momen của lực ma sát tác dụng lên một đơn vị chiều dài của hình trụ trong bằng N. Tìm hệ số nhớt $\eta$ của khí và gradient của vận tốc góc $\dfrac{d\omega_0}{dr}$ theo r.

ĐS: a)Hệ số nhớt của chất khí: $\eta = \dfrac{N}{4\pi\omega_0}\dfrac{\left(r_2^2 - r_1^2\right)}{r_1^2 r_2^2}$

b)Gradient của vận tốc góc : $\dfrac{d\omega_0}{dr} = \dfrac{2\omega_0 r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}\dfrac{1}{r^3}$.

**Bài 4.**

Dưới tác dụng của ngoại lực thẳng đứng $F = F_0 \cos\omega t$, một con lắc lò xo thẳng đứng thực hiện một dao động cưỡng bức theo quy luật $x = a\cos\left(\omega t - \varphi\right)$.

1.Tìm công của lực F sau một chu kỳ dao động.

2.Chứng minh rằng công này đúng bằng công sinh ra để thắng lực ma sát.

ĐS: $A = \pi F_0 a \sin\varphi$.

**Bài 5.** Một quả cầu có khối lượng m, có thể thực hiện một dao động điều hòa không tắt xung quanh điểm x = 0, với tần số riêng $\omega_0$. Tại thời điểm t = 0, khi quả cầu nằm ở trạng thái cân bằng, người ta đặt vào nó một ngoại lực cưỡng bức $F = F_0 \cos\omega t$ , trùng phương trục x. Tìm phương trình dao động cưỡng bức của quả cầu.

ĐS: $x = \dfrac{F_0}{m\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}\left(\cos\omega t - \cos\omega_0 t\right)$

**Bài 6.** Con lắc lò xo thẳng đứng thực hiện một dao động tắt dần với hệ số tắt dần là $\beta$, tần số dao động riêng là $\omega_0$. Khi chịu tác dụng thêm của ngoại lực cưỡng bức $F = F_0 \cos\omega t$ theo phương thẳng đứng, quả cầu thực hiện một dao dộng điều hòa. Hãy tìm:

1. Công suất trung bình $P_{tb}$ sau một chu kỳ dao động.

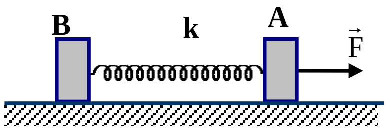
2. Tần số $\omega$ của ngoại lực khi $P_{tb}$ là cực đại. $P_{tb}$ max bằng bao nhiêu.

3. Gọi $P_{ch}$ là công suất trung bình sau một chu kỳ khi hệ thực hiện dao động trong điều kiện cộng hưởng. Tính $P_{ch} / P_{tb}$ max .

**ĐS: 1.** $P_{tb} = \dfrac{F_0^2 \omega^2 \beta}{m\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2\right]}$; 2. $P_{tb}\max = \dfrac{F_0^2}{4m\beta}$;

c. $\dfrac{P_{tb}\max - P_{ch}}{P_{tb}\max} = \dfrac{1}{\left(\eta^2 - 1\right)}$

**Bài 7.** *(Chọn đội tuyển vật lí quốc tế 2008)*




Hai vật A, B có cùng khối lượng m được nối với nhau bằng một lò xo có khối lượng không đáng kể, độ cứng k. Hệ số ma sát trượt giữa mỗi vật và mặt sàn là μ. Lực ma sát nghỉ cực đại tác dụng lên mỗi vật có cường độ là 3μmg/2.

Lúc đầu A được kéo bằng một lực có phương nằm ngang, độ lớn $F = 2\mu mg$. Đến khi B bắt đầu chuyển động, người ta điều chỉnh độ lớn của lực F sao cho A luôn chuyển động với vận tốc không đổi.

1. Viết phương trình chuyển động của vật A.

2. Khảo sát chi tiết chuyển động của vật B đối với mặt sàn. Tìm chu kỳ chuyển động của vật B. Biểu thị sự phụ thuộc vận tốc của vật B đối với mặt sàn theo thời gian.

ĐS: 1. $x = \frac{\mu mg}{k}\left[1 - \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t\right] + l_0$; 2. $T = \left(\frac{5\pi}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{\frac{m}{k}}$

**Bài 8.**

Để đo gia tốc trọng trường g, người ta có thể dùng con lắc rung, gồm một lá thép phẳng chiều dài l, khối lượng m, một đầu của lá thép gắn chặt vào điểm O của giá, còn đầu kia gắn một chất điểm khối lượng M. ở vị trí cân bằng lá thép thẳng đứng. Khi làm lá thép lệch khỏi vị trí cân bằng một góc nhỏ $\theta$ (radian) thì sinh ra momen lực c.θ (c là một hệ số không đổi) kéo lá thép trở về vị trí ấy (xem hình vẽ). Trọng tâm của lá thép nằm tại trung điểm của nó và momen quán tính của riêng lá thép đối với trục quay qua O là $ml^2/3$.

a. Tính chu kì T các dao động nhỏ của con lắc.

b. Cho l = 0,20m, m = 0,01kg, M = 0,10kg. Để con lắc có thể dao động, hệ số c phải lớn hơn giá trị nào? Biết g không vượt quá $9{,}9m/s^2$.

c. Cho l, m, M có các giá trị như ở mục b, c = 0,208. Nếu đo được T = 10s thì g có giá trị bằng bao nhiêu?

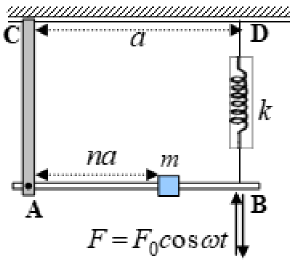
d. Cho l, m, M, c có các giá trị cho ở mục c. Tính độ nhạy của con lắc, xác định bởi $\frac{dT}{dg}$, dT là biến thiên nhỏ của T ứng với biến thiên nhỏ dg của g quanh giá trị trung bình $g_0 = 9{,}8m/s^2$. Nếu ở gần $g_0$, gia tốc $g$ tăng $0{,}01m/s^2$ thì T tăng hay giảm bao nhiêu?

e. Xét một con lắc đơn có chiều dài L = 1m cũng dùng để đo g. Tính độ nhạy của con lắc đơn ở gần giá trị trung bình $g_0$; g tăng $0{,}01m/s^2$ thì chu kì T của con lắc đơn tăng hay giảm bao nhiêu? So sánh độ nhạy của hai con lắc.

ĐS: a. T = $2\pi\sqrt{\frac{l^2(M+\frac{m}{3})}{c-gl(M+\frac{m}{2})}}$; b. $c > 0{,}2079$; c. $g = 9{,}83m/s^2$; d. $T$ tăng $0{,}48s$;

e. Với $g \approx 9{,}8m/s^2$ thì $\frac{dT}{dg} \approx -0{,}1$; $g$ tăng $0{,}01m/s^2$ thì $T$ giảm $0{,}001s$, không đo được. Vậy con lắc rung nhạy hơn con lắc đơn.

**Bài 9.**




Cho cơ hệ như hình vẽ. Thanh cứng AC cố định, thanh cứng AB nhẹ, có thể quay tự do quanh trục nằm ngang qua đầu A. Lò xo nhẹ có độ cứng $k$ một đầu gắn vào giá cố định, đầu còn lại gắn chặt vào đầu B của thanh. Khoảng cách từ điểm C gắn thanh AC đến điểm D gắn lò xo bằng $a$. Vật nhỏ khối lượng $m$ gắn chặt vào thanh AB tại điểm M cách đầu A của thanh một đoạn $na$ với $n<1$. Tại thời điểm t = 0, khi hệ ở trạng thái cân bằng, thanh AB nằm ngang người ta tác dụng vào đầu B của thanh AB một lực cưỡng bức $F = F_0\cos\omega t$ theo phương thẳng đứng. Giả thiết trong quá trình dao động nhỏ lò xo luôn có phương thẳng đứng. Bỏ qua mọi ma sát.

1. Tìm phương trình dao động cưỡng bức của quả cầu.

2. Ta xét điều kiện ở gần cộng hưởng, bằng cách viết $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$ trong đó $\omega_0$ là tần số riêng của hệ, $\Delta\omega << \omega$ và $\omega_0$. Viết phương trình dao động của vật.

ĐS: 1. $\alpha = \frac{F_0}{n^2ma\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}\left(\cos\omega t-\cos\omega_0 t\right)$; 2. $\alpha = \frac{F_0}{2n^2ma\omega_0}\left(t\sin\omega_0 t\right)$

**Bài 10.** Khi xét về dao động cưỡng bức, nếu tần số của ngoại lực là $\omega_1$ và $\omega_2$, biên độ vận tốc của hạt bằng nửa giá trị cực đại. Hãy tìm:

1. Tần số của ngoại lực ứng với cộng hưởng vận tốc.

2. Hệ số tắt dần.

ĐS: 1.$\omega_{ch} = \omega_0 = \sqrt{\omega_1\omega_2}$ 2.$\beta = \dfrac{\sqrt{3}|\omega_1 + \omega_2|}{6}$

**Bài 11.** Nghiên cứu dao động của con lắc trong môi trường có lực cản $\vec{F}_c = -\alpha\vec{v}$. Giả thiết rằng $\beta = \dfrac{\alpha}{2m} << \omega_0$.

1. Chứng minh rằng công thực hiện bởi lực cản trong mỗi chu kỳ chuyển động xấp xỉ bằng $-2\pi^2\alpha f_0 A^2(t)$. Trong đó $f_0$ là tần số dao động riêng còn A(t) là biên độ dao động tại thời điểm t.

2. Các định phần năng lượng bị mất sau mỗi chu kỳ chuyển động.

3. Xác định số chu kì cần thiết cho năng lượng tiêu hao mất $e^{2\pi} \approx 535$ lần .

ĐS: 2. $\left|\dfrac{\Delta W}{W(t)}\right| = \dfrac{4\pi^2\alpha f_0}{k}$; 3. Gọi N là số chu kỳ cần thiết thì $N = \dfrac{\pi}{\beta T}$.

**Bài 12.**

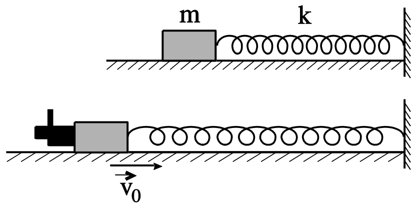
Con lắc toán học dao động trong môi trường có giảm lượng loga tắt dần $\delta_0 = 1,50$.

1. Giảm lượng loga tắt dần sẽ là bao nhiêu nếu lực cản của môi trường tăng lên n = 2 lần.

2. Muốn cho dao động của hệ không thể thực hiện được thì lực cản môi trường phải tăng lên bao nhiêu lần.

ĐS: 1. $\delta = \dfrac{n\delta_0}{\sqrt{1 + \left(1 - n^2\right)\dfrac{\delta_0^2}{4\pi^2}}} \approx 3,3$;  2. 4,3 lần.

**Bài 13.** Một con lắc lò xo, có khối lượng m và độ cứng k, có thể dao động trên một mặt phẳng nằm ngang có ma sát. Để đo miền nghỉ của vật (tức là miền ở đó vật có thể nằm cân bằng dưới tác dụng của lực đàn hồi và lực ma sát nghỉ), người ta xê dịch vật sang phải rồi sang trái. Người ta thấy miền nghỉ có bề rộng là 2a.




Sau đó người ta kéo vật ra khỏi miền nghỉ một khoảng lớn hơn 2a rất nhiều và quan sát dao động của nó. Cho rằng lực ma sát trượt bằng lực ma sát nghỉ cực đại.

a) Lập phương trình dao động và xác định chu kì.

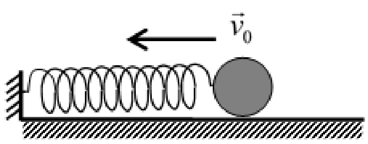
b) Biên độ dao động thay đổi theo quy luật nào ? Vẽ đồ thị dao động.

c) Để duy trì dao động của vật thì cứ mỗi lần vật ở vị trí biên trái người ta lại dùng búa gõ vào vật và vận tốc lại bằng $v_0$. Hỏi biên độ dao động của vật bằng bao nhiêu ?

d) Giả sử biên độ dao động duy trì của vật rất lớn so với 2a. Hãy xác định xem chu kì dao động này khác với chu kì dao động tắt dần bao nhiêu ?

ĐS: c. $A_2 = \dfrac{mv_0^2}{8ka} + a$ ; $A_3 = \dfrac{mv_0^2}{8ka} - a$ ; d. Chu kì của dao động duy trì nhỏ hơn chu kì dao động tắt dần một lượng bằng $\tau \approx \dfrac{8a}{v_0}$.

**Bài 14:** Một vật nặng khối lượng m được nối với lò xo có độ cứng k, đầu kia của lò xo gắn với một bức tường thẳng đứng. Hệ số ma sát giữa vật và mặt sàn nằm ngang là $\mu$. Làm cho vật dao động duy trì trên mặt sàn bằng cách mỗi khi lò xo giãn cực đại bằng $l > \mu mg/k$ thì lại truyền cho vật vận tốc $v_0$ hướng vào tường.




a) Tìm $v_0$ để dao động ổn định.

b) Tìm chu kỳ dao động và vẽ đồ thị dao động x(t), với vị trí lò xo không biến dạng làm gốc tọa độ.

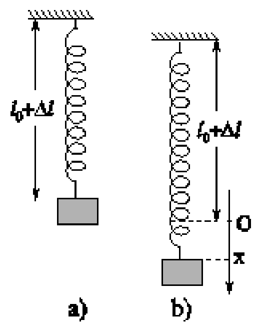
ĐS:a. $v_0=\sqrt{8\mu g\left(l+\frac{\mu mg}{k}\right)}$; b. $T_x=\left[\frac{3\pi}{2}+\arcsin\left(\frac{l-\mu mg/k}{l+3\mu mg/k}\right)\right]\sqrt{\frac{m}{k}}$

**Bài 15.** Một vật khối lượng m = 500 g, được treo vào đầu một lò xo có độ cứng k, dao động theo phương thẳng đứng, chịu một lực ma sát nhớt của chất lỏng. Người ta quan sát thấy vật dao động với "chu kì" T = 2 s và với biên độ cứ sau 20 dao động toàn phần thì giảm đi 10 lần. Hãy xác định hệ số ma sát nhớt b và chu kì $T_0$ của các dao động không tắt dần. $T_0$ có khác T nhiều không ? Hãy xác định độ cứng k của lò xo.

ĐS: b = 2mλ =5,76.10$^{-2}$ N.s/m; $T_0 \approx T$ ; $k = m\omega_0^2 = m\omega^2$ = 4,93 N/m.

**Bài 16.** (Nguyên tắc của máy ghi địa chấn).

Một vật có khối lượng m, được treo vào đầu của một lò xo không khối lượng, có độ cứng k, đầu kia của lò xo móc vào một giá đỡ. Vật dao động tắt dần do chịu một lực ma sát nhớt với hệ số ma sát là b. Khi xảy ra một cơn địa chấn, sóng địa chấn làm cho giá đỡ dao động điều hoà theo phương thẳng đứng phương trình $x_1 = a_1\cos\omega t$.




a) Lập phương trình vi phân của chuyển động tương đối của khối lượng m đối với giá đỡ S, được đánh dấu bằng li độ x.

b) Trong chế độ ổn định, hãy lập phương trình dao động x(t) của vật m.

c) Chứng minh rằng đối với tần số riêng $\omega_0$ nhỏ của con lắc lò xo, thiết bị này có thể dùng để đo biên độ của sóng địa chấn.

ĐS: a. $x''+\frac{b}{m}x'+\frac{k}{m}x=\omega^2 a_1\cos\omega t$ ; b. $x=\dfrac{m\omega a_1}{\sqrt{\left(\frac{k}{\omega}-m\omega\right)^2+b^2}}\cos(\omega t+\varphi)$

với: $\tan\varphi=\dfrac{b}{m\omega-\frac{k}{\omega}}$ ;

c. Vật m dao động theo phương trình: $x = a_1\text{con}\omega t$.

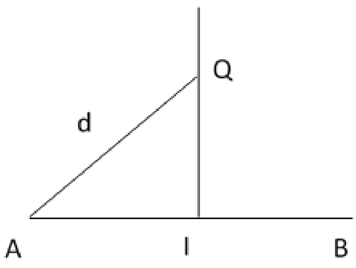
Suy ra biên độ và tần số dao động của vật m bằng biên độ và tần số của sóng địa

# CHƯƠNG V.
# SÓNG CƠ- SÓNG ÂM

## V.1. SÓNG CƠ

**Bài 1.** Hai nguồn âm điểm phát sóng cầu đồng bộ với tần số $f = 3400(Hz)$ được đặt tại $A$ và $B$ cách nhau $1(m)$ trong không khí. Biết tốc độ truyền âm trong không khí là $340(m/s)$. Bỏ qua sự hấp thụ âm của môi trường.

a) Gọi $I$ là trung điểm của $AB$, $Q$ là điểm nằm trên đường trung trực của $AB$ ở gần $I$ nhất, dao động ngược pha với $I$. Tính khoảng cách $AQ$.



Hình 3

b) Gọi $O$ là điểm thuộc đường trung trực của $AB$ cách $AB$ $100(m)$ và $M$ là điểm nằm trên đường thẳng qua $O$ song song với $AB$ và gần $O$ nhất mà tại đó nhận được âm to nhất. Cho rằng với góc $\alpha$ bất kỳ, nếu $\alpha < 10^0$ thì $\cos\alpha \approx 1$. Tính khoảng cách $OM$.

ĐS: a. 0,55(m); b. 10m.

**Bài 2.** Tại hai điểm A và B trên mặt chất lỏng có hai nguồn phát sóng cơ kết hợp cùng pha cách nhau AB = 8 cm, dao động với tần số f = 20 Hz. Một điểm M trên mặt chất lỏng, cách A một khoảng 25 cm và cách B một khoảng 20,5 cm, dao động với biên độ cực đại. Giữa M và đường trung trực của AB có hai vân giao thoa cực đại. Coi biên độ sóng không suy giảm khi truyền đi.

a. Xác định tốc độ truyền sóng và tìm số điểm dao động cực đại trên đoạn AB (không kể A và B).

b. Gọi O là trung điểm của AB; N và P là hai điểm nằm trên trung trực của AB về cùng một phía so với O thỏa mãn ON = 2 cm; OP = 5 cm. Trên đoạn NP gọi Q là điểm trên đoạn NP và Q dao động cùng pha với O. Xác định khoảng cách từ Q đến O.

ĐS: a. 30 (cm/s); 11 điểm dao động cực đại; b. OQ $\approx$ 3,775 cm.

**Bài 3.** Hai nguồn sóng cơ kết hợp $S_1$, $S_2$ ở trên mặt nước cách nhau 20cm dao động cùng pha, cùng biên độ, theo phương vuông góc với mặt nước. Vận tốc truyền sóng là v = 1,5m/s. M là điểm trên mặt nước có sóng truyền đến cách $S_1$, $S_2$ lần lượt 16cm, 25cm là điểm dao động với biên độ cực đại và trên đoạn $MS_2$ có số điểm dao động cực đại nhiều hơn trên đoạn $MS_1$ là 6 điểm.

a, Tính tần số của sóng

b, Xét điểm $S_2^{'}$ trên đường thẳng $S_1S_2$ cách $S_1$, $S_2$ lần lượt là 30cm, 10cm. Hỏi trong đoạn $S_2S_2^{'}$ có bao nhiêu điểm đặt nguồn $S_2$ để điểm M dao động với biên độ cực đại.

ĐS: a. 50Hz; b. 2.

**Bài 4.** Hai nguồn phát sóng kết hợp A, B trên mặt thoáng của một chất lỏng dao động theo phương trình $u_A = 6.cos(20\pi t)(mm); u_B = 6.cos(20\pi t + \pi/2)(mm)$. Coi biên độ sóng không giảm theo khoảng cách, tốc độ sóng $v = 30(cm/s)$. Khoảng cách giữa hai nguồn $AB = 20(cm)$.

**1.** Tính số điểm đứng yên và số điểm dao động với biên độ cực đại trên đoạn AB.

**2.** H là trung điểm của AB, điểm đứng yên trên đoạn AB gần H nhất và xa H nhất cách H một đoạn bằng bao nhiêu ?

**3.** Hai điểm $M_1; M_2$ cùng nằm trên một elip nhận A,B làm tiêu điểm có $AM_1 - BM_1 = 3(cm)$ và $AM_2 - BM_2 = 4,5(cm)$. Tại thời điểm $t_1$ nào đó, li độ của $M_1$ là 2(mm)**,** tính li độ của $M_2$ tại thời điểm đó.

ĐS: 1. 13; 2. $9,375(cm); 0,375(cm)$ ; 3. $u_{M_2} = -2(mm)$

**Bài 5.** Trên mặt chất lỏng, tại hai điểm A và B đặt hai nguồn sóng dao động theo phương thẳng đứng với phương trình dao động lần lượt là: $u_A = a_1\cos(20\pi t)$ và $u_B = a_2\cos\left(20\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$. Biết tốc độ truyền sóng trên mặt chất lỏng là 40cm/s và biên độ sóng không thay đổi trong quá trình sóng truyền.

**1.** Cho $AB = 20\ cm$; $a_1 = 6\ mm$ và $a_2 = 6\sqrt{3}\ mm$

a. Viết phương trính sóng tại trung điểm O của AB.

b. Tìm số điểm dao động với biên độ cực đại trên đoạn AB.

**2.** Cho $AB = 6,75\lambda$ và $a_1 = a_2 = a$. Trên đoạn AB, có hai điểm C và D: C nằm trên đoạn AO; D nằm trên đoạn BO (với $CO = \lambda; DO = 2,5\lambda$ ). Hãy xác định số điểm và vị trí điểm gần B nhất dao động với biên độ cực đại và cùng pha với nguồn B trên đoạn CD.

ĐS: 1a. $u = 12\cos\left(20\pi t - \frac{14\pi}{3}\right)mm$; 1b. 10 điểm ; 2. 4 điểm; $d_{2\min} = 4cm$

**Bài 6.** Nhờ một nguồn dao động, người ta tạo được tại một điểm O trên mặt nước phẳng lặng những dao động điều hoà theo phương thẳng đứng với tần số f = 20 Hz.

**a)** Trên mặt nước xuất hiện những gợn sóng tròn đồng tâm O, các đỉnh sóng cách đều nhau 6 cm. Tính tốc độ truyền sóng ngang trên mặt nước.

**b)** Tại một điểm A cách O là 0,1m biên độ sóng là 3 cm. Hãy tìm biên độ sóng tại một điểm M theo khoảng cách $d_M$ = OM, cho biết năng lượng sóng không mất dần trong quá trình lan truyền, nhưng phân bố đều trên mặt sóng tròn.

**c)** Xét điểm B nằm cùng phía với A so với O trên đường thẳng qua O, AB = 10 cm. Tại thời điểm $t_1(s)$ điểm A có li độ -1,5 cm và đang đi lên, tìm độ dời và hướng chuyển động của B ở thời điểm $t_1 + \frac{1}{60}(s)$.

ĐS: a. 120cm/s; b. $a = 3\sqrt{\frac{1}{10.d_M}}$ (cm) ;

c. Li độ của B là $-\frac{3}{2\sqrt{2}}cm$ và đang đi xuống.

**Bài 7.** Trên bề mặt chất lỏng có hai nguồn sóng kết hợp A, B cách nhau 32 cm dao động vuông góc với bề mặt chất lỏng có phương trình $u_A = 5\cos(10\pi t)\,(mm)$ và $u_B = 5\cos(10\pi t + \pi)\,(mm)$. Biết tốc độ truyền sóng trên bề mặt chất lỏng là v = 50 cm/s. Giả thiết biên độ sóng không đổi khi truyền đi.

a. Viết phương trình sóng tổng hợp tại C. Biết C cách A một đoạn 22 cm và cách B một đoạn 12 cm.

b. Xác định số điểm dao động cực đại trong khoảng AB.

ĐS: a. $u_C = 0$; b. 6 điểm dao động cực đại trên AB

**Bài 8.** Trên mặt chất lỏng có hai nguồn sóng kết hợp ở A và B dao động theo phương thẳng đứng với phương trình: $u_A = u_B = U_0\cos 40\pi t\,(cm)$. Biết AB = d =12 cm, tốc độ truyền sóng trên mặt chất lỏng là 20 cm/s.

a) Xét điểm M nằm trên đường thẳng vuông góc với AB tại A và cách A một khoảng $l$. Tính giá trị lớn nhất của $l$ mà tại M vẫn có cực đại của giao thoa.

b) Xét đoạn thẳng CD = 6cm trên mặt chất lỏng có chung đường trung trực với AB. Trên đoạn CD chỉ có 5 điểm dao động với biên độ cực đại. Hỏi khoảng cách từ AB đến CD có thể đạt giá trị lớn nhất là bao nhiêu?

ĐS: a. $l = 71,5(cm)$; b. $16,73(cm)$

**Bài 9.** Hai nguồn kết hợp $S_1$, $S_2$ cách nhau 50 mm dao động theo phương trình $u_{S1}$ = $u_{S2}$= 2cos 200$\pi t$ (mm) trên mặt nước, coi biên độ sóng không đổi. Xét về một phía đường trung trực của $S_1S_2$ ta thấy vân bậc k đi qua điểm $M_1$ có hiệu số $M_1S_1$ –$M_1S_2$ =

12 mm và vân thứ k +3 ( cùng loại với vân k ) đi qua điểm $M_2$ có hiệu số $M_2S_1 - M_2S_2$ = 36 mm

a) Tìm bước sóng và vận tốc truyền sóng trên mặt nước. Vân bậc k là cực đại hay cực tiểu?

b) Xác định số cực đại trên đường nối $S_1S_2$.

c) Điểm gần nhất dao động cùng pha với nguồn trên đường trung trực $S_1S_2$ cách nguồn $S_1$ bao nhiêu?

ĐS: a. $\lambda$ = 8 mm, v=0,8m/s; b. 13; c. 32mm.

**Bài 10.** Trong thí nghiệm giao thoa sóng trên mặt nước, hai nguồn kết hợp $S_1$, $S_2$ cách nhau 8cm dao động cùng pha với tần số $f = 20Hz$. Điểm M trên mặt nước cách $S_1$, $S_2$ lần lượt những khoảng $d_1 = 25cm, d_2 = 20,5cm$ dao động với biên độ cực đại, giữa M và đường trung trực của AB có hai dãy cực đại khác.

a) Tính tốc độ truyền sóng trên mặt nước.

b) A là một điểm trên mặt nước sao cho tam giác $AS_1S_2$ vuông tại $S_1$, $AS_1 = 6cm$. Tính số điểm dao động cực đại, cực tiểu trên đoạn $AS_2$.

c) N là một điểm thuộc đường trung trực của đoạn thẳng $S_1S_2$ dao động ngược pha với hai nguồn. Tìm khoảng cách nhỏ nhất từ N đến đoạn thẳng $S_1S_2$.

ĐS: a. 30cm/s; b. 8 điểm cực tiểu và 8 điểm cực đại; c. 3,4cm.

**Bài 11.** Tại mặt chất lỏng có hai nguồn sóng A và B cách nhau 12 cm dao động theo phương thẳng đứng với phương trình: $u_1 = u_2 = a\cos 40\pi t(cm)$, tốc độ truyền sóng trên mặt chất lỏng là $20cm/s$. Xét đoạn thẳng $CD = 6cm$ trên mặt chất lỏng có chung đường trung trực với AB. Để trên đoạn CD chỉ có 5 điểm dao động với biên độ cực đại thì khoảng cách lớn nhất từ CD đến AB là bao nhiêu?

ĐS: $16,73cm$

**Bài 12.**

Trên mặt nước có hai nguồn phát sóng kết hợp là nguồn điểm A và B dao động theo phương trình: $u_A = u_B = a\cos(20\pi t)$. Coi biên độ sóng không đổi. Người ta đo được khoảng cách giữa 2 điểm đứng yên liên tiếp trên đoạn AB là $3cm$. Khoảng cách giữa hai nguồn A, B là $30cm$.

1. Tính tốc độ sóng.

2. Tính số điểm đứng yên trên đoạn AB.

3. Hai điểm $M_1$ và $M_2$ trên đoạn AB cách trung điểm H của AB những đoạn lần lượt là $0,5cm$ và $2cm.$ Tại thời điểm $t_1$ vận tốc của $M_1$ có giá trị đại số là $-12cm/s.$ Tính giá trị đại số của vận tốc của $M_2$ tại thời điểm $t_1$.

4. Tính số điểm dao động với biên độ cực đại trên đoạn AB cùng pha với nguồn.

ĐS: a. $v = 60cm/s$; b. 10; c. $v_{M_2} = 4\sqrt{3}$ (cm/s); d. 4.

**Bài 13.** Trên mặt nước có hai nguồn phát sóng kết hợp A, B dao động theo phương trình: $u_A = 5\cos(20\pi t)cm$ và $u_B = 5\cos(20\pi t + \pi)cm$ . Coi biên độ sóng không đổi, tốc độ sóng là 60 cm/s.

a) Viết phương trình sóng tổng hợp tại điểm M cách A, B những đoạn là: MA = 11cm; MB = 14 cm.

b) Cho AB = 20 cm. Hai điểm C, D trên mặt nước mà ABCD là hình chữ nhật với AD = 15 cm. Tính số điểm dao động với biên độ cực đại đoạn AB và trên đoạn AC.

c) Hai điểm $M_1$ và $M_2$ trên đoạn AB cách A những đoạn 12cm và 14cm. Tại một thời điểm nào đó vận tốc của $M_1$ có giá trị đại số là $-40cm/s$. Xác định giá trị đại số của vận tốc của $M_2$ lúc đó .

ĐS: a. $u_M = 10.\cos(20\pi t - \pi/11)(cm).$; b. 5; c. 40cm/s.

**Bài 14.** Trong thí nghiệm giao thoa sóng mặt nước, có hai nguồn kết hợp tại hai điểm A, B (AB = 18cm) dao động theo phương trình $u_1 = u_2 = 2\cos 50\pi t(cm).$ Coi biên độ sóng không đổi. Tốc độ truyền sóng là 50cm/s.

a. Viết phương trình sóng tổng hợp tại điểm M trên mặt nước cách các nguồn lần lượt $d_1$, $d_2$.

b. Xác định số điểm đứng yên trên đoạn AB.

c. Trên đoạn AB có mấy điểm cực đại có dao động cùng pha với nguồn.

d. Gọi O là trung điểm AB, điểm M ở mặt chất lỏng nằm trên đường trung trực của AB và gần O nhất sao cho phần tử chất lỏng tại M dao động cùng pha với phần tử chất lỏng tại O. Tính MO.

ĐS: a. $u_M = 4\cos\left[\frac{\pi}{\lambda}(d_2 - d_1)\right]\cos\left[50\pi t - \frac{\pi}{\lambda}(d_1 + d_2)\right](cm).$ ; b. 18 ; c. 8 ; d. $MO = 2\sqrt{10}(cm)$

**Bài 15.** Hai nguồn sóng kết hợp $S_1$ và $S_2$ cách nhau 2m dao động điều hòa cùng pha, phát ra hai sóng có bước sóng 1m. Một điểm A nằm ở khoảng cách l kể từ $S_1$ và $AS_1 \perp S_1S_2$ .

a)Tính giá trị cực đại của l để tại A có được cực đại của giao thoa.

b)Tính giá trị của l để tại A có được cực tiểu của giao thoa.

ĐS : a. $l = 1,5(m)$; b. * l = 3,75 (m ) hoặc l $\approx$ 0,58 (m).

**Bài 16.** Một sóng dừng trên một sợi dây mà phương trình sóng có dạng u = a.cos(ωt).sin(bx). Trong đó u là li độ dao động tại thời điểm t của một phần tử trên dây mà vị trí cân bằng của nó cách gốc toạ độ O một khoảng x (x đo bằng mét, t đo bằng giây). Cho λ = 0,4m, f = 50Hz và biên độ dao động của một phần tử M cách một nút sóng 5cm có giá trị là $A_M$ = 5mm.

a. Xác định a và b.

b. Dây có hai đầu cố định và có chiều dài 2,2m. Hỏi có bao nhiêu điểm trên dây có biên độ dao động 5mm.

ĐS: a. b = $\frac{\pi}{20}$ $m^{-1}$, a = $5\sqrt{2}$ (mm); b. 22.

**Bài 17.** Hai mũi nhọn $S_1$, $S_2$ ban đầu cách nhau 8cm gắn ở đầu một cần rung có tần số f = 100Hz, được đặt chạm nhẹ vào mặt nước. Tốc độ truyền sóng trên mặt nước là v = 0,8 m/s.

a. Gõ nhẹ cần rung cho hai điểm $S_1$, $S_2$ dao động theo phương thẳng đứng với phương trình dạng u = A.cos2πft. Viết phương trình dao động của điểm $M_1$ cách đều $S_1$, $S_2$ một khoảng d = 8cm.

b. Tìm trên đường trung trực của $S_1$, $S_2$ điểm $M_2$ gần $M_1$ nhất và dao động cùng pha với $M_1$.

c. Cố định tần số rung, thay đổi khoảng cách $S_1S_2$. Để lại quan sát được hiện tượng giao thoa ổn định trên mặt nước, phải tăng khoảng cách $S_1S_2$ một đoạn ít nhất bằng bao nhiêu ? Với khoảng cách ấy thì giữa $S_1$, $S_2$ có bao nhiêu điểm có biên độ cực đại. Coi rằng khi có giao thoa ổn định thì hai điểm $S_1S_2$ là hai điểm có biên độ cực tiểu.

ĐS: a. $u_{M1}$ = 2Acos(200πt - 20π); b. $M_1M_2$ = 0,91 (cm) ; $M_1M_2'$ = 0,94 (cm); c. 21.

**Bài 18.** Hai nguồn sóng trên mặt nước $S_1$, $S_2$ cách nhau

30 cm có biểu thức $u_1 = u_2 = 2\cos 10\pi t$ (cm,s). Biết vận tốc truyền sóng

v = 40 cm/s. Chỉ xét các điểm trên mặt nước.

1. Tại điểm M cách hai nguồn $S_1$, $S_2$ lần lượt là 10cm và 20cm ở đó biên độ bằng bao nhiêu? Trên đoạn $MS_2$ có bao nhiêu điểm có biên độ cực đại, và bao nhiêu điểm đứng yên?

2. Gọi I là trung điểm của $S_1S_2$. Tìm khoảng cách tới I của tất cả các điểm nằm trên đường trung trực của $S_1S_2$ có cùng pha với hai nguồn.

3. Tìm các điểm dao động cùng pha với I.

ĐS: 1. $A_M = 2\sqrt{2}cm$; trên đoạn $MS_2$ có 05 cực đại, 05 cực tiểu; 2. $x = \sqrt{64k^2 - 225}$ **($k \geq 2$)**

3. Những điểm thỏa $d_1 + d_2 = 16n + 30$ $(n \in N^*)$

**Bài 19.** Trong thí nghiệm giao thoa sóng mặt nước, có hai nguồn kết hợp tại hai điểm A, B cách nhau 18 cm dao động theo phương trình $u_A = u_B = 2\cos 50\pi t(cm)$. Cho tốc độ truyền sóng trên mặt nước là 50 cm/s. Coi biên độ sóng không đổi khi truyền đi.

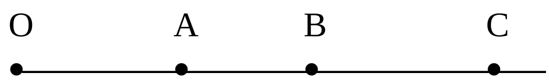
a) Tính số điểm dao động với biên độ cực tiểu trong khoảng AB.

b) Trong khoảng AB có bao nhiêu điểm dao động với biên độ cực đại và cùng pha với các nguồn.

ĐS: a. 18; b. 8.

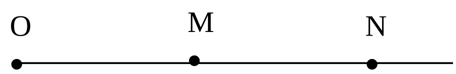
# V.2. SÓNG ÂM

**Bài 1.** Cho 3 điểm A, B, C thẳng hàng, theo thứ tự xa dần nguồn âm O. Mức cường độ âm tại A, B, C lần lượt là 40dB; 35,9dB và 30dB. Biết khoảng cách giữa AB là 30m. Xác định khoảng cách giữa BC.



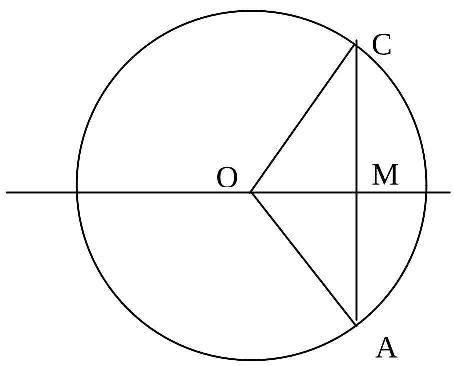

ĐS: $BC = 77,53m$

**Bài 2.** Hai điểm M và N nằm ở cùng một phía của nguồn âm, trên cùng một phương truyền âm và có mức cường độ âm lần lượt là 30 dB và 10dB. Hỏi nếu nguồn âm đó đặt tại M thì mức cường độ âm tại N khi đó là bao nhiêu.




ĐS: $L'_N \approx 11$ dB.

**Bài 3.** Tại O có một nguồn phát âm thanh đẳng hướng với công suất không đổi. Người đi bộ từ A đến C theo đường thẳng và lắng nghe âm thanh từ nguồn O thì nghe thấy cường độ âm tăng từ I đến 4I rồi lại giảm xuống I. Xác định khoảng cách OA.

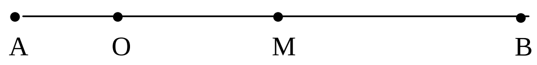



ĐS: **AO =** $\dfrac{AC\sqrt{3}}{3}$

**Bài 4.** Một người đứng giữa hai loa A và B. Khi loa A bật thì người đó nghe được âm có mức cường độ 76dB. Khi loa B bật thì nghe được âm có mức cường độ 80 dB. Nếu bật cả hai loa thì nghe được âm có mức cường độ bao nhiêu?

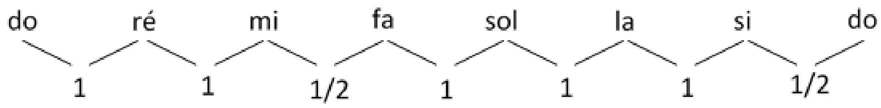
ĐS: L = 81,46dB

**Bài 5.** Hai điểm A, B nằm trên cùng một đường thẳng đi qua một nguồn âm và ở hai phía so với nguồn âm. Biết mức cường độ âm tại A và tại trung điểm của AB lần lượt là 50 dB và 44 dB. Xác định mức cường độ âm tại B.




ĐS: $L_B \approx 36$ dB.

**Bài 6.** Âm giai thường dùng trong âm nhạc gồm 7 nốt (do, ré, mi, fa, sol, la, si) lặp lại thành nhiều quãng tám phân biệt bằng các chỉ số $do_1$, $do_2$... Tỉ số tần số của hai nốt cùng tên cách nhau một quãng tám là 2 (ví dụ $\frac{f(do_3)}{f(do_2)} = 2$). Khoảng cách giữa hai nốt nhạc trong một quãng tám được tính bằng cung và nửa cung. Mỗi quãng tám được chia thành 7 quãng nhỏ gồm 5 quãng một cung và 2 quãng nửa cung theo sơ đồ:




Hai nốt nhạc cách nhau nửa cung thì hai âm tương ứng với hai nốt nhạc này có tỉ số tần số là $\sqrt[12]{2}$ (ví dụ $\frac{f(do)}{f(si)} = \sqrt[12]{2}$).

**1.** Trong cùng một quãng tám, nếu âm fa có tần số 349Hz thì âm mi có tần số bao nhiêu?

**2.** Biết rằng âm $la_3$ có tần số 440Hz, tính tần số của âm $do_1$.

ĐS: 1.329Hz; 2. 65Hz

**Bài 7.** Mức cường độ âm do nguồn S gây ra tại một điểm M là L; Cho nguồn S tiến lại gần M một khoảng D thì mức cường độ âm tăng thêm được 7dB.

a. Tính khoảng cách R từ S tới M biết D = 62m.
b. Biết mức cường độ âm tại M là 73dB, Hãy tính công suất của nguồn.

ĐS: a. 112m; b. P $\approx 3{,}15w$

**Bài 8.** Hai nguồn âm điểm phát sóng cầu đồng bộ với tần số f = 680(Hz) được đặt tại A và B cách nhau 1(m) trong không khí. Biết tốc độ truyền âm trong không khí là 340(m/s). Bỏ qua sự hấp thụ âm của môi trường.

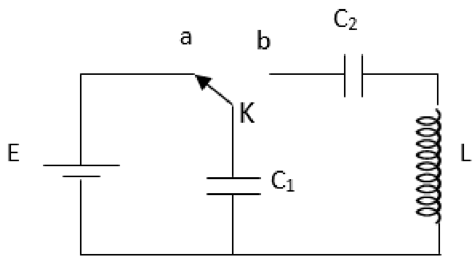
1) Gọi I là trung điểm của AB, P là điểm nằm trên trung trực của AB ở gần I nhất dao động ngược pha với I. Tính khoảng cách AP.
2) Gọi O là điểm nằm trên trung trực của AB cách AB 100(m). Và M là điểm nằm trên đường thẳng qua O song song với AB, gần O nhất mà tại đó nhận được âm to nhất. Cho rằng AB << OI. Tính khoảng cách OM.

ĐS: 1. 0,75(m); 2.50m

# CHƯƠNG VI
# DAO ĐỘNG ĐIỆN TỪ

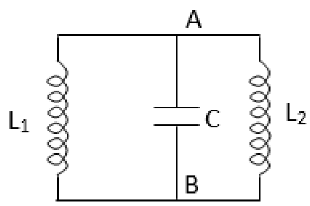
**Bài 1.**

Cho mạch điện: hai tụ $C_1$ và $C_2$ có cùng điện dung C; cuộn dây thuần cảm có độ tự cảm L; nguồn có suất điện động E; bỏ qua điện trở thuần của nguồn, dây nối, khoá K. Ban đầu khoá K ở chốt a, sau đó đóng sang chốt b. Hãy viết biểu thức của điện tích trên các bản tụ $C_1$, $C_2$ phụ thuộc vào thời gian khi đóng K sang chốt b. Chọn gốc thời gian lúc K đóng vào chốt b. Từ đó suy ra chu kỳ dao động của mạch.




ĐS: $T = 2\pi\sqrt{\frac{LC}{2}}$

**Bài 2.** Trong mạch: tụ điện có điện dung là C, hai cuộn dây $L_1$ và $L_2$ có độ tự cảm lần lượt là $L_1$= L, $L_2$= 2L; điện trở của các cuộn dây và dây nối không đáng kể. ở thời điểm t = 0, không có dòng qua cuộn $L_2$, tụ điện không tích điện còn dòng qua cuộn dây $L_1$ là $I_1$.

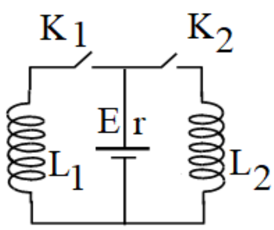



a. Tính chu kì của dao động điện từ trong mạch.

b. Lập biểu thức của cường độ dòng điện qua mỗi cuộn dây theo thời gian.

ĐS: a. $T = 2\pi\sqrt{\frac{2LC}{3}}$ ; b. $i_1 = \frac{I_1}{3} + \frac{2I_1}{3}\cos\sqrt{\frac{3}{2LC}}t$ ; $i_2 = \frac{I_1}{3}\cos\sqrt{\frac{3}{2LC}}t - \frac{I_1}{3}$

**Bài 3.** Cho mạch điện: các cuộn dây thuần cảm có độ tự cảm $L_1$; $L_2$. Ban đầu các khóa $K_1$ và $K_2$ mở. Pin có suất điện động E và điện trở trong r. Đóng $K_1$ cho đến khi dòng qua $L_1$ đạt $I_0$ thì đóng tiếp $K_2$.



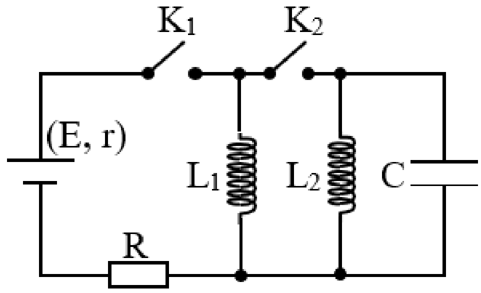

a. Tính dòng $I_1$; $I_2$ qua các cuộn dây khi đã ổn định.

b. Giải lại trong trường hợp đóng đồng thời cả $K_1$ và $K_2$.

ĐS: a. $I_1 = \frac{L_2 E}{r(L_1 + L_2)} + \frac{L_1 I_0}{L_1 + L_2}$ ; $I_2 = \frac{L_1 E}{r(L_1 + L_2)} - \frac{L_1 I_0}{L_1 + L_2}$.

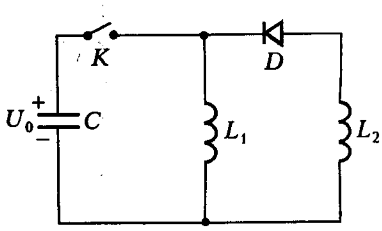
b. $I_1 = \dfrac{L_2 E}{r\left(L_1 + L_2\right)}$; $I_2 = \dfrac{L_1 E}{r\left(L_1 + L_2\right)}$

**Bài 4.** Cho mạch điện: điện trở thuần R, tụ điện C, hai cuộn cảm lí tưởng $L_1 = 2L$, $L_2 = L$ và các khóa $K_1$, $K_2$ được mắc vào một nguồn điện không đổi (có suất điện động E ,điện trở trong r = 0). Ban đầu $K_1$ đóng, $K_2$ ngắt. Sau khi dòng điện trong mạch ổn định thì đóng $K_2$, ngắt $K_1$. Tính hiệu điện thế cực đại ở tụ và $I_{L2}$ max?



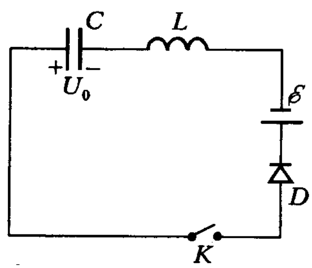

ĐS: $U_0 = \dfrac{E}{R}\sqrt{\dfrac{2L}{3C}}$; $I_{2max} = \dfrac{4E}{3R}$

**Bài 5.** Trong mạch: các cuộn cảm $L_1$ và $L_2$ được nối với nhau qua một điôt lý tưởng D. Tại thời điểm ban đầu khoá K mở, còn tụ điện với điện dung C được tích điện đến hiệu điện thế $U_0$. Sau khi đóng khoá một thời gian, hiệu điện thế trên tụ điện trở nên bằng không. Hãy tìm dòng điện chạy qua cuộn cảm $L_1$ tại thời điểm đó. Sau đó tụ điện được tích điện lại đến một h.đ.t. cực đại nào đó. Xác định h.đ.t. cực đại đó.




ĐS: $I_L = U_0\sqrt{\dfrac{C}{L_1}}$; $U_m = U_0\sqrt{\dfrac{L_2}{L_1 + L_2}}$

**Bài 6.** Khi khoá K đóng, tụ điện với điện dung $C = 20\mu F$ được tích điện đến hiệu điện thế $U_0 = 12V$, suất điện động của nguồn (ăcqui) $\mathcal{E} = 5V$, độ tự cảm của cuộn dây $L = 2H$, D là một điôt lý tưởng.

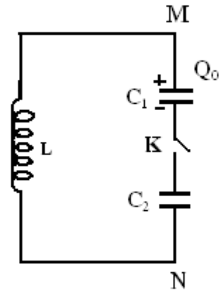



a. Tính dòng điện cực đại trong mạch sau khi đóng khoá K.

b. Tính hiệu điện thế của tụ điện sau khi đóng khoá K.

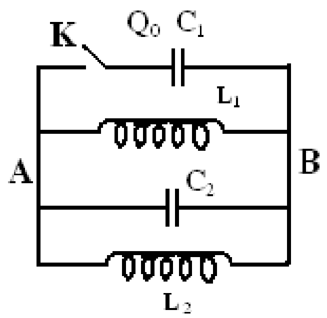
ĐS : a. $I_m = (U_0 - \mathrm{E})\sqrt{\frac{C}{L}} \approx 0{,}022\,A$ ; b. $U_K = 2\mathrm{E} - U_0 = -2V$

**Bài 7.** Cho mạch dao động: tại thời điểm ban đầu khoá K mở và tụ điện $C_1$ có điện tích $Q_0$, còn tụ $C_2$ không tích điện. Hỏi sau khi đóng khoá K thì điện tích các tụ điện và cường độ dòng điện trong mạch biến đổi theo thời gian như thế nào? Coi $C_1 = C_2 = C$ và L đã biết.




ĐS: $q_1 = \frac{Q_0}{2} + \frac{Q_0}{2}.\cos\sqrt{\frac{2}{LC}}.t$; $i = \frac{Q_0}{\sqrt{2LC}}\sin(\sqrt{\frac{2}{LC}}.t)$

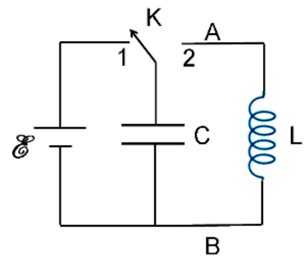
**Bài 8.** Cho mạch dao động như hình vẽ. Ban đầu tụ $C_1$ tích điện đến hiệu điện thế $U_0$ = 10(V), còn tụ $C_2$ chưa tích điện, các cuộn dây không có dòng điện chạy qua. Biết $L_1$ = 10mH; $L_2$ = 20mH; $C_1$ = 10nF ; $C_2$ = 5nF. Sau đó khoá K đóng. Hãy viết biểu thức dòng điện qua mỗi cuộn dây. Bỏ qua điện trở thuần của mạch.




ĐS : : $i_1 = \frac{2}{3}.\sin10^5t$ (mA) ; $i_2 = \frac{1}{3}.\sin10^5t$ (mA)

**Bài 9.** Sự chuyển hoá năng lượng điện thành năng lượng từ:

Cho mạch điện như hình vẽ: nguồn điện E = 6V, tụ điện có điện dung C = $\frac{1}{\pi}$(μF), cuộn dây thuần cảm, độ tự cảm là L = $\frac{1}{\pi}$(μH). Ban đầu khoá K ở vị trí 1.




Sau đó chuyển K sang vị trí 2.

a) Tính hiệu điện thế, điện tích và năng lượng của tụ điện khi K ở vị trí 1.

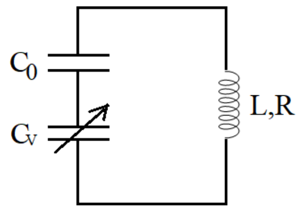
b) Khi K chuyển sang 2, tính cường độ dòng điện cực đại qua cuộn dây.

c) Tính cường độ dòng điện qua cuộn dây và hiệu điện thế giữa hai bản tụ điện khi năng lượng điện trường trong tụ điện bằng 3 lần năng lượng từ trường trong cuộn dây.

ĐS: a. 6 V**;** $\frac{6}{\pi}$(μC); $\frac{18}{\pi}$(μJ); b. $i_{max} = I_0 = U_0\sqrt{\frac{C}{L}}$; c. i = 3A**,** u= $3\sqrt{3}$ V

**Bải 10.** Cho mạch dao động của máy thu sóng điện từ như hình 2: Co = 20pF; $C_v$ là tụ xoay; cuộn dây có độ tự cảm L = 4mH và điện trở thuần R = $10^3\,\Omega$

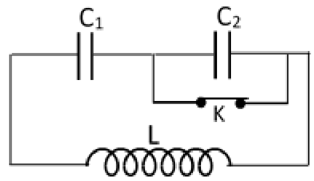
a) Khi tụ xoay $C_v$ có giá trị $Cv$ = 20pF thì mạch trên có thể thu được sóng điện từ có bước sóng bao nhiêu?




b.Phải tăng (giảm) giá trị của tụ xoay một lượng điện dung để dòng điện trong mạch có giá trị I = $10^{-3}I_{max}$ ($I_{max}$ là dòng điện trong mạch khi có cộng hưởng). Coi trong mạch được duy trì một suất điện động cảm ứng e và tần số f không đổi. Khi đó mạch thu được sóng điện từ có bước sóng bao nhiêu?

***ĐS: a.*** $\lambda = 2\pi c\sqrt{LC} = 11{,}915m$; b. $\lambda_x$ = $(11{,}915 \pm 9{,}413.10^{-3})$ (m)

**Bài 11.** Cho mạch dao động như hình 4: $C_1$ và $C_2$ là các điện dung của hai tụ điện, L là độ tự cảm của một cuộn cảm thuần. Biết $C_1$ = 4 μF, $C_2$ = 8 μF, L = 0,4 mH. Điện trở khóa K và các dây nối là không đáng kể.



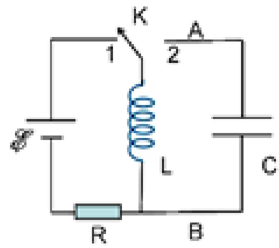
*Hình 4*

a. Ban đầu khóa K đóng, trong mạch có dao động điện từ với điện tích cực đại trên tụ $C_1$ là $q_0 = 1{,}2.10^{-5}$ C. Tính chu kỳ dao động riêng của mạch và cường độ dòng điện cực đại trong mạch.

b. Tại thời điểm điện áp giữa hai bản của tụ $C_1$ đạt cực đại người ta mở khoá K. Xác định độ lớn cường độ dòng điện trong mạch tại thời điểm điện áp giữa hai bản của tụ $C_1$ bằng không.

ĐS: a. T ≈ 0,25ms; $I_0 = 0{,}3A$; b. $I = 0{,}15\sqrt{2}(A)$

**Bài 12.** Sự chuyển hoá năng lượng từ thành năng lượng điện: Cho mạch điện như hình vẽ: nguồn điện có suất điện động E, điện trở trong r, điện trở thuần R, cuộn dây thuần cảm, độ tự cảm L, tụ điện có điện dung C. Ban đầu khoá K ở 1, sau đó K chuyển nhanh sang 2.




a) Tính cường độ dòng điện qua cuộn dây khi K ở 1.

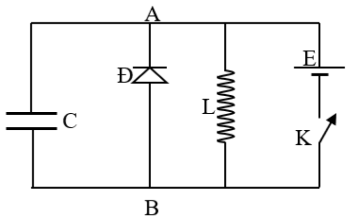
b) Tính hiệu điện thế cực đại giữa hai đầu tụ điện khi K chuyển sang 2

c) Tính hiệu điện thế giữa hai đầu tụ điện khi cường độ dòng điện trong cuộn dây bằng ½ cường độ dòng điện cực đại.

ĐS: a. $I_0 = \dfrac{E}{r+R}$; b. $U_0 = \dfrac{E}{r+R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$; c. $u = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{E}{R+r}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$

**Bài 13.** Cho mạch điện như hình vẽ. Suất điện động của nguồn E, điện trở trong không đáng kể tụ C, cuộn dây L thuần cảm Đ là đi ốt lý tưởng khoá K đóng trong thời gian $\tau$ rồi mở, ở thời điểm K mở dòng qua L là $I_0$.

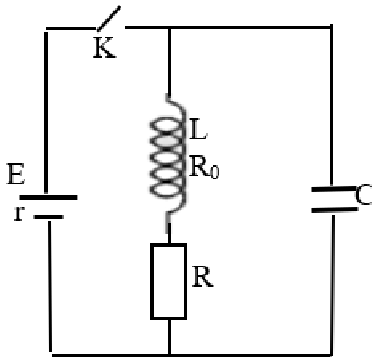
a) Sau bao lâu kể từ khi K mở dòng qua L lại đạt cực đại bằng $2I_0$. Viết biểu thức điện tích trên bản tụ và cường độ dòng điện qua cuộn cảm theo thời gian




b) Vẽ phác đồ thị biểu diễn sự phụ thuộc của dòng qua L vào thời gian và điện tích trên tụ biến đổi theo thời gian. Chọn gốc thời gian là lúc k mở.

**ĐS: a.** $t_{\min} = \dfrac{\pi\tau\sqrt{3}}{3}$; $q = \dfrac{2CE}{\sqrt{3}}\cos\left(\omega t + \dfrac{\pi}{6}\right)$; $i = 2E\sqrt{\dfrac{C}{3L}}\sin\left(\omega t + \dfrac{\pi}{6}\right)$

**Bài 14.** Cho mạch điện như hình 2 gồm: nguồn không đổi có suất điện động E = 32 V, điện trở trong r = 1$\Omega$, tụ điện có điện dung C = 100 $\mu$F (ban đầu chưa tích điện), cuộn dây không thuần cảm có hệ số tự cảm L = 0,1 H, điện trở hoạt động $R_0$ = 5 $\Omega$ và điện trở thuần R = 10 $\Omega$. Ban đầu khoá K đóng, khi trạng thái trong mạch đã ổn định người ta ngắt khoá K.




a. Tính năng lượng điện từ trong mạch ngay sau khi ngắt khóa K.

b. Tính nhiệt lượng toả ra trên điện trở R trong thời gian từ khi ngắt khoá K đến khi dao động trong mạch tắt hoàn toàn.

ĐS: a. $W = 0,245(J)$; b. $Q_R \approx 0,163(J)$

**Bài 15**. Cho mạch dao động lí tưởng như hình vẽ 2. Các tụ điện có điện dung $C_1 = 3nF; C_2 = 6nF$. Cuộn thuần cảm có độ tự cảm $L = 0,5mH$.

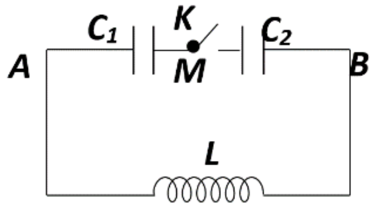
Bỏ qua điện trở khoá K và dây nối.

1. Ban đầu khoá K đóng, trong mạch có dao động điện từ tự do với cường độ dòng điện cực đại trong mạch là $0,03A$.

a) Tính tần số biến thiên năng lượng từ trường của mạch.

b) Tính điện áp cực đại giữa hai điểm A, M và M, B.

c) Lúc điện áp giữa hai bản tụ điện $C_1$ là 6V thì độ lớn của cường độ dòng điện trong mạch bằng bao nhiêu?



Hình 2

2. Ban đầu khoá K ngắt, tụ điện $C_1$ được tích điện đến điện áp 10V, còn tụ điện $C_2$ chưa tích điện. Sau đó đóng khoá K. Tính cường độ dòng điện cực đại trong mạch.

ĐS: 1a. $f \approx 159155(Hz)$; 1b. 10V; 5V; 1c. 0,024A; 2. $I_0$=0,02A

**Bài 16**. Biểu thức của cường độ dòng điện qua một mạch dao động LC là $i = I_0 \cos\omega t$.

**a.** Sau 1/8 chu kỳ dao động thì năng lượng từ trường của mạch lớn hơn năng lượng điện trường bao nhiêu lần?

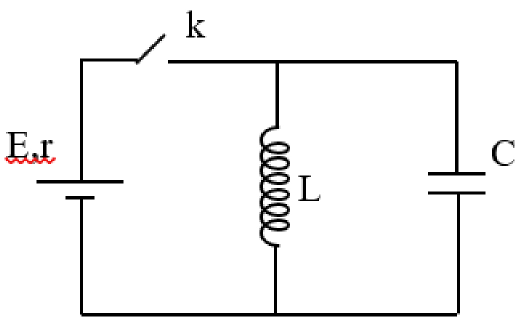
b. Sau thời gian bao nhiêu chu kỳ thì năng lượng từ trường lớn gấp 3 lần năng lượng điện trường của mạch?

ĐS : a. năng lượng từ trường bằng năng lượng điện trường.

b. $t = \frac{T}{12}$.

**Bài 17.** Cho 3 mạch dao động LC lí tưởng có cùng điện tích cực đại $Q_0 = 5.10^{-6}$C, và có tần số dao động lần lượt là $f_1$, $f_2$ và $f_3$. Biết rằng tại mọi thời điểm, điện tích và dòng điện của các mạch dao động liên hệ với nhau bằng biểu thức $\frac{q_1}{i_1} + \frac{q_2}{i_2} = \frac{q_3}{i_3}$. Tại thời điểm t, điện tích trên các tụ của các mạch dao động lần lượt là $q_1 = 3.10^{-6}$C, $q_2 = 2.10^{-6}$C và $q_3$. Tính điện tích $q_3$ khi đó.

ĐS: $q_3 = 4.10^{-6}$ (C)



**Bài 18**. Cho mạch điện như hình 1, nguồn điện có suất điện động E, điện trở trong r = 0,5$\Omega$, cuộn cảm thuần có độ tự cảm L, tụ điện có điện dung C. Ban đầu khóa k đóng, khi dòng điện đã ổn định thì ngắt khóa k, trong mạch có dao động điện từ với chu kì T = $10^{-3}$(s). Hiệu điện thế cực đại giữa hai bản tụ điện gấp n = 5 lần suất điện động của nguồn điện. Bỏ qua điện trở thuần của mạch dao động, tìm điện dung C và độ tự cảm L.

ĐS: $L = \dfrac{nrT}{2\pi} \approx 0,398mH$; $C = \dfrac{T}{2.\pi.r.n} \approx 63,7(\mu F)$

**Bài 19**. Mạch chọn sóng của một máy thu vô tuyến điện gồm một cuộn dây thuần cảm có độ tự cảm L và một bộ tụ điện gồm tụ điện có điện dung $C_0$ không đổi mắc song song với tụ xoay $C_x$. Tụ xoay $C_x$ có điện dung biến thiên từ $C_1$ = 10pF đến $C_2$ = 250pF khi góc xoay biến thiên từ $0^0$ đến $120^0$. Mạch thu được sóng điện từ có bước sóng nằm trong dải từ $\lambda_1$ = 10m đến $\lambda_2$ = 30m. Cho biết điện dung của tụ xoay là hàm bậc nhất của góc xoay.

a. Tính độ tự cảm L của cuộn dây và điện dung $C_0$ của tụ.

b. Để thu được sóng điện từ có bước sóng $\lambda_0$ = 20m thì góc xoay của bản tụ bằng bao nhiêu?

ĐS: a. $C_0$ = 20pF; $L = \dfrac{\lambda_1^2}{4\pi^2 c^2 (C_0 + C)} = 9,4.10^{-7}(H)$; b. $\alpha = 45^0$

**Bài 20.** Mạch chọn sóng của một máy thu vô tuyến gồm một tụ điện có điện dung $C_0 = 100\left(pF\right)$ và cuộn cảm có độ tự cảm $L = \dfrac{1}{\pi^2}\left(\mu H\right)$.

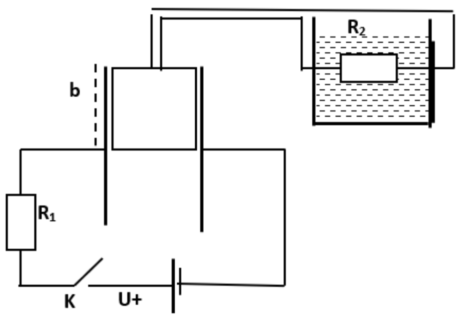
a) Mạch này có thể thu được sóng điện từ có bước sóng bao nhiêu?

b) Để mạch chỉ thu được sóng điện từ có bước sóng từ $12\,m$ đến $18\,m$ thì cần phải ghép thêm một tụ điện Cx có điện dung biến thiên. Hỏi phải ghép Cx nối tiếp hay song song với tụ điện C0? Điện dung của tụ điện Cx biến thiên trong khoảng nào?

ĐS: a.6m; b. $300\left(pF\right) \le C_x \le 800\left(pF\right)$

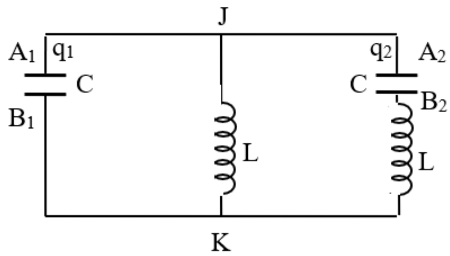
**Bài 21**. Cảm ứng điện từ - Mạch dao động

1. Một tụ điện phẳng không khí, bản cực tròn bán kính b khoảng cách hai bản cực a ( b>>a). Một vòng dây mảnh siêu dẫn hình chữ nhật đặt vừa khít vào khe hẹp a ( không tiếp xúc) và chiếm một khoảng cách từ tâm đến mép tụ. Vòng dây siêu dẫn được nối với điện trở R2 nhúng vào bình nước ở nhiệt độ 1000C (HV). Nguồn điện có hiệu điện thế không đổi U nối qua điện trở R1 nhờ khóa K (bỏ qua điện trở của các phần khác).Tại thời điểm nào đó người ta đóng khoá K sau một thời gian khá lớn khối lượng nước bị bay hơi là bao nhiêu ?Biết nhiệt hoá hơi của nước là λ. Bài toán bỏ qua sự mất mát nhiệt ra môi trường và vỏ bình đựng nước




2. Cho hai cuộn dây, mỗi cuộn có độ tự cảm L và hai tụ điện, mỗi tụ có điện dung C, mắc với nhau thành mạch điện như hình vẽ. Điện trở của các cuộn dây và dây nối có thể bỏ qua.

Vào thời điểm ban đầu t = 0 điện tích của bản A1 bằng Q0, điện tích của bản A2 bằng không và không có dòng điện nào trong mạch. Viết biểu thức diễn tả sự phụ thuộc của q1 và q2 vào thời gian.

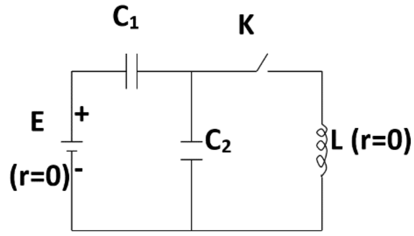



ĐS: 1. $m = \dfrac{\mu^2{}_0}{32\pi^3 R^3{}_1 R_2 \varepsilon_0 b^2 \lambda} U^2 a^3$ ; 2. $q_1 = \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)Q_0\cos\omega_1 t + \dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)Q_0\cos\omega_2 t$

$q_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}Q_0\cos\omega_1 t + \dfrac{1}{\sqrt{5}}Q_0\cos\omega_2 t$

**Bài 22.** Cho mạch như hình 3, các phần tử trong mạch đều lý tưởng

1. Đóng k, tìm $i_{max}$ trong cuộn dây và $U_{1max}$ trong tụ $C_1$.
2. Viết biểu thức điện tích của tụ điện khi K đóng theo $C_1$, $C_2$, E và L.

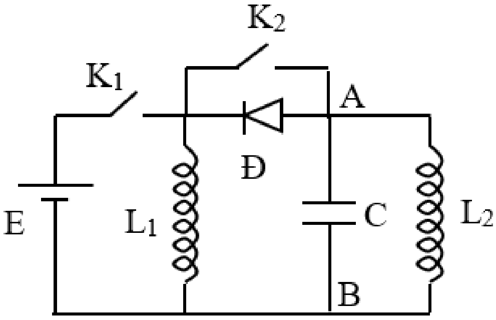


Hình 3

ĐS: 1. $i_{max} = \dfrac{C_1}{\sqrt{L(C_1+C_2)}}E$ ; $U_{1max} = \dfrac{2C_1+C_2}{C_1+C_2}E$

2. $q_2 = \dfrac{C_1C_2}{C_1+C_2}E\cos\dfrac{1}{\sqrt{L(C_1+C_2)}}t$ ; $q_1 = C_1E - \dfrac{C_1^2E}{C_1+C_2}\cos\dfrac{1}{\sqrt{L(C_1+C_2)}}t$

**Bài 23.** Trong mạch điện như hình vẽ, Đ là điôt lí tưởng, tụ điện có điện dung là C, hai cuộn dây $L_1$ và $L_2$ có độ tự cảm lần lượt là $L_1 = L$, $L_2 = 2L$; điện trở của các cuộn dây và dây nối không đáng kể. Lúc đầu khoá $K_1$ và khoá $K_2$ đều mở.



Hình 4

1. Đầu tiên đóng khoá $K_1$. Khi dòng qua cuộn dây $L_1$ có giá trị là $I_1$ thì đồng thời mở khoá $K_1$ và đóng khoá $K_2$. Chọn thời điểm này làm mốc tính thời gian t.

a. Tính chu kì của dao động điện từ trong mạch.

b.Lập biểu thức của cường độ dòng điện qua mỗi cuộn dây theo t.

2.Sau đó, vào thời điểm dòng qua cuộn dây $L_1$ bằng không và hiệu điện thế $u_{AB}$ có giá trị âm thì mở khoá $K_2$.

a.Mô tả hiện tượng điện từ xảy ra trong mạch.

b.Lập biểu thức và vẽ phác đồ thị biểu diễn cường độ dòng điện qua cuộn dây $L_1$ theo thời gian tính từ lúc mở khoá $K_2$.

ĐS : 1a. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{2LC}{3}}$ ; 1b. $i_1 = \dfrac{I_1}{3} + \dfrac{2I_1}{3}\cos\sqrt{\dfrac{3}{2LC}}t$ ; $i_2 = \dfrac{I_1}{3}\cos\sqrt{\dfrac{3}{2LC}}t - \dfrac{I_1}{3}$

2b. Với $0 < t < \dfrac{\pi\sqrt{2LC}}{4}$ thì $i_1 = 0$; với $t \geq \dfrac{\pi\sqrt{2LC}}{4}$ thì

$i = \dfrac{2I_1}{3}\{1 - \cos(\sqrt{\dfrac{2}{3LC}}t - \pi\dfrac{\sqrt{3}}{4})\}$

**Bài 24.** Cho một mạch dao động gồm một tụ điện phẳng điện dung $C_o$ và một cuộn dây thuần cảm có độ tự cảm L. Trong mạch có dao động điện từ với chu kỳ $T_o$. Khi cường độ dòng điện trong mạch đạt cực đại thì người ta điều chỉnh khoảng cách giữa các bản tụ điện, sao cho độ giảm của cường độ của dòng điện trong mạch sau đó tỉ lệ với bình phương thời gian; chọn gốc thời gian là lúc bắt đầu điều chỉnh, bỏ qua điện trở dây nối.

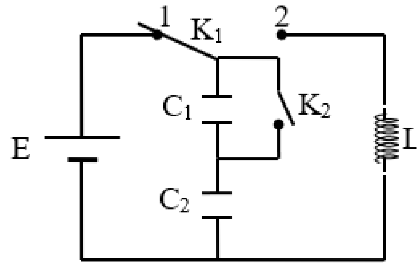
a, Hỏi sau một khoảng thời gian t bằng bao nhiêu (tính theo $T_o$) kể từ lúc bắt đầu điều chỉnh thì cường độ dòng điện trong mạch bằng không ?

b, Người ta ngừng điều chỉnh điện dung tụ điện lúc cường độ dòng điện trong mạch bằng không. Hãy so sánh năng lượng điện từ trong mạch sau khi ngừng điều chỉnh với năng lượng điện từ ban đầu trước khi điều chỉnh. Giải thích ?

ĐS: a. $t_1 = \frac{T_0}{\pi\sqrt{2}}$; b. $W = \frac{4}{3}W_0$

**Bài 25.** Cho mạch dao động lý tưởng như hình 1:

Ban đầu khoá $K_1$ ở 1, khóa $K_2$ mở, hai tụ $C_1$, $C_2$ giống nhau được cấp năng lượng $W = 10^{-6}$J từ nguồn điện một chiều có suất điện động E = 4V. Chuyển $K_1$ từ 1 sang 2, mạch dao động với chu kì T = $4.10^{-6}$ s.

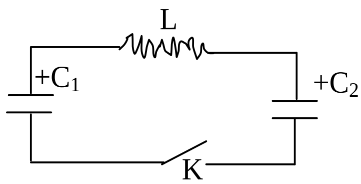



**1.** Xác định cường độ dòng điện cực đại trong cuộn dây.

**2.** Vào lúc cường độ dòng điện trong cuộn dây đạt giá trị cực đại thì đóng nhanh $K_2$. Tính điện áp cực đại giữa hai đầu cuộn dây sau đó.

ĐS: 1. $I_0$ = 0,79A; 2. $U_0$=2,83V

**Bài 26.** Có mạch điện như hình 1.



Hình1

Tụ điện $C_1$ được tích điện đến hiệu điện thế $U_1$, tụ điện $C_2$ được tích điên đến hiệu điện thế $U_2$ ($U_1$>$U_2$). Cuộn dây thuần cảm có hệ số tự cảm L. Tìm biểu thức cường độ dòng điện trong mạch sau khi đóng khoá K.

ĐS : $i = \frac{U_1 - U_2}{L.\omega}.\text{Cos}\left(\sqrt{\frac{C_1 + C_2}{L.C_1.C_2}}t - \frac{\pi}{2}\right)$

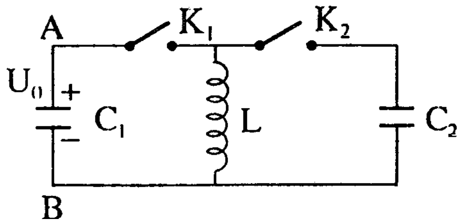
**Bài 27.** Cho mạch điện có sơ đồ như hình vẽ. Hai tụ điện $C_1$ và $C_2$ giống nhau, có cùng điện dung C. Tụ điện $C_1$ được tích điện đến hiệu điện thế $U_0$, cuộn dây có độ tự cảm L, các khoá $K_1$ và $K_2$ ban đầu đều mở. Điện trở của cuộn dây, của các dây nối, của các khoá là rất nhỏ, nên có thể coi dao động điện từ trong mạch là điều hoà.

1. Đóng khoá $K_1$ tại thời điểm t = 0. Hãy tìm biểu thức phụ thuộc thời gian t của:

a) cường độ dòng điện chạy qua cuộn dây.

b) điện tích $q_1$ trên bản nối với A của tụ điện $C_1$.

2. Sau đó đóng $K_2$. Gọi $T_0$ là chu kỳ dao động riêng của mạch $LC_1$ và $q_2$ là điện tích trên bản nối với $K_2$ của tụ điện $C_2$. Hãy tìm biểu thức phụ thuộc thời gian t của cường độ dòng điện chạy qua cuộn dây và của $q_2$ trong hai trường hợp:




a) Khoá $K_2$ được đóng ở thời điểm $t_1 = 3T_0/4$.

b) Khoá $K_2$ được đóng ở thời điểm $t_2 = T_0$.

3. Tính năng lượng điện từ của mạch điện ngay trước và ngay sau thời điểm $t_2$ theo các giải thiết ở câu 2b. Hiện tượng vật lý nào xảy ra trong quá trình này?

Đ : 1a. $i = U_0\sqrt{\frac{C}{L}}\sin\frac{t}{\sqrt{LC}}$; 1b. $q_1 = CU_0.\cos\frac{t}{\sqrt{LC}}$;

2a. $i_1 = -U_0\sqrt{\frac{C}{L}}.\cos\left(\frac{t}{\sqrt{2LC}} - \frac{3\pi\sqrt{2}}{4}\right); q = \frac{CU_0}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{2LC}} - \frac{3\pi\sqrt{2}}{4}\right)$

2b. $i_2 = U_0\sqrt{\frac{C}{2L}}.\sin\left(\frac{t}{\sqrt{2LC}} - \pi\sqrt{2}\right); q_{K2}' = \frac{CU_0}{2}\cos\left(\frac{t}{\sqrt{2LC}} - \pi\sqrt{2}\right)$

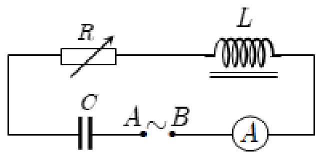
3. $\frac{Q_0^2}{2C}$; $\frac{Q_0^2}{4C}$

# CHƯƠNG VII.
# DÒNG ĐIỆN XOAY CHIỀU
## VII.1. MẠCH ĐIỆN XOAY CHIỀU MẮC NỐI TIẾP.

**Bài 1.** Một dòng điện xoay chiều có biểu thức $i = I\sqrt{2}\sin 2\pi ft$ chạy trong một đoạn mạch không phân nhánh. Tính từ thời điểm có i = 0, hãy tìm điện lượng chuyển qua một tiết diện dây dẫn của mạch trong một nửa chu kì đầu tiên.

ĐS: $q = \dfrac{I\sqrt{2}}{\pi f}$

**Bài 2.** Cho mạch điện như hình bên. Điện trở ampe kế không đáng kể, ống dây thuần cảm, lõi sắt bên trong ống có thể di chuyển dọc theo trục ống dây. $R$ là một biến trở, bỏ qua điện trở dây nối. Đặt vào hai đầu đoạn mạch $AB$ một điện áp xoay chiều ổn định $u = U\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)\ (V)$.

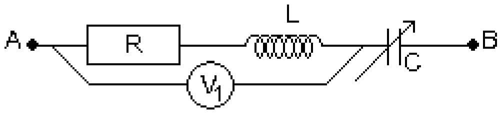



a) Khi $R = R_1$, $\omega = 100\pi (rad/s)$. Di chuyển lõi sắt ta thấy có một vị trí của lõi để ampe kế chỉ giá trị lớn nhất $I_{max}$. Tiếp tục di chuyển lõi sắt, ta thấy có hai vị trí để ampe kế đều chỉ $\dfrac{I_{max}}{\sqrt{2}}$, ở hai vị trí này độ tự cảm của ống dây lần lượt là $L_1 = \dfrac{9}{2\pi}(H)$ và $L_2 = \dfrac{11}{2\pi}(H)$. Tính điện dung $C$ và giá trị $R_1$ của biến trở.

b) Thay ống dây trên bằng cuộn cảm có điện trở $r = 10(\Omega)$. Khi $R = R_2 = 6(\Omega)$ hoặc $R = R_3 = 26(\Omega)$ thì công suất của đoạn mạch bằng nhau và bằng $208(W)$. Khi biến trở có giá trị $R = R_0$ thì công suất tiêu thụ trên $R_0$ đạt giá trị cực đại. Tính giá trị cực đại này.

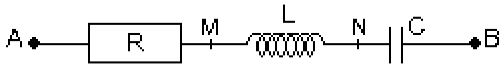
ĐS: a. $C = \dfrac{10^{-4}}{5\pi}F$; $R_1 = 50\Omega$; b. $P_{Rmax} \approx 150,2W$

**Bài 3.** Cho mạch điện xoay chiều như hình vẽ. Thay đổi C để số chỉ $V_1$ cực đại. Khảo sát số chỉ $V_1$ khi C thay đổi.




ĐS: $U_{1max} = \dfrac{U\sqrt{R^2 + Z_L^2}}{R}$ khi $C = \dfrac{1}{L\omega^2}$

**Bài 4.** Cho mạch điện xoay chiều như hình vẽ. Hãy khảo sát hiệu điện thế hai đầu mỗi phần tử theo thông số của nó sau đây.



1.Thay đổi R để $U_R$ cực đại.

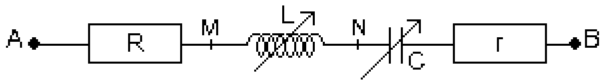
2.Thay đổi L để $U_L$ cực đại.

3.Thay đổi C để $U_C$ cực đại.

4.Thay đổi tần số góc $\omega$ của điện áp hai đầu mạch lần lượt để $U_R$ cực đại, $U_L$ cực đại, $U_C$ cực đại.

**Bài 5.** cho mạch điện xoay chiều hình vẽ.

Hiệu thế 2 đầu đoạn mạch AB là




u= $85\sqrt{2}$ sin 100π t (v) R= 70Ω; r= 80Ω

cuộn dây có L thay đổi được, tụ điện có C thay đổi được.

1.Điều chỉnh L = $\frac{3}{2\pi}$H rồi thay đổi điện dung C. Tìm điện dung C để $U_{MB}$ cực tiểu. Khảo sát $U_{MB}$ khi C thay đổi

2.Điều chỉnh C = $\frac{1}{7\pi}.10^{-3}$F rồi thay đổi L. Tìm độ cảm L để $U_{AN}$ cực đại. Khảo sát $U_{AN}$ khi L thay đổi.

ĐS: 1. C= $\frac{1}{15\pi}.10^{-3}$F ;$U_{MBmin}$= 45,33 (v); 2.Khi L= $\frac{Z_L}{\omega}$ =0,906H thì $U_{AMmax}$= 123,47 (v)

**Bài 6.** Cho mạch điện như hình 3, trong đó R là điện trở thuần, cuộn dây thuần cảm có độ tự cảm L thay đổi được, tụ điện có điện dung C biến thiên. Đặt vào hai đầu AB một điện áp xoay chiều có giá trị hiệu dụng không đổi U = 120 V và tần số f = 50 Hz.


*Hình 3*

a. Điều chỉnh L = $L_1$, C = $C_1$ thì các điện áp hiệu dụng giữa hai điểm A, N và N, B là $U_{AN}$ = 160 V, $U_{NB}$ = 56 V và công suất tiêu thụ của mạch điện là P = 19,2 W. Tính các giá trị R, $L_1$ và $C_1$.

b. Điều chỉnh C = $C_2$ rồi thay đổi L, nhận thấy khi L = $L_2$ = $\frac{9,6}{\pi}$ H thì điện áp hiệu dụng ở hai đầu cuộn dây đạt giá trị cực đại. Tìm giá trị của $C_2$ và giá trị cực đại của điện áp hiệu dụng đó.

ĐS: a. $R = 480\Omega$; $L_1 = \frac{640}{100\pi}$H; $C_1 \approx 11,37\ \mu F$; b. $C_2 \approx 6,63\ \mu F$, $U_{Lmax} = 120\sqrt{2}$ (V)

**Bài 7.** Cho mạch điện có sơ đồ như hình 2. Cuộn dây thuần cảm có độ tự cảm L thay đổi được. Tụ điện C có dung kháng lớn gấp 3 lần điện trở R. Vôn kế có điện trở rất lớn. Đặt vào hai đầu A, B của đoạn mạch hiệu điện thế: $u = 200\sqrt{5}\sin 100\pi t(V)$

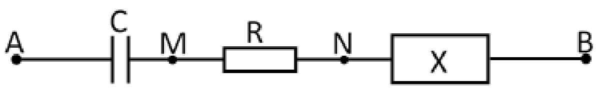
a, Biết $R = 40\Omega$. Tính L để số chỉ của vôn kế là cực đại. Viết biểu thức của $u_{AM}$ khi đó.

b, Khi độ tự cảm của cuộn dây có giá trị $L = L_1$ thì vôn kế chỉ $U_1$ và dòng điện trong mạch sớm pha góc $\varphi_1$ so với u. Còn khi độ tự cảm của cuộn dây có giá trị $L = L_2 = 2L_1$ thì vôn kế chỉ $U_2 = \frac{U_1}{2}$ và dòng điện trong mạch trễ pha góc $\varphi_2$ so với u. Hãy tính $\varphi_1$, $\varphi_2$ và viết biểu thức $u_{AM}$ ứng với trường hợp $L = L_2$.

ĐS: a. $u_{AM} = 1000\sqrt{2}\sin(100\pi t - 1,25)(V)$; b. : $|\varphi_1| = 0,46rad$, $|\varphi_2| = 1,11rad$

$u_{AM} = 200\sqrt{10}\sin(100\pi t - 2,36)(V)$

**Bài 8.** Cho mạch điện như hình vẽ. Hộp đen X chứa hai trong ba phần tử: điện trở $R_0$, tụ điện có điện dung $C_0$, cuộn cảm thuần $L_0$ mắc nối tiếp. Đặt vào hai đầu đoạn mạch AB một điện áp xoay chiều có giá trị hiệu dụng không đổi. Khi đó điện áp tức thời giữa hai đầu các đoạn mạch AN và NB có biểu thức lần lượt là $u_{AN} = 180\sqrt{2}\cos(100\pi t - \frac{\pi}{2})$ (V); $u_{NB} = 60\sqrt{2}\cos 100\pi t(V)$, đồng thời có $Z_C$ = 90Ω; R = 90Ω.



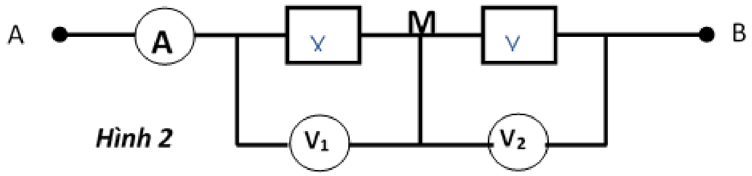

**1.** Viết biểu thức $u_{AB}$.

**2.** Xác định các phần tử trong X và giá trị tương ứng của các phần tử đó.

ĐS: 1. $u_{AB}(t) = 190\sqrt{2}\cos(100\pi t - 0,4\pi)$ (V). 2. $R_0$ = 30Ω; $L_0 = \frac{0,3}{\pi}$H

**Bài 9.** Cho mạch điện có sơ đồ như hình 2. Trong đó X và Y là hai hộp linh kiện, mỗi hộp chỉ chứa hai trong ba loại linh kiện mắc nối tiếp: điện trở thuần, cuộn dây thuần cảm, tụ điện. Ampe kế nhiệt có điện trở không đáng kể, vôn kế nhiệt có điện trở rất lớn. Ban đầu mắc hai điểm A và M của mạch điện vào hai cực của một nguồn điện không đổi, thì vôn kế $V_1$ chỉ 45V, ampe kế chỉ 1,5A. Sau đó bỏ nguồn điện không đổi đi rồi mắc A và B vào hai cực của nguồn điện xoay chiều có hiệu điện thế u = $120\sin 100\pi$ t(V) thì thấy ampe kế chỉ 1A, hai vôn kế có cùng số chỉ như nhau và $u_{AM}$ lệch pha góc $\pi/2$ so với $u_{MB}$

1) Hỏi hộp X và Y có chứa các linh kiện nào? Tính trị số của chúng. Viết biểu thức của cường độ dòng điện trong mạch.



Hình 2

2.Thay tụ điện có trong mạch bằng một tụ điện khác có điện dung C’ sao cho số chỉ của vôn kế $V_2$ đạt giá trị lớn nhất $U_{2max}$. Tính C’, $U_{2max}$ và công suất tiêu thụ của mạch khi đó.

ĐS: 1. X chứa cuộn cảm L=0,165H và điện trở thuần $R_1 = 30\Omega$; Hộp Y chứa tụ điện C=106 $\mu F$ và điện trở thuần $R_2=30\sqrt{3}\Omega$.

2. $C'=25,9\mu F$, $U_{2max}=103V$, $P=48,6W$

**Bài 10.** **1.** Đặt điện áp u = $120\sqrt{2}\cos 100\pi t$ (V) vào hai đầu đoạn mạch mắc nối tiếp gồm biến trở R, tụ điện có điện dung C = $\frac{1}{16\pi}$ mF và cuộn cảm thuần L = $\frac{1}{\pi}$ H.

**a)** Cần thay đổi R đến giá trị nào để công suất tiêu thụ trên mạch đạt giá trị cực đại? Tìm công suất cực đại đó.

**b)** Khi thay đổi giá trị của biến trở thì thấy ứng với hai giá trị $R_1$ và $R_2$, mạch tiêu thụ cùng công suất P và độ lệch pha của điện áp hai đầu đoạn mạch so với dòng điện trong mạch tương ứng là $\varphi_1$, $\varphi_2$ với $\varphi_1 = 2\varphi_2$. Tìm $R_1$, $R_2$ và công suất P khi đó.

**2.** Rô to của một máy phát điện xoay chiều một pha có 4 cực từ và quay với tốc độ n vòng/phút. Hai cực phần ứng của máy mắc với một tụ điện có điện dung C = 10 $\mu F$. Cho rằng điện trở trong của máy không đáng kể. Hãy vẽ đồ thị biểu diễn sự biến thiên của cường độ dòng điện hiệu dụng I qua tụ theo tốc độ quay của rô to khi tốc độ quay của rô to biến thiên liên tục từ $n_1 = 150$ vòng/phút đến $n_2 = 1500$ vòng/phút. Biết rằng với tốc độ quay 1500 vòng/phút thì suất điện động hiệu dụng giữa hai cực máy phát tương ứng là 200 V.

ĐS: 1a. , $P_{max}$ = 120W; 1b. $R_1 = 20\sqrt{3}\ \Omega$; $R_2 = 60\sqrt{3}\ \Omega$, $P = 60\sqrt{3}$ W

**Bài 11.** Cho đoạn mạch AB gồm R, L, C mắc nối tiếp ( hình vẽ). Đặt vào hai đầu đoạn mạch một điện áp xoay chiều $u_{AB} = 220\sqrt{2}\cos100\pi t(V)$, $R = 50\sqrt{3}(\Omega)$, $L = \frac{2}{\pi}H$, $C = \frac{10^{-3}}{5\pi}(F)$.


1.Viết biểu thức cường độ dòng điện, biểu thức của các điện áp $u_{AN}$ và $u_{MB}$.

2.Điều chỉnh C để công suất trên cả đoạn mạch đạt cực đại. Tìm C và giá trị cực đại của công suất.

3.Giữ nguyên $L = \frac{2}{\pi}H$, thay điện trở R bằng $R_1 = 1000(\Omega)$,

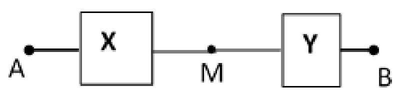
điều chỉnh tụ điện C bằng $C_1 = \frac{4}{9\pi}\mu F$. Giữ nguyên điện áp hiệu dụng của nguồn, thay đổi tần số f đến giá trị $f_0$ sao cho điện áp hiệu dụng $U_{C1}$ giữa hai bản cực của tụ điện đạt cực đại. Tìm $f_0$ và giá trị cực đại của $U_{C1}$.

ĐS: 1. $u_{AN} = 392,4\cos(100\pi t + 0,11)(V)$, $u_{MB} = 270\cos(100\pi t + \frac{\pi}{6})(V)$

2. $C' = \frac{10^{-4}}{2\pi}F$, $P_{max} \approx 558,7(W)$ ; 3. $f_0 = 500\text{Hz}$, $U_{C1max} = 480,2(V)$.

**Bài 12.** Cho đoạn mạch nối tiếp như hình vẽ (hình vẽ)

Trong mỗi hộp X, Y chứa một linh kiện thuộc loại điện trở, cuộn cảm hoặc tụ điện. Đặt vào hai đầu đoạn mạch một điện áp xoay chiều $u_{AB} = 100\sqrt{2}cos(2\pi f.t)(V)$. Lúc tần số $f = 50(Hz)$,



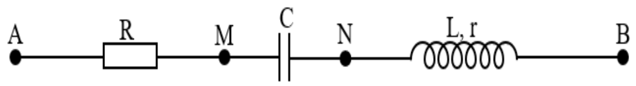

thì $U_{AM} = 200(V); U_{MB} = 100\sqrt{3}(V)$ ; $I = 2(A)$. Giữ điện áp hiệu dụng hai đầu đoạn mạch và giá trị các linh kiện không đổi, tăng f lên quá 50(Hz) thì cường độ dòng điện hiệu dụng trong mạch giảm. Hỏi X, Y chứa linh kiện gì ? Xác định giá trị của các linh kiện đó.

ĐS: : X chứa cuộn dây có $r = 50(\Omega); L = 0,5\sqrt{3}/\pi(H)$ và Y chứa tụ điện, $C = 10^{-3}/5\sqrt{3}(F)$

**Bài 13.** Mạch điện xoay chiều gồm điện trở thuần R, cuộn cảm thuần có độ tự cảm L và tụ điện có điện dung C theo thứ tự mắc nối tiếp ($2L > C.R^2$) . Đặt vào hai đầu đoạn mạch điện áp xoay chiều u = U$\sqrt{2}$cosωt với U không đổi còn ω thay đổi được. Điều chỉnh ω sao cho $U_C$ đạt giá trị cực đại thì $U_R = 3U_L$. Tìm hệ số công suất của mạch khi đó.

ĐS: $\cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{13}} \approx 0,55$

**Bài 14.** Cho mạch điện không phân nhánh như hình 3 gồm: điện trở thuần R, cuộn dây không thuần cảm có độ tự cảm L, điện trở hoạt động r và tụ điện có điện dung C. Đặt vào hai đầu A và B điện áp xoay chiều có biểu thức $u = 120\sqrt{6}\cos(2\pi ft)(V)$ với tần số f thay đổi được.



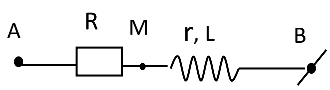

a. Khi $f = f_1 = 50\,Hz$ thì $u_{AN}$ lệch pha $\frac{\pi}{2}$ so với $u_{MB}$ và lệch pha $\frac{\pi}{3}$ so với $u_{AB}$. Biết điện áp hiệu dụng giữa hai điểm A, M là $U_{AM} = 120\,V$, công suất tiêu thụ trên mạch AB là 360W. Tính các giá trị R, L, r, C.

b. Khi $f = f_2$ thì điện áp hiệu dụng giữa hai điểm M, B là $U_{MB}$ có giá trị cực tiểu. Tìm $f_2$ và $U_{MB}$ khi đó.

ĐS: a. $R = 60(\Omega)$; $r = 30(\Omega), L = \frac{0,5\sqrt{3}}{\pi}(H), C = \frac{10^{-3}}{2\pi\sqrt{3}}(F)$.

b. $f_2 = 31,6(Hz); U_{MB\min} = 40\sqrt{3}(V)$

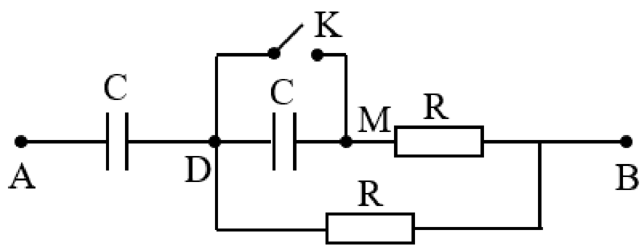
**Bài 15.** Cho mạch điện như hình vẽ 1, hiệu điện thế hai đầu đoạn mạch dạng $u_{AB}$=120 $\sqrt{2}$cos100πt (V).




1. khi K đóng hiệu điện thế hiệu dụng $U_{AM}=40\sqrt{3}$ (V) ,hiệu điện thế hai đầu đoạn mạch MB sớm pha $\frac{\pi}{6}$ so với $u_{AB}$ .Tìm biểu thức của hiệu điện thế hai đầu đoạn mạch AM.
2. khi k mở hiệu điện thế hiệu dụng $U'_{AM}=40\sqrt{7}$ V.Cho điện dung của tụ điện C= $\frac{10^{-3}}{3\pi}$ F.Tìm R;r

ĐS: 1. $u_{AM}=40\sqrt{6}\cos(100pt-\pi/6)$; 2. r=10$\sqrt{3}$ Ω; R=20$\sqrt{3}$ Ω

**Bài 16.** Cho mạch điện xoay chiều như hình bên. Biết $u_{AB} = 120\sqrt{2}\times\sin wt(V)$; $\frac{1}{Cw} = mR$ (với $m$ là tham số dương).



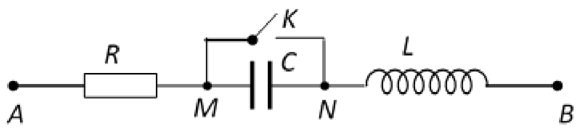

1. Khi khoá K đóng, tính $m$ để hệ số công suất của mạch bằng 0,5.

2. Khi khoá K mở, tính $m$ để điện áp $u_{AB}$ vuông pha với $u_{MB}$ và tính giá trị điện áp hiệu dụng $U_{MB}$.

ĐS: a. $m = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ; b. m=1, $U_{MB} = 40(V)$

**Bài 17.** Cho mạch điện như hình vẽ bên, gồm điện trở R, tụ điện C và cuộn cảm có điện trở thuần mắc nối tiếp. Đặt vào hai đầu đoạn mạch một điện áp xoay chiều $u_{AB} = 120.cos(100\pi t)$V. Bỏ qua điện trở của dây nối và của khoá K.

1. Ban đầu khoá K đóng, điện áp hiệu dụng hai đầu đoạn AM và MB lần lượt là: $U_1 = 40V; U_2 = 20\sqrt{10}V$.




a) Tính hệ số công suất của đoạn mạch.

b) Viết biểu thức của điện áp tức thời hai đầu điện trở R.

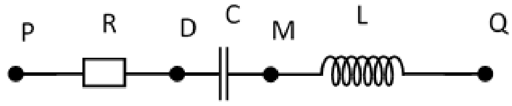
2. Điện dung của tụ điện $C = \frac{10^{-3}}{\pi}F$. Khoá K mở thì điện áp hiệu dụng giữa hai điểm M, B là $U_{MB} = 12\sqrt{10}V$. Tính giá trị của điện trở R và độ tự cảm L.

ĐS:1a. $\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 1b. $u_{AM} = 40\sqrt{2}\cos(100\pi t - \pi/4)(V)$; 2. $R = 10\Omega, L = 0{,}15/\pi(H)$.

**Bài 18.** Cho mạch điện không phân nhánh như hình 2, gồm có điện trở thuần R=80Ω, cuộn dây L không thuần cảm và tụ điện C. Điện áp giữa hai điểm P và Q có biểu thức $u_{PQ} = 240\sqrt{2}\cos 100\pi t(V)$.

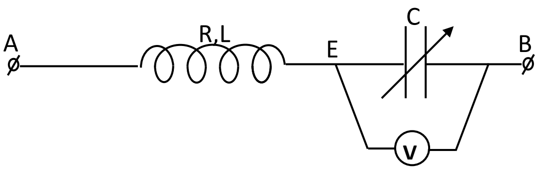
a) Dòng điện hiệu dụng trong mạch là $I = \sqrt{3}(A)$, $u_{DQ}$ sớm pha hơn $u_{PQ}$ là $\frac{\pi}{6}$, $u_{PM}$ lệch pha $\frac{\pi}{2}$ so với $u_{PQ}$. Tìm độ tự cảm, điện trở thuần r của cuộn dây và điện dung của tụ điện.

b) Giữ nguyên tụ điện C, cuộn dây L và điện áp giữa hai điểm P và Q như đã cho, thay đổi điện trở R. Xác định giá trị của R để công suất tiêu thụ trong đoạn mạch PM là cực đại.



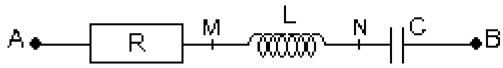

**ĐS: a.** $L \approx 0{,}562(H)\,;C \approx 23(\mu F)\,;r = 40\Omega$ ; b. $R = 80\Omega$

**Bài 19.** Cho mạch điện xoay chiều như hình vẽ bên. Điện áp hai đầu mạch là $u_{AB}$ = $60\sqrt{2}\cos\left(100\pi - \frac{\pi}{6}\right)$(V). Điều chỉnh giá trị điện dung C của tụ điện để vôn kế V chỉ giá trị cực đại và bằng 100V. Viết biểu thức điện áp $u_{AE}$.



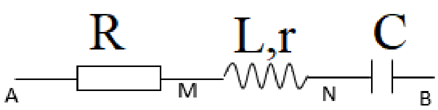

ĐS: $u_{AE} = 80\sqrt{2}\cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$ (V)

**Bài 20.** Trong quá trình truyền tải điện năng đi xa cần tăng điện áp của nguồn lên bao nhiêu lần để giảm công suất hao phí trên đường dây đi 100 lần. Giả thiết công suất nơi tiêu thụ nhận được không đổi, điện áp tức thời u cùng pha với dòng điện tức thời i. Biết ban đầu độ giảm điện thế trên đường dây bằng 15% điện áp của tải tiêu thụ.




ĐS: $\frac{U'}{U} = 8{,}7$

**Bài 21.** Cho mạch điện xoay chiều như hình vẽ bên. Hiệu điện thế xoay chiều hai đầu mạch có biểu thức : $u_{AB} = U_0.\sin 100\pi t$ (V), bỏ qua điện trở các dây nối. Các hiệu điện thế hiệu dụng: $U_{AN} = 300$ (V) , $U_{MB} = 60\sqrt{3}$ (V). Hiệu điện thế $u_{AN}$ lệch pha so với $u_{MB}$ một góc $\frac{\pi}{2}$. Cuộn dây có hệ số tự cảm $L = \frac{1}{\sqrt{3}\pi}$ (H) với điện trở r, điện dung của tụ điện $C = \frac{\sqrt{3}.10^{-3}}{16\pi}$ (F).




1) Tính điện trở r.

2) Viết biểu thức hiệu điện thế $u_{AN}$.

ĐS: 1. 20 Ω ; 2. $u_{AN} = 300\sqrt{2}\sin(100\pi t + \frac{49\pi}{180})(V)$ .

**Bài 22.** Cho mạch điện xoay chiều gồm cuộn dây D có độ tự cảm L mắc nối tiếp với điện trở thuần R và tụ điện có điện dung C (hình vẽ). Biết điện áp giữa hai đầu đoạn mạch AB có biểu thức u = $U_0$cos100πt (V) không đổi. Các vôn kế nhiệt $V_1$;$V_2$ có điện trở rất lớn chỉ lần lượt là $U_1$ = 120V; $U_2$ =$80\sqrt{3}$ V. Điện áp tức thời giữa hai đầu đoạn mạch MB lệch pha so với điện áp tức thời giữa hai đầu đoạn mạch NB góc π/6 và lệch pha so với điện áp tức thời giữa hai đầu đoạn mạch AN góc π/2. Ampe kế nhiệt có điện trở không đáng kể chỉ $\sqrt{3}$ A.

a. Xác định các giá trị của R; L và C.

b. Tính $U_0$ và viết biểu thức cường độ dòng điện tức thời qua mạch.

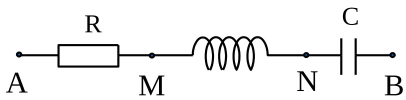
ĐS: a. R=40Ω, $C \approx 4,59.10^{-5} F$ , $L \approx 0,11H$ .

b.$U_0$ = $120\sqrt{2}$ (V); i = $\sqrt{6}$cos(100πt + π/6) (A)

**Bài 23.** Mạch điện nối tiếp gồm một tụ điện 10μF và một ampe kế xoay chiều có điện trở không đáng kể được mắc vào một hiệu điện thế xoay chiều tần số 50Hz. Để tăng số chỉ của ampe kế lên gấp đôi hoặc giảm số chỉ đó xuống còn một nửa giá trị ban đầu, cần mắc nối tiếp thêm vào mạch trên một cuộn dây thuần cảm có độ tự cảm bằng bao nhiêu?

ĐS : $L_3 = 6L_1 = 3(H)$

**Bài 24.** Một đoạn mạch điện xoay chiều AB gồm một điện trở

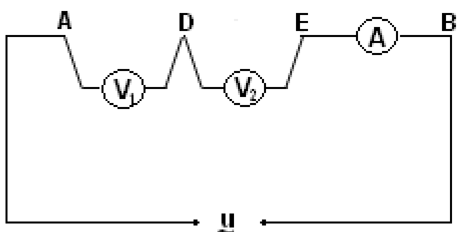



thuần, một cuộn cảm và một tụ điện ghép nối tiếp như trên hình vẽ. Hiệu điện thế hai đầu đoạn mạch có dạng :

$u_{AB} = 175\sqrt{2}\sin 100\pi t$ (V). Biết các hiệu điện thế hiệu dụng $U_{AM} = U_{MN} = 25V$, $U_{NB} = 175V$. Tìm hệ số công suất của đoạn mạch AB.

ĐS: $\cos\varphi = 0,28$.

**Bài 25.** Hai đầu A, B của mạch điện nối với một nguồn điện xoay chiều có hiệu điện thế hiệu dụng không đổi $U_{AB}$ = 100 V và có tần số f thay đổi được. Hai vôn kế xoay chiều $V_1$ và $V_2$ có điện trở rất lớn (coi như lớn vô cùng), ampe kế A và dây nối có điện trở không đáng kể.




1. Mắc vào hai chốt A và D một tụ điện có điện dung C và mắc vào hai chốt D, E một cuộn cảm có độ

tự cảm L, điện trở R và cho tần số $f = f_0 = 250$ Hz. Người ta thấy $V_1$ chỉ $U_1 = 200$ (V), vôn kế $V_2$ chỉ $U_2 = 100\sqrt{3}$ (V), ampe kế chỉ 1 (A). Tính các giá trị C, L, R của mạch.

2. Thay hai linh kiện trên bằng hai linh kiện khác (thuộc loại điện trở, tụ điện, cuộn cảm) thì số chỉ của các dụng cụ đo vẫn như trước và hơn nữa khi thay đổi tần số f của nguồn điện thì số chỉ của ampe kế giảm đi.

a. Hỏi đã mắc các linh kiện nào vào các chốt nói trên và giải thích tại sao ? Tìm các giá trị $R^/$, $L^/$, $C^/$ (nếu có) của mạch và độ lệch pha giữa $u_{AD}$ và $u_{DE}$.

b. Giữ nguyên tần số $f = f_0 = 250$ Hz và mắc thêm hai linh kiện nữa giống hệt hai linh kiện của câu **2a** vào mạch. Hỏi phải mắc thế nào để thỏa mãn; số chỉ của các vôn kế vẫn như trước, nhưng số chỉ của ampe kế giảm đi một nửa. Trong trường hợp đó, nếu thay đổi tần số f của nguồn điện thì số chỉ của ampe kế thay đổi như thế nào ?

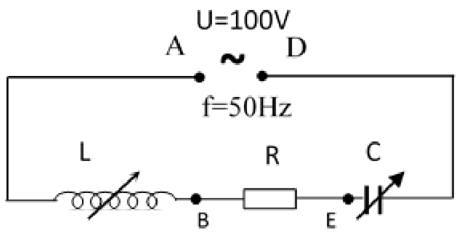
ĐS: 1. $R = 50\sqrt{3}$ $(\Omega)$; $L = \frac{0,3}{\pi}$ (H); $C = \frac{10^{-5}}{\pi}$ (F).

2a. + $R^/ = 100\ (\Omega)$, $L^/ = \frac{\sqrt{3}}{5\pi}$ (H), $C^/ = \frac{10^{-4}}{5\sqrt{3}.\pi}$ (F).

2b. Nếu thay đổi tần số f thì dòng điện sẽ giảm.

### Bài 26.

Mạch điện có sơ đồ như hình vẽ. Cuộn dây thuần cảm L. Người ta thay đổi L và C để công suất mạch tuân theo biểu thức: $P = K^2\sqrt{Z_L.Z_C}$ .




a)Khi $L = \frac{1}{\pi}(H)$ thì $K^2 = 4$, dòng điện trong mạch cực đại. Tính C và R.

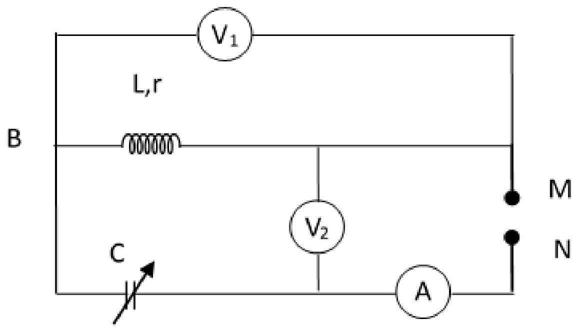
b)Tính độ lệch pha giữa $u_{AE}$ và $u_{BD}$ khi $I_{max}$. Tìm liên hệ giữa R, C, L để I = K. Lúc đó độ lệch pha giữa $u_{AE}$ và $u_{BD}$ bằng bao nhiêu?

ĐS: a. $C = \frac{10^{-4}}{\pi}(F)$, $R = 25\Omega$ ; b. $R^2 = \frac{L}{C}$; $\varphi_{u_{AE}} - \varphi_{u_{BD}} = \frac{\pi}{2}$

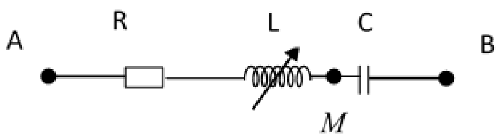
**Bài 27.** Một mạch điện XC gồm một cuộn dây thuần cảm có $L_1$ mắc nối tiếp với cuộn dây $L_2 = \frac{1}{2\pi}$ H; điện trở trong r = 50$\Omega$. Điện áp XC giữa hai đầu đoạn mạch có dạng u = $130\sqrt{2}\cos 100\pi t$ (V). Cường độ hiệu dụng trong mạch là 1A. Phải mắc thêm một tụ có điện dung C là bao nhiêu để điện áp giữa hai đầu cuộn ($L_2$ , r) đạt giá trị cực đại.

ĐS: $C = \frac{10^{-3}}{12\pi}$ F

**Bài 28.** Cho mạch điện như hình vẽ: Cho biết: $L = \frac{0.9}{\pi}(H)$, $U_{MN}$ không đổi, C thay đổi, $R_A$ = 0, $R_V$ rất lớn, tần số của dòng điện f = 50Hz ; r = 90($\Omega$). Hãy chứng tỏ rằng khi điều chỉnh C để hiệu điện thế trên các vôn kế lệch pha nhau một góc $\frac{\pi}{2}$ thì $U_C$ đạt giá trị cực đại.




**Bài 29.** Cho mạch điện như hình vẽ:



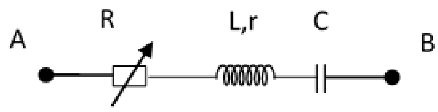

$$u_{AB} = 200\sqrt{2}\cos 100\pi t(V)., R = 100(\Omega); C = \frac{10^{-4}}{2\pi}(F)$$

Cuộn dây thuần cảm và có độ tự cảm L thay đổi được.Tìm L để $U_{AM}$ đạt giá trị cực đại. Tìm giá trị cực đại đó.

ĐS: L = 0,767(H), $U_{AM\max} = 482(\Omega)$.

**Bài 30.** Cho mạch điện như hình vẽ: $u_{AB} = 200\sqrt{2}\cos 100\pi t(V)$.

$L = \frac{1}{\pi}(H)$, $C = \frac{10^{-4}}{2\pi}(F)$. R thay đổi.




a. Tìm R để công suất trên R cực đại khi r = 0.

b. Tìm R để công suất trên R cực đại khi r = 50 ($\Omega$)

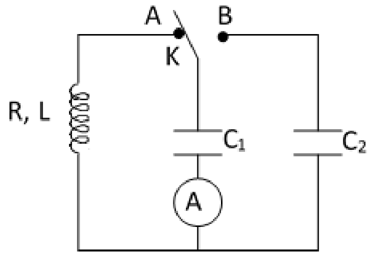
ĐS: a. $P_{max}$ = 200(W) khi R = 100 ($\Omega$);

b. $P_{max}$ = 124(W) thì $R = 100(\Omega)$.

# VII.2. MẠCH ĐIỆN XOAY CHIỀU MẮC HỖN HỢP.

**Bài 1.** Cho mạch điện như hình vẽ 2.

$L=\dfrac{1}{20\pi}(H); C_1=C_2=\dfrac{10^{-5}}{4\pi}(F); R_A=0.$



Hình 2

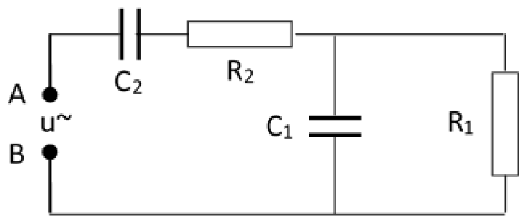
Đặt vào AB điện áp: $u_{AB}=U\sqrt{2}\cos(2000\pi t)(V)$. Đóng K vào A thì ampe kế chỉ 0,5 (A) và dòng điện qua $C_2$ sớm pha π/3 so với $u_{AB}$.

a.Tìm R, U, và cường độ hiệu dụng dòng điện qua cuộn L.

b.Đóng K sang B. Tìm số chỉ ampe kế.

ĐS: a. $U==100\sqrt{3}(V); R=100\sqrt{3}(\Omega)$; $I_L=0,5(A)$; b. $I_A=0,5(A)$

**Bài 2.** Cho mạch điện như hình vẽ. Biết $C_1$ = C, $C_2$ = 2C, $R_1$= R, $R_2$ = 2R. Hiệu điện thế xoay chiều đặt vào 2 điểm A và B có biểu thức $u=U_0\sin\omega t$, trong đó biên độ $U_0$ được giữ không đổi còn tần số góc ω có thể thay đổi trong một khoảng giá trị rộng.




a. Hiệu điện thế hiệu dụng $U_1$ giữa hai đầu điện trở $R_1$ có thể đạt giá trị cực đại bằng bao nhiêu?

b. Khi $U_1$ đạt giá trị cực đại thì hiệu điện thế hiệu dụng $U_2$ giữa hai đầu điện trở $R_2$ đạt giá trị nào?

ĐS: a. $U_{1max}=\dfrac{U_0\sqrt{2}}{7}$; b. $U_2\approx 0,45U_0$

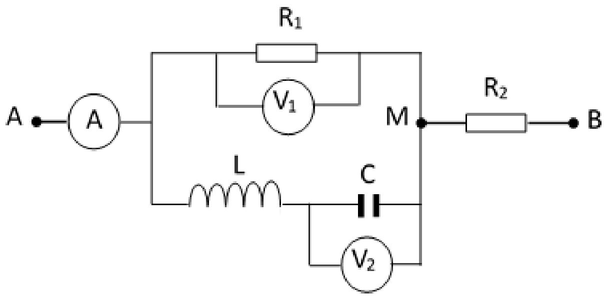
**Bài 3.** Cho mạch điện có sơ đồ như hình vẽ bên.

Cho biết: $R_1$ = 3Ω; $R_2$ = 2Ω; C = 100nF ; L là cuộn dây thuần cảm với L = 0,1H; $R_A \approx 0$; $R_{V_1}=R_{V_2}=\infty$. Ampe kế và von kế là ampe kế và von kế nhiệt.

Đặt vào hai đầu A, B hiệu điện thế

$u_{AB}$ = $5\sqrt{2}\cos\omega t$ (V).

1. Dùng cách vẽ giản đồ vectơ Frexnen tìm biểu thức của các hiệu điện thế hiệu dụng $U_{R_1}$, $U_C$ và cường độ dòng điện hiệu dụng qua $R_2$ theo hiệu điện thế hiệu dụng $U = U_{AB}$, $R_1$, $R_2$, L, C và ω.




2. Tìm điều kiện của ω để ampe kế có số chỉ lớn nhất có thể. Tìm số chỉ của các von kế $V_2$ và số chỉ ampe kế khi đó.

3. Tìm điều kiện của ω để các von kế $V_1$ và $V_2$ có số chỉ như nhau. Tìm số chỉ của ampe kế và các von kế khi đó.

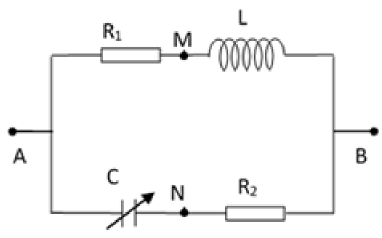
ĐS: 1. $I = \sqrt{I_L^2 + I_{R1}^2} = \dfrac{UR}{R_1R_2}\sqrt{\dfrac{R_1^2 + \left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)^2}{R^2 + \left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)^2}}$; $\quad U_{R1} = \dfrac{UR}{R_2}\dfrac{\left|L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right|}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)^2}}$

$U_C = \dfrac{UR}{R_2}\dfrac{1}{C\omega\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)^2}}$; với $R = \left(\dfrac{R_1R_2}{R_1 + R_2}\right)$.

2. $\omega = 10^4 rad/s$, 2,5(A); 2500V; 3. $\omega = 1{,}41.10^4 rad/s$; $I_A \approx 1(A)$; $U_{R1} = U_C \approx 3(V)$.

**Bài 4.** Cho mạch điện xoay chiều như hình vẽ.

Biết $u_{AB} = 180\sqrt{2}\sin(100\pi t)$ (V), $R_1 = R_2 = 100\ \Omega$, cuộn dây thuần cảm có $L = \dfrac{\sqrt{3}}{\pi}H$, tụ điện có điện dung C biến đổi được.

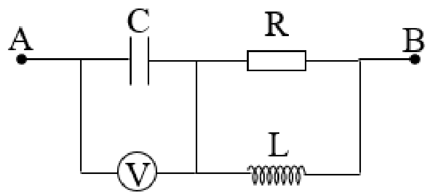



1. Tìm C để hiệu điện thế hiệu dụng giữa hai điểm M, N đạt cực tiểu.

2. Khi $C = \dfrac{100}{\pi\sqrt{3}}\mu F$, mắc vào M và N một ampe kế có điện trở không đáng kể thì số chỉ ampe kế là bao nhiêu?

ĐS: 1. C=55($\mu F$); 2. 0,6A.

**Bài 5.** Cho mạch điện như hình 2, trong đó điện dung C của tụ điện và điện trở R có thể thay đổi được. Cuộn dây cảm thuần có độ tự cảm L = $\frac{1}{\pi}$H; vôn kế có điện trở vô cùng lớn. Đặt vào hai đầu mạch điện áp $u_{AB} = 100\sqrt{2}\cos 100\pi t\,(V)$.

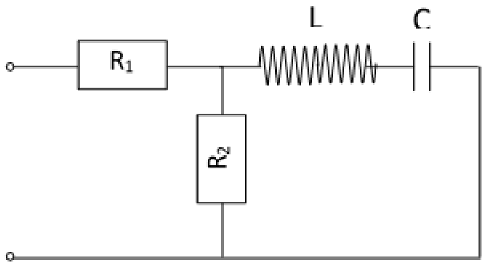



**1.** Khi R = $100\sqrt{3}\Omega$, tìm C để số chỉ vôn kế đạt giá trị lớn nhất, tìm giá trị lớn nhất đó.

**2.** Tìm C để số chỉ của vôn kế không phụ thuộc vào R.

ĐS: 1. $C = \frac{10^{-4}}{\pi}F$; $200V$ ; 2. $C = \frac{2.10^{-4}}{\pi}F$.

**Bài 6.** Cho mạch điện như hình vẽ: Các điện trở thuần $R_1$ = 400Ω, $R_2$ = 200Ω; cuộn dây thuần cảm có độ tự cảm L = $\frac{2}{\Pi}$H; tụ điện có điện dung C = $\frac{10^2}{\Pi}$μF. Đặt vào hai đầu mạch điện một điện áp xoay chiều u = $2\sqrt{2}$.cosωt (V), tần số góc ω có thể thay đổi được.

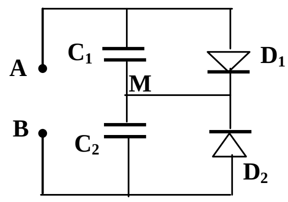



a) Giá trị của ω bằng bao nhiêu để hiệu điện thế giữa hai bản của tụ điện đạt giá trị cực đại?

b) Nếu thay điện trở $R_2$ bằng điện trở $R_3$ = 500Ω thì giá trị cực đại của hiệu điện thế giữa hai bản của tụ điện là bao nhiêu và ứng với giá trị nào của ω?

**ĐS: a.** $\omega = \frac{\sqrt{2LC - R^2C^2}}{\sqrt{2}LC} \approx$ 165,6rad/s; b. ω = 0 ; $U_C = U\frac{R_3}{R_1 + R_3} = \frac{10}{9}V$

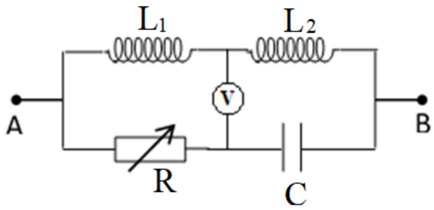
**Bài 7.** Cho mạch điện như hình vẽ . Hai tụ điện có điện dung $C_1$ và $C_2$ (với $C_2 > C_1$), hai đi ôt lí tưởng. Đặt vào hai đầu đoạn mạch một điện áp xoay chiều $u_{AB} = U_0.\cos\omega t$. Viết biểu thức của điện áp hai đầu mỗi tụ khi hệ ở trạng thái ổn định.




*H.2*

ĐS: $u_{AM} = \frac{C_2U_0}{C_1 + C_2}.(\cos\omega t - 1); u_{MB} = \frac{C_1U_0}{C_1 + C_2}\cos\omega t + \frac{C_2U_0}{C_1 + C_2}$

**Bài 8.** Cho mạch điện xoay chiều như hình vẽ: Biết $u_{AB} = 100\sqrt{2}\cos100\pi t$ (V); hai cuộn dây cảm thuần giống nhau; tụ điện có điện dung $C = \frac{10^{-4}}{\pi}$F; vôn kế nhiệt có $R_V = \infty$.

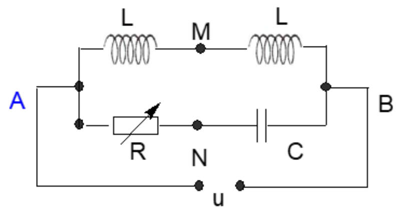



1. Xác định số chỉ của vôn kế.

2. Tìm R để điện áp hai đầu vôn kế lệch pha $\pi/2$ so với điện áp giữa hai điểm A, B.

ĐS: 1. 50V; 2. R = 100Ω

**Bài 9.** Mạch điện như hình vẽ . Hai cuộn dây thuần cảm có cùng $L = \frac{\sqrt{3}}{6\pi}$H, tụ có $C = \frac{\sqrt{3}}{5\pi}10^{-3}$F, R là biến trở. Hai đầu đoạn mạch nối với nguồn xoay chiều $u = 200\sqrt{2}\sin100\pi t$ (V).




a). Điều chỉnh cho R= 50Ω.

1) Viết biểu thức của cường độ dòng điện (i) qua mạch chính.

2) Tính công suất tiêu thụ trên mạch điện.

b). Chứng minh rằng hiệu điện thế hiệu dụng $U_{MN}$ không đổi khi thay đổi R. Tính $U_{MN}$.

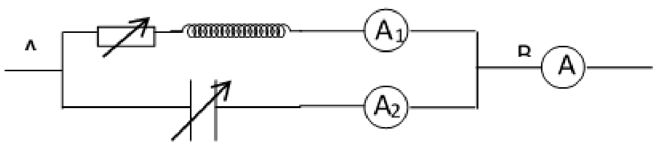
ĐS: a1. $i = 2\sqrt{6}\sin(100\pi t - \frac{\pi}{6})$ (A); a2. 600W; b.100V.

**Bài 10.** Áp đặt một điện áp xoay chiều ổn định vào hai đầu đoạn mạch điện như hình vẽ. Biết $L = 1/\pi(H)$; R và C có thể thay đổi được.

a) Giữ cố định giá trị $C = C_1$ và thay đổi R , ta có các kết quả sau :

+ Số chỉ của ampe kế A luôn bằng 1A

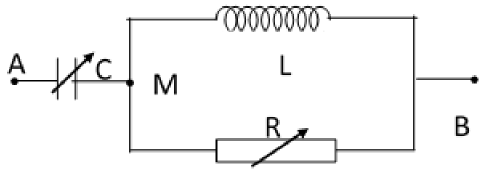
+ Khi $R = R_1$ =100Ω thì $u_{AB}$ và cường độ dòng điện i trong mạch chính cùng pha. Tính $C_1$ và xác định số chỉ của các ampe kế lúc này




b) Tìm giá trị của C phải thoả để khi điều chỉnh R ; điện áp tức thời $u_{AB}$ ở hai đầu mạch điện luôn lệch pha với cường độ dòng điện trong mạch chính.

ĐS: a. 1,414A; $C_1 = \frac{10^{-4}}{2\pi}F$; b. $C > \frac{10^{-4}}{\pi}F$

**Bài 11.** Cho mạch điện như hình 3: $u_{AB} = 80\sqrt{2}\cos 100\pi t$ (V), L là cuộn dây cảm thuần có độ tự cảm $\frac{0,4}{\pi}$ H, tụ điện C và điện trở R đều có thể thay đổi được.



Hình 3

1/ Cho $Z_C = Z_L$, $R = R_1 = 75\Omega$. Chứng minh rằng :

a/ $i_R$ sớm pha $\frac{\pi}{2}$ so với $u_{AB}$.

b/ Khi $Z_C = Z_L$ thì $U_C$ đạt cực đại. Tính $U_{Cmax}$ .

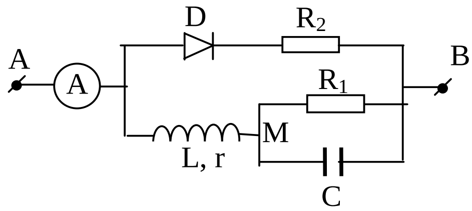
2/Giữ nguyên C điều chỉnh R, chứng tỏ công suất tiêu thụ P = kR,  k là hằng số không phụ thuộc vào R.

3/ Giữ $R = R_1$. Tìm C để $u_{AB}$ cùng pha với i.

ĐS : 1b. 170V ; 3. $C = 10^{-4}$F.

**Bài 12.** Cho mạch điện xoay chiều như hình vẽ 3.

Các điện trở $R_1 = 150\ (\Omega)$; $R_2 = 200\ (\Omega)$; cuộn dây có độ tự cảm $L = \frac{1}{\pi}(H)$ và điện trở trong $r = 50\ (\Omega)$. D là một điốt lí tưởng. Ampe kế có điện trở không đáng kể. Đặt vào hai đầu đoạn mạch AB một điện áp xoay chiều $u_{AB} = 200\sqrt{2}\cos 100\pi t(V)$. Dòng điện qua tụ điện cùng pha với điện áp $u_{AB}$. Tính giá trị điện dung C của tụ và số chỉ của ampe kế.



*Hình 3*

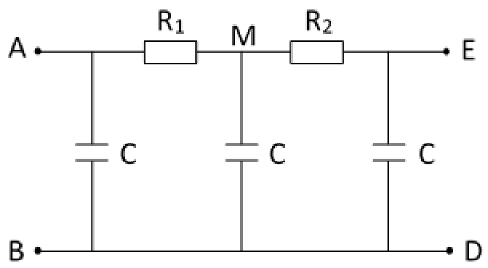
ĐS: $C = \frac{4.10^{-4}}{3\pi}F$; 2,7A.

**Bài 13.** Cho mạch điện xoay chiều như hình vẽ.

Các tụ điện đều có điện dung bằng C, $R_1 = R_0$; $R_2 = mR_0$ (m là hằng số).

Đặt vào A, B một hiệu điện thế xoay chiều $u = U_0 \sin \omega t$ với $\omega = \dfrac{1}{R_0 C}$.

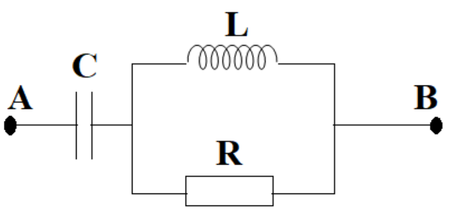
Xác định hiệu điện thế hiệu dụng giữa hai điểm E và D?




ĐS: $U_{ED} = \dfrac{U_0}{\sqrt{4m^2 + 4m + 10}}$

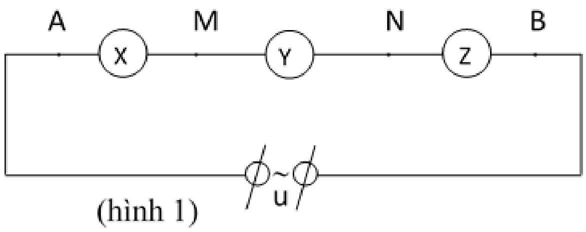
**Bài 14.** Cho mạch điện như hình vẽ . Giữa hai điểm A và B luôn có hiệu điện thế $u_{AB} = U\sqrt{2}\cos \omega t(V)$. Cuộn dây có hệ số tự cảm L xác định

Hãy xác định giá trị của C để : Cường độ hiệu dụng của dòng điện qua C không phụ thuộc vào R




ĐS: $C = \dfrac{2}{L\omega^2}$

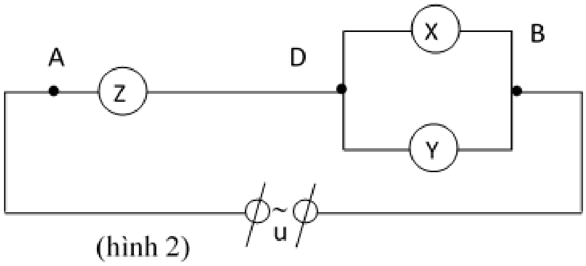
**Bài 15.** Mạch điện xoay chiều gồm 3 phần tử : điện trở thuần R, cuộn thuần cảm có độ tự cảm L và tụ có điện dung C mắc nối tiếp như hình vẽ (1).Biết $u_{AN}$ nhanh pha so với $u_{MB}$ và $|\tan \varphi_{AN}| = 2|\tan \varphi_{MB}|$



(hình 1)

Nếu mắc mạch lại như hình vẽ (2) thì cường độ hiệu dụng qua mạch chính là bao nhiêu? Biết dung kháng $Z_C = 50\Omega$ và điện áp hiệu dụng hai đầu mạch là 100V.

ĐS: $I = 2A$

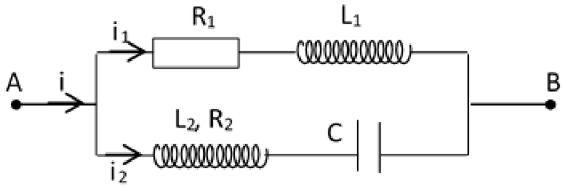


(hình 2)

**Bài 16.** Cho R = 10 Ω ; $L_1$ = 0,1/π (H) ; $R_2$ = 10√3 Ω ; $L_2$ = 0,5/π (H) ;

C = $10^{-3}/6\pi$ (F)

$$u_{AB} = 100\sqrt{2}\sin 100\pi t(V)$$




Tìm:

1.Biểu thức dòng điện chính?

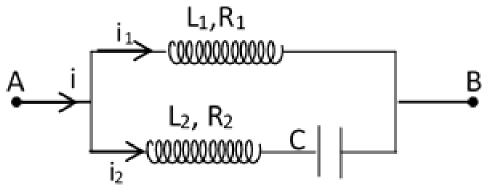
2.Tổng trở của mạch?

3. Công suất và hệ số công suất?

ĐS: 1. $i = 9,5\sqrt{2}\sin\left(100\pi t - \dfrac{\pi}{12}\right)(A)$; 2. $Z = 10,5\Omega$; 3. $P = 932,5(W)$, $\cos\varphi = 0,966$

**Bài 17.** Cho $R_1$ = 60Ω ; $L_1$ = 6/5π (H) ; $R_2$ = 50 Ω ; $L_2$ = 1/π (H).

$$u_{AB} = 120\sqrt{2}\sin 100\pi t(V)$$




Biết rằng $i_1$ và $i_2$ lệch pha nhau π/2

1/ Viết biểu thức dòng điện $i_1$ ?

2/ Tìm C và viết biểu thức dòng điện $i_2$?

3/ Viết biểu thức dòng điện trong mạch chính i ?

ĐS: 1. $i_1 = 0,4\sqrt{10}\sin(100\pi t - \dfrac{63\pi}{180})(A)$;

2. $i_2 = \dfrac{24\sqrt{10}}{25}\sin\left(100\pi t + \dfrac{27\pi}{180}\right)(A)$;

$C = \dfrac{4}{5\pi}.10^{-4}F$

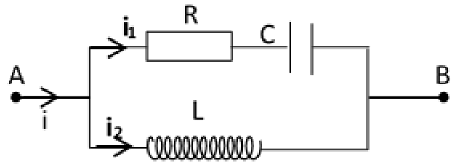
3. $i = 2,3\sqrt{2}\sin(100\pi t + \dfrac{4\pi}{180})(A)$

**Bài 18.** Cho mạch điện xoay chiều như hình vẽ, dòng điện trong mạch chính:

$i = 1,5\sqrt{2}\sin 100\pi t(A)$

L = 5/6π (H) ; P = 180W ; cosφ = 0,8

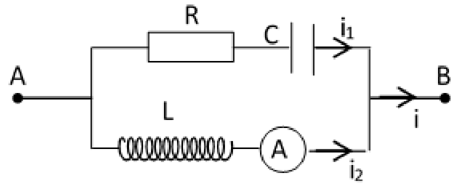
Tìm $I_2$? $I_1$ ? R ? C ?




ĐS: $I_2 = 1,8(A)$; $I_1$ = 1,5 (A);

Trường hợp 1: $R = 80(\Omega), C = \frac{10^{-3}}{6\pi}F$. Trường hợp 2: $R = 51,6(\Omega)$, $C = 56,9.10^{-6}F$

**Bài 19.** $u = 200\sqrt{2}\sin 100\pi t(V)$. Cuộn dây thuần cảm; $RBB_{aBB}$ = 0 ; R = 100 Ω ; L,C được lựa chọn sao cho cosφ = 1. Tìm L và C tương ứng để số chỉ của ampe kế cực đại?




ĐS: $C = \frac{1}{\pi}.10^{-4}F$, $L = \frac{2}{\pi}H$, $I_{2max} = 1(A)$

**Bài 20.** Cho $u_{AD} = U\sqrt{2}\sin\omega t(V)$; $R_1 = R_2 = R_3 = R$

1. Trong giản đồ vectơ của mạch, quĩ tích các điểm biểu diễn điện thế của điểm F khi C biến thuên từ 0 → ∞ là đường gì ? (Lấy $V_{AB}$ = 0).

2. Tìm biên độ và góc lệch pha của $u_{FB}$ so với $u_{AD}$

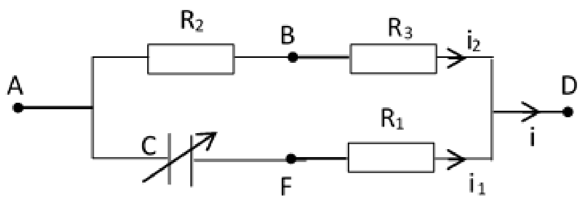
3. Tính các giá trị của C để có $u_{FB}$ :

a. Cùng pha với $u_{AD}$ ?

b. Ngược pha với $u_{AD}$ ?

c. Lệch pha π/2 so với $u_{AD}$ ?

Biết R = 50 Ω ; ω = 300 rad/s.




4. Tìm điều kiện để có $I_1 = I_2$ ?

Trong điều kiện $I_1 = I_2$ , tìm I và góc lệch pha của dòng điện mạch chính so với $u_{AD}$.

Biết U = 100 (V)?

ĐS: 1. Đường tròn đường kính AD bằng U.

1. Biên độ $\frac{U_0}{2}$ và trễ pha 2α so với u, với $tg\alpha = RC\omega$.

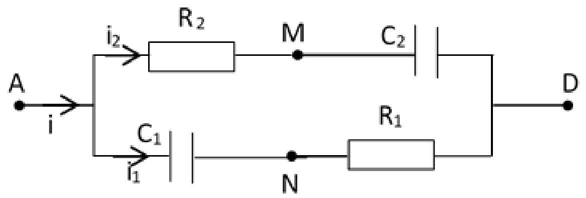
3a. C = 0; 3b. C = ∞; 3c. $C = 66,6\mu F$

4.Điều kiện $RC\omega = \frac{1}{\sqrt{3}}$; Dòng i sớm pha so với u góc $30^0, I = \sqrt{3}(A)$

**Bài 21.** Cho mạch điên như hình vẽ

$$u_{AB} = U\sqrt{2}\sin\omega t(V)$$ .

Tìm hệ thức liên hệ giữa $R_1$ , $R_2$ , $C_1$ , $C_2$ và ω để:

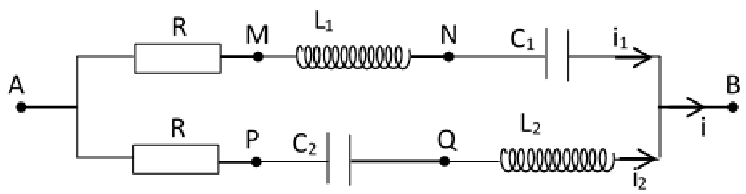



1. $u_{MN}$ vuông pha với $u_{AB}$ ?
2. $u_{MN}$ Có biên độ cực đại. Tìm độ lệch pha giữa $u_{MN}$ và $u_{AB}$ lúc đó?
3. $u_{MN}$ có giá trị hiệu dụng bằng U√3/2 và lệch pha π/3 so với $u_{AB}$ ?

ĐS : 1. $R_1R_2C_1C_2\omega^2 = 1$ ; 2. $R_1C_1 = R_2C_2$, lệch góc $\varphi, tg\varphi = \frac{2R_1C_1\omega}{1 - R_1^2C_1^2\omega^2}$ ; 3. $\frac{R_2C_2}{R_1C_1} = 2 + \sqrt{3}$

**Bài 22.** Cho mạch điện như hình vẽ.

R = 100 Ω , $L_1$ = 2/π (H) , $L_2$ = 1/π (H), Hai cuộn dây đều thuần cảm.




$C_1$ = 31,8μF , $C_2$ = 15,9μF, f = 50 Hz.

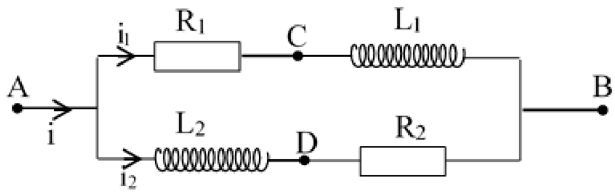
1. Biết $U_{MP}$ = 200 V . Tìm $U_{AB}$?

2. Viết biểu thức dòng điện chính. Lấy pha của $u_{AB}$ làm pha gốc?

ĐS: a. $U_{AB}$ = 200V; b. $i = 2\sqrt{2}\sin 100\pi t(A)$

**Bài 23.** Cho mạch điện như hình vẽ. Các thông số trên hình đã cho.

$$u_{AB} = U\sqrt{2}\sin\omega t(V)$$




1. Tìm điều kiện để $U_{CD} = U_{AB}$ . Trong trường hợp này tính độ lệch pha giữa $u_{AB}$ và $u_{CD}$ ?

2. Mạch này có công dụng gì ? Hãy vẽ một mạng khác có công dụng như thế?

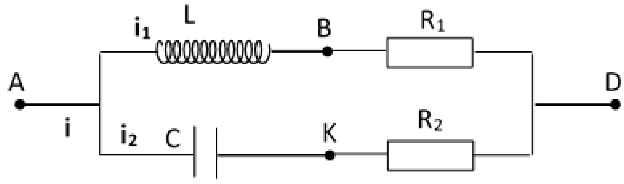
ĐS: 1.Điều kiện $L_1R_2 = L_2R_1$; độ lệch pha φ: $tg\varphi = \dfrac{2\omega L_1R_1}{R_1^2 - \omega^2L_1^2}$

**Bài 24.** Cho mạch điện như hình vẽ . Trong đó $R_1 = R_2 = R = 40\Omega$ ,

$Z_L = Z_C = 30\Omega$ , $U_{AD}$ = 100 (V)

1. Tìm $i_1$, $i_2$ , và i ?

2. Tìm $U_{BK}$ ?




ĐS: 1.

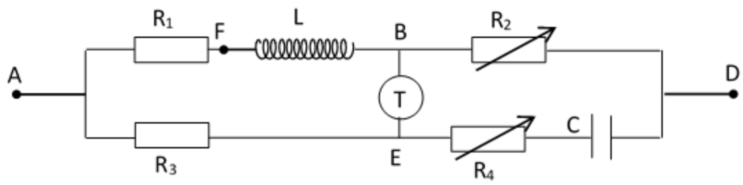
$$i_1 = 2\sqrt{2}\sin(100\pi t - \frac{37\pi}{180})(A)$$

$$i_2 = 2\sqrt{2}\sin(100\pi t + \frac{37\pi}{180})(A),\ i = 3{,}2\sqrt{2}\sin 100\pi t(A)$$

2. 96V

**Bài 25.** Cho mạch điện như hình vẽ. Cho $R_3 = 1000\Omega$ , C = 0,2μF,

ω = 1000rađ/s. Chỉnh cho $R_2 = 1000\Omega$ , $R_4 = 5000\Omega$ thì $U_{BE} = 0$ ( Không có dòng qua tai nghe (T) )




1/ Vẽ giản đồ vectơ?

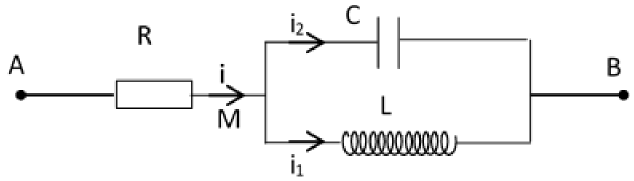
2/ Tính $R_1$ và L?

ĐS: L = 0,1(H) ; $R_1$ = 100(Ω)

**Bài 26.** Mạch điện xoay chiều như hình vẽ: Biết R= 3Ω , cuộn dây thuần cảm $L=\dfrac{12.10^{-2}}{\pi}H$, tụ điện có điện dung $C=\dfrac{10^{-2}}{\pi}F$ dòng điện $i_R=5\sqrt{2}\sin 100\pi t(A)$

1. Xác định hiệu điện thế giữa A và B?

2. Tính công suất tiêu thụ của mạch? Tính tổng trở của mạch?



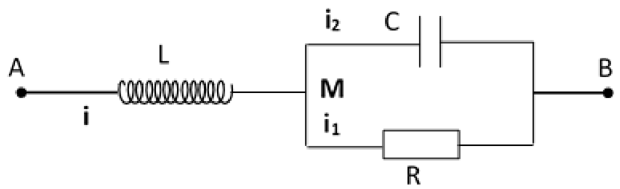

ĐS: 1. 25V; 2.P= 75 W, $Z=5(\Omega)$

**Bài 27.** Cho đoạn mach như hình vẽ, $u_{AB}=173\sqrt{2}\sin 100\pi t(V)$ ; R = 200/√3(Ω) ; L = 0,159 (H)

C = 15,9 μF ; Cuộn dây thuần cảm.

1. Tìm biểu thức của i?

2. Tìm tổng trở và công suất của mạch?



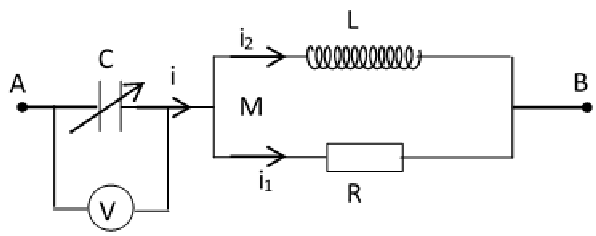

ĐS: 1.$i=2\sqrt{2}\sin 100\pi t(A)$ ;

2.P = 200$\sqrt{3}$W

**Bài 28.** Cho mạch điện xoay chiều như hình vẽ : $u_{AB}=100\sqrt{2}\sin 100\pi t(V)$; R = 30Ω ; L = 0,128(H)

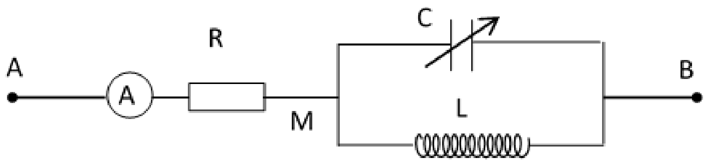
Tìm số chỉ cực đại của vôn kế khi cho C thay đổi?

ĐS : $U_{C\max}=125(V)$



**Bài 29.** Cho mạch điện xoay chiều như hình vẽ

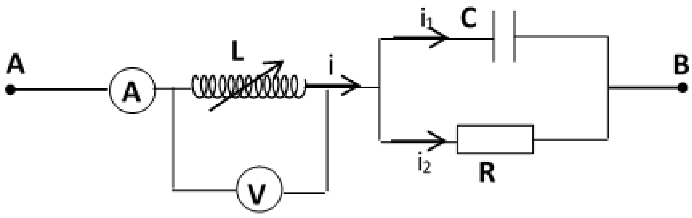
$u_{AB} = 100\sqrt{2}\sin 100\pi t(V)$ ; L = 0,159 (H). Tìm C để số chỉ của ampekế cực tiểu? Viết biểu thức dòng điện khi đó?




ĐS: $C = \frac{10^{-4}}{2\pi}F$ ; i = 0; $i_1 = 2\sqrt{2}\sin(100\pi t - \frac{\pi}{2})(A)$ ; $i_2 = 2\sqrt{2}\sin(100\pi t + \frac{\pi}{2})(A)$

**Bài 30.** Cho mạch điện xoay chiều như hình vẽ, biết $U_{AB}$ = 120 (V) ; f = 50 (Hz) ; R = 15Ω ; C = 10P$^{-3P}$/2π (F).

Điều chỉnh L để số chỉ của ampekế cực đại? Tìm số chỉ đó? Suy ra số chỉ của vônkế và độ tự cảm L?




ĐS : $I_{max} = 12,5(A)$ .Độ tự cảm lúc đó: $L = 23(mH)$ .Số chỉ của vôn kế:$U_1$ = 90(V)

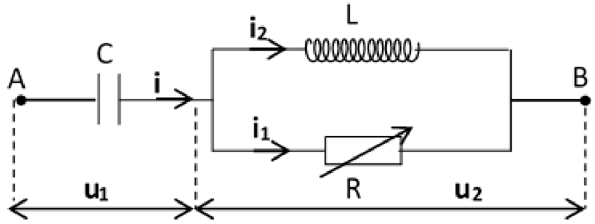
**Bài 31.** Cho mạch điện xoay chiều như hình vẽ , $u = U\sqrt{2}\sin 100\pi t(V)$

1. Cho LCω$^2$ = 1. Chứng minh rằng dòng điện qua R không phụ thuộc R?

2. Cho LCω$^2$ = 2. Chứng minh rằng dòng điện qua C không phụ thuộc R?

3. Tìm điều kiện để dòng qua điện trở thuần $I_R$ không phụ thuộc R?

4. Tìm điều kiện để dòng qua tụ $I_C$ không phụ thuộc R?

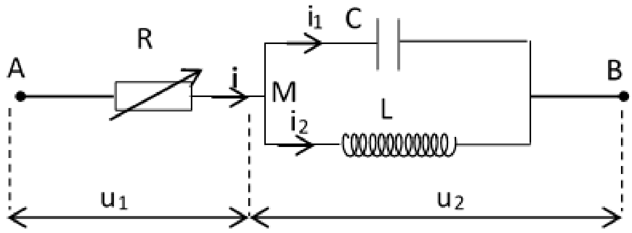



ĐS : 3. $LC\omega^2 = 1$; 4. $LC\omega^2 = 2$

**Bài 32.** Cho mạch điện xoay chiều như hình vẽ. Biết $U_{AB}$ = 24(V) ; $Z_L$ = 20Ω ; $Z_C$ = 30Ω ; f = 50 Hz

1. Tìm R để công suất P đạt cực đại? Tìm $P_{max}$

2. Xác định R khi P = $P_{max}$/ 2 ?



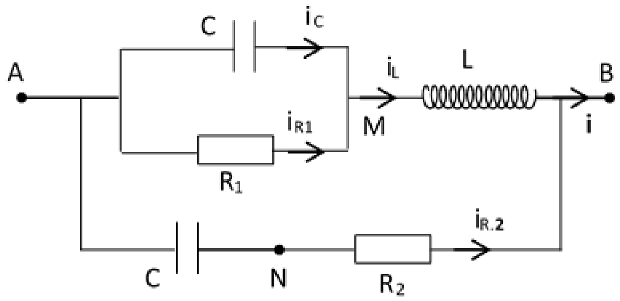

ĐS: 1. Khi R = 12(Ω), $P_{max}$ = 24(W)

2. R = 287,5 (Ω) hoặc R = 0,5 (Ω)

**Bài 33.** Cho mạch điện xoay chiều như hình vẽ, biết $u_{AB} = 200\sqrt{2}\sin 100\pi t$ (V) ; $R_1$ = 100Ω ; $Z_C = Z_L$ = 100Ω . Dòng điện qua cuộn cảm và dòng qua $R_2$ vuông pha với nhau.

1. Tìm $R_2$?

2. Viết biểu thức các cường độ dòng điện qua L, qua $R_2$ và dòng chính?

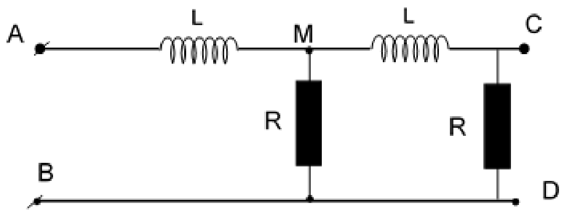



ĐS: 1. $R_2 = 100(\Omega)$.

2. $i_L = 4\sin(100\pi t - \frac{\pi}{4})(A); i_{R2} = 2\sin(100\pi t + \frac{\pi}{4})(A);$

$$i = 2\sqrt{5}\sin(100\pi t - \frac{19\pi}{180})(A)$$

**Bài 34.** Cho mạch điện như hình vẽ gồm hai cuộn cảm thuần có cùng độ tự cảm L, hai điện trở thuần có cùng giá trị R. Đặt vào hai đầu A, B một điện áp xoay chiều. Biết điện áp tức thời $u_{AB}$ vuông pha với điện áp tức thời $u_{CD}$. Tìm tần số của điện áp xoay chiều và tỉ số các điện áp hiệu dụng $U_{CD}/U_{AB}$.



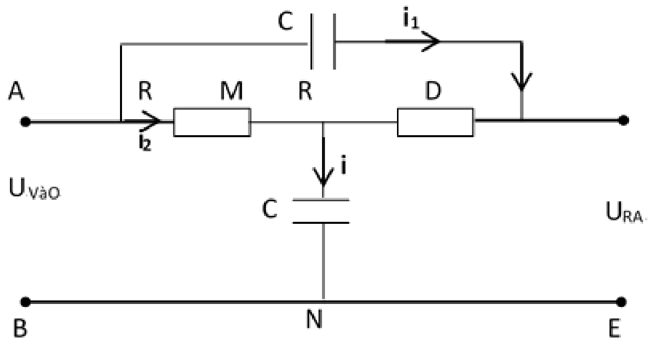

ĐS: ω = $\frac{R}{L}$, $\frac{U_{CD}}{U_{AB}} = \frac{1}{3}$

**Bài 35.** Cho mạch điện như hình vẽ.

1. Tìm ω để hiệu điện thế ra và hiệu điện thế vào cùng pha?

2. Xác định tỉ số $U_{ra}/U_{vào}$ ?

3. Triển khai các mạch lọc tương tự?

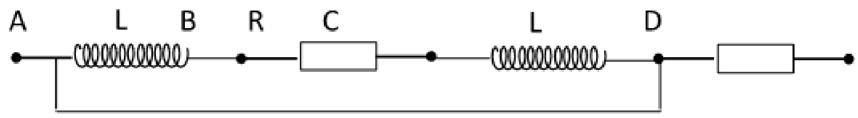



ĐS: 1. $\omega = \frac{1}{RC}$ ; 2. $U_{ra}/U_{vào}$=2/3.

**Bài 36.** Đặt vào hai điểm C và D hiệu điện thế xoay chiều tần số ω thì thấy hiệu điện thế $u_{CD}$ vuông pha với $u_{AB}$.

1. Tính tần số góc ω theo R và L?

2. Tính tỉ số giữa $U_{CD}$ và $U_{BD}$?

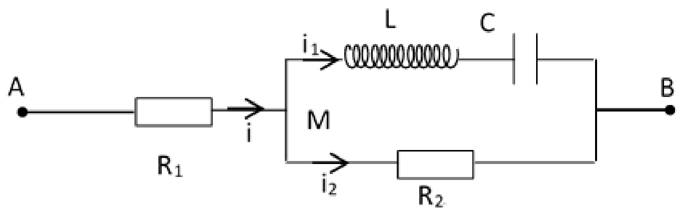



ĐS: 1. $\omega = \frac{R}{L}$ ; 2. $\frac{U_{CD}}{U_{BD}} = \frac{3}{2}$

**Bài 37.** Cho mạch điện xoay chiều như hình vẽ: $u_{AB} = U\sqrt{2}\sin\omega t$ ; U = 2V ; $R_1$ = 4kΩ ; $R_2$= 200 Ω ; L = 0,02 H; C = 50nF

1. Dùng cách vẽ Frexnel tìm $U_C$ theo U ?

2. Muốn $U_C$ đạt cực đại thì ω bằng bao nhiêu? Tính $U_{Cmax}$?




3. Nếu thay $R_2$ bằng $R_3$ = 2kΩ thì trị số khả dĩ lớn nhất của $U_C$ ứng với tần số nào? Tìm $U_{C\max}$ khi đó

ĐS: 2. $\omega = \sqrt{\frac{2LC - R^2C^2}{2L^2C^2}}$ =$3.10^4$ Hz ,$U_{Cmax}$ = 0,32 (V) ;

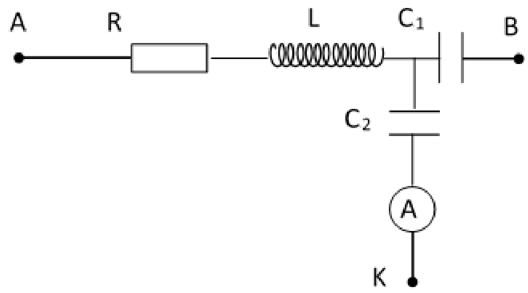
3.Khi đó ω = 0và $U_{C\max} = \frac{2}{3}(V)$

**Bài 38.** Cho mạch điện như hình vẽ, $u_{AB} = U\sqrt{2}\sin\omega t(V)$. cuộn dây thuần cảm có $Z_L = 100\Omega$

$Z_{C1} = Z_{C2} = 200\ \Omega$ ; điện trở ampekế $R_A = 0$.

Biết rằng khi nối K vào đầu A thì ampekế chỉ 0,5A và qua tụ điện $C_1$ có dòng

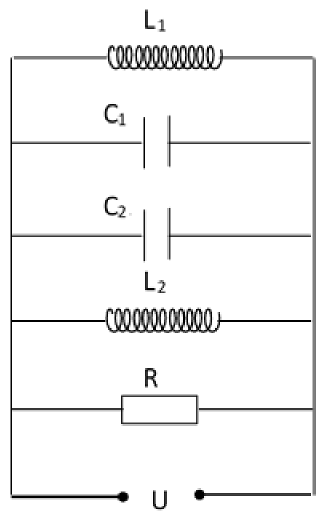
$$i = I\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)(A)$$




Hỏi khi chuyển K sang B thì ampekế chỉ bao nhiêu? Vẽ giản đồ vectơ chính xác khi nối K với B ?

ĐS: $I_A = 0,5$ (A)

**Bài 39.** Cho mạch điện xoay chiều. $L_1 = 10\mu H$; $L_2 = 20\mu H$; $C_1 = 15\mu F$; $C_2 = 5\mu F$; $R = 100\Omega$ ; ω biến thiên cường độ dóng điện trong mạch chính có giá trị hiệu dụng không đổi.



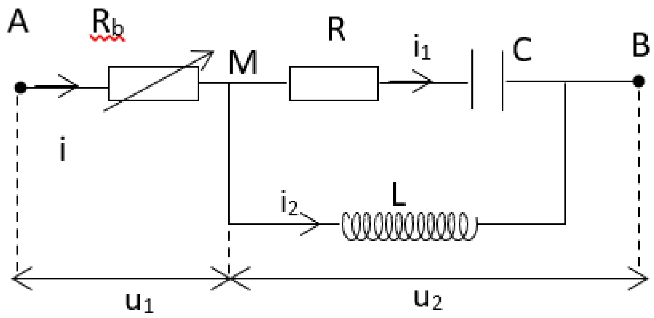

Với $\omega = \omega_0$ thì $P = P_{MAX}$. Với $\omega = \omega_1$ và $\omega = \omega_2$ thì $P = \frac{P_{max}}{2}$ $(\omega_1 < \omega_2)$

Tìm tỉ số $\dfrac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = ?$

ĐS: $\dfrac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = R\sqrt{\dfrac{C}{L}} = 100\sqrt{3}$

**Bài 40.** Cho mạch điện như hình vẽ. $u_{AB} = U\sqrt{2}\sin\omega t$ (V), $R = Z_L = Z_C$

Tìm quỹ tích đầu mút vecto $\vec{I}$ trên giản đồ véctơ Frexnel khi $R_b$ biến thiên từ $0 \to \infty$ ?




**Bài 41.** Một hiệu điện thế xoay chiều tần số ω được đặt vào một phụ tải. Biết rằng công suất trên phụ tải cực đại nếu như tổng trở của tải tương đương với một điện trở thuần R. Nếu tải là mạch (R*,L,C) có điện trở thuần bằng 5R. Hỏi L,C phải mắc với tải như thế nào để công suất trên tải cực đại? Tính L, C theo R vàω?

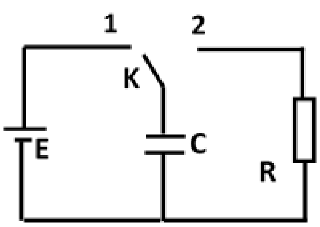
ĐS : Cách 1 : (R*// C) nt L thì $C=\frac{2}{5\omega R}$, $L=\frac{2R}{\omega}$;

Cách 2: (R*// L) nt C thì $C=\frac{1}{2\omega R}$ $L=\frac{2,5R}{\omega}$

# CHƯƠNG VIII.
# MẠCH QUÁ ĐỘ, PHI TUYẾN

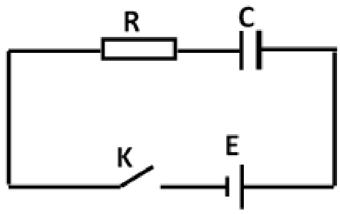
**Bài 1.** Cho mạch điện như hình vẽ. Ban đầu khóa K ở vị trí 1, tụ điện được tích điện đến hiệu điện thế bằng E. Sau đó, chuyển khóa K sang vị trí 2. Khảo sát sự biến thiên điện tích tụ và cường độ dòng điện trong mạch. Bỏ qua điện trở dây nối, khóa K.

ĐS: $q=Q_0.e^{\frac{-t}{R.C}}$ ; $i=\frac{E}{R}.e^{\frac{-t}{R.C}}$



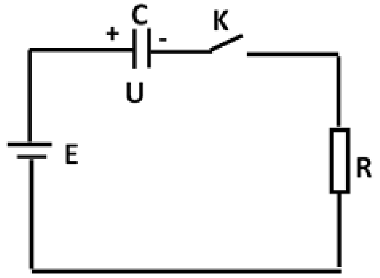

**Bài 2.** Cho mạch điện như hình vẽ:
Ban đầu khóa K mở, tụ điện chưa được tích điện. Sau đó, đóng khóa K.
Hãy khảo sát sự biến thiên của cường độ dòng điện trong mạch.
Bỏ qua
điện trở dây nối, khóa K.

ĐS: $i=\frac{E}{R}.e^{\frac{-t}{R.C}}$



**Bài 3.** Cho mạch điện như hình vẽ. Ban đầu tụ điện đã được tích điện đến hiệu điện thế U, sau đó mắc vào mạch điện và khóa K mở. Ngay sau đó đóng khóa K, hãy khảo sát sự biến thiên của cường độ dòng điện trong mạch (E >U).
Bỏ qua điện trở dây nối, khóa K.

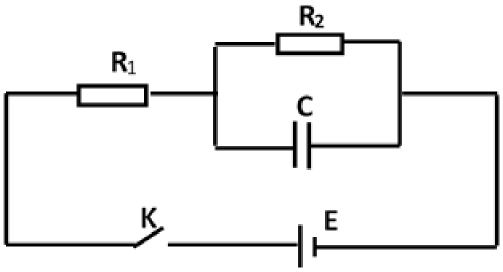
ĐS: $i = \frac{E-U}{R}.e^{\frac{-t}{R.C}}$



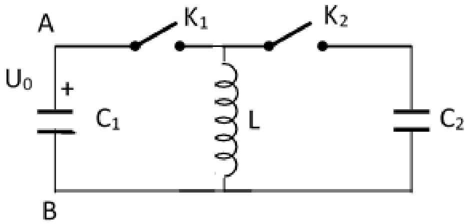

**Bài 4.** Cho mạch điện như hình vẽ. Khi khóa K mở, tụ chưa tích điện. Sau đó đóng khóa K. Hãy khảo sát sự biến thiên điện tich của tụ và dòng điện trong mạch.

ĐS: $q = E.\frac{R_2.C}{R_1+R_2}(1-e^{\frac{-t}{R}})$ ; $i = \frac{EC}{R_1+R_2}(1-e^{\frac{-t}{R}})$

Với $R = \frac{R_1+R_2}{R_1.R_2.C}$




**Bài 5.** Cho mạch điện có sơ đồ như hình vẽ. Hai tụ điện $C_1$ và $C_2$ giống nhau, có cùng điện dung C. Tụ điện $C_1$ được tích điện đến hiệu điện thế $U_0$, cuộn dây có độ tự cảm L, các khoá $K_1$ và $K_2$ ban đầu đều mở. Điện trở của cuộn dây, của các dây nối, của các khoá là rất nhỏ, nên có thể coi dao động điện từ trong mạch là điều hoà.




1. Đóng khoá $K_1$ tại thời điểm t = 0. Hãy tìm biểu thức phụ thuộc thời gian t của:

a. cường độ dòng điện chạy qua cuộn dây.

b. điện tích $q_1$ trên bản nối với A của tụ điện $C_1$.

2. Sau đó đóng $K_2$. Gọi $T_0$ là chu kì dao động riêng của mạch $LC_1$ và $q_2$ là điện tích trên bản nối với $K_2$ của tụ điện $C_2$. Hãy tìm biểu thức phụ thuộc thời gian t của cường độ dòng điện chạy qua cuộn dây và của $q_2$ trong hai trường hợp:

a. Khoá $K_2$ được đóng ở thời điểm $t_1 = \frac{3T_0}{4}$

b. Khoá $K_2$ được đóng ở thời điểm $t_2 = T_0$.

3. Tính năng lượng điện từ của mạch điện ngay trước và ngay sau thời điểm $t_2$ theo các giả thiết ở câu 2b. Hiện tượng vật lí nào xảy ra trong quá trình này?

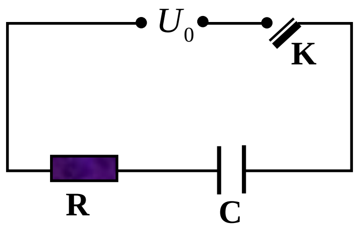
ĐS: 1a. i=$U_0\sqrt{\frac{C}{L}}\sin\frac{t}{\sqrt{LC}}$ ;1b. q(t)= $CU_0\cos\frac{t}{\sqrt{LC}}$ .

2a. $i_1$=-$U_0\sqrt{\frac{C}{L}}\cos\left(\frac{t}{\sqrt{2LC}}-\frac{3\sqrt{2}\pi}{4}\right)$; q' = $\frac{CU_0}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{2LC}}-\frac{3\sqrt{2}\pi}{4}\right)$

2b. $i_2=U_0\sqrt{\frac{C}{2L}}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{2LC}}-\sqrt{2}\pi\right)$; $q_2=\frac{CU_0}{2}\cos\left(\frac{t}{\sqrt{2LC}}-\sqrt{2}\pi\right)$.

3. Làm giảm năng lượng điện từ giá trị $\frac{Q_0^2}{2C}$ đến $\frac{Q_0^2}{4C}$.

**Bài 6.** Cho mạch điện như hình vẽ, ban đầu tụ chưa được tích điện. $R=10^3\Omega; C=1\mu F$, điện áp nguồn $U_0=10V$. Tại t = 0, người ta đóng khóa K. Biết rằng ở thời điểm t, điện áp giữa hai bản tụ có biểu thức $u=U_0\left(1-e^{-t/\tau}\right)$, trong đó $\tau=RC$ gọi là hằng số thời gian.



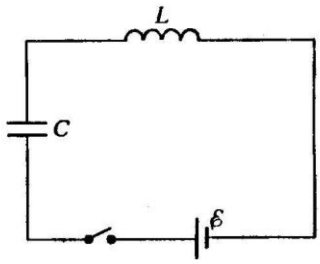

a. Tìm đơn vị của $\tau$.

b. Xác định hiệu điện thế hai bản tụ sau $10^{-3}s; 5.10^{-3}s; 10^{-2}s$.

c. Sau bao lâu thì điện áp tụ bằng $U_0/2$.

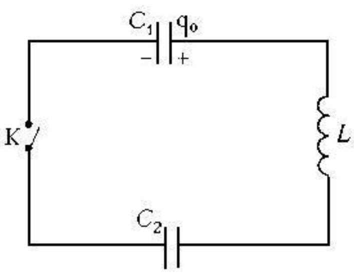
ĐS: a. giây; b. $u\approx 6,3V$ ; $u\approx 9,93V$ ; $u\approx 9,9995V$ ; c. $t=\tau\ln 2=0,693.10^{-3}s$

**Bài 7.** Tại thời điểm t = 0 người ta mắc một nguồn điện một chiều có suất điện động. E điện trở trong nhỏ không đáng kể vào mạch LC (H.2). Xác định sự phụ thuộc của hiệu điện thế $u_C$ trên tụ vào thời gian.




ĐS: $u_C(t)$ = E (1- cos $\frac{1}{\sqrt{LC}}$ t)

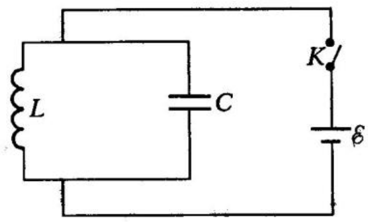
**Bài 8.** Trong mạch dao động LC trên hình 4, khi khóa K ngắt, điện tích trên tụ thứ nhất có điện dung $C_1$ bằng $q_0$, còn tụ thứ hai có điện dung $C_2$ không tích điện. Hỏi bao lâu sau khi khoá K đóng điện tích trên tụ $C_2$ đạt giá trị cực đại? Bỏ qua điện trở thuần của mạch.




Hình 4

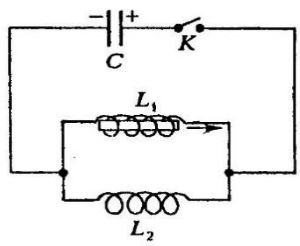
ĐS: $t_1=\pi/\omega_0$

**Bài 9.** Trong mạch điện trên hình, tại thời điểm ban đầu khoá K ngắt và tụ C không nạp điện. Sau đó cho khoá K đóng một thời gian rồi lại ngắt. Hãy xác định dòng điện qua cuộn cảm tại thời điểm ngắt khoá K, nếu sau khi ngắt hiệu điện thế trên tụ đạt cực đại bằng 2E với E là suất điện động của nguồn một chiều. Bỏ qua điện trở thuần của cuộn dây. Điện trở trong của nguồn nhỏ tới mức thời gian nạp điện cho tụ nhỏ hơn rất nhiều so với thời gian đóng của khoá K.



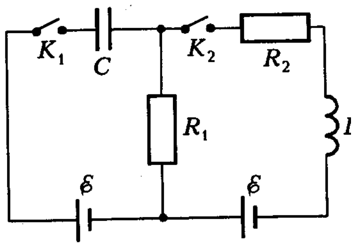

ĐS: t₁= π/ω₀, $I_0 = \sqrt{3}EC\omega_0 = E\sqrt{3\frac{C}{L}}$

**Bài 10.** Trong mạch điện trên hình 7, tụ có điện dung C đó được nạp điện tới một hiệu điện thế nào đó, còn khóa K thì ngắt. Sau khi đóng khoá K, trong mạch diễn ra các dao động tự do, trong đó biên độ dòng điện trong cuộn cảm $L_2$ bằng $I_0$. Khi dòng điện trong cuộn cảm $L_1$ đạt giá trị cực đại thì người ta rút nhanh lõi sắt ra (trong thời gian rất ngắn so với chu kỳ dao động) khiến cho độ tự cảm của nú giảm k lần. Tìm hiệu điện thế cực đại trên tụ điện sau khi lõi sắt đó được rút ra.



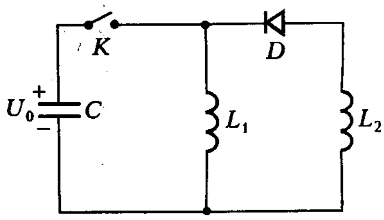

ĐS: $U_m = I_0\sqrt{\frac{L_2(L_1 + kL_2)}{CL_1}}$

**Bài 11.** Trong một sơ đồ điện mà các tham số của nó được trình bầy trên Hình 1, tại thời điểm ban đầu các khóa $K_1$ và $K_2$ để mở. Sau đó đóng khoá thứ nhất ($K_1$), cho đến khi hiệu điện thế (h.đ.t.) trên tụ điện đạt giá trị $U_0 = E/2$ thì đóng khoá thứ hai ($K_2$). Hãy xác định hiệu điện thế trên cuộn cảm ngay sau khi đóng khoá thứ 2 và hiệu điện thế trên tụ điện đối với chế độ đã được thiết lập. Bỏ qua điện trở trong của nguồn.



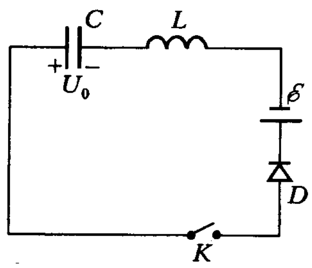

ĐS: $U_L = \frac{3}{2}E$; $U_c = \frac{(2R_1 + R_2)E}{R_1 + R_2}$.

**Bài 12.** Trong sơ đồ được biểu diễn trên hình, các cuộn cảm$L_1$ và $L_2$ được nối với nhau qua một điôt lý tưởng D. Tại thời điểm ban đầu khoá K mở, còn tụ điện với điện dung C được tích điện đến hiệu điện thế $U_0$. Sau khi đóng khoá một thời gian, hiệu điện thế trên tụ điện trở nên bằng không. Hãy tìm dòng điện chạy qua cuộn cảm $L_1$ tại thời điểm đó. Sau đó tụ điện được tích điện lại đến một hiệu điện thế cực đại nào đó. Xác định hiệu điện thế cực đại đó.



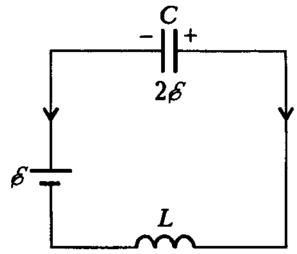

**ĐS:** $I_L = U_0\sqrt{\frac{C}{L_1}}$; $U_m = U_0\sqrt{\frac{L_2}{L_1+L_2}}$.

**Bài 13.** Khi khoá K đóng (Hình vẽ) tụ điện với điện dung $C = 20\mu F$ được tích điện đến hiệu điện thế $U_0 = 12V$, suất điện động. của nguồn (ăcqui) $E = 5V$, độ tự cảm của cuộn dây $L = 2H$, D là một điôt lý tưởng. Hãy cho biết dòng điện cực đại trong mạch sau khi đóng khoá K bằng bao nhiêu? Hiệu điện thế . của tụ điện sau khi đóng khoá K bằng bao nhiêu ?



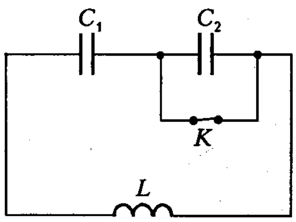

ĐS: $I_m = (U_0 - E)\sqrt{\dfrac{C}{L}} \approx 0{,}022\,A; U_K = 2E - U_0 = -2V$

**Bài 14.** Mắc nối tiếp một tụ điện (điện dung C) chưa tích điện với một nguồn điện (suất điện động E) và một cuộn cảm (độ tự cảm L). Trong mạch xuất hiện các dao động của dòng. Tại thời điểm khi dòng trở nên bằng không, ta ngắt tụ điện khỏi sơ đồ rồi lại nối vào với đầu vào và đầu ra đảo ngược lại. Hỏi dòng điện cực đại chạy trong mạch sau việc làm đó bằng bao nhiêu ? Bỏ qua điện trở trong của nguồn.




ĐS: $I_{m2} = 3E\sqrt{\dfrac{C}{L}}$

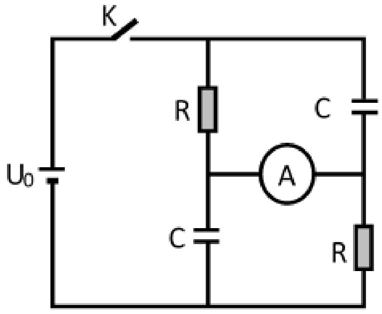
**Bài 15.** Trong mạch dao động được mô tả trên Hình 5 xuất hiện các dao động tự do khi khoá K đóng. Tại thời điểm hiệu điện thế trong tụ điện với điện dung $C_1$ đạt giá trị cực đại $U_0$, ta mở khoá K. Hãy xác định giá trị của dòng điện trong mạch, khi hiệu điện thế của tụ điện với điện dung $C_1$ sẽ bằng không với điều kiện $C_2 > C_1$.



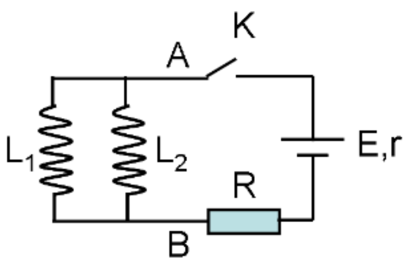

ĐS: $I_K = U_0\sqrt{\dfrac{C_1(C_2 - C_1)}{C_2 L}}$ .

**Bài 16.** Cho mạch điện như hình vẽ bên. Biết R=100Ω, C=10μF, $U_0$=10V. Khoá K đóng trong thời gian $\Delta t_1 = 10^{-3}$s và khoá K mở trong thời gian $\Delta t_2 = 20.10^{-3}$s. Với chế độ đóng ngắt tuần hoàn như trên, kim ampe kế gần như không rung. Hãy tính số chỉ của ampe kế. Điện trở trong của nguồn điện và điện trở của ampe kế không đáng kể.

ĐS: $I_A = \dfrac{U_0}{2R}\left(\dfrac{\Delta t_1 + RC}{\Delta t_1 + \Delta t_2}\right) = 4{,}8mA$




**Bài 17.** Quá trình quá độ của dòng điện trong mạch có cuộn cảm: Cho mạch điện như hình vẽ. Các cuộn dây thuần cảm có độ tự cảm $L_1$ và $L_2$; nguồn điện có suất điện động E, điện trở trong r, điện trở ngoài có giá trị R. Ban đầu K mở. Tính cường độ dòng điện qua R, qua $L_1$ và $L_2$ khi K đóng.



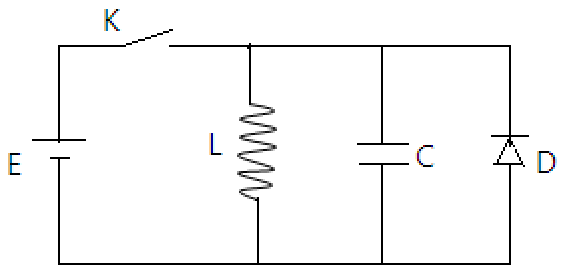

ĐS:Dòng qua R theo thời gian $i = \dfrac{E}{R+r}\left(1 - e^{-\frac{(r+R)(L_1+L_2)}{L_1 L_2}t}\right)$

Sau thời gian dài, dòng qua cuộn $L_1$,$L_2$ lần lượt
$i_1 = \frac{L_2}{L_1+L_2} i = \frac{L_2}{L_1+L_2}\frac{E}{R+r}$; $\quad i_2 = \frac{L_1}{L_1+L_2} i = \frac{L_1}{L_1+L_2}\frac{E}{R+r}$

**Bài 18.** Cho mạch điện như hình vẽ. Khoá K đóng trong thời gian τ rồi mở.

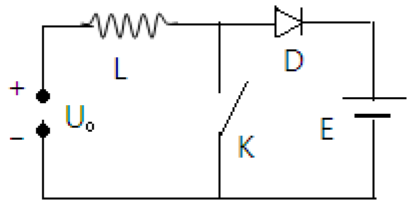
a) Sau bao lâu tính theo τ kể từ khi ngắt K, dòng điện qua cuộn cảm đạt giá trị cực đại, biết giá trị cực đại đó gấp hai lần cường độ dòng điện lúc bắt đầu ngắt khoá K.

b) Vẽ đồ thị sự phụ thuộc cường độ dòng điện qua cuộn cảm theo thời gian. Lấy t = 0 lúc ngắt K. Điốt D lí tưởng.




ĐS: a. $t = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}\tau$.

**Bài 19.** Để nạp điện cho một bình ắcquy có suất điện động E = 12V bằng một hiệu điện thế không đổi $U_0$ = 5V, người ta lắp một mạch điện như hình vẽ gồm một cuộn dây có độ tự cảm L = 0,1H, một điốt lý tưởng D và một cái ngắt điện K đóng ngắt tuần hoàn sau những khoảng thời gian như nhau $\tau_1 = \tau_2$ = 0,1s. Bằng cách đó, sau thời gian bao lâu có thể nạp được cho ắcquy một điện lượng là q = 0,1Ah? Bỏ qua sự hao phí do điện trở thuần.

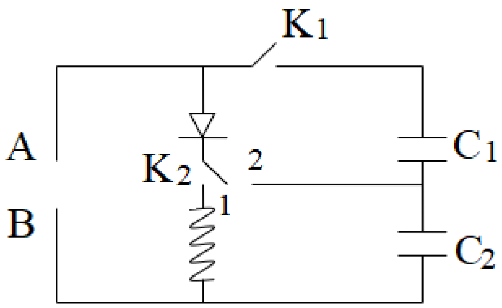



ĐS: $T = \frac{2qL(E-U_0)(\tau_1+\tau_2)}{U_0^2\tau_1^2}$ = 22,4(h)

**Bài 20.** Cho mạch điện như hình vẽ; Đ là một điôt lí tưởng, hai tụ có điện dung $C_1$ và $C_2$. $u_{AB} = U_o\cos\omega t$.

a.Tại t=0: $k_1$ mở; $k_2$ đóng vào chốt 1. Hãy viết biểu thức i qua L? Vẽ đồ thị i(t)? Tính $I_{Lmax}$?

b.Tại t=0: $k_1$ đóng; $k_2$ đóng vào chốt 2. Tìm biểu thức hiệu điện thế trên các tụ và vẽ đồ thị theo thời gian của các hđt đó?




ĐS: a. $0 \le t \le \frac{T}{2}$: $\quad i=\frac{U_o}{L\omega}\sin\omega t$

+ $t = \frac{T}{2}$: $\quad$ i=0.

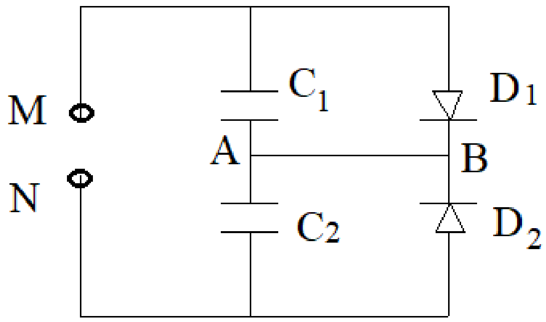
+ $\frac{T}{2} \le t \le \frac{3T}{4}$: $\quad$ i=0

+ $t \ge \frac{3T}{4}$: $\quad i = \frac{U_o}{L\omega}\sin\omega t + \frac{U_o}{L\omega}$; $\quad I_{max} = 2\frac{U_o}{L\omega}$

Sau đó quá trình lặp lại.

b. $u_{MA} = \frac{C_2U_0}{C_1+C_2}(1-\cos\omega t)$; $\quad u_{MB} = \frac{C_1U_0}{C_1+C_2}(\cos\omega t + \frac{C_2}{C_1})$

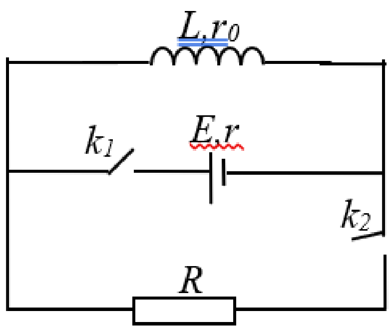
**Bài 21.** Cho mạch điện như hình vẽ, các điôt lí tưởng, $C_2>C_1$; $u_{MN}=U_o\cos\omega t$. Lập biểu thức $u_{C1}$ và $u_{C2}$.




**ĐS:**

$$u_{AM}=\frac{C_2U_0}{C_1+C_2}(1-\cos\omega t);u_{AN}=\frac{C_2U_0}{C_1+C_2}(1+\frac{C_1}{C_1}\cos\omega t)$$

**Bài 22.** Cho mạch điện như hình 2: nguồn điện có suất điện động E, điện trở trong r ; cuộn cảm có điện trở $r_0$ và độ tự cảm L ; điện trở $R=r=r_0=R_0$ .

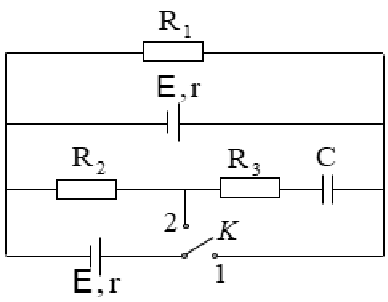



**1**) Lúc đầu $k_1$ mở, $k_2$ đóng. Tìm cường độ dòng điện qua nguồn, qua cuộn cảm và qua điện trở nếu ngay sau đó ta đóng $k_1$. Cường độ các dòng điện này bằng bao nhiêu khi mạch đã đạt trạng thái ổn định?

**2**) Lúc đầu $k_1$ và $k_2$ đều đóng. Nếu sau đó ta ngắt $k_1$. Tính điện lượng dịch chuyển qua cuộn dây khi mạch đã đạt trạng thái ổn định. Hãy chứng tỏ năng lượng từ trường của cuộn cảm đã chuyển hoá thành nhiệt trên các điện trở.

ĐS: 1. Sau khi mạch đã ổn định thì: $I_E=\frac{2E}{3R_0}$ và $I_L=I_R=\frac{E}{3R_0}$ .

**Bài 23.** Cho mạch điện gồm hai nguồn điện giống nhau có suất điện động E = 3 V, điện trở trong r = 1 Ω; $R_1$ = 2 Ω; $R_2$ = 5 Ω; $R_3$ = 1 Ω; C = 10 μF (Hình 2). Bỏ qua điện trở dây nối và khóa K.




a. Đóng khóa K vào chốt 1. Tính cường độ dòng điện qua $R_1$ và điện tích của tụ C khi dòng điện đã ổn định.

b. Đảo khóa K từ chốt 1 sang chốt 2. Tính tổng điện lượng chuyển qua điện trở $R_3$ kể từ khi đảo khóa K.

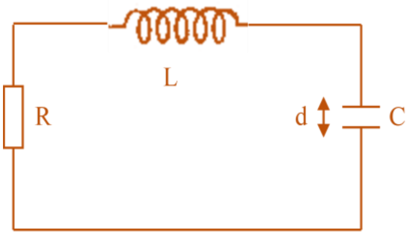
c. Ngắt khóa K, thay tụ điện C bằng một cuộn dây có độ tự cảm L = 50 mH. Đóng khóa K vào chốt 1 thì cường độ dòng điện qua cuộn dây tăng dần. Tính tốc độ biến thiên cường độ dòng điện qua cuộn dây tại thời điểm dòng điện đó có cường độ bằng 0,35 A. Bỏ qua điện trở của cuộn dây.

ĐS: a. $I_1$ = 1,2 A; $q_1$ = 24 μC; b. 29 μC; c. $\frac{\Delta I}{\Delta t}=3,2$ A/s.

**Bài 24.** Cho mạch dao động điện từ như hình :

$$L=\frac{\pi}{4}H,\ C=\frac{10^{-4}}{\pi}F, R=5\Omega.$$

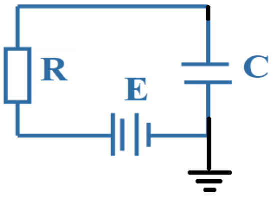
Do mạch có điện tử thuần R nên dao động tắt dần. để duy trì dao động người ta làm như sau : vào thời điểm tụ điện tích điện cực đại, người ta thay đổi khoảng cách 2 bản tụ 1 lượng Δd ; và khi điện tích của tụ bằng không thì đưa các bản tụ về vị trí ban đầu cách nhau khoảng d. Cho rằng thời gian để thay đổi khoảng cách giữa 2 bản tụ là rất nhỏ so với chu kỳ dao động. Hãy xác định độ biến thiên tương đối $\frac{\Delta d}{d}$ để dao động được duy trì.




ĐS: $\frac{\Delta d}{d} \geq 10\%$

**Bài 25.** Một tụ phẳng không khí có tiết diện là S = 2($cm^2$) và khoảng cách giữa hai bản tụ là

$d_0$ = 0,002(cm). Một bản cực nối đất, bản còn lại được nối với điện trở thuần R = 10(MΩ) và vào pin có suất điện động E = 90(V) như hình vẽ.




**1.** Sau thời gian đủ dài, tách bản trên khỏi điện trở và cho nó dao động sao cho khoảng cách giữa hai bản biến thiên điều hòa hình sin, tần số $f$ = 1000(Hz); biên độ A = $2.10^{-5}$(cm); điện thế của bản cực trên có thể viết gần đúng bằng tổng các điện thế không đổi $V_0$ và điện thế tuần hoàn Vsinωt. Xác định $V_0$, V.

**2.** Giả sử các bản tụ vẫn được nối như hình vẽ và khoảng cách hai bản biến thiên như trên thì dòng trong mạch là i = $I_0$.sin(ωt + φ).

a.Xác định $I_0$ và φ lúc này.

b.Tụ mắc như trên làm micrô điện dung. Tính hiệu điện thế xoay chiều ở hai đầu R.

**c.** Người ta gọi giới hạn tần số thấp là $f_0$(t) khi tín hiệu còn 0,7 tín hiệu khi tần số rất cao. Hãy xác định $f_0$. Cho biết $\varepsilon_0 = 8,85.10^{-12}(C^2/Nm^2)$.

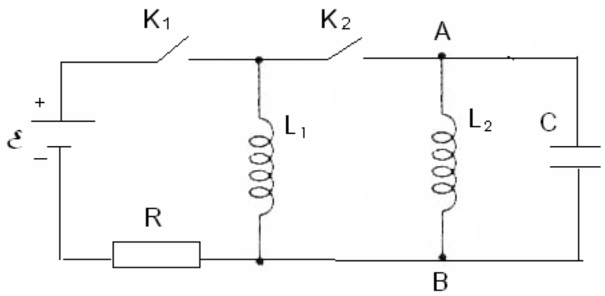
ĐS: 1. $V_0 = E = 90(V)$; $V = \frac{A}{d_0}E = 0,9(V)$

2a. $I_0 = \frac{EA}{R.d_0} = 9.10^{-7}(A)$; $\phi = \pi(rad)$

2b. $u_R = 0,9\sin(2000\pi t + \pi)$ (V);(Với ω = 2π$f$)

2c. $f_0 = 176(Hz)$

**Bài 26.** Cho mạch điện như hình vẽ:Một điện trở thuần R,một tụ điện C,hai cuộn cảm lí tưởng $L_1$ = 2L, $L_2$ = L và các khóa $K_1$,$K_2$ ($R_K$ = 0) được mắc vào một nguồn điện không đổi (có suất điện động ε,điện trở trong r = 0).Ban đầu $K_1$ đóng, $K_2$ ngắt. Sau khi dòng điện trong mạch ổn định, người ta đóng $K_2$, ngắt $K_1$. Tính hiệu điện thế cực đại ở tụ và $I_{L2}$ max. ?

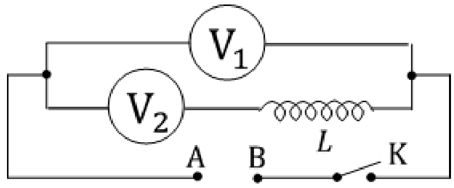



ĐS: $U_0 = \frac{\varepsilon}{R}\sqrt{\frac{2L}{3C}}$ ; $I_{2max} = \frac{4\varepsilon}{3R}$

**Bài 27.** Cho mạch điện như hình 1, biết rằng sau khi đóng khóa K một khoảng thời gian đủ dài cả hai Vôn kế đều chỉ giá trị $U_0$. Khoảng thời gian tính từ lúc đóng K đến khi $V_2$ chỉ giá trị $U_0/2$ là $\tau$. Biết rằng điện trở của hai Vôn kế lần lượt là $R_{V_1} = R_1$, $R_{V_2} = R_2$, hiệu điện thế giữa hai điểm A và B luôn không đổi, cuộn dây có điện trở không đáng kể.

1.Tính độ tự cảm L của cuộn dây.

2.Tại thời điểm $t = 0$, khi khóa K đang đóng và hai Vôn kế đều chỉ giá trị $U_0$ người ta đột ngột ngắt K. Tìm số chỉ các Vôn kế tại thời điểm t.



hình 1

ĐS: 1. $L = \frac{R_2\tau}{\ln 2}$; 2. $u_{V_{1hd}} = -\frac{R_1}{R_2}U_0 e^{-\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)\frac{t}{\tau}\ln 2}$; $u_{V_{2hd}} = U_0 e^{-\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)\frac{t}{\tau}\ln 2}$

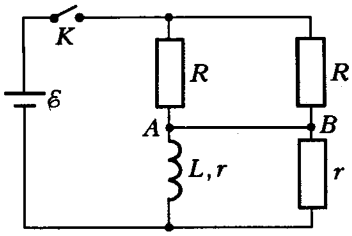
**Bài 28.** Một tụ điện phẳng có 2 bản cực hình vuông , cạnh a = 30 cm đặt cách nhau một khoảng d = 4 mm , nhúng trong thùng dầu cách điện có hằng số điện môi ε = 2,4. Hai bản cực được nối với 2 cực của một nguồn điện có suất điện động E = 24V , điện trở trong không đáng kể , qua một điện trở R = 100Ω.

1. Hai bản cực của tụ thẳng đứng , chìm hoàn toàn trong dầu . Tính điện tích của tụ điện.
2. Bằng một vòi ở đáy thùng dầu , người ta tháo cho dầu chảy ra ngoài và mức dầu trong thùng hạ thấp dần đều với tốc độ v = 5 mm/s. Chọn gốc thời gian lúc mức dầu chạm mép trên hai bản cực của tụ . Viết công thức tính điện dung của tụ theo thời gian. Chứng minh rằng trong quá trình mức dầu hạ thấp xuống , qua điện trở R và nguồn điện E có một dòng điện . Xác định cường độ dòng điện ấy .

ĐS: 1. $Q = 11{,}52.10^{-9}$ (C); 2. $I=1{,}12 . 10^{-10}$ ( A)

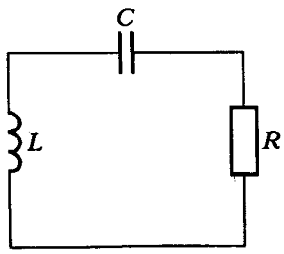
**Bài 29.** Trong sơ đồ trên hình vẽ, tại thời điểm ban đầu khoá K mở. Cuộn cảm với độ tự cảm L có điện trở thuần r. Hãy xác định điện lượng chạy qua dây nối AB sau khi khoá K đóng ? Bỏ qua điện trở trong của nguồn và điện trở của đoạn dây nối. Các tham số của mạch điện được chỉ ra trên hình vẽ.

ĐS: $Q = \frac{LE}{2r(R+r)}$



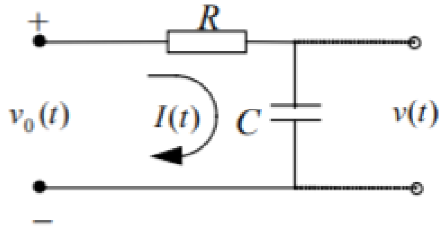

**Bài 30.** Để duy trì các dao động không tắt dần trong mạch với độ tắt dần nhỏ (Hình vẽ) người ta tăng nhanh độ tự cảm của cuộn dây (so với chu kỳ dao động trong mạch) một đại lượng nhỏ $\Delta L(\Delta L << L)$ mỗi lần khi dòng trong mạch bằng không, và sau thời gian bằng một phần tư chu kỳ dao động người ta lại chuyển nhanh nó về trạng thái ban đầu. Hãy xác định $\Delta L$, nếu $L = 0{,}15H$, $C = 1{,}5.10^{-7}F$, $R = 20\Omega$.

ĐS: $\Delta L \geq \pi R\sqrt{LC} \approx 9{,}4.10^{-3}H$.



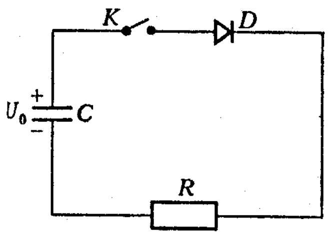

**Bài 31. Bộ lọc điện.**

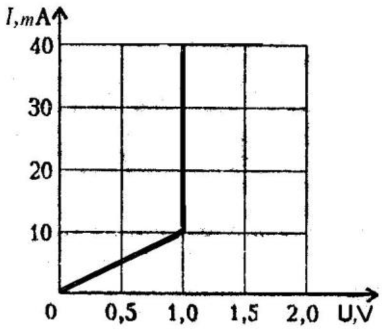
Xét mạng điện RC như hình vẽ, trong đó R là điện trở và C là điện dung. Giả sử $v_0(t)$ là điện thế cung cấp, $I(t)$ là dòng điện trong mạng và $v(t)$ là điện thế cho ra của bộ lọc. Bài toán đặt ra là hãy tính $v(t)$ khi biết $v_0(t)$.




**ĐS:** $v(t) = \alpha e^{-t/RC} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} C^*_k e^{i\omega_k t}$, với $C^*_k = \dfrac{C_k}{1+i\omega_k RC}$, trong đó hệ số Fourier $C_k$ của hàm $v_0(t)$ được tính theo công thức $C_k = 2\dfrac{v_0 \sin(\omega_k \tau/2)}{T\omega_k}$

**Bài 32.** Trong mạch điện trên hình 3, tụ điện có điện dung C = 100μF được tích điện đến $U_0$ = 5V và được nối điện trở R = 100Ω qua điôt D. Đường đặc trưng vôn-ampe của điôt như hình vẽ. Ở thời điểm ban đầu, khoá K mở. Sau đó đóng K. Xác định cường độ dòng điện trong mạch ngay sau khi đóng K. Tính h.đ.t trên tụ điện khi dòng điện trong mạch bằng 10mA. Tính lượng nhiệt toả ra trên điôt sau khi đóng khoá K.



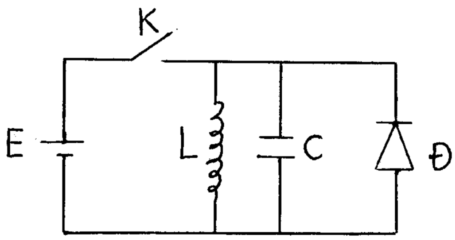




**ĐS:** $Q_d = 4.10^{-4}$J; I = 40mA

**Bài 33.** Cho mạch điện như hình vẽ, các đại lượng trên hình đã biết. Đ là điôt lý tưởng. Khoá K đóng trong thời gian τ rồi ngắt. Ở thời điểm khoá K ngắt, dòng điện trong cuộn cảm là $I_0$.

a) Sau bao lâu kể từ khi ngắt khóa K, dòng điện trong cuộn cảm đạt giá trị cực đại, biết giá trị đó bằng $2I_0$.

b) Vẽ đồ thị biểu diễn sự phụ thuộc của cường độ dòng điện qua cuộn cảm vào thời gian (lấy t = 0 lúc ngắt khóa K).

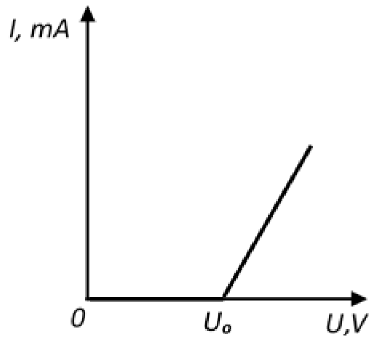



ĐS: a. $t = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}\tau \approx 1{,}814\tau$.

b. Khi $0 < t < \frac{\pi\sqrt{3}}{3}\tau$, thì $i_L = 2I_0\omega\cos(\omega t - \pi/3)$

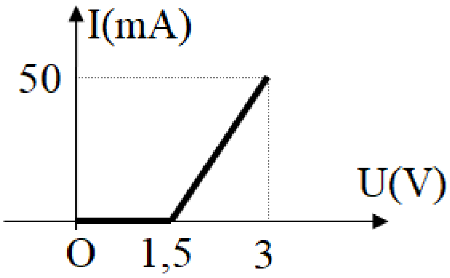
+ Khi $t > \frac{\pi\sqrt{3}}{3}\tau$, thì dòng điện không đổi, chỉ đi qua cuộn cảm và điôt Đ.

**Bài 34.** Trên hình là đường đặc trưng vôn-ampe của một phần tử phi tuyến nào đó. Trước điện ỏp $U_0$ = 100V, khụng có dòng điện đi qua phần tử này, nhưng sau đó cường độ dòng điện tăng tuyến tính theo hiệu điện thế (h.đ.t.). Khi mắc phần tử này vào một nguồn điện có suất điện động không đổi và điện trở trong r = 25Ω thì cường độ dóng điện đi qua nó là $I_1$ = 2mA, nhưng khi mắc nó với cùng nguồn điện đó nhưng qua một tải có điện trở R = r thì dòng qua nó là $I_2$ = 1mA. Hãy xác định suất điện động của nguồn điện.

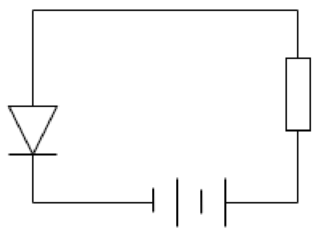



**ĐS:** E = 150V.

**Bài 35.** Một LED (điốt phát quang) có đường đặc trưng V-A cho bởi H1. Nó được mắc vào mạch điện như ở H2. R=100Ω, nguồn có E=3V; r=0.
Hãy tính cường độ dòng điện I; hiệu điện thế đặt vào LED và hiệu suất của LED?




Hình 1



Hình 2

ĐS: I = 0,0115 (A); $U_L$ = 1,85 (V); H = 81%

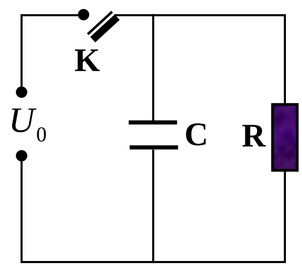
**Bài 36.** Cho mạch điện như hình vẽ. $R=10^3\Omega; C=1\mu F$, điện áp nguồn $U_0=10V$. Tại t = 0, người ta mở khóa K. Biết rằng ở thời điểm t, điện áp giữa hai bản tụ có biểu thức $u=U_0e^{-t/\tau}$, trong đó $\tau=RC$ gọi là hằng số thời gian.

a. Xác định hiệu điện thế hai bản tụ sau $5.10^{-3}s; 10^{-2}s$.

b. Sau bao lâu thì điện áp tụ bằng $U_0/2$.

c. Sau bao lâu thì điện áp tụ giảm đi e lần.

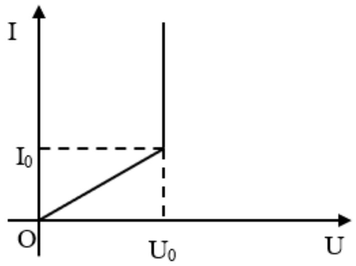
ĐS: a. 0,0679V; 0,000468V; b. 0,693.$10^{-3}$s; c. $10^{-3}$s.

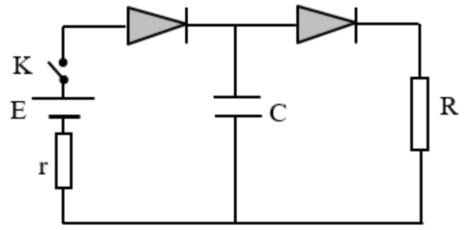



**Bài 37.** Hai điốt không lí tưởng giống nhau có đường đặc trưng Vôn-Ampe như hình 3 được mắc vào mạch điện như hình 4. Cho biết R = 16Ω, r = 4Ω, nguồn điện lý tưởng có suất điện động là E = 4V, điện dung của tụ là C = 100μF. Các tham số trên đường đặc trưng Vôn-Ampe của điốt: $U_0$ = 1V, $I_0$ = 50mA.

**1.** Đóng khoá K, hỏi tụ điện nạp đến hiệu điện thế bằng bao nhiêu.

**2.** Sau khi nạp cho tụ, mở khoá K. Tính nhiệt lượng toả ra trên R và trên mỗi điốt.



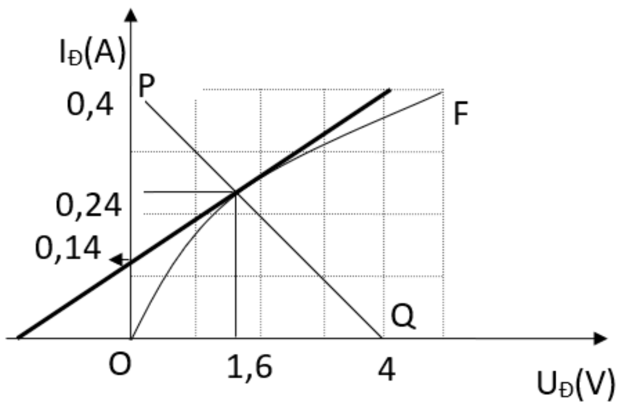

ĐS: 1. 2,6V;
2. Vậy nhiệt lương toả ra trên R là: $16{,}8.10^{-5}$(J), trên điốt bên phải là: $17.10^{-5}$(J). Không có nhiệt lượng toả ra trên điốt bên trái.

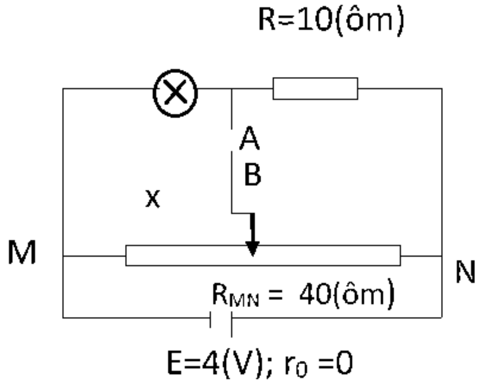
**Bài 38.** Cho đặc tuyến V-A của một bóng đèn là đường cong OF như h.vẽ1. Người ta mắc nó vào mạch điện như H2.

1) Tính cường độ dòng điện chạy qua đèn
2) Xác định x để:

+ $U_{AB}$= 0

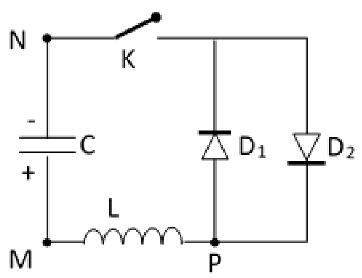
+ $U_{AB}$ hầu như không thay đổi khi suất điện động E biến thiên xung quanh giá trị 4V?



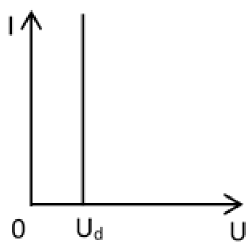




**ĐS: 1.** $I_Đ$=0,24A; 2a. x $=16\,(\Omega)$ **; 2b.** x $\approx 24\,(\Omega)$

**Bài 39.** Cho mạch điện như hình vẽ, một mạch dao động gồm một tụ điện, một cuộn dây thuần cảm, hai điôt giống nhau, khoá K và các dây nối. Tích của giá trị điện dung C của tụ điện và độ tự cảm L của cuộn dây không đổi và bằng $1/\omega^2$. Đường đặc trưng vôn-ampe của các điôt $D_1$ và $D_2$ được cho ở hình 3, với $U_d$ là hiệu điện thế ngưỡng của điôt. Bỏ qua điện trở của khoá K và các dây nối. Lúc đầu khoá K mở và tụ điện được tích điện đến hiệu điện thế $U_0 = (6 + k)U_d$, với k là một số không đổi (0 < k < 1). Ở thời điểm t = 0 khoá K được đóng.




Hình 2




Hình 3

1. Viết biểu thức biểu diễn sự biến đổi của hiệu điện thế $u_{MN}$ theo thời gian.

2. Vẽ đồ thị của hàm số $u_{MN}(t)$ với các giá trị ω = 2000 rad/s, $U_d$ = 0,7 V, $U_0$ = 4,5 V.

ĐS: 1. $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

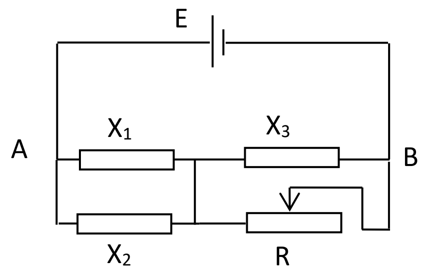
+ Trong khoảng $0 \le t \le t_1 = \pi/\omega$, $u_{MN} = u_1 = U_d + (U_0 - U_d)\cos\omega t$.

+ Trong khoảng $t_1 = \pi/\omega \le t \le t_2 = 2\pi/\omega$, $u_{MN} = u_2 = -U_d + (U_0 - 3U_d)\cos\omega t$

+ Trong khoảng $t_2 = \pi/\omega \le t \le t_3 = 3\pi/\omega$ , $u_{MN} = u_3 = U_d + (U_0 - 5U_d)\cos\omega t$.

+khi $t \ge t_3 = 3\pi/\omega$ thì cả hai điôt đều ngắt, lúc đó $u_{MN} = -kU_d = \text{const}$

**Bài 40.** Trong sơ đồ bên $X_1, X_2, X_3$ là các dụng cụ phi tuyến giống nhau, cường độ dòng điện $I$ qua mỗi dụng cụ phụ thuộc vào hiệu điện thế U giữa hai cực của nó theo quy luật: $I = kU^2$, $k$ là hằng số. Nguồn điện có suất điện động $E$, điện trở trong không đáng kể. $R$ là một biến trở.

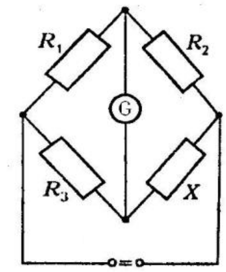



a. Phải điều chỉnh cho biến trở có giá trị bằng bao nhiêu để công suất toả nhiệt trên biến trở đạt cực đại ?

b. Tháo bỏ $X_3$. Với một giá trị $R$ xác định, cường độ dòng điện qua đoạn mạch AB phụ thuộc vào hiệu điện thế $U_{AB}$ như thế nào?

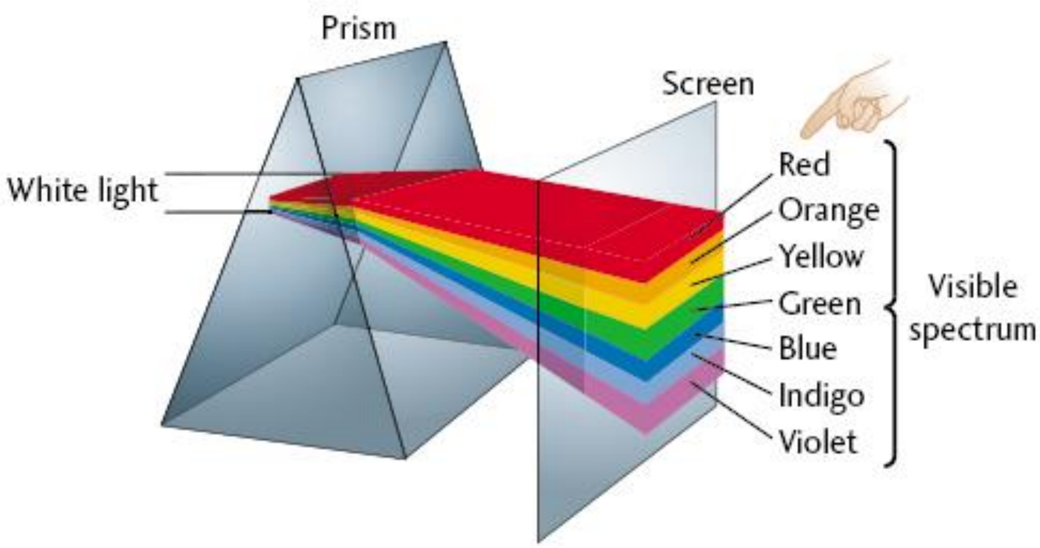
ĐS: a. $R = \frac{U}{2k(E-U)^2 - kU^2} \approx \frac{0,29}{kE}$; b. $I = \frac{(1+\sqrt{1+8kRE})^2}{2R}$

**Bài 41.** Cho một mạch điện như hình 2, X là một phần tử phi tuyến mà cường độ dòng điện đi qua nó phụ thuộc h.đ.t. hai đầu phần tử theo công thức:$I_X = \alpha U_X^3$ với $\alpha = 0,25 A/V^3$. Hãy tính cụng suất toả ra trên X, khi dòng qua điện kế G bằng không. Biết rằng $R_1$= 2Ω, $R_2$=4Ω và $R_3$=1Ω.




**ĐS:** $P_X$ = 1W.

# CHƯƠNG IX.
# TÍNH CHẤT SÓNG ÁNH SÁNG




# IX.1 TÁN SẮC ÁNH SÁNG

**Bài 1.** Lăng kính của một máy quang phổ có góc chiết quang $A=60^0$ được làm bằng flin (một loại thuỷ tinh quang học) có chiết suất như sau:

Với $\lambda_1 = 656$ nm $\quad n_1 = 1,608$

$\lambda_2 = 546$ nm $\quad n_2 = 1,617$

$\lambda_3 = 434$ nm $\quad n_3 = 1,635$

a. Lăng kính được đặt ở độ lệch cực tiểu đối với bức xạ $\lambda_2$. Tính góc tới i và góc lệch D của tia sáng.

b. Thấu kính trực chuẩn và thấu kính buồng tối đều có tiêu cự f = 50 cm, dùng đạo hàm $\frac{dD}{dn}$, hãy tính góc lệch đối với các bức xạ $\lambda_2$, $\lambda_3$ và khoảng cách giữa ba vạch quang phổ $\lambda_1$, $\lambda_2$ và $\lambda_3$.

c. Nếu, từ vị trí trên của 3 lăng kính, ta tăng góc tới i một chút, thì vị trí và khoảng cách của 3 quang phổ trên thay đổi thế nào?

ĐS: a. $D_m = 47^o54', i = 53^o57'$.

b. Góc lệch ứng với hai bức xạ $\lambda_1$ và $\lambda_3$ lần lượt là:

$$D_1 = 47^o54' - 0^o52'36'' = 47^o1'24''$$

$$D_2 = 47^o54' + 1^o45'12'' = 49^o39'12''$$

Khoảng cách giữa hai vạch $\lambda_1$ và $\lambda_2$ là: $d_{1,2} = 7,645$ mm.

Khoảng cách giữa hai vạch $\lambda_2$ và $\lambda_3$ là: $d_{2,3} = 15,290$ mm

**Bài 2.** Một lăng kính crao (lăng kính thuỷ tinh quang học thông dụng) có góc chiết quang $A = \frac{1}{20}$ rad và có các chiết suất:

$n_C = 1,524$ với $\lambda_C = 656$ nm

$n_P = 1,532$ với $\lambda_F = 434$ nm

Một tia sáng trắng rọi vào một mặt bên của lăng kính dưới góc tới i nhỏ.

a) Tính góc lệch của hai tia ló, ứng với hai bức xạ C và F.

b) Người ta ghép lăng kính này với một lăng kính flin, có các chiết suất $n_C$ = 1,780 và $n_F$ = 1,810. Tính góc $A'$ của lăng kính này để hai tia C và F sau khi đi qua hệ hai lăng kính trở thành song song. Tính góc lệch D của tia sáng trong trường hợp đó.

ĐS: a. $\Delta D = D_F - D_C \approx 1'20''$; b. $A' = \frac{1}{75}$ rad, D= $158.10^{-4}$ rad

**Bài 3.** Một thấu kính hai mặt lồi, cùng bán kính cong R = 30 cm bằng crao có các chiết suất:

Với $\lambda_C$ = 656 nm $n_C$ = 1,524

$\lambda_F$ = 434 nm $n_P$ = 1,532

a) Tính khoảng cách $F_FF_C$ giữa hai tiêu điểm $F_F$ và $F_C$ của thấu kính ứng với hai bức xạ F và C.

b) Thấu kính này được ghép sát với một thấu kính hai mặt lõm cùng bán kính $R'$ bằng flin, có chiết suất $n_C$ = 1,780 và $n_F$ = 1,810 sao cho hai tiêu điểm của hệ đối với hai bức xạ F và C trùng nhau. Tính $R'$ và tiêu cự f của hệ.

ĐS: a. $F_CF_F$ = 0,431 cm; b. R' = 112,5; f≈ 139 cm

**Bài 4.** Một thấu kính hai mặt lồi, cùng bán kính cong R, bằng crao, có chiết suất được tính theo công thức:

$n_1 = a_1 + \frac{b_1}{\lambda^2}$ với $a_1$ = 1,5; $b_1 = \frac{1}{200}$ và $\lambda$ tính bằng micrômét.

a) Tiêu cự của thấu kính, đối với bức xạ $\lambda$ = 0,55 $\mu m$ là 30 cm. Tính R và tiêu cự của thấu kính với các bức xạ $\lambda_1$ = 0,65 $\mu m$, $\lambda_2$ = 0,43 $\mu m$.

b) Thấu kính được dán với một thấu kính thứ hai bằng flin có chiết suất $n_2 = a_2 + \frac{b_2}{\lambda^2}$, với $a_2$ = 1,6l, $b_2 = \frac{1}{80}$. Để thấu kính ghép này trở thành tiêu sắc đối với $\lambda_1$ và $\lambda_2$ thì bán kính cong của mặt thứ hai của thấu kính flin phải bằng bao nhiêu? Tính tiêu cự của hệ đối với các bức xạ $\lambda, \lambda_1$ và $\lambda_2$.

ĐS: a. $R = 2(n-1).f \approx 31cm$; $f_1 = f\frac{(n-1)}{(n_1-1)} \approx 30,28$ cm; $f_2 = f\frac{(n-1)}{(n_2-1)} \approx 29,40$ cm.

b. $R_2'$ = 155 cm; Đối với hai bức xạ $\lambda_1$ và $\lambda_2$, tiêu cự của thấu kính ghép là $f' \approx 59,625$ cm

**Bài 5.** Một thấu kính tiêu sắc đối với hai bức xạ C và F (xem *bài 3*) có độ tụ D = 4 dp đối với bức xạ $\lambda_D = 0,589\mu m$, được tạo bởi một thấu kính crao dán với một thấu kính flin, các chiết suất của crao và flin lần lượt là:

$n_C$ = 1,524 $n_D$ = 1,528 $n_F$ = 1,532

$n'_C$ = 1,642 $n'_D$ = 1,652 $n'_F$ = 1,662

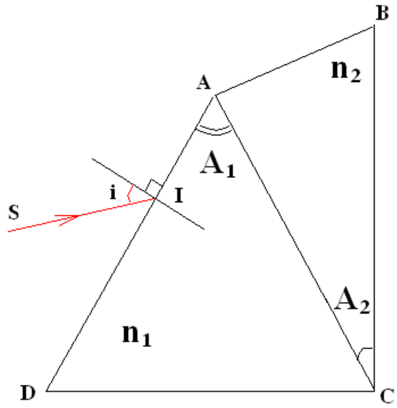
Biết rằng mặt tiếp xúc giữa hai thấu kính có bán kính cong bằng 1/3 bán kính của mặt kia của thấu kính crao. Hãy tính bán kính các mặt của mỗi thấu kính.

ĐS: Gọi $R_1$, $R_2$, $R_1'$, $R_2'$ là bán kính cong của các mặt hai thấu kính : $R_2 \approx 8,9\,cm$,
$R_1 = 3R_2 \approx 26,72$; $R_1' = -R_2 = -8,9cm$ cm; $R_2' = \approx 19,08$ cm.

**Bài 6.** *(Trích đề thi Olimpic Vật lý quốc tế năm 1983 tại Rumani).*

Hai lăng kính có góc ở đỉnh $A_1 = 60^0$, $A_2 = 30^0$ được ghép như trong hình bên (góc C = $90^0$), chiết suất của hai lăng kính là (công thức Côsi):

$$n_1 = a_1 + \frac{b_1}{\lambda^2}\ ;\ n_2 = a_2 + \frac{b_2}{\lambda^2}$$




trong đó $a_1 = 1,1$; $b_1 = 10^5 nm^2$ ; $a_2 = 1,3$ ; $b_2 = 5.10^4\ nm^2$

1. Tính bước sóng $\lambda_0$ của bức xạ tới, sao cho trên mặt AC không có khúc xạ (đi thẳng) với mọi góc tới i.
2. Vẽ (một cách định tính) đường đi qua hệ thống lăng kính của ba bức xạ có bước sóng $\lambda_{đỏ}$, $\lambda_0$, $\lambda_{tím}$ ứng với cùng một góc tới.
3. Tính góc lệch cực tiểu cho bức xạ $\lambda_0$.
4. Tính bước sóng của bức xạ đi tới theo phương song song với DC và có tia ló cũng song song với DC.

*ĐS: a.* $\lambda_0 = \sqrt{\dfrac{b_1 - b_2}{a_2 - a_1}}$ = 500 nm; 3. $\delta = 15^o40'$; 4. $\lambda = 1,2\mu m$.

**Bài 7**. (Chọn đội tuyển dự IPho 2010) Chiếu tia sáng trắng vào mặt bên của một lăng kính tam giác đều với góc tới $i = 45^0$. Do tán sắc, các tia sáng đơn sắc ló ra khỏi mặt bên thứ hai của lăn kính với các góc lệch khác nhau so với tia sáng trắng. Biết sự thay đổi chiết suất của lăng kính đối với các tia từ đỏ đến tím rất chậm, chiết suất đối với tia vàng là $n_v = 1,653$.

a.Tính góc lệch $D_v$ của tia màu vàng sau khi ló khỏi lăng kính.

b.Biết hai tia đơn sắc ló ra khỏi lăng kính hợp với nhau một góc $\Delta i'$ nhỏ. Tìm hiệu số chiết suất $\Delta n$ của lăng kính đối với hai tia đơn sắc này.

Áp dụng tính $\Delta n$ khi $\Delta i' = 2^0$

ĐS: a. $D_V = 55,12^0$; b. $\Delta n = 0,355\Delta i'$

**Bài 8. Năng suất tán sắc của một lăng kính**

Xét một lăng kính có góc chiết quang $A = 60^0$, chiếu lăng kính bằng chùm sáng trắng $(0,43\mu m \le \lambda \le 0,77\mu m)$ với góc tới $i = 60^0$ . Tính độ tán sắc (độ biến đổi của góc lệch của lăng kính ở hai bước sóng $\lambda = 0,77\mu m$ và $\lambda = 0,43\mu m$. Biết lăng kính chế tạo bằng thủy tinh crown với $n(0,43\mu m) = 1,528; \quad n(0,77\mu m) = 1,511$ .

ĐS: Độ tán sắc giữa hai bước sóng là: $\Delta D = 41^0 5 - 39^0 44' = 1^0 21'$

**Bài 9.** Chiếu tia sáng trắng vào mặt bên của lăng kính có thiết diện là tam giác đều với góc tới $i = 45^0$. Do tán sắc các tia sáng ló ra khỏi mặt bên thứ hai của lăng kính với góc lệch khác nhau so với tia tới. Biết sự thay đổi chiết suất của lăng kính đối với các tia từ đỏ đến tím rất chậm. Chiết suất của lăng kính với tia vàng là $n_v = 1,653$.

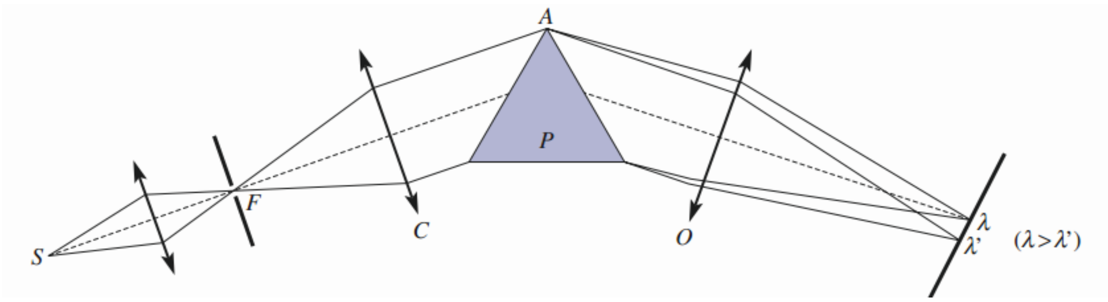
a) Tính góc lệch của vàng $(D_V)$ sau khi ló ra khỏi lăng kính.

b) Biết hai tia đơn sắc ló ra khỏi lăng kính hợp với nhau một góc $\Delta i'$ nhỏ (dưới $2^0$). Tìm hiệu số chiết suất $\Delta n$ của lăng kính đối với hai tia đơn sắc này. Áp dụng tính $\Delta n$ với $\Delta i' = 2^0$.

ĐS: a. $D_V = 55^0 7'$; b. $dn \approx 0,015$

**Bài 10. Khả năng phân giải một vạch kép:**

Trên hình vẽ là sơ đồ của máy quang phổ lăng kính. Biết chiết suất của lăng kính phụ thuộc vào bước sóng theo định luật CAUCHY $n = a + \dfrac{b}{\lambda^2}$ với $a = 1,652$ và $b = 1,50.10^{-2}\ \mu m^2$




a) Tính $\dfrac{dn}{d\lambda}$ tại giá trị $\lambda_0$

b) Cho $A = 60^0$ và $\lambda_0 = 0,6(\mu m)$. Tiêu cự thấu kính trong ống chuẩn trực là $f = 20(cm)$, tiêu cự vật kính trong buồng tối là $f' = 1(m)$ . Đã khắc phục hiện tượng sắc sai.

b1) Thiết lập hệ thức giữa góc lệch cực tiểu $D_{\min}$, góc A của lăng kính và chiết suất n đối với một bức xạ có bước sóng $\lambda$ cho trước. Tính $D_{\min}$ đối với vạch kép vàng của thủy ngân ứng với bước sóng $\lambda_1 = 577(nm); \lambda_2 = 579(nm)$;

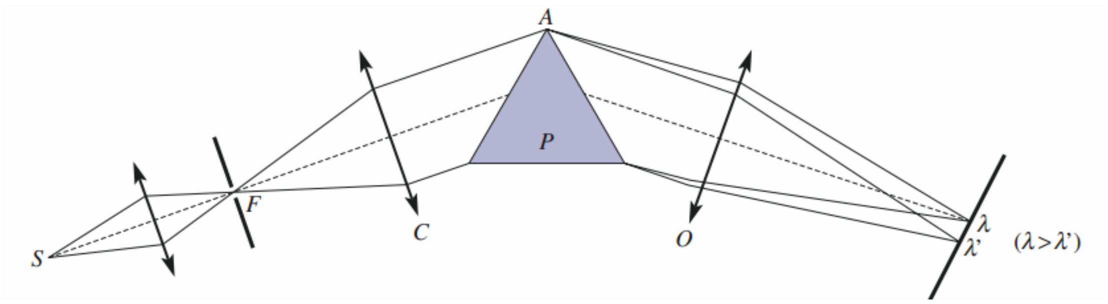
b2) Chứng minh rằng khi xảy ra góc lệch cực tiểu thì mỗi biến thiên nhỏ của bước sóng $d\lambda$ ứng với biến thiên của góc lệch $dD$ thỏa mãn: $\frac{dD}{d\lambda}=\frac{\sin A}{\cos\frac{A}{2}\cos\left(\frac{D_{\min}+A}{2}\right)}\left(-\frac{2b}{\lambda^3}\right)$

b3) Hỏi khoảng cách giữa hai vạch sáng tương ứng với bước sóng $\lambda_1,\lambda_2$ trên phim của buồng ảnh.

b4) Tính độ rộng cực đại mà khe của ống chuẩn trực để có thể tách vạch kép. Giả thiết không có giới hạn nào khác.

ĐS: a. $\left(\frac{dn}{d\lambda}\right)_{\lambda=\lambda_0}\approx 3.10^{-4}\ nm^{-1}$; b1. $D_{1\min}=56^0 6'$, $D_{2\min}=56^0 4'$; b3. $\Delta x\approx 0,590(mm)$; b4. $0,118(mm)$

**Bài 11.** Trong máy **quang phổ lăng kính,** khe hẹp F của ống chuẩn trực có độ rộng a và song song với cạnh bên của lăng kính. Cạnh đáy của lăng kính độ rộng là r, tiêu cự thấu kính C là $f_1'$, tiêu cự thấu kính O là $f'$. Ảnh của khe hẹp có bề rộng là a'




Cho nguồn đơn sắc S có bước sóng $\lambda$, chùm tia tới mặt bên của lăng kính có bề rộng L và cho góc $i$ . Chùm tia ló ra khỏi lăng kính có bề rộng L' và cho góc $i'$

a) Chùm tia tới tới lăng kính từ giá trị góc $i$ sau đó góc biên thiên là $di$ thì chùm tia ló ra khỏi lăng kính với góc biến thiên là $di'$. Chứng minh hệ thức:

$$|\delta i'|=\frac{\cos r'\cos i}{\cos r\cos i'}|\delta i|$$

b) Tìm liên hệ của L và L'

c) Tìm liên hệ giữa a và a'.

$DS:\quad b.\frac{L}{\cos r'.\cos i}=\frac{L'}{\cos r.\cos i'}$; c. $\frac{La}{f_1'}=\frac{L'a'}{f'}$

# IX.2. GIAO THOA KHÔNG ĐỊNH XỨ

**Bài 1.**Trong thí nghiệm giao thoa ánh sáng Y-âng với ánh sáng đơn sắc có bước sóng 0,6 μm, khoảng cách giữa màn chứa khe S và màn chứa hai khe $S_1$, $S_2$ bằng 80 cm, khoảng cách giữa hai khe $S_1$, $S_2$ bằng 0,6 mm, khoảng cách từ mặt phẳng chứa hai khe $S_1$, $S_2$ đến màn quan sát bằng 2 m. Trên màn quan sát, chọn trục Ox song song với $S_1S_2$, gốc O trùng với giao điểm của đường trung trực của $S_1S_2$ với màn, chiều dương cùng chiều từ $S_2$ đến $S_1$.

a. Cần dịch chuyển khe S theo phương song song với Ox một đoạn nhỏ nhất bằng bao nhiêu và theo chiều nào để tại điểm có tọa độ + 1,2 mm trên màn có một vân tối.

b. Thay nguồn S bằng nguồn S' đặt tại vị trí lúc đầu của S, S' phát ra đồng thời hai bức xạ đơn sắc có bước sóng lần lượt $\lambda_1 = 0,48$ μm và $\lambda_2 = 0,672$ μm. Xác định tọa độ các vị trí trên màn mà tại đó vân tối của hai bức xạ trùng nhau.

**ĐS: a.** Vậy khe S phải dịch chuyển ngược lại tức là theo chiều âm 1 đoạn ngắn nhất là $|y| = \frac{d}{D}x = \frac{0,8}{2}0,2 = 0,08\ (mm)$.

b. Vị trí $x_{\text{tối trùng}}$ = (2k+1)5,6 (mm) với $k \in Z$

**Bài 2.** Trong thí nghiệm giao thoa khe I-âng, dùng đồng thời hai ánh sáng đơn sắc có khoảng vân trên màn giao thoa tương ứng là $i_1$ = 0,8 mm và $i_2$ = 0,6 mm. Biết hai khe hẹp cách nhau a = 1 mm, khoảng cách giữa màn quan sát và màn chứa hai khe là D = 1,5 m.

**a)** Tìm bước sóng của từng bức xạ. Tìm vị trí của vân gần trung tâm nhất có cùng màu với vân trung tâm?

**b)** Tìm tổng số vân sáng trong khoảng hai vân cùng màu với vân trung tâm, đối xứng với nhau qua vân trung tâm và gần vân trung tâm nhất?

**c)** Trên miền giao thoa đối xứng qua vân trung tâm, có bề rộng 9,6 mm có bao nhiêu vị trí mà vân tối của bức xạ $\lambda_1$ trùng với vân sáng của bức xạ $\lambda_2$? Xác định các vị trí đó?

ĐS : a. $\lambda_1 = \frac{8}{15}(\mu m), \lambda_2 = 0,4(\mu m)$; x=2,4mm.

b. 11vân sáng; c. có 4 vị trí.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| x (mm) | -3,6 | -1,2 | 1,2 | 3,6 |

**Bài 3.** Thực hiện thí nghiệm I âng về giao thoa ánh sáng với nguồn sáng phát ra đồng thời hai bức xạ điện từ thuộc vùng ánh sáng nhìn thấy có bước sóng $\lambda_1$ và $\lambda_2$ = 0,46 μm. Trên màn quan sát, người ta nhìn thấy trong khoảng giữa hai vân gần nhất cùng màu với vân sáng trung tâm có 11 vân sáng khác. Trong đó số vân sáng của bức xạ $\lambda_1$ và của bức xạ $\lambda_2$ lệch nhau 3 vân. Tính bước sóng $\lambda_1$.

ĐS: $\lambda_1$ = 0,736 μm

**Bài 4 .** Trong thí nghiệm giao thoa sóng mặt nước, hai nguồn kết hợp $S_1$, $S_2$ cách nhau 8cm dao động cùng pha với tần số f = 20Hz. Tại điểm M trên mặt nước cách $S_1$, $S_2$ lần lượt những khoảng $d_1$ = 25cm, $d_2$ = 20,5cm dao động với biên độ cực đại, giữa M và đường trung trực của AB có hai dãy cực đại khác.

a. Tính tốc độ truyền sóng trên mặt nước.

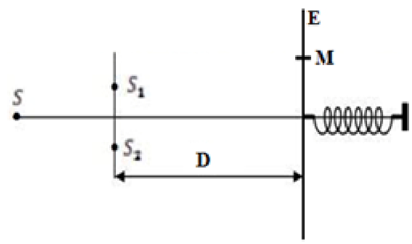
b. N là một điểm thuộc đường trung trực của đoạn thẳng $S_1S_2$ dao động ngược pha với hai nguồn. Tìm khoảng cách nhỏ nhất từ N đến đoạn thẳng nối $S_1S_2$.

c. Điểm C cách $S_1$ khoảng L thỏa mãn $CS_1$ vuông góc với $S_1S_2$. Tính giá trị cực đại của L để điểm C dao động với biên độ cực đại.

ĐS: a. v = λf = 30 cm/s; b. $x_{min} \approx 3,4cm$ ; c. $L_{max} \approx 20,6cm$ .

**Bài 5.** Trong thí nghiệm Y-âng về giao thoa ánh sáng, thực hiện đồng thời với hai bức xạ đơn sắc có bước sóng $\lambda_1$ và $\lambda_2$, các khoảng vân tương ứng thu được trên màn quan sát là $i_1$ = 0,48(mm) và $i_2$. Hai điểm điểm A, B trên màn quan sát cách nhau 34,56(mm) và AB vuông góc với các vân giao thoa. Biết A và B là hai vị trí mà cả hai hệ vân đều cho vân sáng tại đó. Trên đoạn AB quan sát được 109 vân sáng trong đó có 19 vân sáng cùng màu với vân sáng trung tâm. Tìm $i_2$.

**ĐS:** $i_2 = 0,64mm$




**Bài 6.** Thí nghiệm giao thoa I–Âng với ánh sáng đơn sắc có bước sóng 0,75$\mu$m, khoảng cách giữa hai khe $S_1$,$S_2$ là 1mm. Màn quan sát E khá nhỏ được gắn với một lò xo và có thể dao động điều hòa theo phương ngang với chu kì T=4,5s như hình bên. Ban đầu màn

đang ở vị trí lò xo không bị biến dạng, khi đó nó cách mặt phẳng chứa hai khe một đoạn 2m. Sau đó kéo màn ra khỏi vị trí ban đầu một khoảng 20cm theo phương vuông góc và hướng ra xa mặt phẳng chứa 2 khe, rồi thả nhẹ cho nó dao động điều hòa. Tìm khoảng thời gian kể từ khi thả màn đến khi điểm M trên màn cách vân trung một đoạn 9,45mm thuộc vân sáng bậc 6 lần thứ 2016.

ĐS: $\Delta t = 1007T + \frac{5T}{6} = 4527,75s$

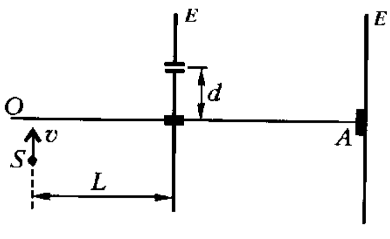
**Bài 7.** Trong thí nghiệm giao thoa ánh sáng Y-âng, hai khe cách nhau a = 0,5 mm, khoảng cách từ hai khe đến màn D = 2 m. Nguồn S phát ra đồng thời ba ánh sáng đơn sắc có bước sóng lần lượt là $\lambda_1$ = 0,4 μm, $\lambda_2$ = 0,5 μm, $\lambda_3$ = 0,6 μm chiếu vào hai khe $S_1S_2$. Trên màn, ta thu được một trường giao thoa có bề rộng 20 cm. Hỏi trên màn quan sát có tổng cộng bao nhiêu vân sáng cùng màu với vân sáng chính giữa của trường giao thoa?

ĐS: 9 vân.

**Bài 8.** Trong thí nghiệm Y-âng về giao thoa ánh sáng. Lần thứ nhất, ánh sáng dùng trong thí nghiệm có hai loại bức xạ có bước sóng $\lambda_1$=0,56μm và $\lambda_2$, với 0,67μm < $\lambda_2$ < 0,74μm, thì trong khoảng giữa hai vân sáng gần nhau nhất cùng màu với vân sáng trung tâm có 6 vân sáng của bức xạ $\lambda_2$. Lần thứ hai, ánh sáng dùng trong thí nghiệm có ba loại bức xạ có bước sóng $\lambda_1$, $\lambda_2$ và $\lambda_3$ với $\lambda_3 = 7\lambda_2/12$, khi đó trong khoảng giữa hai vân sáng gần nhau nhất và cùng màu với vân sáng trung tâm quan sát được bao nhiêu vân sáng đơn sắc?

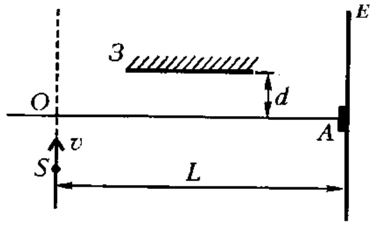
ĐS: 23

**Bài 9**. Một sơ đồ giao thoa cho trên hình 13, gồm nguồn sáng điểm đơn sắc S chuyển động với vận tốc $v = 4cm/s$ tới gần trục OA và hai màn. Trên màn E có hai lỗ nhỏ cách nhau một khoảng $d = 0,5cm$, còn màn $E'$ dùng để quan sát bức tranh giao thoa. Tại tâm của màn $E'$ người ta đặt một máy thu quang điện A. Hãy xác định tần số dao động của dòng quang điện trong máy thu khi nguồn sáng ở gần OA, biết rằng $L = 1m$ và bước sóng $\lambda = 5\cdot10^{-7}m$. Coi cường độ dòng quang điện tỷ lệ với độ rọi tại điểm A.



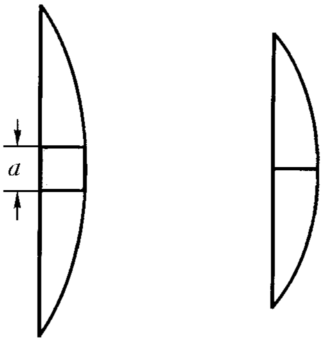
**Bài 10.** Sơ đồ thí nghiệm giao thoa gồm gương phẳng M, màn ảnh E, máy thu quang điện A và nguồn sáng điểm đơn sắc S chuyển động với vận tốc $v = 2m/s$ vuông góc với trục OA (H.9). Hãy xác định tần số dao động của dòng quang điện trong máy thu A khi nguồn sáng chuyển động tới gần trục OA, nếu bước sóng ánh sáng $\lambda = 5.10^{-7} m$, khoảng cách $L = 1m$ và khoảng cách $d = 0{,}5cm$. Biết rằng dòng quang điện trong máy thu tỷ lệ với độ rọi tại điểm A.

Gợi ý: Với những giá trị nhỏ của x, có thể dùng công thức gần đúng $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2$.




**ĐS:** $f = \dfrac{2dv}{\lambda L} = 40.000Hz$.

**Bài 11. ( Sóng Huyghen)** Một thấu kính hội tụ có tiêu cự $f = 50cm$ bị cắt đi phần trung tâm có bề rộng $a = 0{,}6cm$ theo hướng vuông góc với mặt phẳng hình bên, sau đó dịch hai nửa lại cho tới khi tiếp xúc với nhau. Về một phía của thấu kính ghép này, tại điểm cách thấu kính một khoảng bằng $f$ đặt nguồn sáng điểm $S$ phát ánh sáng đơn sắc có bước sóng $\lambda = 600nm$ và ở phía kia của thấu kính đặt một màn ảnh để quan sát các vân giao thoa (H.6). Hãy xác định khoảng vân.




ĐS: $i \approx \dfrac{\lambda F}{a} = 0{,}5mm.$

**Bài 12.** (Trích Đề thi Olimpic Vật lí quốc tế tại Nam Tư năm 1985)

Một thanh niên ở tỉnh ở Portoroz liên hệ bằng vô tuyến với hai thiếu nữ ở hai tỉnh khác nhau. Anh ta muốn lắp ăngten sao cho cô gái ở A(Koper) nhận được tín hiệu cực đại, mà cô gái ở B (Buje) lại không nhận được và ngược lại. Ăng ten gồm hai thanh song song thẳng đứng phát sóng là hai nguồn phát sóng ( đường thẳng nối liền hai ăng ten và song song mặt đất nằm trên phương bắc nam) có cường độ không đổi theo mọi phương nằm ngang.

a. Tìm các thông số của ăng ten, nghĩa là: khoảng cách giữa hai thanh, phương của mặt phẳng của hai thanh, và độ lệch pha giữa hai tín hiệu điện truyền cho hai thanh với điều kiện khoảng cách ấy là cực tiểu.

b. Tìm lời giải bằng số nếu máy phát có tần số 27 MHz và đặt ở Portoroz.

Góc giữa phương Bắc và phương đến A (Koper) là $72^0$, giũa phương Bắc và phương đến của B (Buje) là $157^0$.

ĐS: b. $\alpha_A = 47{,}5^0, \alpha_B = 132{,}5^0, a = 3{,}76m$

**Bài 13.** Cho một lưỡng lăng kính dạng nêm, đáy mỏng, góc chiết quang $15'$, làm bằng thuỷ tinh được coi là trong suốt với các ánh sáng dùng làm thí nghiệm, có chiết suất n = 1,5 và được coi là không đổi với các ánh sáng dùng trong thí nghiệm. Phía trước lăng kính có đặt một khe sáng hẹp S được chiếu ánh sáng đơn sắc trên đường thẳng đi qua đáy và trùng với đáy chung.

**a)** Tìm khoảng cách d giữa khe S và lưỡng lăng kính để hai ảnh $S_1$ và $S_2$ của S qua lưỡng lăng kính ở cách nhau một khoảng a = 1,8 mm. Lấy $1' = 3.10^{-4}$ rad.

**b)** Tại vùng giao thoa trên màn, người ta đếm được 11 vân sáng. Xác định khoảng cách từ lưỡng lăng kính đến màn, suy ra bề rộng vùng giao thoa trên màn và khoảng vân i. Biết bước sóng của ánh sáng đơn sắc dùng trong thí nghiệm là $\lambda = 0,5\mu m$.

**c)** Thay ánh sáng đơn sắc trên bằng bức xạ tử ngoại gần. Để quan sát hình ảnh giao thoa người ta đã dùng máy ảnh với phim đen trắng thông thường chụp ảnh miền giao thoa và in trên giấy ảnh thì đếm được 15 vạch đen trên toàn miền giao thoa. Giải thích hiện tượng và hình ảnh quan sát được, tính bước sóng của ánh sáng tử ngoại nói trên.

ĐS: a. d =40 cm

**b.d'=**64,5 cm, L= 2,9 mm, $i = 0,29mm$; c. $\lambda' \approx 0,357\mu m$

**Bài 14.** Hai lăng kính bằng thủy tinh, chiết suất n = 1,5 có cùng góc chiết quang A nhỏ và có chung đáy P (tức là lưỡng lăng kính Fresnel). Trên mặt phẳng của đáy P, cách hai lăng kính một khoảng *l* = 10cm, có một khe F hẹp, song song với cạnh khúc xạ của hai lăng kính và phát ánh sáng đơn sắc bước sóng λ = 546nm. Sau lưỡng lăng kính, cách một khoảng p có một kính lúp L, tiêu cự $f_0$ = 2cm mà trong tiêu diện có một thước chia (gọi là thước trắc vi) cho phép ta đo khoảng cách giữa các vân giao thoa, chính xác tới 0,01mm. Một thấu kính hội tụ mỏng O, tiêu cự f= 10cm có thể dịch chuyển dễ dàng giữa lưỡng lăng kính và kính lúp.

1. Dịch chuyển O về phía L bắt đầu từ sát lưỡng lăng kính, đồng thời quan sát trong L, ta tìm được hai vị trí $S_1$, $S_2$ của O cách nhau $S_1S_2$ = 48cm, mà trong kính lúp ta thấy hai ảnh rõ nét của khe F, khoảng cách giữa hai ảnh ấy đo được trong kính L lần lượt là 4,5mm và 0,18mm. Tính góc chiết quang A của hai lăng kính và khoảng cách p.

2. Cho O dịch chuyển từ $S_1$ đến $S_2$ thì đến một vị trí $V_1$ ta bắt đầu trông thấy vân giao thoa, rồi đến một vị trí $V_2$ thì thấy vân giao thoa biến mất.

a. Hãy giải thích hiện tượng và xác định các khoảng cách từ $V_1$, $V_2$ đến L

b. Chứng minh rằng trong quá trình dịch chuyển của O thì khoảng vân i (giữa hai vân giao thoa liên tiếp) qua một giá trị cực đại. Hãy tính giá trị cực đại $i_m$ ấy, số vân N có thể quan sát được và khoảng cách từ L đến vị trí tương ứng của O. Nếu giữ nguyên khe F, kính lúp L, lưỡng lăng kính, nhưng bỏ kính O đi thì khoảng vân i' và số vân quan sát được N' là bao nhiêu?

3.Tiếp tục cho O dịch chuyển về phía L thì qua vị trí $S_2$, đến một vị trí $V_3$, ta lại trông thấy vân. Xác định khoảng cách từ $V_3$ đến L, tính khoảng cách vân i'' và số vân quan sát được N'' khi O ở cách L là 8cm.

ĐS: 1. $p = 64cm$; $A = 9.10^{-3} rad \approx 30'$

**2a.** $S_1$ cách lúp 51,5cm, và $S_2$ cách lúp 14,5cm.

2b. $i_{max} \approx$ 0,035cm, N=8 vân, $i' \approx 0,44mm$ , $N' = 12$.

3. $i'' \approx 0,2mm$, $N'' = 13$ vân.

**Bài 15 (HSGQG 2016)**

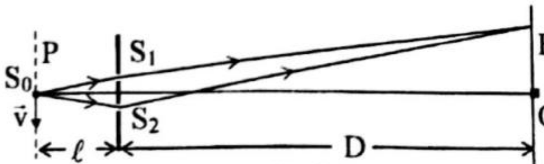
Xét hệ giao thoa Y-âng, hai khe song song $S_1$ và $S_2$ cách nhau một khoảng a = 2mm, màn quan sát E cách mặt phẳng chứa hai khe một khoảng D = 2m. Hệ thống khe – màn được đặt trong không khí. Nguồn sáng S là dây tóc thẳng hình trụ có đường kính rất nhỏ của một bóng đèn điện được đặt trước hai khe $S_1, S_2$. Ban đầu S đặt tại $S_0$ cách đều $S_1$, $S_2$.

1.Đặt trước hai khe một tấm kính lọc sắc, chỉ để lọt qua bức xạ có bước sóng 0,500µm. Miền quan sát được hình ảnh giao thoa có dạng đối xứng, khoảng cách giữa hai vân ngoài cùng là 20mm.

a.Xác định hiệu khoảng cách từ khe $S_2$ và khe $S_1$ tới vị trí vân sáng bậc 3 trên màn.

b.Xác định số vân sáng, vân tối quan sát được trên màn.

2. Ánh sáng phát ra từ dây tóc bóng đèn là ánh sáng trắng, gồm các ánh sáng đơn sắc nằm trong dải 0,400μm $\le \lambda \le$ 0,750μm được chiếu vào hai khe Y – âng. Xác định số bức xạ và bước sóng của từng bức xạ cho vân sáng trùng nhau tại vị trí vân sáng bậc 5 của ánh sáng đỏ có λ = 0,750μm.



Hình 3.

3.Tại vị trí vân sáng trung tâm ban đầu O trên màn E, đặt một máy thu quang điện có độ nhạy cao. Cho nguồn sáng S dịch chuyển trong mặt phẳng P song song với mặt phẳng chứa hai khe $S_1, S_2$ với tốc độ không đổi v = 1cm/s như hình 11.3. Hãy xác định tần số dao động của dòng quang điện trong máy thu khi nguồn sáng còn ở gần trục $S_0O$. Biết rằng nhờ kính lọc sắc, ánh sáng λ = 0,400μm, nguồn sáng S cách mặt phẳng chứa hai khe $S_1, S_2$ là $l$ = 1m. Coi cường độ dòng quang điện tỉ lệ với cường độ sáng tại O.

ĐS:1.a. $\Delta\delta = 3\lambda = 1,50\mu m$

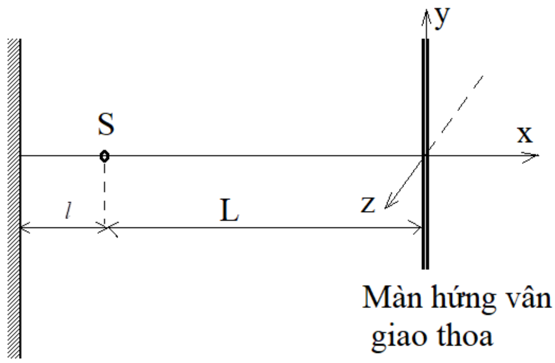
b.Số vân sáng 41 vân; số vân tối 40 vân

2. có 5 bức xạ:: $\lambda_5 = \lambda_d = 0,750\mu m; \lambda_6 \approx 0,625\mu m; \lambda_7 \approx 0,536\mu m$, $\lambda_8 \approx 0,469\mu m; \lambda_9 \approx 0,417\mu m$

3. $f = \dfrac{av}{l\lambda} = 50Hz$

**Bài 16.**

Một nguồn điểm S phát ánh sáng kết hợp có bước sóng λ đồng đều theo mọi phương, hay nói cách khác mặt sóng là những mặt cầu đồng tâm. Sóng phản xạ trên một bề mặt điện môi đặt ở khoảng cách $l = N\lambda$ (N là một số nguyên lớn) từ nguồn điểm. Hình ảnh giao thoa được quan sát trên một màn chắn ở khoảng cách L ≫ $l$ từ nguồn điểm (Xem hình 4.10).




Trong cách tính toán dưới đây, ta sử dụng hệ tọa độ xyz như trên hình vẽ. Màn chắn đặt song song với gương và nằm trong mặt phẳng y-z.

1.Tại tọa độ y bằng bao nhiêu (z = 0), ta quan sát được cực đại giao thoa? Có thể giả sử $y \ll L$.

2.Hãy vẽ vài cực đại có bề rộng nhỏ nhất trên màn chắn (trong mặt phẳng y-z).

3.Bây giờ ta thay màn chắn phẳng bằng màn chắn hình cầu bán kính L, có tâm trùng với vị trí đặt nguồn điểm. Có bao nhiêu cực đại có thể quan sát được?

ĐS: 1. Để có cực đại $y_n = L\sqrt{\dfrac{n+0,5}{N}}$, với n=0,1,2,3,…<<N

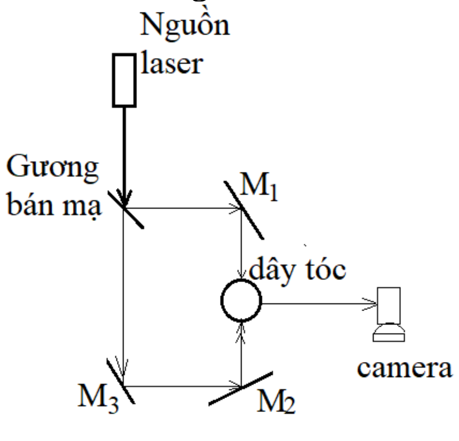
3.Số vân cực đại là $m = 2N$

**Bài 17. Đo đường kính sợi dây tóc.**

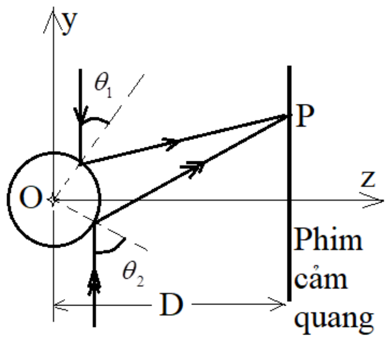
Người ta đo đường kính sợi dây tóc có kích thước dưới milimet bằng một giao thoa kế hai chùm tia như trong hình a, trong đó $M_1, M_2, M_3$ là hệ gương phản chiếu toàn phần, màn chắn là một camera kỹ thuật số CCD (Charge Coupled Device – thiết bị điện tích liên kết). Chùm laser xuất phát từ tinh thể Iridium acid barium sẽ đi qua một phim bán mạ để tách thành hai chùm sáng. Chùm thứ nhất sau khi phản xạ trên gương $M_1$ tới đập vào mặt trên sợi dây tóc, chùm kia phản xạ trên hai gương $M_2, M_3$ rồi đập vào mặt dưới sợi dây tóc. Hình b cho thấy ánh sáng phản chiếu để tạo ra hai chùm sáng giao thoa; $\theta_1, \theta_2$ tương ứng là các góc tới, D là khoảng cách từ trục dây tóc đến màn chắn (phim cảm quang trong camera), P là điểm mà hai chùm ánh sáng trên giao nhau trên màn hình. Chọn hệ trục tọa độ như sau: gốc O nằm trên trục của sợi, trục x (không thể hiện trên hình vẽ) dọc theo trục sợi dây (chiều dương hướng lên), trục z hướng vuông góc với màn hình. Bước sóng của ánh sáng là λ, khoảng vân trên màn hình bằng i. Vì khoảng cách D lớn hơn rất nhiều so với đường kính của sợi và kích thước của màn hình, có thể coi chùm tia chiếu đến màn chắn là chùm gần song song với trục z.

1.Vì khoảng cách từ dây tóc tới màn chắn lớn hơn so với kích thước dây tóc, nên trên cả mặt trên và mặt dưới của dây tóc chỉ có các chùm tia có góc tới quanh giá trị $45^0$ mới phản xạ lên màn chắn được. Hai chùm tia này coi như được xuất phát từ hai ảnh ảo, tìm vị trí của hai ảnh ảo ở cả hai mặt trên và mặt dưới. Có thể sử dụng các công thức gần đúng: khi x ≈ 0, thì sinx ≈ x, cosx ≈ 1.

2.Xác định đường kính d của sợi dây tóc.




Hình a




Hình b

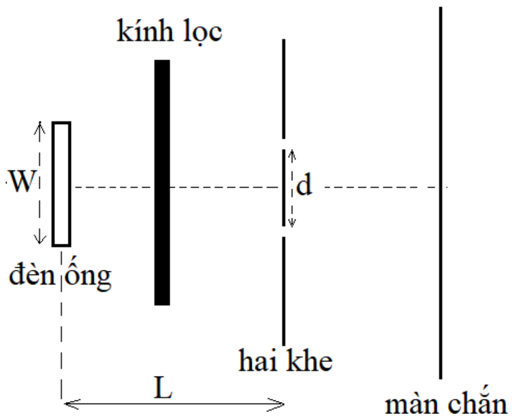
ĐS:1.Chùm phản xạ của chùm tới dưới góc $\pi/4$ giống như xuất phát từ nguồn đặt ở điểm F có tọa độ ($y_+, z_+$): $y_+ = \frac{\sqrt{2}}{4}d;\ z_+ = \frac{\sqrt{2}}{8}d$

Tương tự chùm phản xạ ở mặt dưới dây tóc coi như phát ra từ nguồn F' có tọa độ

$y_- = -\frac{\sqrt{2}}{4}d;\ z_- = \frac{\sqrt{2}}{8}d$

2. $d = \frac{\lambda D}{i}\sqrt{2}$

**Bài 18.** Một màn chắn có hai khe hẹp song song nằm cách nhau một đoạn d và được chiếu bởi một đèn ống thẳng có bề rộng W, được đặt ở khoảng cách L giữa hai khe. Một kính lọc được đặt giữa chúng sao cho chỉ có ánh sáng bước sóng λ tới được hai khe. Nếu thay đổi khoảng cách giữa hai khe một cách liên tục, thì ở khoảng cách nhỏ nhất $d = d_0$ các vân giao thoa trên một màn đặt ở xa sẽ biến mất. Tìm giá trị của W (biểu diễn theo các tham số trong bài).

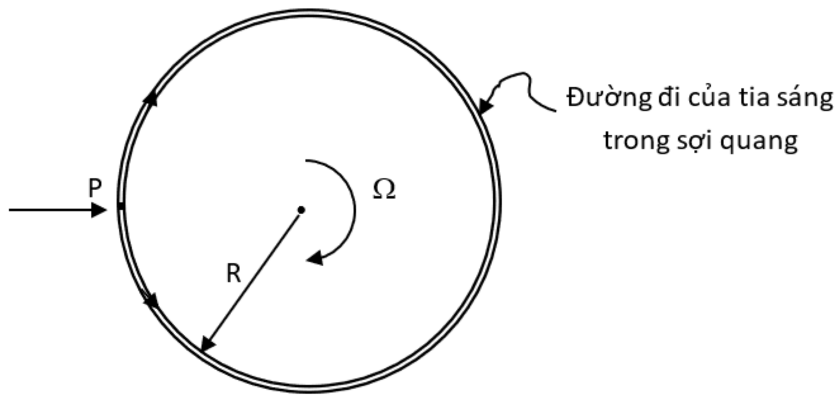



ĐS: $W = \frac{\lambda L}{d_0}$

**Bài 19. Con quay quang học APHO 2003**

Vào năm 1913, Georges Sagnac (1869-1926) đã xét việc sử dụng một bộ cộng hưởng vòng để tìm sự trôi của ê te vũ trụ đối với với một hệ quy chiếu quay. Tuy nhiên, như thường xảy ra, các kết quả của ông đã có những ứng dụng mà chính ông cũng chưa bao giờ mơ tới. Một trong những ứng dụng đó là con quay sợi quang (Fibre-Optic Gyroscope- FOG) dựa trên một hiện tượng đơn giản mà lần đầu tiên Sagnac đã quan sát được. Hiện tượng vật lí chủ yếu liên quan đến hiệu ứng Sagnac là do sự dịch pha gây nên bởi hai chùm tia sáng kết hợp được truyền theo hai chiều ngược nhau vòng quanh một vòng đang quay làm bằng sợi quang. Độ dịch pha này còn được dùng để xác định vận tốc góc của vòng đang quay.

Như chỉ ra trên sơ đồ ở Hình 1, một sóng ánh sáng đi qua điểm P vào một sợi quang hình tròn có bán kính $R$ đặt trên một bệ quay với vận tốc gốc không đổi Ω theo chiều kim đồng hồ. Tại đây, sóng ánh sáng bị tách thành hai sóng truyền theo hai hướng ngược nhau dọc theo vòng: theo chiều kim đồng hồ (CW) và ngược chiều kim đồng hồ (CCW). Chiết suất của vật liệu làm sợi quang là μ. Giả thiết đường truyền tia sáng trong sợi quang là một đường tròn trơn tru có bán kính *R*.




Hình 1

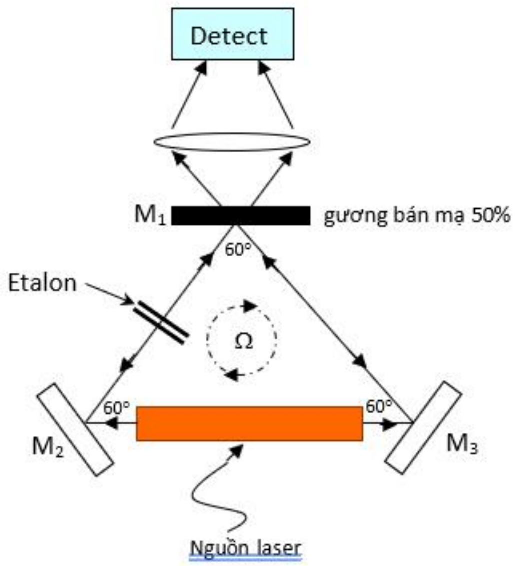
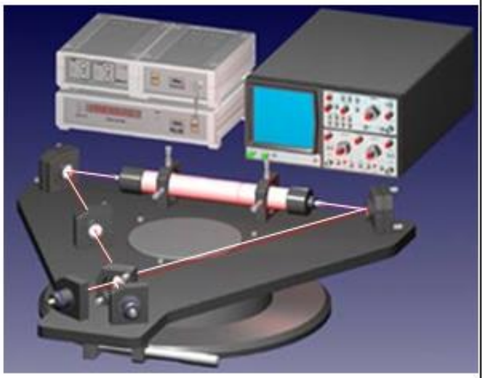
a) Trên thực tế, vận tốc quay của vòng nhỏ hơn vận tốc ánh sáng rất nhiều, sao cho $(R\Omega)^2 << c^2$. Hãy tìm hiệu thời gian $\Delta t = t^+ - t^-$ trong đó $t^+$ và $t^-$ chỉ thời gian đi hết một vòng kín của các tia đi theo chiều kim đồng hồ (CW) và ngược chiều kim đồng hồ (CCW). Hãy viết kết quả theo diện tích A được bao quanh bởi cái vòng.

b. Hãy tìm hiệu quang trình $\Delta L$ của tia CW và tia CCW khi chúng đi hết một vòng kín trên cái vòng đang quay.

c. Với một sợi quang hình tròn có bán kính $R$ = 1 m, hãy tìm giá trị cực đại của ΔL đối với sự quay của sợi quang bằng tốc độ quay của Trái Đất. Cho biết chiết suất sợi quang là $\mu$ =1,5.

d. Trong phần b), phép đo có thể được khuếch đại bằng cách tăng số vòng của cuộn sợi quang lên N vòng. Hãy tìm hiệu số pha $\Delta\theta$ của hai tia sáng khi chúng đã đi hết chiều dài cuộn sợi quang. (1 điểm)

Sơ đồ thứ hai của Con quay Quang học là Con quay Laser Vòng ( Ring Laser Gyroscope - RLG). Điều này có thể thực hiện bằng cách đặt hốc cộng hưởng của nguồn phát laser vào một vòng dưới dạng một tam giác đều, chiều dài tổng cộng của vòng là L, như trên Hình 2. Nguồn laser ở đây sẽ sinh ra hai nguồn sáng kết hợp lan truyền theo hai hướng ngược nhau. *Để duy trì dao động của laser trong bộ cộng hưởng vòng hình tam giác này, chu vi của vòng phải bằng một số nguyên lần bước sóng $\lambda$.* Etalon (bộ chuẩn mẫu), là một dụng cụ phụ được đặt chen vào vòng; nó có thể gây ra trong vòng các tổn hao có tính lọc lựa theo tần số, sao cho các kiểu dao động không mong muốn bị làm yếu đi hoặc bị loại trừ.

| | |
|---|---|
|   |  |
| Hình.2: Sơ đồ minh hoạ Con quay Laser Vòng | Hình 3: Minh họa Con quay Laser Vòng được nói tới trong bài toán này |

e)Tìm hiệu số thời gian truyền $\Delta t$ theo chiều kim đồng hồ và ngược chiều kim đồng hồ cho trường hợp vòng hình tam giác như trên Hình 2. Viết kết quả theo $\Omega$ và diện tích A được bao quanh bởi vòng. Chứng tỏ rằng kết quả này cũng giống hệt như kết quả đối với vòng hình tròn.

f) Nếu cái vòng này quay với tần số góc $\Omega$ như trên Hình 2, sẽ có sự khác nhau về tần số giữa hai phép đo CW và CCW . Tìm tần số phách $\Delta\nu$ quan sát được giữa hai tia CW và CCW theo $L, \Omega, \lambda$

ĐS: a. $\Delta t = \dfrac{4\mu^2 \Omega A}{c^2}$; b. $\Delta L = c'\Delta t = \dfrac{4\pi R^2 \Omega}{c'}$

c. $\Delta L \approx 4,56.10^{-12} m$

d. $\Delta\theta' = \dfrac{8\pi^2 R^2 N\Omega}{c\lambda'}$

e. $\Delta t = \dfrac{4\Omega A}{c^2}$; f. $\Delta\nu = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\dfrac{L}{\lambda}\Omega$

# VIII.3 GIAO THOA ĐỊNH XỨ

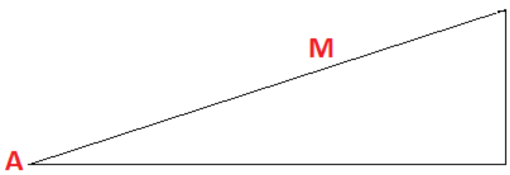
**Bài 1**. Chiếu một chùm tia sáng có bước sóng λ = 0,54μm chiếu theo phương vuông góc vào một nêm thủy tinh mỏng có chiết suất 1,51. Biết số khoảng vân giao thoa trên 1cm là 9.

a) Tính góc nghiêng của nêm.

b) Tìm độ đơn sắc Δλ/λ của chùm tia nếu các vân giao thoa biến mất từ điểm M cách đỉnh nêm là $l$ = 2,5cm.

Đáp số. a. $\alpha = \frac{\lambda}{2ni} = 1,43.10^{-4} rad$ ; b. $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{19}$

**Bài 2**. Hai bản thủy tinh mỏng phẳng tạo thành một nêm không khí có cạnh nêm qua A (hình vẽ). Tại điểm M cách A là l = 10mm độ dày của nêm là d = 5μm. Nêm được chiếu bằng ánh sáng có bước sóng λ = 0,5μm theo phương vuông góc với mặt dưới của nêm.




a) Tìm tổng số vân tối quan sát được từ A đến M.

b) Thay bằng chùm tia sáng trắng cũng chiếu vào mặt nêm. Hỏi tại điểm N có độ dày d' = 20μm có vân tối nào?

Đáp số. a. 21 vân tối (tính luôn tại A); b. $\lambda_k = \frac{40}{k}\mu m$ với $k = 53 \div 105$

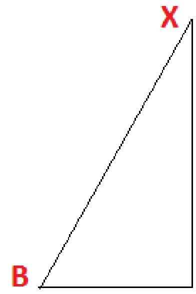
**Bài 3** Nhìn một váng dầu trên mặt nước theo phương làm với mặt nước một góc $60^0$ ta thấy toàn bộ váng dầu màu vàng (ứng với bước sóng $\lambda_1$ = 0,6μm). Coi chiết suất của dầu là 1,45 và không phụ thuộc vào bước sóng. Mắt đặt xa mặt nước.

a) Tính bề dày nhỏ nhất của váng dầu.

b) Nếu nhìn theo phương hợp với mặt nước 1 góc $30^0$ thì thấy váng dầu màu gì?

Đáp số a. $d_{\min} = \frac{\lambda_1}{4\sqrt{n^2 - \sin^2 i_1}} = 0,11\mu m$ ;b. tìm được $\lambda = 0,513\mu m$ (màu lục)

**Bài 4**. Một màng mỏng nước xà phòng được tạo bởi khung dây hình tròn bán kính 2cm. Màng được chiếu bằng một nguồn sáng trắng, rộng. Quan sát màng bằng ánh sáng phản xạ dưới góc $45^0$ ta thấy nó có màu xanh (bước sóng λ = 0,5μm). Có thể xác định khối lượng của màn bằn cân có độ chính xác 0,2mg được không? Cho biết chiết suất và khôi lượng riêng của nước xà phòng lần lượt là n = 1,33 và ρ = $10^3$kg/m$^3$.




Đáp số: m=0,18mg. Giá trị này tương đương sai số của cân nên không thể cân được.

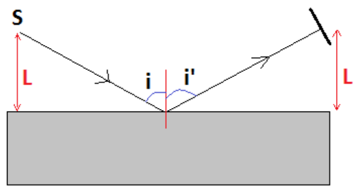
**Bài 5.** Một màng nước xà phòng có chiết suất 1,33 được đặt thẳng đứng. Do trọng lực, nước xà phòng dồn xuống dưới nên ta coi màng có dạng hình nêm (hình vẽ). Quan sát những vân giao thoa của ánh sáng phản chiếu có bước sóng $\lambda = 0,48\mu m$ người ta thấy vân tối thứ 6 cách giao tuyến của nêm 1,2cm. Biết hướng quan sát vuông góc với mặt nêm.

a) Tính góc nghiêng của nêm.

b) Xác định vị trí hai vân sáng đầu tiên.

Đáp số: a. $\alpha \approx 2,57'$ .b 0,12cm; 0,36cm

**Bài 6**. Nguồn sáng điểm S phát ra ánh sáng đơn sắc có $\lambda = 0,56\mu m$ và đặt cách bản mỏng L = 1m. Bản có bề dày h = 0,1mm, chiết suất n = 1,4. Một màn E đặt vuông góc với chùm phản xạ và cũng cách bản mặt 1 khoảng L (hình 2.25). Góc tới cũa chùm phản xạ là $i = 60^0$



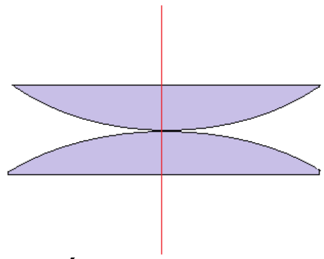

a) Tính khoảng vân.

b) Xác định độ đơn sắc cho phép $\Delta\lambda$ để có thể quan sát được giao thoa.

Đáp số: a. $i \approx 2,85cm$  $\Delta\lambda \approx 14A^0$

**Bài 7**. Một chùm ánh sáng tán xạ đơn sắc có $\lambda = 0,5\mu m$ đập vào một bản thủy tinh mỏng, hai mặt song song, chiết suất n = 1,52. Biết khoảng cách góc giữa hai cực đại liên tiếp của ánh sáng phản xạ là $\delta i = 3^0$ (quan sát dưới các góc lân cận góc $i = 60^0$. Xác định bề dày của bản.

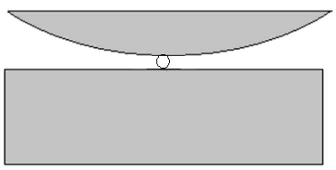
Đáp số: $d = 13,8\mu m$



**Bài 8**. Một hệ thống gồm hai thấu kính mỏng giống nhau, một mặt phẳng, một mặt cầu lồi đặt tiếp xúc nhau như hình vẽ. Chiếu tới hệ chùm tia đơn sắc có bước sóng $\lambda = 0,5\mu m$ theo phương vuông góc với mặt phẳng.

a) Xác định bề dày của lớp không khí ở đó ta quan sát thấy vân đầu tiên.

Biết vân tối thứ năm có bán kính 2mm và thấu kính có chiết suất n = 1,5. Tìm tiêu cự hệ thấu kính trên.



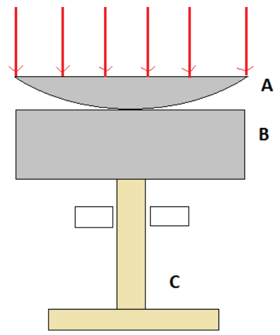
b) Tìm tiêu cực của thấu kính biết bán kính mặt cong là R = 0,8m.

Đáp số: a. $d = 1,25\mu m$ ; f=0,8m

**Bài 9**. Một thấu kính phẳng lồi, mặt lồi có bán kính R = 25cm đặt trên một bản thủy tinh phẳng. Đỉnh mặt cầu không tiếp xúc với bản thủy tinh phẳng vì có một hạt bụi (hình vẽ). Người ta đo được bán kính các vân tròn Newton **( vân tối)** thứ 10 và thứ 15 là $r_{10}$ =0,5mm, $r_{15}$ = 0,75mm.    Xác định bước sóng ánh sáng.

Đáp số: $\lambda = 25\mu m$

**Bài 10**. Một hệ gồm thấu kính phẳng lồi A cố định và một bản thủy tinh hai mặt song song B có thể dịch chuyển nhờ một ốc vít C có bước ốc h = 0,1mm. Chiếu một chùm ánh sáng đơn sắc có bước sóng λ = 580nm từ trên xuống dưới theo phương vuông góc với mặt phẳng để quan sát vân tròn Newton bằng ánh sáng phản xạ (hình 2.28).




a) Hình ảnh giao thoa thay đổi thế nào nếu quay đều ốc C để tăng hoặc giảm khe hở giữa thấu kính và bản?

b) Số vân xuất hiện hoặc biến mất là bao nhiêu khi xoay ốc một vòng?

Đáp số:

a.Gọi D là khoảng cách từ bản thủy tinh đến đỉnh thấu kính. Bán kính vân tối là $r_k^2 = R(k\lambda - 2D)$

b. Xuất hiện hoặc biến mất 345 vân tối.

**Bài 11**. Một thấu kính phẳng lồi L đặt trên một bản thủy tinh phẳng. Chiếu ánh sáng phản xạ có λ = 0,546μm theo phương vuông góc và quan sát bằng ánh sáng phản xạ.

a) Người ta đo được đường kính vân tối thứ 5 và thứ 15 lần lượt là 9,34mm và 16,18mm. Tính bán kính mặt cong của L.

b) Cho một chất lỏng chiếm đầy giữa không khí và bản thủy tinh rồi lặp lại phép đo trên được 8,09mm và 14,0mm. Tìm chiết suất của chất lỏng.

c) Trong trường hợp lớp mỏng là không khí, nếu ta tịnh tiến thấu kính lên trên thì điều gì sẽ xảy ra?

Đáp số: a. 8mm; b. 1,33; c.Khi dịch thấu kính lên làm d tăng, bán kính hệ vân thu nhỏ lại, nếu d quá lớn thì khó quan sát được.

**Bài 12.** Một thấu kính mỏng hai mặt lồi, cùng bán kính $R_1$ và một thấu kính mỏng hai mặt lõm, cùng bán kính $R_2$ cùng bằng thủy tinh chiết suất n, được đặt cho trục chính trùng nhau và tiếp xúc với nhau. Chiếu sáng hệ bằng một chùm sáng đơn sắc rộng, bước sóng λ và quan sát trong ánh sáng phản xạ theo phương trục chính người ta quan sát được một hệ vân Newton. Vân sáng thứ 6 và thứ 16 tính từ trong ra lần lượt là $\rho_1$ và $\rho_2$. Một vật phẳng AB đặt trước hệ, cách hệ một khoảng d. Xác định vị trí, bản chất số phóng đại của ảnh A'B' của vật qua hệ.

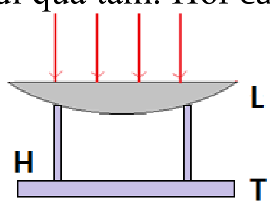
Cho biết: $\lambda$ = 546nm, $\rho_1$ = 1,855mm, $\rho_2$ = 3,161mm, n = 1,5, d = 0,8m.

**Đáp số.** $d' = -2,4m$, $k \approx 3$

**Bài 13**. Đặt một hình trụ rỗng H bằng thủy tinh kích thước nhỏ, thành lỏng, lên trên một tấm thủy tinh đen T, hai mặt song song đặt trong không khí. Sau đó trên H đặt một thấu kính phẳng lồi L, bán kính cong của mặt lồi là R = 3m, đỉnh của mặt lồi cách T một đoạn h = 5mm. Chiếu vào hệ theo phương vuông góc một chùm bức xạ đơn sắc có bước sóng $\lambda_1$ = 0,456μm. Chiếu suất của không khí là n = 1,000293.

**1.** Biết tâm của hệ vân là một điểm sáng, hãy tính bán kính của ba vân tối kế tiếp đầu tiên.

**2.** Thay bức xạ trên bằng bức xạ đơn sắc có bước sóng $\lambda_2$ = 0,436μm rồi cho nhiệt độ của H tăng dần từ $15^0$C lên $100^0$C thì thấy có 18 vân tròn Newton đi qua tâm. Hỏi các vân đã dịch chuyển theo chiều nào? Tính hệ số nở dài của thủy tinh làm hình trụ.




**3.** Hệ được giữ ở nhiệt độ không đổi và vẫn được chiếu sáng bằng bức xạ $\lambda_2$. Rút dần không khí trong hình trụ ra thì hệ vân thay đổi thế nào? Tính số vân đi qua tâm của hệ khi đã hút hết không khí.

**4.** Bây giờ chỏm cầu của thấu kính L được mài bẹt thành một mặt tròn bán kính $R_0$ = 3mm song song với mặt phẳng của thấu kính rồi đặt cho tiếp xúc với tấm thủy tinh T. Hệ được chiếu sáng vuông góc bằng bức xạ $\lambda_1$. Hãy tính bán kính của vân tối thứ 10 và vân sáng thứ 5 tính từ trong ra.

ĐS: 1. $R_{t1} \approx 0,826mm; R_{t2} \approx 2,43mm; R_{t3} \approx 1,849mm$

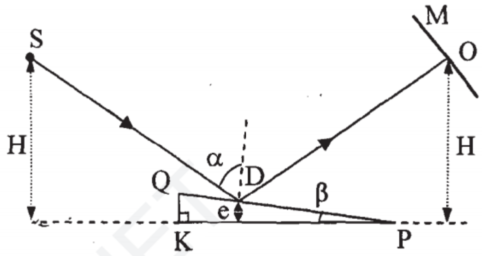
2. Các vân dồn vào tâm rồi biến mất ở tâm; hệ số nở dài $k = 0.10^{-6} K^{-1}$

3. Khi hút khí dần ra, các vân nở ra từ tâm. Số vân mới đi qua tâm hệ vân là $N = \dfrac{\Delta h}{0,5\lambda} \approx 6,6$

4. Bán kính vân thứ 10 là $R_{10} \approx 4,62mm$ , bán kính vân sáng thứ 5 là $R_5 \approx 3,89mm$

**Bài 14.** Cho một chiếc nêm quang học làm bằng chất trong suốt, đồng tính và có tiết diện thẳng là tam giác vuông KPQ (hình 5). Hai mặt phẳng KP và QP hợp với nhau một góc $\beta$ rất nhỏ. Biết chiết suất của nêm đối với ánh sáng đơn sắc có bước sóng λ = 0,6μm là n = $\sqrt{3}$.

1.Bức xạ đơn sắc λ trên được phát ra từ nguồn sáng điểm S đặt cách mặt phẳng PK của nêm một khoảng H. Xét chùm tia sáng hẹp đi từ nguồn S tới mặt phẳng nghiêng của nêm tại vị trí D với góc tới α = $60^0$, bề dày của nêm tại D là e. Chùm sáng sau khi qua nêm tới vuông góc với màn M tại điểm O. Biết O cũng cách mặt phẳng PK của nêm một đoạn là H. Tìm bề dày e nhỏ nhất để tại điểm O ta thu được vân sáng.



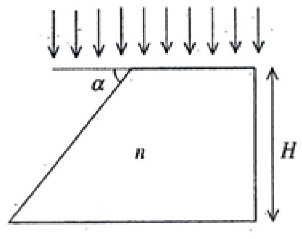
Hình 5

2.Chiếu chùm ánh sáng đơn sắc bước sóng λ vào mặt nêm QP theo phương gần như vuông góc với QP. Quan sát hệ vân giao thoa trên mặt nêm người ta thấy khoảng cách giữa hai vân sáng liên tiếp là I = 0,10mm. Xác định góc nghiêng $\beta$ của nêm.

ĐS: 1. $e_{\min} = 0{,}1\mu m$; 2. $\beta = 1{,}744.10^{-3} rad \approx 0{,}1^0$.

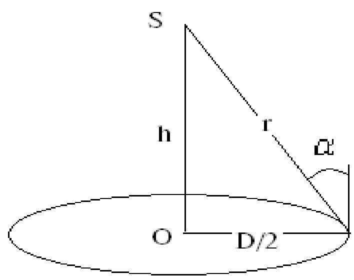
**Bài 15.** Một tấm thủy tinh chiết suất n = 1,5; tiết diện ngang là một hình thang như hình 4. Một chùm phô tôn được chiếu song song lên bề mặt trên của tấm thủy tinh theo phương vuông góc với mặt đáy nhỏ của nó. Khi đó trên mặt đáy lớn đã đánh nhám sẽ quan sát được hình ảnh giao thoa. Biết rằng bề dày của tấm là H = 10cm, năng lượng riêng của mỗi phô tôn là W = $1.10^{-19}$J, góc $\alpha$ = 0,02rad. Hãy xác định bậc lớn nhất của dãy cực đại giao thoa quan sát được. Hằng số Plăng h = $6{,}62.10^{-34}$Js.

ĐS: $k_{\max} = \left\{ \dfrac{(n-1)^2 \alpha^2 HW}{2nhc} \right\} = 6$




# IX.4 CÁC ĐẠI LƯỢNG QUANG TRẮC

**Bài 1.** Hãy tính độ rọi tại tâm điểm và tại sát mép của một chiếc bàn tròn có đường kính D = 3m nếu ngọn đèn có kích thước nhỏ, cường độ I = 200cd treo bên tâm bàn và có độ cao h = 2m.




ĐS: $E_0$ = $=50lux$. $E_M$ = $=25,6lux$

**Bài 2.** Hãy xác định cường độ của ngọn đèn đường, sao cho độ rọi trên mặt đất tại điểm cách đều hai đèn là E = 0,2 lux. Các đèn được treo ở độ cao h = 10 m, khoảng cách giữa hai cột đèn là l = 40 m. Chỉ cần tính độ rọi do hai đèn gần nhau tạo nên.

ĐS: $I \approx 110cd$

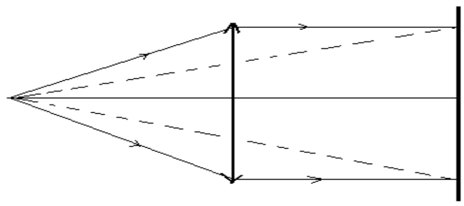
**Bài 3.** Một nguồn sang điểm nằm cách một màn ảnh một khoảng L, đặt vào khoảng giữa nguồn và màn một tấm thủy tinh hai mặt song song có chiết suất n = 1,5 và bề dày h = L/6, thì nhận thấy độ rọi tại tâm màn vẫn như trước. Hãy xác định hệ số phản xạ trung bình của bề mặt thủy tinh khi ánh sáng rọi vuông góc.

ĐS: $\rho = \frac{1}{18} = 5{,}5\%$

**Bài 4.** Một ngọn đèn nhỏ bóng mờ đặt cách một màn ảnh một khoảng L = 1m. Nhờ dịch chuyển một chiếc thấu kính người ta thu được trên màn hai lần ảnh rỏ nét của bóng đèn. Độ rọi của ảnh khi đó khác nhau 9 lần. Hãy xác định tiêu cự của thấu kính.

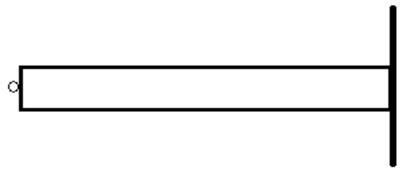
ĐS: f = 18,75 cm.

**Bài 5.** Một nguồn sáng điểm nằm cách một màn ảnh một khoảng L. Giữa nguồn và màn đặt một thấu kính hội tụ, sao cho nguồn rơi vào tiêu điểm của thấu kính. Khi đó nhận thấy độ rọi trên màn không thay đổi trước và sau khi đặt thấu kính. Hỏi đã có bao nhiêu phần trăm năng lượng ánh sáng đã bị mất khi đi qua thấu kính? Xét trường hợp f = $\frac{2}{3}L$



***ĐS:*** $55{,}5\%$

**Bài 6.** Một màn ảnh có lỗ tròn đường kính d=1 cm. Một nguồn sáng điểm nằm cách màn một khoảng L = 1m trên trục của lỗ. Đặt vào giữa màn và nguồn một thanh thủy tinh chiếc suất n = 1,5 dài đúng bằng L và đường kính đúng bằng d. Hỏi quang thông qua lỗ tăng lên bao nhiêu lần? Bỏ qua mất mát do phản xạ.



ĐS: $\frac{\Phi_2}{\Phi_1} = 8.10^4$

**Bài 7.** Độ chói của Mặt Trời bằng 1.000.000.000 nt. Đường kính Mặt Trời d = $1{,}4.10^6$ km. Hãy tìm cường độ của ánh sáng Mặt Trời quan sát từ Trái Đất và độ rọi trên một màn ảnh đặt trên Mặt Đất vuông góc với ánh sáng Mặt Trời. Biết khoảng cách từ Trái Đất đến Mặt Trời là L =$1{,}5.10^8$ km.

ĐS: I = $1{,}5.10^{27}\,cd$ và E = $67.000\,lux$

**Bài 8.** Một quang thong $\Phi$ = 1.000 lm rọi trên một tờ giấy trắng với diện tích S = 500 $cm^2$. Hế số phản xạ của tờ giấy $\rho = 0{,}68$. Hãy xác định độ rọi và độ chói của tờ giấy đó.

ĐS: E= $2.10^4\,lux$ **;** B = $4330\,nt$

**Bài 9.** Một nguồn sáng chuẩn có cường độ sáng $I_0$ = 25 cd. Khoảng cách từ nguồn sáng chuẩn đến màn của một quang kế bằng $l_1$ = 15 cm. Một nguồn sáng thử đặt cách màn một khoảng $l_2$ = 45 cm thì cho cùng độ rọi trên mặt. Tính cường độ của chùm sáng thử.

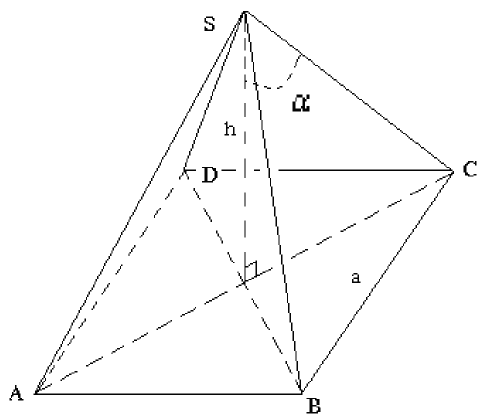
***ĐS:*** $I_2 = 9I_0 = 225\,cd$

**Bài 10.** Một thợ ảnh tập sự hiểu rỏ về quang hình đã chụp ảnh mặt trước của một ngôi nhà ở khoảng cách 100 m với một thời gian mở cửa sập của máy ảnh $t_1$ nào đó. Đi gần đến ngôi nhà thêm 50 m và biết rằng sẽ thu được ảnh có diện tích lớn hơn 4 lần, anh ta quyết định tăng thời gian chụp lên $t_2$ = 4 $t_1$. Về nhà khi tráng phim thì nhận thấy ảnh đầu đẹp, ứng với thời gian chụp đúng, còn thời gian chụp ảnh thứ hai không đúng. Hãy xác định xem đúng ra anh ta phải tăng thời gian chụp $t_3$ mấy lần so với $t_1$.

ĐS: $t_3 = t_1$.

**Bài 11**. Ở giữa một căn phòng hình vuông diện tích 16 $m^2$ có một ngọn đèn coi như là nguồn sáng điểm đẳng hướng được treo trên trần nhà. Hãy xác định độ cao của đèn so với sàn nhà để độ rọi E tại các góc phòng là lớn nhất

ĐS: $h = \frac{a}{2} = 2m$




**Bài 12.** Khi in ảnh, người ta dùng một ngọn đèn có cường độ sáng I đặt cách phim 1m; thời gian phơi sáng cần thiết của phim khi đó là 20s. Nếu thay bằng đèn có cường độ ánh sáng bằng I/2 đặt cách phim 0,5m thì thời gian phơi sáng cần thiết của phim đó là

bao nhiêu? Xem rằng đèn được đặt trên đường thẳng đứng vuông góc với mặt phim và đi qua tâm đối xứng của nó.

ĐS: $t_2 = t_1 \frac{I_1}{I_2} \frac{r_2^2}{r_1^2} = 10s$

**Bài 13.** Hai nguồn sáng điểm có cường độ sáng bằng nhau $I_1 = I_2 = 100$cd phát ánh sáng đẳng hướng, treo cách nhau 4m ở cùng một độ cao, đều cách sàn nhà 2,5 m. Xác định điểm có độ rọi cực đại trên sàn nhà và tính độ rọi cực đại đó.

Bỏ qua sự tán xạ ánh sáng trên trần nhà và trên tường.

ĐS: Nghĩa là M nằm trung điểm $H_1H_2$. Khi đó $E_{max} = 2Ih(h^2 + d^2/4)^{-3/2} = 15,24$ lux.

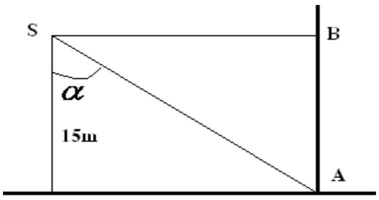
**Bài 14.** Ở độ cao 2m phía trên một mặt phẳng nằm ngang MN, người ta đặt 2 nguồn sang cách nhau 1m; mỗi nguồn cho một quang thông 300 lm. Hãy xác định độ rọi trên mặt MN tại:

a) Điểm ngay dưới mỗi nguồn sáng

b) Điểm cách đều 2 nguồn sáng.

ĐS: a. 10,2lux; b. 10,9 lux

**Bài 15.** Một đèn chiếu đặt ở độ cao so với mặt phẳng ngang là 15 m. Tại một điểm nào đó trên mặt phẳng ngang có độ rọi là 10 lux và độ rọi cực đại trên mặt phẳng thẳng đứng đi qua điểm đó là 20 lux. Hãy xác định cường độ sáng của đèn theo phương từ đèn đến điểm đó.




Đáp số: I = 24875 cd

**Bài 16.**

a) Một dây tóc bóng đèn dài 60 cm đường kính 0,04 mm phát ra quang thông 400 lm. Xác định độ trưng của bóng đèn

b) Một sợi dây kim loại nóng sáng, dài L = 60 cm, bức xạ một quang thông 132 lm. Xác định độ rọi tại điểm đối diện với trung điểm của dây và nằm trên một mặt phẳng song song với dây, cách dây một khoảng a = 5 cm.

ĐS: a. R = $\frac{\Phi}{\pi dl} = 5,3 lm/m^2$;b) E = $\frac{\Phi}{2\pi al} = 700 lux$

**Bài 17.** Một mặt đĩa diện tích $1cm^2$ phát xạ đồng đều và đẳng hướng (như một nguồn phát xạ tuân theo định luật Lambert) với độ chói $1W.cm^2 strad^{-1}$ ở một tần số nào đó trong phổ ánh sáng nhìn thấy.

a. Tính thông lượng toàn phần của năng lượng phát ra từ mặt đĩa.

b. Cho một thấu kính bằng thạch anh đúc (n = 1,5) có đường kính 10cm, tiêu cự 100cm. Tìm ảnh của nguồn phát xạ trên mặt đĩa có diện tích $1/4cm^2$.

c. Tính năng thông toàn phần tới $1/4cm^2$ mặt đĩa trong phạm vi sai số vài phần trăm.

d. Bằng cách thay đổi n và kích thước thấu kính có thể làm tăng năng thông tới $1/4cm^2$ mặt đĩa. Bằng lập luận nào ta có thể xác định được năng thông cực đại tới $1/4cm^2$ mặt đĩa có thể đạt được?

ĐS: a. $\Phi = \pi BS = 3{,}14W$ ; b. Khoảng cách của vật và ảnh tương ứng là 300cm và 150cm.

c. $\Phi' = BS\Omega = 8{,}7.10^{-4}W$ ; d. $\Phi'' = \dfrac{\Phi}{4} = 0{,}785W$

**Bài 18.** Một thấu kính (tiêu cự f) cho ảnh của mặt trời trên mặt phẳng tiêu. Chứng minh rằng độ chói của ảnh $(W/m^2)$ gần bằng độ chói của bề mặt mặt trời.

**Bài 19.**Không thể tăng độ chói biểu kiến của một nguồn sáng khuếch tán rộng (góc khối lớn) nhờ các thấu kính. Bài toán này minh họa kết luận đó đối với thấu kính đơn. Một nguồn sáng có độ chói S trương một góc khối lớn hơn góc khối nhận Ω của kính thiên văn quan sát nó. Nguồn phát S đơn vị quang năng trên đơn vị diện tích, trong đơn vị góc khối và đơn vị thời gian một cách đẳng hướng. Kính vật của kính thiên văn có diện tích A và là một thấu kính mỏng.

a. Chứng minh rằng năng lượng tới kính thiên văn trong một giây là SΩA.

b. Chứng minh rằng tích của diện tích ảnh tạo bởi kính vật và góc khối trương bởi kính vật là ΩA.

c. Giải thích tại sao những kết quả trên đây chứng tỏ rằng độ chói biểu kiến của một nguồn rộng không thay đổi bởi kính vật của kính thiên văn.

**Bài 20.** Khi mặt trời ở trên đỉnh đầu, một bề mặt trắng phẳng có một quang thông nhất định. Bây giờ ta dùng một thấu kính bán kính r, tiêu cự f hội tụ ảnh mặt trời trên một tấm mỏng. Tính quang thông trong diện tích ảnh. Với r cho trước, tính f để thấu kính không làm tăng quang thông trong ảnh? Từ mặt đất góc nhìn mặt trời khoảng 0,01rad. Chỉ có ánh sáng rong ảnh mới đi qua thấu kính.

ĐS: $\Phi' = \pi B\sigma'\left(\dfrac{r}{f}\right)^2$ , $\sigma'$ là diện tích được chiếu sáng trên mặt đất . Đối với $f \geq 100r$ thấu kính sẽ không làm tăng quang thông trên diện tích ảnh.

**Bài 21. (HSGQG 2015)**

Khi một tia sáng tới mặt phẳng ngăn cách giữa hai môi trường có chiết suất $n_1$ và $n_2$ theo phương vuông góc thì đồng thời xuất hiện cả tia phản xạ và tia khúc xạ. Tỉ số giữa cường độ $I_p$ của tia phản xạ và $I_0$ của tia tới được cho bởi biểu thức:

$$\frac{I_p}{I_0} = \left[\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}\right]^2$$

Chiếu một chùm tia sáng hẹp vào bề mặt một tấm thủy tinh có hai mặt song song theo phương gần như vuông góc với bề mặt. Chiết suất của tấm thủy tinh là n, chiết suất không khí là $n_0$ =1.

1. Hỏi có bao nhiêu phần trăm cường độ của chùm sáng đó sẽ truyền được qua tấm thủy tinh này? Bỏ qua sự hấp thụ của tấm thủy tinh với ánh sáng và biết độ dày của tấm thủy tinh rất lớn so với bước sóng của ánh sáng. Áp dụng bằng số với n = 1,45.

2. Để giảm sự phản xạ ánh sáng xảy ra khi chiếu vào tấm thủy tinh, người ta phủ lên mặt của tấm thủy tinh một lớp chất trong suốt có chiết suất $n' = \sqrt{n}$ và có độ dày cỡ độ lớn của bước sóng ánh sáng. Khi đó thấy tấm thủy tinh này gần như khử được sự phản xạ ánh sáng đơn sắc có bước sóng λ xác định. Hãy giải thích hiện tượng và tính bề dày nhỏ nhất của lớp chất phủ này theo n và λ.

ĐS: 1. $T' = \frac{16n^2}{(n+1)^4} \approx 93,4\%$; 2. $e_{min} = \frac{\lambda}{4\sqrt{n}}$

# CHƯƠNG X.
# CƠ HỌC TƯƠNG ĐỐI HẸP
## X.1 ĐỘNG HỌC TƯƠNG ĐỐI TÍNH.

**Bài 1.** Tìm lại luật hợp các vận tốc song song bằng hai phép biến đổi Loren đặc biệt.

**Bài 2.** Gọi $\overrightarrow{u}(u_x, u_y, 0)$ và $\overrightarrow{u^/}(u_x', u_y', 0)$ là vận tốc của một hạt trong các hệ K và K$^/$; $\overrightarrow{v}$ là vận tốc tương đối của hệ quy chiếu quán tính K$^/$ đối với hệ hệ quy chiếu quán tính K; $\overrightarrow{v}//\text{Ox}//O'x'$ .

Hãy chứng minh hệ thức: $u = \dfrac{\sqrt{(\overrightarrow{u^/}+\overrightarrow{v})^2 - \left[\overrightarrow{u^/}\wedge\overrightarrow{v}\right]^2/c^2}}{1+\dfrac{1}{c^2}(\overrightarrow{u^/}\,\overrightarrow{v})}$

**Bài 3.** Vận tốc của một hạt đối với hệ qui chiếu K$^/$ là **u**$^/$ nằm trong mặt phẳng **x**$^/$**0y**$^/$ hợp với trục 0$^/$x$^/$ một góc $\theta^/$. **Hệ K**$^/$ chuyển động dọc theo trục 0x của hệ K với vận tốc v. Hãy xác định phương của vận tốc u của hạt trong hệ K.

ĐS: $tg\theta = \dfrac{u'\sqrt{1-\beta^2}\sin\theta'}{v+u'\cos\theta'}$ , $\theta$ là góc hợp bởi u và trục Ox.

**Bài 4.** Hai tên lửa được phóng đi từ Trái Đất trên cùng một phương theo hai hướng ngược nhau với vận tốc 0,8c đối với Trái Đất. Hỏi:
a)Hai tên lửa tách xa nhau với vận tốc bằng bao nhiêu theo quan điểm cổ điển và tương đối tính của người đứng trên Trái Đất.

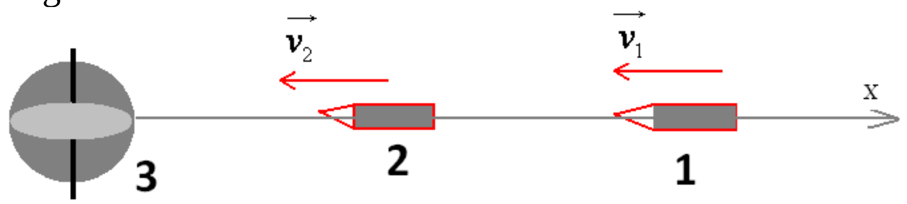
b)Vận tốc của một tên lửa đối với hệ qui chiếu gắn với tên lửa kia.

ĐS: a. $v = 0{,}97c$; b. $v_{12} = 0{,}97c$

**Bài 5.** Thời gian sống riêng trung bình của mêzôn $\mu$ khoảng $2.10^{-6}$ s. Giả sử có một dòng mêzôn $\mu$ từ một độ cao nào đó trong khí quyển chuyển động với vận tốc V = 0,99c. Số va chạm trong khí quyển trên đường đi của chúng xuống dưới là không lớn. Nếu như tại mặt đất chỉ còn lại 1% số mêzôn của dòng ban đầu. (*Nếu xét trong hệ qui chiếu của dòng mêzôn, thì số hạt còn lại sau thời gian t được xác định bằng công thức* *N(t) =* $N = N_0 e^{-\frac{t_0}{\tau}}$*, vơi* $\tau$ *là thời gian sống*). Hãy xác định độ cao ban đầu.
Đáp số: 20.000m=20Km.

**Bài 6.** Theo quan điểm của một quan sát viên trên một xe chuyển động thì hai sét đánh tại hai điểm A (trước xe) và B (sau xe) xảy ra đồng thời. Hỏi theo quan điểm của người đứng trên mặt đất thì sét nào trước, sét nào sau?
ĐS: Quan điểm của người đứng trên mặt đất thì sét đánh ở B trước (phía sau xe) ở A sau (trước xe).

**Bài 7.** Hai tàu vũ trụ 1 và 2 bay hướng về phía Trái Đất dọc theo một đường thẳng với vận tốc như nhau v = 0,6c (hình vẽ). Tại một thời điểm nào đó, các tàu và Trái Đất gửi cho nhau các xung ánh sáng ngắn (tàu 1 gửi cho tàu 2 và Trái Đất, tàu 2 gửi cho tàu 1 và Trái Đất, Trái Đất gửi cho tàu 1 và 2). Biết rằng các tín hiệu được phát đi đồng thời trong hệ quy chiếu gắn với Trái Đất. Sau đó *(nói rõ thêm người trên trái đất cho rằng)* thấy thời gian giữa hai lần nhận xung theo đồng hồ trên tàu 1 là $\tau_1'$ = 1s, trên tàu 2 là $\tau_2'$=0. Hỏi thời gian $\tau_3$ giữa các lần nhận xung*( của người trên trái đất)* trên Trái Đất bằng bao nhiêu?




**ĐS:** $\tau_3 = \tau'_1\sqrt{\frac{c-v}{c+v}} = 0{,}5s$

**Bài 8.** Có hai anh em sinh đôi. Vào năm họ 20 tuổi thì người anh lên tàu vũ trụ bay với vận tốc v = 0,8c (c = $3.10^8$m/s là vận tốc ánh sáng trong chân không) tới một ngôi sao S ở cách Trái Đất 12 nas (nas là chiều dài bằng quãng đường ánh sáng đi được trong một năm) rồi lập tức quay về cùng với vận tốc v.

- Người em ở lại Trái Đất dùng các công thức của thuyết tương đối hẹp để tính xem vào lúc người anh trở lại Trái Đất thì mỗi người đã bao nhiêu tuổi.

- Người anh cũng dùng các công thức ấy để tính tuổi hai anh em lúc gặp lại nhau. Hãy làm các tính toán của họ và nêu kết luận của họ về sự già hoặc trẻ của hai anh em với nhau.

ĐS: Theo cách tính của người em, người em đã 50 tuổi, người anh 38 tuổi. Như thế người em kết luận: anh trẻ hơn mình 12 tuổi.

Theo cách tính của người anh, người anh 38 tuổi, em có 30,8 tuổi. Anh kết luận: em trẻ hơn 7,2 tuổi.

**Bài 9.** Năm 1971 thuyết tương đối của Anhxtanh đã được kiểm chứng như sau:

Người ta đặt đồng hồ nguyên tử Cs rất chính xác lên một máy bay, cho bay một vòng theo một vĩ tuyến xác định và so sánh thời gian bay $t_b$ tính theo đồng hồ trên máy bay với thời gian $t_đ$ tính theo một đồng hồ nguyên tử Cs khác gắn với mặt đất có cùng vĩ độ.

- Lần đầu bay theo hướng **Đông**, lần sau bay theo hướng **Tây** ở cùng độ cao. Vận tốc của máy bay đối với mặt đất là v = 250m/s. Đối với quan sát viên O đứng yên ở Bắc cực thì đồng hồ gắn với mặt đất có vận tốc $v_đ$ = 400m/s.

Coi các hệ quy chiếu gắn với máy bay hoặc mặt đất đều là hệ quy chiếu quán tính, hãy tính hiệu số $\Delta t = t_b - t_đ$ cho lần bay theo hướng Đông ($\Delta t_Đ$) và lần bay theo hướng Tây ($\Delta t_T$). Biết $t_đ$ = 45h.

Thời gian bay một vòng vĩ tuyến theo hướng này ngắn hơn so với bay theo hướng kia bao nhiêu nanô giây?

ĐS: - Khi bay theo hướng đông sẽ có $\Delta t_D \approx -236ns$

- Khi bay theo hướng tây có $\Delta t_T = 124ns$

Như vậy $\Delta t_T - \Delta t_D = 360ns$, nghĩa là bay theo hướng Đông ngắn hơn theo hướng Tây.

**Bài 10.** Trong hệ quy chiếu gắn với **Lee** đang đứng yên so với đất, **Zhang** và nhóm bạn chuyển động sang phải với vận tốc tương đối tính v, còn **Wang** và các bạn của mình chuyển động sang trái với cùng tốc độ v. Khi còn ở cùng một chỗ, cả ba người đều chỉnh đồng hồ của mình về 0. Lee đứng quan sát trên mặt đất và khi thấy khoảng cách giữa nhóm của Zhang và Wang là L (trong hệ quy chiếu của Lee) thì Lee nhìn thấy Zhang và nhóm bạn vỗ tay. Cho biết công thức tính vận tốc tương đối giữa Zhang và Wang:

$v_r = \dfrac{2\beta c}{1+\beta^2}$, trong đó: β = $\frac{v}{c}$, c là vận tốc ánh sáng.

1.Đồng hồ của Zhang chỉ bao nhiêu khi Zhang và nhóm bạn vỗ tay?

2.Trong hệ quy chiếu gắn với nhóm Wang, khi họ nhìn thấy Zhang vỗ tay, họ cũng vỗ đáp trả. Trong hệ quy chiếu gắn với nhóm Zhang, khi họ nhìn thấy nhóm Wang vỗ tay, họ vỗ tay lần thứ hai. Nhóm Wang, trong hệ quy chiếu của mình, khi thấy nhóm Zhang vỗ tay cũng vỗ tay lần hai. Cứ tiếp tục như vậy, khi nhóm Zhang vỗ tay lần thứ n, các nhóm Wang và Zhang ở cách xa nhau bao nhiêu nếu quan sát từ hệ quy chiếu mặt đất (của Lee)?

3.Trong hệ quy chiếu đứng yên gắn với nhóm Lee, các nhóm Zhang và Wang vỗ tay ở những thời điểm nào? Có nhận xét gì về thứ tự các thời điểm này?

ĐS: 1. $t_{1Z} = \dfrac{L}{2v}\sqrt{1-\beta^2} = T$ ; 2. $d = \left[\dfrac{(1+\beta^2)^2}{(1-\beta^2)(1-\beta)^2}\right]^{n+1}\dfrac{L}{2}$

3. Theo Lee sẽ thấy nhóm Zhang và Wang vỗ tay vào những thời điểm :

+Zhang: $\dfrac{t_{1Z}}{\sqrt{1-\beta^2}};\dfrac{t_{2Z}}{\sqrt{1-\beta^2}};\dfrac{t_{3Z}}{\sqrt{1-\beta^2}}.....\dfrac{t_{nZ}}{\sqrt{1-\beta^2}}$

+Wang: $\dfrac{t_{1W}}{\sqrt{1-\beta^2}};\dfrac{t_{2W}}{\sqrt{1-\beta^2}};\dfrac{t_{3W}}{\sqrt{1-\beta^2}}.....\dfrac{t_{nW}}{\sqrt{1-\beta^2}}$

**Bài 11.** Một hình tam giác đều đứng yên đối với hệ quy chiếu K’ có một cạnh nằm trên trục Ox’ có diện tícsh S’. Hệ K’ chuyển động thẳng đều đối với hệ quy chiếu quán tính K dọc theo trục Ox với vận tốc v = 0,6c ( c là vận tốc ánh sáng trong chân không). Trong hệ quy chiếu quán tính K, diện tích của tam giác là S.

1) Tìm hệ thức liên hệ giữa S và S’.

2) Tính các góc của tam giác trên trong hệ quy chiếu quán tính K.

ĐS: a. S = 0,8.S’**; 2.** $\hat{A} = 50^0$, $\hat{C} = \hat{B} = 65^0$

**Bài 12.** Hệ quy chiếu K' (O'x'y'z') chuyển động với vận tốc $\vec{v}$ không đổi dọc theo trục O'x' (O'x' trùng với trục Ox, O'y' và O'z' lần lượt song song với Oy và Oz) đối với hệ quy chiếu K (Oxyz). Từ các công thức của phép biến đổi Lorentz và các công thức cộng vận tốc, tìm gia tốc $\vec{a}'$ tương ứng của một hạt trong hệ K' tại thời điểm trong hệ K hạt này chuyển động với vận tốc $\vec{u}$ và gia tốc $\vec{a}$ dọc theo một đường thẳng

a. song song với $\vec{v}$

b. vuông góc với $\vec{v}$

c. nằm trong mặt phẳng xOy có phương lập với $\vec{v}$ một góc $\alpha$.

ĐS: a. $a' = \dfrac{\left(1-\beta^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(1-\dfrac{v}{c^2}u\right)^3}a$ ; b. $a' = \left(1-\beta^2\right)a$ ;

c. $a'_{x'} = \dfrac{a\cos\alpha\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}{\left(1-\dfrac{uv\cos\alpha}{c^2}\right)^3}$ ; $a'_{y'} = \dfrac{\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)\times a.\sin\alpha}{\left(1-\dfrac{v}{c^2}u.\cos\alpha\right)^3}$.

# X.2 ĐỘNG LỰC HỌC- NĂNG XUNG LƯỢNG TƯƠNG ĐỐI TÍNH

**Bài 1** Một vật có khối lượng nghỉ $m_0$ = 1kg chuyển động với vận tốc $v_0$ = 0,6c tới va chạm mềm với một vật đứng yên có khối lượng nghỉ $m_1$ = 2kg. Tìm khối lượng nghỉ m và vận tốc v của hạt tạo thành. Cho biết 1kg = $561.10^{27}$MeV/$c^2$.

ĐS: $v = \dfrac{3}{13}c$= 0,23c; m = $\sqrt{10}$=3,17 kg

**Bài 2.** Hạt có khối lượng nghỉ $m_0$ = 1000MeV/$c^2$ và động năng $k_0$ = 250MeV va chạm mềm vào một hạt đứng yên có khối lượng nghỉ $m_1$ = 3000MeV/$c^2$. Tính khối lượng nghỉ m và vận tốc của hạt tạo thành.

ĐS: $v = 0{,}176c$ ;m = 4183 MeV/$c^2$.

**Bài 3.** Mêzôn $\pi$ đứng yên tự phân hủy thành mêzôn $\mu$ và notrinô (nơtrinô có khối lượng nghỉ $m_v$ = 0). Biết khối lượng nghỉ của mêzôn $\pi$ là $m_\pi$ và mêzôn $\mu$ là $m_\mu$ . Tính động năng K của hạt mêzôn $\mu$ .

ĐS: K = $\dfrac{(m_\pi - m_\mu)^2}{2m_\pi}c^2$

**Bài 4.** Chứng minh rằng khi không có trường ngoài, phôtôn không thể biến thành cặp êlecrôn – pôzitrôn.

**Bài 5.** Một hạt m có năng lương W bay tới đập vào mộ**t** hạt khác đứng yên khối lượng M. Xác định biểu thức  năng lượng $W_t$ của hạt này (hạt m) sau khi va chạm phụ thuộc vào góc tán xạ $\theta$. Va chạm coi là đàn hồi.

Xét trường hợp m = 0 (hiệu ứng Comtơn Compton).

ĐS: $(W - W_1)Mc^2 - W W_1 + \sqrt{(W^2 - m^2c^4)(W_1^2 - m^2c^4)}\cos\theta + m^2c^4 = 0$

**Bài 6.** Hai hạt có cùng khối lượng nghỉ m được phát ra theo cùng một hướng, với các xung lượng tương ứng là 5mc và 10mc so với phòng thí nghiệm(PTN). Khi nhìn từ hạt có xung lượng nhỏ hơn, chậm hơn thì vận tốc của hạt có xung lượng lớn hơn nhanh hơn là bao nhiêu, và ngược lại (c = vận tốc ánh sáng).

ĐS: $v_{21} \approx 0{,}595c$ ; $v_{12} \approx -0{,}595c$

**Bài 7.** Một vật có khối lượng nghỉ $m_0$ và đang chuyển động thì chịu tác dụng lực $\vec{F}$ không đổi. Sau đó vật tăng tốc, đến một thời điểm t nào đó vật đạt vận tốc $\vec{u}$ .

a. Hãy lập biểu thức gia tốc $\vec{a}$ theo $\vec{u}$ và lực $\vec{F}$ .

b. Khi $\vec{u} = \vec{u_1}$ thì lực $\vec{F}$ □ □ $\vec{u_1}$ . Hãy tìm gia tốc $\vec{a_1}$ khi đó.

c. Khi $\vec{u} = \vec{u_2}$ thì lực $\vec{F} \perp \vec{u_2}$ . Hãy tìm gia tốc $\vec{a_2}$ khi đó.

ĐS: a. $\vec{a} = \dfrac{1}{m}\left[\vec{F} - \dfrac{1}{c^2}(\vec{F}\vec{u})\vec{u}\right]$; b. $\rightarrow \vec{a_1} = \dfrac{(1-\frac{u_1^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}{m_0}\vec{F} = \dfrac{\vec{F}}{m_0\gamma_1^3}$; c.

$\rightarrow \vec{a}_2 = \dfrac{\sqrt{1-\frac{u_2^2}{c^2}}}{m_0}\vec{F} = \dfrac{\vec{F}}{m_0\gamma_2}$

**Bài 8.** Một hạt có khối lượng nghỉ $m_0$ đang chuyển động với vận tốc $\vec{v_1}$ $(v_1 = 0,6c)$ thì chịu tác dụng lực $\vec{F}$, tăng tốc đạt đến vận tốc $\vec{v_2}$ $(v_2 = 0,8c)$ sau khoảng thời gian $\tau$. Biết rằng $\vec{F}$ cùng hướng $\vec{v_1}$ và luôn không đổi. Tìm F?

ĐS: $F = \dfrac{7m_0c}{12\tau}$

**Bài 9**. Một chất điểm có khối lượng $m_0$, chuyển động dọc theo trục x của hệ quy chiếu K.

a. Nếu tại t = 0, x = 0 ta bắt đầu tác dụng lực $\vec{F}$ không đổi dọc theo trục x, tìm sự phụ thuộc của tọa độ theo thời gian của chất điểm trên.

b. Nếu chất điểm chuyển động theo phương trình $x = \sqrt{a^2 + c^2t^2}$, tìm lực tác dụng lên hạt trong hệ quy chiếu này.

ĐS: a. $x = \sqrt{m_0^2c^4/F^2 + c^2t^2}$ ; b. $F = \dfrac{m_0c^2}{a}$

**Bài 10.** Xuất phát từ phương trình động lực học tương đối tính, hãy tìm:

a. Các trường hợp như thế nào thì lực tác dụng $\vec{F}$ cùng phương với gia tốc $\vec{a}$

b. Trong các trường hợp đó, tìm mối quan hệ giữa $\vec{F}$ và $\vec{a}$

ĐS: a. Để lực tác dụng cùng phương với gia tốc của lực tác dụng phải cùng phương với vận tốc hoặc vuông góc với vận tốc.

b. Khi $\vec{u}//\vec{F}$ thì $\vec{F} = \dfrac{m_0}{\left(\sqrt{1-\vec{u}^2/c^2}\right)^3}\vec{a}$.

Khi $\vec{u} \perp \vec{F}$ thì $\vec{F} = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\vec{u}^2/c^2}}\vec{a}$.

**Bài 11.** Một proton tương đối tính, tại thời điểm t = 0 bay vào với vận tốc $\vec{v_0}$ trong miền có điện trường đều $\vec{E}$. Khảo sát chuyển động của proton trong hai trường hợp sau:

a) $\vec{v}_0 // \vec{E}$, tìm biểu thức xác định vận tốc $\vec{v}$ của proton theo thời gian.

b) $\vec{v}_0 \perp \vec{E}$, xác định góc $\theta = \left(\vec{v};\vec{v_0}\right)$ giữa hai vector $\vec{v}$ và $\vec{v_0}$ theo thời gian; hình chiếu $v_x$ của $\vec{v}$ lên phương $\vec{v_0}$.

c) Cũng proton này, nhưng tại thời điểm t = 0 bay vào một miền từ trường $\vec{B}$ nào đó. Biết proton này chuyển động tròn, xác định bán kính quỹ đạo của proton này và gia tốc của proton nàytheo vận tốc v.

ĐS: a. $\frac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{v_0}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}} + \frac{qEt}{m_0}$

b. $\tan\theta = \frac{qEt}{m_0 v_0}\sqrt{1-v_0^2/c^2}$

c. $R = \frac{m_0 v/qB}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ và $a = \frac{qvB}{m_0}\sqrt{1-v^2/c^2}$.

**Bài 12.** Trên lãnh thổ Kazakhstan có bệ phóng tên lửa Baikonur – bệ phóng mà từ đó vệ tinh Trái đất đầu tiên được phóng lên và người trở thành nhà du hành vũ trụ đầu tiên là Yu.A. Gagarin. Bệ phóng tên lửa Baikonur là một tổ hợp các cấu trúc công nghệ cao được thiết kế để phóng các phương tiện có người lái vào không gian, đặc biệt là đến Trạm vũ trụ quốc tế (ISS).

Để thực hiện di chuyển giữa các vì sao, cần phải tăng tốc tên lửa để đạt tốc độ gần với tốc độ ánh sáng, và do đó không thể bỏ qua các tác động của lý thuyết tương đối trong các tính toán. Để xác định tính chất của chuyển động tên lửa trong trường hợp tương đối tính, chúng ta giới thiệu khái niệm về một hệ quy chiếu đi kèm. Hệ quy chiếu đi kèm là một hệ quy chiếu quán tính di chuyển so với hệ quy chiếu trong phòng thí nghiệm với tốc độ của tên lửa, có nghĩa nó là hệ quy chiếu mà trong đó tên lửa đứng yên tại một thời điểm nhất định.

**1.** Tìm mối quan hệ giữa gia tốc của tên lửa trong hệ quy chiếu đi kèm $a_p$ và gia tốc của nó trong hệ quy chiếu của phòng thí nghiệm $a_r$ nếu tốc độ của tên lửa tại một thời điểm nhất định là v và tốc độ ánh sáng là c.

**2.** Cho tên lửa đứng yên tại thời điểm ban đầu. Sau đó, bằng cách sử dụng kết quả ở trên, có thể thấy rằng khối lượng của tên lửa tại một thời điểm trong hệ quy chiếu đi kèm có liên quan đến tốc độ của nó trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm theo tỷ lệ:

$$m = m_0\left(\frac{1-\mathrm{v}/c}{1+\mathrm{v}/c}\right)^{\alpha}$$

Tìm α và biểu diễn nó theo u, c.

**3.** Để một vật có khối lượng m = 1000 kg tăng tốc đến tốc độ bằng một nửa tốc độ ánh sáng = 0,5c với c = 3,00. $10^8$ m/s. Tìm khối lượng ban đầu của tên lửa $m_0$(bao gồm cả nhiên liệu), nếu biết vận tốc của dòng nhiên liệu thoát ra là u = 5,00 km/s.

**4.**Theo quan điểm thực nghiệm, tên lửa để thực nghiệm tốt nhất là tên lửa photon. Tên lửa này không phun ra khí nóng do quá trình đốt cháy nhiên liệu, mà là photon. Cần cho một vật có khối lượng m = 1000 kg tăng tốc lên tốc độ v = 0,5c. Tìm khối lượng ban đầu của tên lửa photon $m_0$.

ĐS: 1. $a_r = (1-\frac{v^2}{c^2})^{\frac{3}{2}} a_p$; 2. $\alpha = \frac{c}{2u}$; 3. $m_0 = m\left(\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}\right)^{\frac{c}{2u}}$; 4. $m_0 = m\left(\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}\right)^{\frac{c}{2u}} = 1730kg$

**Bài 13.** Một hạt tương đối tính có khối lượng nghỉ m do va chạm với một hạt đứng nghỉ có khối lượng M gây ra phản ứng sinh các hạt mới: $m + M \to m_1 + m_2 + ... + m_n$, trong đó vế bên phải để chỉ khối lượng nghỉ của các hạt sinh ra. Dùng tính bất biến của đại lượng $E^2 - p^2c^2$ của hệ hạt, chứng minh rằng động năng ngưỡng của hạt m để sinh ra phản ứng này là:

$$K = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)^2 - (m+M)^2}{2M} c^2$$

ĐS: $K \geq \frac{(m_1 + m_2 + ... + m_n)^2 - (m+M)^2}{2M} c^2$

**Bài 14. Hiệu ứng (bức xạ) Cherencov**

Một hạt điện tích chuyển động với vận tốc u không đổi trong một môi trường trong suốt, đồng tính, đẳng hướng, chiết suất $n > 1$.

a) Tìm biểu thức sự phụ thuộc của động lượng và năng lượng photon ứng với chùm bức xạ đơn sắc truyền trong môi trường vào chiết suất n của môi trường, tần số f của bức xạ và các hằng số vũ trụ. Biết rằng trong chân không bức xạ có bước sóng $\lambda_0$.

b) Trong một điều kiện thích hợp, hạt mang điện sẽ phát ra một photon có tần số f theo phương hợp với vận tốc u góc $\alpha$ (Hiệu ứng Cherencov). Dùng định luật bảo toàn năng lượng và định luật bảo toàn động lượng hãy tính $\cos\alpha$ và các điều kiện cần và đủ để xảy ra hiệu ứng là $c > u > v$ ($v = \frac{c}{n}$ là vận tốc ánh sáng trong môi trường, c là vận tốc ánh sáng trong chân không). Giả thiết là năng lượng của photon nhỏ hơn rất nhiều năng lượng của hạt tích điện.

ĐS:a. $\left(\frac{\varepsilon_f}{c}\right)^2 - p_f^2 = -(n^2-1)\left(\frac{hf}{c}\right)^2$

b. $\cos\alpha = \dfrac{c}{nu}\left(1+\dfrac{hf(n^2-1)}{2\varepsilon_e}\right)$. Khi $\varepsilon_f = hf \ll \varepsilon_e$ thì $\cos\alpha \approx \dfrac{c}{nu} = \dfrac{v}{u} \le 1$

ta suy ra điều kiện để có thể bức xạ Cherencov: $c > u > v$

**Bài 15.** Tại thời điểm *t* = 0, một prôton có vận tốc rất lớn bay vào một điện trường đều $\vec{E}$ với vận tốc ban đầu $\vec{V}_0$ vuông góc với $\vec{E}$. Biết rằng hạt chỉ chuyển động trong mặt phẳng chứa $\vec{E}$ và $\vec{V}_0$. Hãy xác định

**a)** Hình chiếu $V_x$ của $\vec{V}$ lên phương chuyển động ban đầu của prôton.

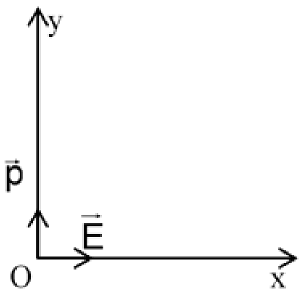
b) Sự phụ thuộc thời gian của góc $\theta$ hợp bởi vectơ vận tốc $\vec{V}$ của prôton và hướng chuyển động ban đầu của nó.

ĐS: a. $V_x = \dfrac{V_0}{\sqrt{1+(1-V_0^2/c^2)(eEt/m_0c)^2}}$ ( với $\varepsilon = \dfrac{m_0c^2}{\sqrt{1-\dfrac{V_0^2}{c^2}}}$ );

b. $\tan\theta = \dfrac{c^2eEt}{V_0}.\dfrac{\sqrt{1-V_0^2/c^2}}{m_0c^2} = \dfrac{eEt}{m_0V_0}\sqrt{1-V_0^2/c^2}$

**Bài 16.** (Chọn đội tuyển dự thi QUỐC TẾ 2008)

Cho một hạt điện tích $q>0$ chuyển động tương đối tính trong một điện trường đều $\vec{E}=\{E,0\}$ thuộc mặt phẳng Oxy. Lúc t = 0, hạt đi qua gốc toạ độ với động lượng




$\vec{p}=\{0,p_0\}$. Biết khối lượng nghỉ của hạt là $m_0$.

1. Thiết lập phương trình chuyển động và vẽ phác dạng quỹ đạo của hạt.

2. Xác định véctơ vận tốc của hạt ở thời điểm $t=\dfrac{p_0}{qE}$.

ĐS: 1. $x = c\sqrt{t^2+\left(\dfrac{\varepsilon_0}{qEc}\right)^2} - \dfrac{\varepsilon_0}{qE}$; $y = \dfrac{p_0c}{qE}\ln\left(\dfrac{qEc}{\varepsilon_0}\right) + \dfrac{p_0c}{qE}\ln\left(t+\sqrt{t^2+\left(\dfrac{\varepsilon_0}{qEc}\right)^2}\right)$

2. Khi $t = \frac{P_0}{qE}$: $\vec{v}$ hợp với trục Ox góc φ

$$v = \frac{P_0 c\sqrt{2}}{\sqrt{2P_0^2c^2 + m_0^2c^4}};\ \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

**Bài 17.** *( Chọn đội dự tuyển quốc tế 2005- ngày thứ nhất)*

*Trong quá trình sinh cặp, năng lượng của một photon được biến đổi hoàn toàn thành các hạt vật chất. Một sự sinh cặp xảy ra cạnh một hạt nhân nặng được* đặt trong một từ trường đều có cảm ứng từ B = 0,1T đã tạo thành cặp electron- poziton mà các quỹ đạo có bán kính cong tương ứng là 40mm và 160mm. Biết phương của cảm ứng từ vuông góc với các mặt phẳng quỹ đạo.

1. Áp dụng định luật II Niutơn $\vec{F} = \frac{d}{dt}\left(m\vec{u}\right)$, hãy tìm biểu thức vận tốc tương đối tính của hạt tích điện q trong từ trường.

2. Tìm năng lượng toàn phần của các hạt trong sự sinh cặp này.

3. Tính bước sóng của photon.

Biết mối liên hệ giữa khối lượng $m$ của hạt và vận tốc u của nó được tính theo biểu thức:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}};$$

trong đó $m_0$ là khối lượng nghỉ của hạt đo được khi hạt đứng yên đối với người quan sát, $c = 3.10^8$m/s là vận tốc ánh sáng trong chân không; $m_e = 0{,}511$MeV/$c^2$ là khối lượng nghỉ của electron.

ĐS: 1. $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = m_0c^2\sqrt{1+(\frac{qBR}{m_0c})^2}$

2. Năng lượng toàn phần của poziton và electron bằng:

$E_+ = 4{,}814$Mev

$E_- = 1{,}3$Mev.

3. $\lambda = \frac{hc}{E_+ + E_-} = 0{,}002\mathring{A}$

**Bài 18.** Tại trung tâm nghiên cứu SLAC (Stanford Linear Accelerator Center - Máy Gia tốc Tuyến Tính Stanford) để tạo ra các laser tia X người ta sử dụng một máy có tên gọi là máy lượn sóng, mà trong đó chùm electron đã được gia tốc trước đó tới năng lượng E = 14 GeV bởi một máy gia tốc tuyến tính, được cho qua khe có chiều dài 112 m tạo bởi các nam châm xếp ngược chiều xen kẽ nhau. Mỗi nam châm có chiều rộng a = 1,5 cm và cảm ứng từ bên trong nam châm có giá trị $B_0$ = 1,25 T. Khi đi qua máy lượn sóng, quỹ đạo của các electron hơi bị uốn cong (Hình 5). Sau khi ra khỏi máy lượn sóng các electron được điều hướng tới một bộ hấp thụ. Khi electron di chuyển với tốc độ cao theo một quỹ đạo cong, nó phát ra theo hướng chuyển động bức xạ tia X có bước sóng : $\lambda = \frac{a}{\gamma^2}\left(1+\frac{K^2}{2}\right)$

trong đó $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ là thừa số Lorentz, còn $K = \frac{eB_0a}{\pi m_e c}$ là thông số của máy lượn sóng.

Electron chuyển động trong máy lượn sóng như một đám mây nhỏ cỡ micrômét, nên tia X do chúng phát ra có độ kết hợp cao.

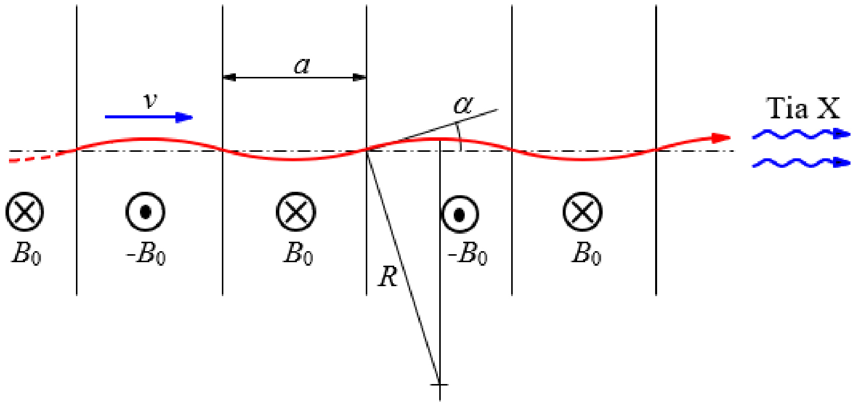
**a.** So sánh tổng năng lượng E của electron trước khi đi vào máy lượn sóng, với năng lượng nghỉ $E_0$ của nó. Vận tốc v của electron sai khác bao nhiêu % so với vận tốc c của ánh sáng trong chân không?

**b.** Tìm biểu thức bán kính R của cung tròn mà electron chuyển động theo trong mỗi phần của máy lượn sóng? Xác định góc α mà electron đi vào máy lượn sóng và độ dời lớn nhất d của electron khỏi trục của máy.

**c.** Xác định bước sóng λ của tia X được tạo ra và so sánh năng lượng $E_{ph}$ của photon với tổng năng lượng của electron ở lối vào của máy lượn sóng.

Cho biết: Khối lượng electron: $m_e = 9{,}1.10^{-31}$ kg, vận tốc ánh sáng trong chân không c = $3.10^8$ m/s, điện tích nguyên tố e =$1{,}60.10^{-19}$ C, hằng số Planck h = $6{,}6.10^{-34}$ J.s.

Năng lượng nghỉ của hạt có khối lượng nghỉ $m_0$ là $E_0 = m_0c^2$, năng lượng toàn phần của hạt chuyển động vận tốc v là $E = m.c^2 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}c^2$, năng lượng của hạt vi mô ứng với bước sóng $\lambda$ là $E_f = \frac{hc}{\lambda}$.




ĐS: a. $\frac{E}{E_0} = 27,397.10^3$; $\frac{v}{c} = 1 - 6,7.10^{-10}$;

b. $R = \frac{E}{B_0 ec} = 37,33$ m, $\alpha = 0,0115^\circ = 41''$

c. $\lambda = 0,14$ nm; $E_f = 6,28 \times 10^{-7} E$

# X.3 HIỆU ỨNG ĐỐP-LE TƯƠNG ĐỐI TÍNH

**Bài 1.** Khi quan sát vạch phổ có λ = 0,59μm theo các hướng kẻ từ các bờ đối diện của một đĩa Mặt Trời tới xích đạo của nó, người ta đã phát hiện được sự khác biệt về bước sóng là Δλ = 8,0pm. Tìm chu kỳ quay của Mặt Trời xung quanh trục riêng của nó? Bán kính mặt trời $R \approx 7.10^8 m$

ĐS: $T = \frac{4\pi R\lambda}{c\Delta\lambda} = 25$ ngày đêm.

**Bài 2.** Một máy rađa làm việc ở bước sóng λ = 50,0cm. Hãy xác định vận tốc của một máy bay phản lực bay tới, nếu tần số của phách giữa tín hiệu của máy phát và tín hiệu phản xạ từ máy bay ở chỗ đặt rađa bằng Δv = 1,0KHz.

ĐS: v=250 m/s.

**Bài 3.** Hiệu ứng Doppler đã cho phép khám phá ra các sao đôi ở xa nhau đến nỗi không thể phân biệt được chúng bằng kính thiên văn. Những vạch quang phổ của các sao đó trở thành kép một cách tuần hoàn, từ đó có thể giả thiết rằng các nguồn là hai ngôi sao quay xung quanh khối tâm của chúng (sao đôi). Giả sử rằng khối lượng của hai ngôi sao là như nhau, tìm khoảng cách giữa chúng và khối lượng của chúng, nếu sự tách cực đại các vạch quang phổ bằng Δλ/λ = 1,2.10$^{-4}$. Biết rằng cứ sau τ = 30 ngày hiện tượng lại xảy ra một lần.

ĐS: $d = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}\frac{c\tau}{\pi} = 3.10^7 km$; $m = \left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)^3 \frac{c^3\tau}{2\pi G} = 2,9.10^{29} kg$. G là hằng số hấp dẫn.

**Bài 4.** Một tinh vân nào đó đi ra xa chúng ta với vận tốc bằng bao nhiêu, nếu biết vạch Hiđrô $\lambda_H$ = 434nm trong phổ của nó dịch chuyển về phía đỏ là 130nm?
$v = 0,256c$
Hướng dẫn.
Ở đây ta coi người quan sát thuộc HQCQT K’ thu sóng có tần số f’ (bước sóng $\lambda' = \lambda_H + 130nm$ ) và nguyên tử H đóng vai trò máy phát (HQCQT K) và phát được sóng f’ ứng với bước sóng $\lambda = \lambda_H = 434nm$ . Khi đó ta coi người quan sát đi ra xa tinh vân, biết chắc $\alpha = 0;\ \beta = \frac{v}{c}$ .

Do đó : $f' = f\dfrac{1-\beta\cos\alpha}{\sqrt{1-\beta^2}} \Leftrightarrow \dfrac{c}{\lambda_H + 130} = \dfrac{c}{\lambda_H}\dfrac{1-\frac{v}{c}}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} \Rightarrow v = 0,256c$

**Bài 5.** Một xe ô tô phải chuyển động với vận tốc bằng bao nhiêu để ánh sáng đỏ của đèn sau ($\lambda$ = 0,70μm) trở thành xanh ($\lambda'$ = 0,55μm)?
ĐS: 0,236c.

**Bài 6.** Một nguồn điểm S của ánh sáng đơn sắc phát bức xạ có tần số f. Một người quan sát A chuyển động với tốc độ không đổi v dọc theo một đường thẳng cách nguồn S một khoảng d.

a. Hãy xác định biểu thức cho tần số quan sát được như một hàm của khoảng cách x từ gốc O gần S nhất.

b. Hãy vẽ đồ thị gần đúng cho trường hợp v = 0,80 c.

**Bài 7.** Một quan sát viên chuyển động theo một đường thẳng nào đó với vận tốc $v_1$ = c/2 và trước người đó là một nguồn sáng đơn sắc có vận tốc $v_2$ = 3c/4. Tần số riêng của ánh sáng là $\omega_0$. Tìm tần số ánh sáng mà quan sát viên ghi nhận được?
ĐS: $\omega$=0,65 $\omega_0$.
**Bài 8.** Một tên lửa rời bệ phóng để thực hiện một chuyến bay với vận tốc 0,6c. Một nhà du hành trên tên lửa phát ra một chùm sáng có bước sóng $\lambda$ =5000A$^0$ về phía bệ phóng.

1) Tìm tần số ánh sáng quan sát được ở bệ phóng.

2) Tìm tần số ánh sáng quan sát được bởi nhà du hành của một tên lửa thứ hai rời bệ phóng với vận tốc 0,8c ngược hướng với tên lửa thứ nhất.

ĐS: a. 3.10$^{14}$Hz; b. 1.10$^{14}$Hz

**Bài 9.**( HSG QG 2007)

Giả sử có một nguồn sáng S gắn với gốc O của hệ quy chiếu quán tính K phát ra sóng điện từ đơn sắc lan truyền dọc theo trục Ox. Một máy thu gắn với gốc O’ của hệ K’. Hệ K’ có các trục song song với các trục tương ứng của hệ K và chuyển động với vận tốc v dọc theo trục Ox.

Sử dụng công thức biến đổi Lorentz, tính hiệu số Δf = f - f' giữa tần số f của sóng điện từ mà nguồn phát ra và tần số f' của sóng điện từ mà máy thu nhận được. áp dụng cho các trường hợp sau:

a. Tên lửa A rời bệ phóng đặt trên một trạm quỹ đạo địa tĩnh với vận tốc 0,6c (c là vận tốc ánh sáng trong chân không), máy phát bức xạ trên tên lửa A làm việc với bước sóng 1000 $\mathring{A}$. Tìm bước sóng của bức xạ mà máy thu đặt ở bệ phóng nhận được.

b. Tên lửa B rời bệ phóng với vận tốc 0,8c ngược lại với tên lửa A (đã nói ở trên). Máy thu trên tên lửa này nhận được bức xạ có bước sóng bằng bao nhiêu?

ĐS: a. $\lambda' = \lambda\sqrt{\dfrac{1+\beta}{1-\beta}} = 1.10^3\sqrt{\dfrac{1+0,6}{1-0,6}} = 2,10^3\,\mathring{A}$ ;b. $\lambda'' = \lambda\sqrt{\dfrac{1+\beta'}{1-\beta'}} = 6.10^3\,\mathring{A}$

**Bài 10.** Một con tàu có máy phát tín hiệu và một máy thu tín hiệu. Con tàu, rời khỏi trái đất với vận tốc không đổi, gửi trở lại trái đất một xung tín hiệu và nó bị phản xạ từ trái đất. Bốn mươi giây sau trên đồng hồ con tàu, con tàu nhận được tín hiệu và tần số tín hiệu nhận được bằng một nửa tần số phát ra.

a) Tại thời điểm khi xung ra đa bị phản xạ khỏi trái đất, trái đất ở vị trí nào trong hệ quy chiếu con tàu.
b) Vận tốc của con tàu bằng bao nhiêu so với trái đất.
c) Tại thời điểm khi con tàu nhận lại xung ra đa thì con tàu ở đâu trong hệ quy chiếu Trái đất.

ĐS: a. Trong hệ quy chiếu gắn con tàu $x_1 = 6.10^9 m$

b. $v = \dfrac{c}{3} = 10^8\, m/s$

c.Trong hệ quy chiếu gắn với Trái Đất $x_2' = 8,5.10^9 m$

**Bài 11.** *(Chọn đội tuyển Apho năm 2010)*Vào năm 1851, Fizeau thực hiện thí nghiệm nổi tiếng để đo vận tốc ánh sáng trong một chất lỏng chuyển động. Giả sử chất lỏng chiết suất n đựng trong một bình chuyển động với vận tốc v so với phòng thí nghiệm (PTN). Ông chiếu tia sáng vào bình, chiều truyền ánh sáng cùng với chiều chuyển động của bình thì kết quả là vận tốc ánh sáng trong chất lỏng: $u = \dfrac{c}{n} + kv$, trong đó k là hệ số kéo theo. Fizeau xác định được hệ số kéo theo đối với nước $n = 4/3$ là $k = 0.44$.

a) Hãy sử dụng phép biến đổi Lorentz để tìm lại các kết quả thực nghiệm của Fizeau.
*b)* Nếu chiết suất ánh sáng phụ thuộc vào bước sóng theo công thức Cauchy: $n = a + \dfrac{b}{\lambda^2}$ thì hệ số k bằng bao nhiêu?

ĐS: a. $k = \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right) \approx 0,438$; b. $k = 1 - \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2b}{n\lambda^2}$

**Bài 12.** Năm 1842, nhà vật lý người Áo Christian Doppler phát hiện ra một hiện tượng mang tên ông – hiệu ứng Doppler. Hiệu ứng Doppler tương đối tính là hiệu ứng Doppler trong cơ học tương đối tính.
Để khảo sát hiệu ứng Doppler tương đối tính, ta xem photon là một hạt có động lượng $\vec{p}$ và năng lượng $\varepsilon$. Hệ quy chiếu K gắn với nguồn, hệ quy chiếu K' gắn với máy thu.

a. Sử dụng phép biến đổi Lorentz giữa động lượng và năng lượng, giả sử nguồn đứng yên, máy thu chuyển động để chứng tỏ hệ thức sau:

$$f_M = \frac{1-\frac{v}{c}\cos\theta_M}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} f_S$$

b.Tương tự câu a, giả sử nguồn chuyển động còn máy thu đứng yên, hãy chứng tỏ hệ thức sau:

$$f_S = \frac{1-\frac{v}{c}\cos\theta_S}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} f_M$$

c.Sử dụng biến đổi Lorentz về phương truyền ánh sáng, chứng tỏ các hệ thức ở a và b là tương đương nhau.

d.Từ các kết quả ở a và b, hãy chứng tỏ: $\dfrac{f_M\sqrt{1-\frac{v_M^2}{c^2}}}{1-\frac{\vec{v}_M\vec{c}_M}{c^2}} = \dfrac{f_S\sqrt{1-\frac{v_S^2}{c^2}}}{1-\frac{\vec{v}_S\vec{c}_S}{c^2}}$.

**Bài 13.Hiệu ứng Mössbauer**

a) Một photon "rơi tự do" về phía Trái Đất từ độ cao z so với mặt đất. Tại độ cao z nó có tần số $f_0$ và khi tới mặt đất tần số của nó là f. Bỏ qua sự thay đổi gia tốc trọng trường theo độ cao và nó luôn có giá trị g. Lấy vận tốc ánh sáng trong chân không là c. Hãy tính tỉ số $\frac{f}{f_0}$ gần đúng đến bậc nhất của $\frac{z}{R}$ trong trường hợp độ cao z rất nhỏ so với bán kính R của Trái Đất.

b) Để quan sát được tần số của photon như trên ta hãy xét hiện tượng hấp thụ cộng hưởng trong vật lý hạt nhân. Một hạt nhân ở trạng thái kích thích sẽ trở về trạng thái cơ bản bằng cách tham gia vào một phóng xạ $\gamma$. bức xạ $\gamma$ này có thể bị hấp thụ bởi hạt nhân cùng loại bên cạnh và gọi là hấp thụ cộng hưởng. Tuy nhiên hiện tượng này rất khó xảy ra vì một phần năng lượng trạng thái kích thích của hạt nhân sẽ chuyển thành động năng giật lùi của hạt nhân mẹ sau phóng xạ $\gamma$. Để khắc phục tình trạng này, Mössbauer đưa ra giải pháp là gắn hạt nhân phóng xạ và hạt nhân hấp thụ vào một khối tinh thể, khi đó có thể coi như khối lượng hạt nhân rất lớn và phần động năng giật lùi xấp xỉ bằng 0. Lúc này hiện tượng hấp thụ cộng hưởng được gọi là hiệu ứng Mössbauer.

Ta lấy hai khối tinh thể có đủ điều kiện để xảy ra hấp thụ cộng hưởng. Một khối dùng làm nguồn phát bức xạ $\gamma$, khối kia là nguồn hấp thụ. Tại mặt đất đặt hai khối tinh thể này trên một mặt phẳng nằm ngang thì người ta quan sát thấy hấp thụ cộng hưởng. Bây giờ đặt nguồn phát phía trên nguồn hấp thụ theo phương thẳng đứng sao cho chúng cách nhau một khoảng z. Photon $\gamma$ phát ra khỏi nguồn có tần số $f_0$ và đến nguồn thu có tần số f. Để xảy ra hấp thụ cộng hưởng ta phải cho nguồn hấp thụ chuyển động theo phương thẳng đứng với vận tốc v để nó nhận được tần số đúng bằng $f_0$ nhờ hiệu ứng Doppler. Hãy xác định chiều chuyển động của nguồn thu và tính vận tốc v (gần đúng đến bậc nhất của $\frac{z}{R}$) theo các thông số có trong ý a).

ĐS: a. $\frac{f}{f_0} = 1 + \frac{\frac{g}{c^2}z}{1 - \frac{Rg}{c^2}} \approx 1 + \frac{g}{c^2}z$; b. $v = \frac{g}{c}z$

# CHƯƠNG XI
# TÍNH CHẤT HẠT ÁNH SÁNG

## XI.1. PHOTON-ÁP SUẤT ÁNH SÁNG

### 1. Các đặc trưng của photon.

Einstein cho rằng ánh sáng là dòng các "hạt" riêng biệt. Những hạt này đầu tiên Planck gọi là các lượng tử ánh sáng, còn Einstein gọi là các photon.

- Năng lượng của photon tần số $\nu$ là

$$\varepsilon = h\nu, h = 6,626.10^{-34} Js \quad (1.1)$$

- Mối liên hệ giữa bước sóng $\lambda$ và tần số $\nu$ của photon:

$$\lambda\nu = c \quad (1.2)$$

- Xung lượng (động lượng) của photon tính bằng công thức:

$$p = \frac{\varepsilon}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} \quad (1.3)$$

- Khối lượng của photon:

Theo thuyết tương đối, năng lượng của mỗi hạt có khối lượng m, vận tốc v là:

$E = mc^2 = \dfrac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$, trong đó $m_0$ là khối lượng nghỉ, $\beta = \dfrac{v}{c}$.

Nếu hạt có vận tốc bằng c thì năng lượng của nó cũng tăng lên $\infty$ .Vì photon luôn chuyển động với vận tốc c, mà năng lượng của nó giới nội, chỉ bằng $h\nu$. Vì vậy người ta phải giả thiết rằng photon có khối lượng nghỉ bằng 0 $(m_0 = 0)$ . Kết luận này không có gì là nghịch lý cả,vì không thể chọn một hệ quy chiếu nào mà đối với nó photon lại nằm yên.

Vì vậy $m_0 = 0$, còn $m = \frac{h\nu}{c^2}$.

Người ta viết lại các công thức trên như sau:

Gọi $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ là số sóng, véctơ $\vec{k}$ có hướng theo chiều chuyển động của photon là vectơ sóng, $\omega = 2\pi\nu$ là tần số vòng, và $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05.10^{-34}\,\text{Js}$ ( cũng gọi là hằng số Plank) thì công thức (1.1) và (1.3) được viết lại như sau:

$$\begin{cases} \varepsilon = \hbar\omega \\ \vec{p} = \hbar\vec{k} \end{cases} \qquad (1.4)$$

## 2. Áp suất ánh sáng.

Áp suất ánh sáng được xem như kết quả của việc truyền xung lượng của các photon cho các vật phản xạ hay hấp thụ ánh sáng.

Từ các quan điểm sao chổi, Képler (1571 – 1630) đã cho rằng ánh sáng Mặt Trời gây nên một áp lực lên đám bụi sao chổi, khiến nó bị đẩy về phía sau tạo thành một duôi sao chổi rất dài.

Theo quan điểm thuyết sóng điện từ, Maxwell đã tính được áp suất p gây ra bởi sóng điện từ tác dụng lên vật:

$$P = \frac{E}{c}(1+R)$$

Trong đó $\frac{E}{c}$ là mật độ năng lượng của ánh sáng, còn R là hệ số phản xạ của mặt được rọi sáng.

-Theo kết quả tính toán của Măcxoen, trong những ngày trời nắng, áp suất do ánh sáng Mặt Trời gây ra trên mặt đất có trị số bằng (hay khoảng) $4.10^{-3}$ N/m$^2$

-Việc phát hiện bằng thực nghiệm một áp suất có trị số nhỏ như vậy là hết sức khó khăn. Áp suất ánh sáng đã được Măcxoen tiên đoán từ năm 1874, nhưng mãi tới năm 1900, lần đầu tiên nhà bác học Nga Lebedev đã chế tạo được một dụng cụ đặc biệt cho phép phát hiện và đo được trị số của áp suất ánh sáng.

Các phép đo của Lebedev đã kiểm nghiệm lại công thức (4.34) với độ chính xác khoảng 20%. Thí nghiệm này là một bằng chứng về bản chất điện từ của ánh sáng.

Theo quan điểm của thuyết lượng tử ánh sáng, thì áp suất là kết quả của sự truyền xung lượng của các phôtôn cho các vật phản xạ hay hấp thụ ánh sáng.

***Chứng minh:*** Ta xét trường hợp chùm sáng đơn sắc tần số $\nu$ chiếu vuông góc lên mặt vật.

Gọi E là năng lượng của N phôtôn tới đập vuông góc trên một đơn vị diện tích bề mặt của vật trong 1 giây thì: $N = \frac{E}{h\nu}$

Khi một phôtôn bị hấp thụ một xung lượng $\frac{h\nu}{c}$. Nếu một phôtôn bị phản xạ, xung lượng của nó đổi chiều, tức là biến đổi từ $\frac{h\nu}{c}$ thành $-\frac{h\nu}{c}$, do đó nó truyền cho mặt phản xạ một xung lượng : p'=2mc=2hf/c

Vậy trong một giây, một đơn vị diện tích của mặt hấp thụ hoàn toàn nhận một xung lượng:

$$N\frac{h\nu}{c} = \frac{E}{c} \qquad (2.1)$$

Đây cũng chính là áp suất do dòng ánh sáng chiếu vuông góc gây ra trên bề mặt vật hấp thụ hoàn toàn.

Vậy $P_{ht} = N_{ht}\frac{h\nu}{c} = \frac{E}{c}$ (2,2)

Đối với bề mặt vật phản xạ hoàn toàn, áp suất của chùm sáng chiếu vuông góc bằng:

$$P_{px} = 2N_{px}\frac{h\nu}{c} = 2\frac{E}{c} \qquad (2.3)$$

Trong trường hợp mặt của vật có hệ số phản xạ R thì trong số N phôtôn tới trong 1 giây sẽ có RN phôtôn bị phản xạ, (1 – R)N phôtôn bị hấp thụ. Kết quả là:

$$P = (1 - R)N\frac{h\nu}{c} + 2RN.\frac{h\nu}{c} = N.\frac{h\nu}{c}(1 + R)$$

Hay $P = \frac{E}{c}(1 + R)$

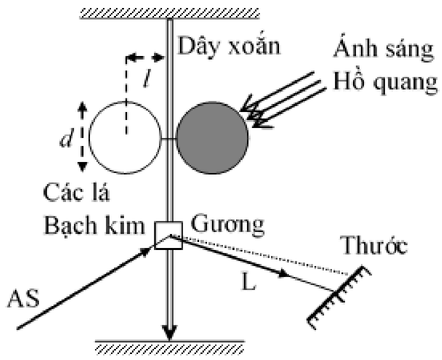
Đối với vật hoàn toàn trong suốt, phôtôn không thay đổi xung lượng khi truyền qua vật, nên không gây ra áp suất lên mặt vật.

Các kết quả thu được từ thuyết lượng tử ánh sáng hoàn toàn phù hợp với các kết luận về áp suất ánh sáng mà Măcxoen đã tìm được từ thuyết điện từ.

Việc phát hiện áp suất ánh sáng bằng thực nghiệm đã khẳng định ánh sáng không chỉ có năng lượng mà có cả xung lượng. Đây là một bằng chứng khẳng định tính vật chất của ánh sáng: ánh sáng cũng là một dạng của vật chất.

**3.Bài tập.**

**Bài 1.** Trong thí nghiệm đo áp suất ánh sáng Lebedev (Pyotr Nikolayevich Lebedev 1866 - 1912), ông đã đo góc xoắn của một sợi dây khi chiếu ánh sáng vào một lá bạch kim tròn (lá được sơn đen trong 2 lá), từ đó xác định được độ lớn của áp suất ánh sáng.




Biết rằng nếu rọi vào lá bạch kim sơn đen thì độ lệch của vết sáng trên thước đo là 76mm (thước đo đặt cách gương 1200mm). Biết đường kính của các lá là 5mm; hệ số phản xạ của lá bạch kim sơn đen là 0,5; khoảng cách từ tâm lá đến trục quay là 9,2mm; hằng số k của momen xoắn của sợi dây ($M = k\alpha$) là $2,2.10^{-9}$ Ncm/rad.

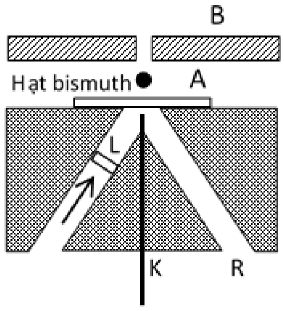
Hãy:

a. Xác định độ lớn của áp suất ánh sáng.

b. Năng lượng của ánh sáng hồ quang rọi vào mặt các lá bạch kim trong thời gian 1s trên diện tích $1cm^2$.

ĐS: a. $P = \dfrac{4kx}{\pi l L d^2} = 3,85.10^{-9} N/cm^2$

**Bài 2. Thí nghiệm Dobronravov và Ioffe xác nhận tính hạt của ánh sáng**




Trong một bản ebonite dày, người ta khoét một lỗ nhỏ. Lỗ này dùng làm một ống tia Röntgen tý hon. Không khí trong ống được rút qua ống nhỏ R. Đoạn cuối của ống có một dây mảnh bằng nhôm K dùng làm âm cực của ống. Đối âm cực là một bản nhôm mỏng A. Sợi dây K được rọi bằng những tia tử ngoại qua cửa sổ thạch anh L. Các quang electron bị bật khỏi dây K sẽ được tăng tốc qua một điện trường có hiệu điện thế 12000V giữa bản A và dây K. Khi va chạm với bản A, các electron sẽ bị hãm lại và phát ra tia X. Tia X bị hấp thụ ít trong bản nên thực tế nó đi qua bản một cách tự do. Dây dẫn K được rọi một thông lượng bức xạ tử ngoại sao cho nó chỉ làm bật ra khoảng 1000 electron trong một giây. Những electron này, khi va chạm với bản A, sẽ gây ra khoảng 1000 xung tia X trong một giây.

Người ta đặt một bản nhôm thứ hai B, song song với bản A và tạo cùng với A một tụ điện phẳng. Qua một lỗ nhỏ khoét trên bản B người ta đưa vào trong tụ điện phẳng một hạt bismuth tích điện có bán kính vào khoảng $r = 3.10^{-5}$cm. Giữa hai bản A và B có đặt một hiệu điện thế sao cho lực tĩnh điện tác dụng lên hạt bismuth cân bằng với trọng lượng của nó. Vì vậy, hạt bismuth sẽ được giữ lơ lửng cách đối âm cực một khoảng d = 0,02cm.

Tia X sau khi đi qua bản A, chiếu vào hạt bismuth làm bật electron ra, và làm cho nó mất cân bằng. Thực nghiệm cho thấy trung bình cứ sau $\tau$ = 30 phút thì hạt bismuth lại bị mất cân bằng.

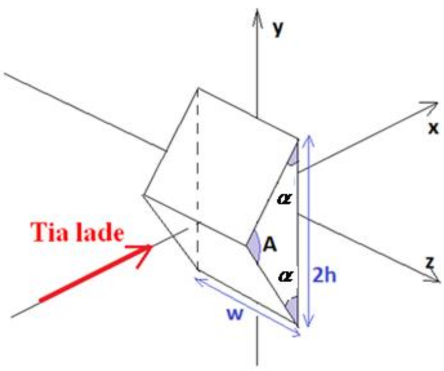
1. Chứng minh rằng không thể sử dụng quan điểm sóng để giải thích kết quả thí nghiệm trên.

2. Hãy sử dụng quan điểm hạt để giải thích kết quả thí nghiệm trên.

**Bài 3. IPHO 1993**

**LADE VÀ LĂNG KÍNH**

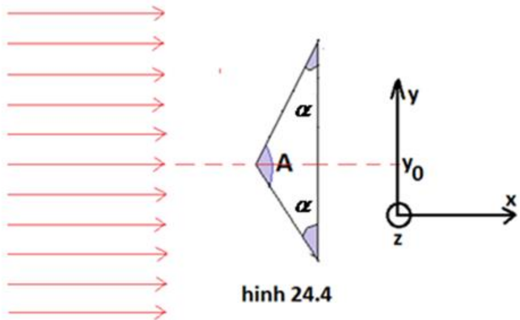
Các lực do lade tác dụng lên một lăng kính trong suốt. Do sự khúc xạ mà một tia lade mạnh có thể tác dụng những lực đáng kể lên những vật nhỏ trong suốt. Để xem sự việc ấy ta hãy xét một lăng kính đáy tam giác nhỏ với



Hình 24.3

Góc đỉnh $A = \pi - 2\alpha$, cạnh đáy là 2h và chiều rộng là W (hình 24.3). Lăng kính có chiết suất n và khối lượng riêng $\rho$.

Cho rằng lăng kính được đặt sao cho tia lade đi tới theo phương x (trong suốt bài toán này, ta thừa nhận lăng kính không bị quay, nghĩa là đỉnh của nó luôn quay về hướng tới của tia lade. Đáy tam giác của lăng kính song song với mặt xy, đáy của lăng kính song song với mặt yz như đã vẽ trên hình 24.3). Chiết suất của không khí bao quanh là $n_{air}$ = 1. Các mặt lăng kính đều phủ một lớp khử phản xạ, nên không có tia phản xạ. Cường độ tia lade phân bố đều trên độ rộng của tia theo phương trục z, nhưng giảm tuyến tính theo khoảng cách y tính từ trục x trở ra. Nó có giá trị cực đại $I_0$ tại y = 0 và giảm đến 0 tại y = $\pm 4h$ (H24.4) (cường độ là công suất trên đơn vị diện tích, nghĩa là được tính bằng W/m$^2$).



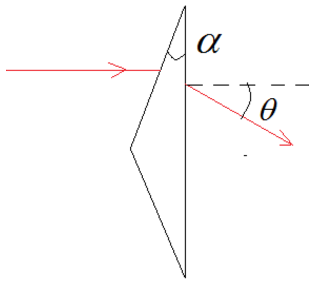
hinh 24.4

1) Viết công thức cho ta tính góc $\theta$ (H.24.5) (theo $\alpha$ và n) trong trường hợp tia lade rọi vào mặt trên của lăng kính.

2) Viết biểu thức của thành phần x và y của lực tác dụng lên lăng kính do chùm tia lade gây ra, theo $I_0$, $\theta$, h, W và $y_0$ khi đỉnh của lăng kính nằm cách trục x một khoảng $y_0$ với $|y_0|$=3h

Vẽ đồ thị biểu diễn thành phần nằm ngang và thành phần thẳng đứng của lực ấy theo sự dịch chuyển theo phương thẳng đứng $y_0$.

3) Cho rằng độ rộng theo phương z của tia lade là 1mm, còn độ dày theo phương y của tia là D=80$\mu m$, Lăng kính có góc đáy $\alpha$ =30$^0$, h = 10 $\mu m$, n = 1,5, W = 1mm và $\rho$=2,5g/cm$^3$. Hỏi công suất của lade phải bằng bao nhiêu để lực đẩy theo phương y cân bằng với trọng lực, khi đỉnh của lăng kính ở dưới trục của chùm tia lade một khoảng $y_0$, $y_0$ = -h/2 ( = -5$\mu m$)?



Hinh 24.5

4) Giả sử thí nghiệm trong điều kiện phi trọng lượng, với lăng kính và chùm tia lade có kích thước như trong câu 3 nhưng $I_0$ = $10^8$W/m$^2$. Hỏi chu kỳ dao động của lăng kính là bao nhiêu khi nó được đặt cách tâm của chùm tia lade khoảng y = h/20 rồi thả tự do?

ĐS: 1. $\theta = \text{arc}\left[ n\sin\left( \alpha - \arcsin(\frac{\sin\alpha}{n}) \right) \right]$

2. **Trường hợp 1**: $h \le y_0 \le 3h$ : $F_x = \frac{2hWI_0}{c}(1-\frac{y_0}{4h})(1-\cos\theta)$ ; $F_y = -\frac{hWI_0}{4c}\sin\theta$

**Trường hợp 2:** $F_x = \frac{P_L + P_u}{c}(1-\cos\theta) = \frac{hI_0 w}{c}(\frac{7}{4} - \frac{y_0^2}{4h})(1-\cos\theta)$

$$F_y = \frac{P_u - P_L}{c}\sin\theta = -\frac{hI_0 w}{c}\frac{y_0}{2h}(1-\frac{y_0}{2h})\sin\theta$$

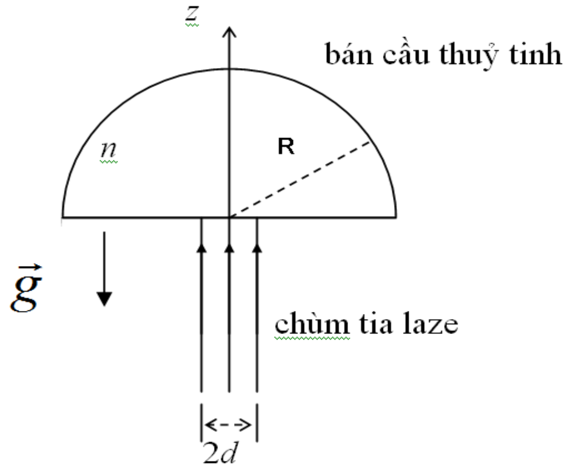
3. $P = \frac{I_0}{2}.w.D = 33,2W$ ; 4. $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{I_0 w}{2mc}\sin\theta}} = 11,2.10^{-3}s$

**Bài 4. Ipho 2003**

***Tác dụng nâng của ánh sáng***

Một bán cầu thuỷ tinh trong suốt bán kính R và khối lượng *m*, có chiết suất *n*. ở môi trường bên ngoài bán cầu, chiết suất bằng một. Một chùm sáng laze đơn sắc song song đi tới vuông góc và phân bố đều ở khu vực trung tâm mặt phẳng bán cầu như thấy trên hình 3a. Gia tốc trọng trường $\vec{g}$ hướng thẳng xuống dưới. Bán kính δ của tiết diện hình tròn của chùm laze rất nhỏ so với R. Cả bán cầu thuỷ tinh và chùm tia laze đều đối xứng trục đối với trục z.

Hình 3a




Bán cầu thuỷ tinh không hấp thụ ánh sáng laze. Bề mặt của nó được phủ một lớp mỏng vật liệu trong suốt sao cho sự phản xạ có thể bỏ qua được khi ánh sáng đi vào và đi ra khỏi bán cầu thuỷ tinh. Quang trình của chùm ánh sáng laze qua lớp bề mặt không phản xạ cũng bỏ qua được.

(b) Bỏ qua các số hạng bậc $(\delta/R)^3$ hoặc cao hơn, tìm công suất *P* của chùm tia laze cần thiết để cân bằng trọng lượng của bán cầu thuỷ tinh.

Gợi ý: $\cos\theta \approx 1 - \theta^2/2$ khi θ rất nhỏ so với một.

ĐS: $P = \frac{4mgcR^2}{(n-1)^2\delta^2}$

# XI.2 HIỆN TƯỢNG QUANG ĐIỆN

**Bài 1.** Chiếu một bức xạ điện từ có bước sóng $\lambda = 0{,}546\mu m$ lên mặt kim loại dùng làm catôt của một tế bào quang điện, thu được dòng quang điện bão hòa với cường độ 2mA. Biết công suất của bức xạ điện từ là P=1,515W.

a, Tính hiệu suất lượng tử của hiệu ứng quang điện.

b, Dùng màn chắn tách ra một chùm hẹp các quang electron cực đại ngay lúc bắn ra từ catôt và hướng chúng vào một từ trường đều có cảm ứng từ $\vec{B}$ vuông góc với véc tơ vận tốc của nó và có độ lớn B = $10^{-4}$T thì quỹ đạo các electron đó là đường tròn có bán kính R=2,332cm. Tính giới hạn quang điện của kim loại làm catôt.

ĐS: a. $\eta = \frac{Ihc}{eP\lambda} = 3.10^{-3} = 0{,}3\%$

b. $\lambda_0 = 0{,}690\mu m$

**Bài 2.** Một tế bào quang điện với catốt làm bằng kim loại có công thoát electron là A = 3 eV, chiếu vào catốt bức xạ điện từ có bước sóng $\lambda = 0{,}207\mu m$. Cho h = $6{,}625.10^{-34}$ Js, c = $3.10^8$ m/s, $m_e = 9{,}1.10^{-31}$ kg, e = $1{,}6.10^{-19}$ C.

a. Tính tốc độ ban đầu cực đại của electron quang điện khi bật ra từ catốt.

b. Đặt vào hai điện cực của tế bào quang điện một điện áp xoay chiều có biểu thức $u_{AK} = 6\cos(100\pi t)(V)$. Trong một phút, hãy xác định khoảng thời gian dòng quang điện bằng 0.

ĐS: a. $v_{0\max} \approx 1{,}0273.10^6\left(\frac{m}{s}\right)$; b. 20(s)

**Bài 3.** Chiếu lần lượt hai bức xạ có bước sóng $\lambda_1$ = 0,555μm và $\lambda_2$ = 377nm vào một tấm kim loại có giới hạn quang điện $\lambda_0$ thì thấy vận tốc ban đầu cực đại của các quang electron có độ lớn gấp đôi nhau.

a. Tìm giới hạn quang điện $\lambda_0$ của kim loại đó.

b. Chỉ chiếu bức xạ có bước sóng $\lambda_1$, tách từ chùm electron bắn ra một electron có vận tốc lớn nhất rồi cho nó bay từ A đến B trong điện trường đều mà hiệu điện thế $U_{AB}$ = -3V. Tìm vận tốc của electron khi đến B.

ĐS: a. $\lambda_0 \approx 0{,}659\mu m$; b. $v_B \approx 1{,}086.10^6 m/s$

**Bài 4.** Một nguồn sáng có công suất 2W, phát ra ánh sáng đơn sắc có bước sóng 0,597 $\mu$m tỏa đều theo mọi hướng. Hãy tính khoảng cách xa nhất mà người còn nhìn thấy được nguồn sáng này. Biết rằng, mắt còn cảm nhận được ánh sáng khi có ít nhất 10 phôtôn lọt vào mắt trong 0,05s. Biết diện tích con ngươi của mắt là $4\pi$ mm$^2$. Bỏ quả sự hấp thụ ánh sáng của khí quyển.

ĐS: $R \le 173,313$(Km)

**Bài 5.** Một quả cầu kim loại có giới hạn quang điện $\lambda_0 = 0,275\mu m$ được đặt cô lập về điện. Chiếu vào quả cầu nói trên đồng thời hai bức xạ điện từ. Bức xạ thứ nhất có bước sóng $\lambda_1 = 0,2\mu m$, bức xạ thứ hai có tần số $f_2 = 1,67.10^{15}$Hz. Tính điện thế cực đại của quả cầu. Cho c = 3.10$^8$ m/s; h = 6,625. 10$^{-34}$ J.s; e = 1,6.10$^{-19}$ C.

ĐS: $V_{max} = V_{2max} = 2,4V$

**Bài 6.** Hai bản kim loại phẳng M, N đặt đối diện, song song cách nhau 4cm trong chân không. Cho công thoát của kim loại M là A = 2,5eV. Chiếu đến điểm O trên bản kim loại M một bức xạ có bước sóng $\lambda$ = 0,3 μm. Cho các hằng số:
$h = 6,625.10^{-34} J.s; c = 3.10^8 m/s; m_e = 9,1.10^{-31} kg; e = 1,6.10^{-19} C$.

a) Tính vận tốc ban đầu cực đại của các quang êlectron bứt ra từ bản M.

b) Đặt giữa M và N một hiệu điện thế không đổi $U_{MN}$ = 4,55 V. Hỏi các quang êlectron có thể đến cách bản N một đoạn gần nhất là bao nhiêu.

ĐS : a. $v = 7,6.10^5$ m/s; b. $d_{min} = 2,556cm$

# XI.3 HIỆU ỨNG COMPTON

Hiệu ứng Compton chỉ có thể giải thích trên cơ sở thuyết lượng tử ánh sáng, coi chùm tia X tới là chùm hạt phôtôn.

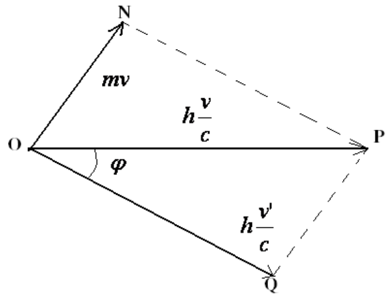
- Hiện tượng tán xạ của chùm tia X trên các nguyên tử nhẹ được giải thích như kết quả của sự va chạm giữa phôtôn tia X và electron của các nguyên tử chất tán xạ. Trong quá trình đó các định luật bảo toàn năng lượng và bảo toàn xung lượng được thỏa mãn.

- Giả sử một phôtôn tia X tần số $\nu$ tới theo phương OP và va chạm với một electron tự do đứng yên tại O.Trong quá trình va chạm, phôtôn nhường một phần năng lượng của mình cho electron và biến thành một phôtôn khác có tần số nhỏ hơn (bước sóng dài hơn). Sau va chạm, phôtôn bị bắn đi theo phương OQ, còn electron bị bắn đi theo phương ON với vận tốc v (thường gọi là electron giật lùi)

Trước va chạm, electron có khối lượng tĩnh $m_0$ và năng lượng $m_0c^2$, sau va chạm nó có khối lượng m, năng lượng $mc^2$, với m = $\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$. Phôtôn tới có năng lượng $h\nu$, xung lượng $\frac{h\nu}{c}$, còn phôtôn tán xạ có năng lượng $h\nu'$, xung lượng $\frac{h\nu'}{c}$

Theo định luật bảo toàn năng lượng ta có:

$$h\nu + m_0c^2 = h\nu' + mc^2 \qquad (1)$$




Biểu diễn động lượng của phôtôn tới, phôtôn tán xạ và electron giật lùi lần lượt bằng các vectơ $\overrightarrow{OP};\overrightarrow{OQ};\overrightarrow{ON}$, theo định luật bảo toàn động lượng, ta có:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{ON}$$

Do đó: $ON^2 = OP^2 + OQ^2 - 2OP.OQ.\cos\varphi$

Thay OP = $\frac{h\nu}{c}$, OQ = $\frac{h\nu'}{c}$ và ON = mv, ta rút ra

$$m^2v^2 = \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 + \left(\frac{h\nu'}{c}\right)^2 - 2.\frac{h\nu}{c}.\frac{h\nu'}{c}.\cos\varphi$$

hay: $m^2v^2c^2 = h^2\nu^2 + h^2\nu'^2 - 2.h^2\nu\nu'.\cos\varphi$ (2)

Từ phương trình (1) rút ra $mc^2 = h(\nu - \nu') + m_0e^2$, bình phương cả hai vế hệ thức này, ta có

$$m^2c^4 = h^2\nu^2 + h^2\nu'^2 - 2h^2.\nu\nu' + m_0^2c^4 + 2hm_0c^2(\nu - \nu') \qquad (3)$$

Lấy (3) trừ đi (2) từng vế một, ta thu được:

$$m^2c^4\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = -2h^2\nu.\nu'(1 - \cos\varphi) + 2hm_0c^2(\nu - \nu') + m_0^2c^4$$

thay m = $\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, ta cos: $m^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = m_0^2$

do đó ta thu được kết quả cuối cùng $m_0c^2(\nu - \nu') = h\nu\nu'(1 - \cos\varphi)$

Thay $(1 - \cos\varphi) = 2\sin^2\frac{\varphi}{2}$ và chia cả hai vế cho $m_0c\nu\nu'$, ta có

$$\frac{c}{\nu'} - \frac{c}{\nu} = \frac{h}{m_0c}.2\sin^2\frac{\varphi}{2}$$

Hay $\Delta\lambda = \lambda - \lambda' = 2\lambda_c \sin^2\frac{\varphi}{2}$

Trong đó $\lambda_c = \frac{h}{m_0 c}$ gọi là bước sóng Compton, còn $\varphi$ gọi là góc tán xạ.

Thay các giá trị của hằng số h, $m_0$, c ta thu được $h/m_0c = 0{,}02426A^0$, phù hợp với kết quả quan sát được bằng thực nghiệm: Điều đó khẳng định sự đúng đắn của thuyết lượng tử ánh sáng.

Trong tính toán ở trên, để đơn giản ta đã giả thiết electron hoàn toàn tự do. Thực tế electron luôn luôn liên kết với nguyên tử. Vì vậy, trong công thức $\Delta\lambda = \lambda - \lambda' = 2\lambda_c \sin^2\frac{\varphi}{2}$ đúng ra còn phải kể đến công cần thiết bứt electron khỏi nguyên tử và công để làm nguyên tử dịch chuyển. Tuy nhiên, thực nghiệm cho thấy các electron trong tán xạ Compton thường là các electron lên kết lỏng lẻo với hạt nhân, nên trong gần đúng bậc nhất có thể coi chúng là các electron tự do.

**Bài 1**. Một photon X có năng lượng 0,3Mev ( có thể cho $\lambda$ ) va chạm với một $e^-$ tự do ở trạng thái nghỉ. Tính vận tốc giật lùi của $e^-$

ĐS: v = 0,65c

**Bài** 2. Tia X ($\lambda = 0{,}3A^0$) tán xạ góc $\theta = 60^0$. Tìm $\lambda'$ và $K_e$

ĐS: $\lambda' = 0{,}312A^0$, $K_e$ =1,6K eV.

**Bài** 3. Trong tán xạ Compton một photon tới đã truyền cho $e^-$ một năng lượng cực đại là 45Mev. Tìm $\lambda$?

ĐS: $\rightarrow \lambda = 9{,}39.10^{-2}A^0$

**Bài 4**. Chùm phôtôn của bức xạ đơn sắc $\lambda$=2720 $A^0$ đập xiên góc vào một mặt của điện cực vônfram và làm bắn ra theo phương vuông góc với chùm tới các quang electron chuyển động với vận tốc b=0,02 vận tốc cực đại. Hãy tính tổng động lượng đã truyền cho điện cực đối với mỗi phôtôn đập vào và làm bắn ra một electron. Cho biết công thoát electron từ vônfram A=4,5 eV.

ĐS: $\Delta p=\sqrt{\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2+2mb^2(\frac{hc}{\lambda}-A)}\approx 3{,}43.10^{-27}kgm/s$

**Bài 5.** Trong hiện tượng tán xạ Cômtơn, chùm tia tới có bước sóng $\lambda$. Hãy xác định động năng của electron bắn ra đối với chùm tán xạ theo góc $\theta$. Tính động lượng của electron đó. Tìm giá trị cực đại của động năng của electron bắn ra.

ĐS: $E_đ=\frac{hc}{\lambda}.\frac{2\lambda_c}{\frac{\lambda}{\sin^2\frac{\theta}{2}+2\lambda_c}}$; $E_{đ\max}=\frac{hc}{\lambda}.\frac{2\lambda_c}{\lambda+2\lambda_c}$; $p_e^2=\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2+\left(\frac{h}{\lambda'}\right)^2-2\frac{h^2}{\lambda\lambda'}\cos\theta$

Với $\lambda'=\lambda+2\lambda_c\sin^2\frac{\theta}{2}$, ta tính được $p_e$.

**Bài 6.** Xác định bước sóng của bức xạ Rơnghen, biết rằng trong hiện tượng Cômtơn cho bởi bức xạ đó, động năng cực đại của electron bắn ra là 0,19 MeV.

ĐS: $\lambda=\frac{h}{mc}\left(\sqrt{1+\frac{2m_0c^2}{E_{đ\max}}}-1\right)=0{,}037\,A^0$

**Bài 7**. Dùng định luật bảo toàn động lượng và công thức Côtơn, tìm hệ thức giữa góc tán xạ $\theta$ và góc $\varphi$ xác định phương bay ra của electron.

Áp dụng hệ thức đó tìm bước sóng của một phôtôn biết rằng trong hiện tượng tán xạ Cômtơn, năng lượng phôtôn tán xạ và động năng của electron bay ra bằng nhau nếu góc giữa hai phương chuyển động của chúng bằng $90^0$. Tính góc tán xạ $\theta$ khi đó.

ĐS: $tg\varphi=\frac{\cot g\frac{\theta}{2}}{1+\frac{\lambda_c}{\lambda}}$; $\theta=60^0$

**Bài 8**. Phôtôn có năng lượng 250 keV bay đến va chạm với một electron đứng yên và tán xạ theo góc $120^0$ (tán xạ Cômtơn). Xác định năng lượng của phôtôn tán xạ.

ĐS: $E'=\frac{1}{\frac{1}{E}+\frac{2\lambda_c}{hc}\sin^2\frac{\theta}{2}}=0{,}144MeV$

**Bài 9**. Một chùm tia lade xung, hẹp, có năng lượng E = 0,4 J và kéo dài trong khoảng thời gian T = $10^{-9}$ s, chiếu vào một thấu kính hội tụ song song với trục chính của thấu kính, khoảng cách từ chùm tia đến trục chính bằng tiêu cự f của thấu kính. Thấu kính hấp thụ một nửa năng lượng của bức xạ lade, sự phản xạ ở hai mặt thấu kính không đáng kể.

Tính lực trung bình do chùm lade tác dụng lên thấu kính trong khoảng thời gian chiếu. Lực ấy hướng thế nào?

ĐS: $\overline{F} \approx 1N$; $\overrightarrow{F}$ hợp với trục chính thấu kính) một góc $\theta = 28^0 40'$

**Bài 10**. Một phôtôn trong một chùm tia X hẹp, sau khi va chạm với một electron đứng yên, thì tán xạ theo một phương làm với phương ban đầu một góc $\theta$. Kí hiệu $\lambda$ là bước sóng của tia X.

1. Cho $\lambda$ =6,2 pm và $\theta$ = $60^0$. Hãy xác định:

a) Bước song $\lambda'$ của tia X tán xạ.

b) Phương và độ lớn của vận tốc của electron sau va chạm.

2. Tia X trên được phát ra từ một ống phát tia X (ống Coolidge) có hai cực nối vào hai đầu cuộn thứ cấp của một máy biến thế tăng thế với tỉ số biến thế k = 1000. Hai đầu của cuộn sơ cấp của máy biến thế này được nối vào một nguồn điện hiệu điện thế xoay chiều có hiệu điện thế hiệu dụng U có thể biến thiên liên tục (nhờ dùng một máy biến thế tự ngẫu) từ 0 đến 500 V.

a) Hỏi U phải có trị số tối thiểu $U_m$ bằng bao nhiêu để có thể tạo được tia X nêu ở câu 1.

b) Với hiệu điện thế $U_m$ ấy, vận tốc của electron trong ống phát tia X khi tới đối âm cực có trị số bằng bao nhiêu?

c) Để phương chuyển động của electron vuông góc với phương của phôtôn tán xạ (có bước sóng $\lambda'$) thì bước sóng $\lambda$ của phôtôn tới không được vượt quá trị số bao nhiêu?

d) Giả sử sau va chạm electron có vận tốc v = $2.10^8$ m/s vuông góc với photon tán xạ, hãy tính bước sóng $\lambda$ của tia X tới và hiệu điện thế U cần đặt vào cuộn sơ cấp của máy biến thế tăng thế nói trên.

ĐS: 1a. $\lambda' = 7,4pm$; 1b. Vận tốc $v = 9,26.10^7 m/s$ và tạo vơi phương photon tới một góc $\varphi = 68^0 14'$

2a. $U_m \approx 100\sqrt{2} \approx 141,4V$ ; b. v = 2,02.10$^8$m/s; c. $\lambda_{max} = \lambda_c = 2,42(pm)$

2d. $U_{02\min} = \dfrac{hc}{e\lambda} \approx 690.000(V)$ ; $U_{1\min} = \dfrac{U_{02\min}}{k\sqrt{2}} \approx 484(V)$

**Bài 11.** Mô hình sóng ánh sáng tiên đoán rằng khi một bức xạ điện từ bị tán xạ trên một hạt điện tích thì bức xạ tán xạ về khắp mọi phương phải có tần số như bức xạ tới.Năm 1922, Arthur H.Compton đã chứng minh rằng bức xạ tán xạ có tần số phụ thuộc vào góc nhiễu xạ. Cụ thể bước sóng biến đổi một lượng $\Delta\lambda = 2\dfrac{h}{m_e c}\sin^2\theta$ khi bị tán xạ bởi electron. Hiệu ứng trên được gọi là hiệu ứng Compton.

a.Xem tương tác giữa electron và photon lúc này như va chạm giữa hai hạt tương đối tính, chứng tỏ hệ thức Compton.

b.Xây dựng biểu thức liên hệ giữa góc tán xạ φ của electron bay sau khi "va chạm" với photon và góc tán xạ θ của photon.

c.Xây dựng biểu thức liên hệ giữa động năng của electron và góc tán xạ φ của nó.

d.Vẽ đồ thị động năng của electron tán xạ và photon tán xạ theo góc tán xạ θ của photon tán xạ trong trường hợp photon tới có năng lượng bằng 2 lần năng lượng nghỉ của electron.

e.Từ đồ thị đã vẽ, xác định động năng của electron tán xạ và photon tán xạ khi chúng vuông góc.

f. Trong điều kiện câu d và e, photon tán xạ có thể sinh cặp electron – positron được không?

g.Chứng tỏ rằng: góc tán xạ cực đại của photon tán xạ để nó sinh cặp electron – positron luôn bé hơn 60$^o$.

ĐS: a. Chứng tỏ được $\Delta\lambda = 2\dfrac{h}{m_e c}\sin^2\theta$; b. $\cot\varphi = \left(1 + \dfrac{\varepsilon_1}{E_e}\right)\tan\dfrac{\theta}{2}$; c. $K_e = \dfrac{2E_e}{\left(1 + \dfrac{E_e}{\varepsilon_1}\right)^2 \left(1 + \tan^2\varphi\right) - 1}$;

e. $\theta = 60^o$; f. Photon tán xạ không thể sinh cặp trong trường hợp này

**Bài 12(hiệu ứng Compton thuận)**

Xét quá trình va chạm giữa phôtôn và êlectron tự do đứng yên.

1. Chứng minh rằng trong quá trình va chạm này, năng lượng và động lượng của phôtôn không được truyền hoàn toàn cho êlectron.

2. Sau va chạm êlectron sẽ nhận được một phần năng lượng của phôtôn và chuyển động "giật lùi", còn phôtôn thì bị tán xạ (tán xạ Compton). Tính độ dịch chuyển bước sóng của phôtôn sau va chạm.

3. Giả sử phôtôn tới có năng lượng $\varepsilon = 2E_0$, còn êlectron "giật lùi" có động năng $W_đ = E_0$ (ở đây $E_0 = 0{,}512$ MeV là năng lượng nghỉ của êlectron). Tính góc "giật lùi" của êlectron (góc giữa hướng phôtôn tới và hướng chuyển động của êlectron).

ĐS: 2. $\Delta\lambda = \dfrac{2h}{m_0c}\sin^2\dfrac{\theta}{2}$ ; 3. Góc "giật lùi" của êlectron $\Phi = 30^0$.

**Bài 13 (hiệu ứng Compton nghịch)**

Một ống phát tia X làm việc ở hiệu điện thế U phát ra photon có bước sóng ngắn nhất là $\lambda_0 = 0{,}1250$nm.

**1.** Tìm hiệu điện thế làm việc của ống (Bỏ qua động năng của electron khi nó bứt khỏi catốt).

**2.** Photon có bước sóng $\lambda_0$ tới tán xạ trên một electron tự do đang chuyển động với vận tốc không đổi. Sau va chạm ta thu được một hệ gồm một electron đứng yên và một photon tán xạ. Biết góc tán xạ $\theta = 60°$. Tính:

**a)** Bước sóng của photon tán xạ.

**b)** Bước sóng de Broglie của electron trước va chạm.

Cho biết khối lượng nghỉ của electron là $m_e = 9{,}1.10^{-31}$kg, hằng số Planck $h = 6{,}626.10^{-34}$Js, vận tốc ánh sáng $c \approx 3.10^8$m/s.

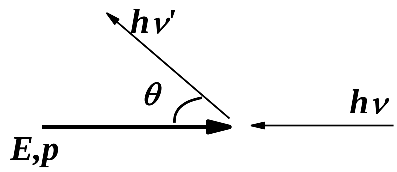
1. $U = \dfrac{hc}{e\lambda_{min}} \approx 10^4 V$; 2a. $\lambda' = 0{,}1238$nm; 2b. $\lambda_e = 0{,}1244$nm.

**Bài 14. (APHO 2007)**

***Tán* xạ Compton ngược**

Khi va chạm với electron năng lượng cao tương đối tính, một photon có thể thu được năng lượng từ electron năng lượng cao, tức là năng lượng và tần số của photon tăng lên nhờ va chạm. Đó chính là tán xạ Compton ngược. Loại hiện tượng này rất quan trọng trong vật lí thiên văn, chẳng hạn, nó cung cấp một cơ chế quan trọng để giải thích sự sinh ra các tia $X$ và tia $\gamma$ trong vũ trụ.

**1.** Một electron năng lượng cao có năng lượng toàn phần $E$ (động năng của nó cao hơn năng lượng tĩnh) và một photon năng lượng thấp (năng lượng của nó nhỏ hơn năng lượng tĩnh của electron) có tần số $\nu$ chuyển động ngược hướng với nhau, và va chạm với nhau. Như thấy ở hình dưới đây, sự va chạm làm tán xạ photon, làm cho photon bị tán xạ chuyển động theo một hướng lập một góc $\theta$ với hướng tới ban đầu (electron bị tán xạ không được vẽ trên hình). Hãy tính năng lượng của photon bị tán xạ, biểu thị theo $E,\nu,\theta$, và năng lượng tĩnh $E_0$ của electron. Hãy tìm giá trị của $\theta$, mà ở đó photon bị tán xạ có năng lượng lớn nhất, và giá trị của năng lượng lớn nhất đó.




**2.** Giả sử rằng năng lượng $E$ của electron tới lớn hơn rất nhiều so với năng lượng tĩnh của nó, mà ta có thể viết $E=\gamma E_0, \gamma >> 1$, và rằng năng lượng của photon tới nhỏ hơn $E_0/\gamma$ rất nhiều, hãy cho biểu thức gần đúng của năng lượng của electron bị tán xạ. Lấy $\gamma = 200$ và bước sóng của photon tới thuộc vùng ánh sáng khả kiến, $\lambda = 500\text{nm}$, hãy tính gần đúng giá trị của năng lượng cực đại và bước sóng tương ứng của photon bị tán xạ.
**Các tham số**: Năng lượng tĩnh của electron là $E_0 = 0.511\text{MeV}$, hằng số Planck $h = 6.63\times10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s}$, và $hc = 1.24\times10^{3}\,\text{Ev}\cdot\text{nm}$, với $c$ là tốc độ ánh sáng trong chân không.

**3.** (a) Một electron năng lượng cao, tương đối tính, có năng lượng toàn phần $E$ và một photon chuyển động ngược hướng nhau, và va chạm với nhau. Hãy tìm giá trị năng lượng của photon tới, sao cho photon tán xạ có thể thu được nhiều năng lượng nhất từ electron tới. Hãy tính năng lượng của photon bị tán xạ trong trường hợp này.

(b) Một electron năng lượng cao, tương đối tính, có năng lượng toàn phần $E$ và một photon chuyển động theo hướng vuông góc với nhau, và va chạm với nhau. Hãy tìm năng lượng của photon tới, sao cho photon tán xạ có thể thu được nhiều năng lượng nhất từ electron tới. Hãy tính năng lượng của photon bị tán xạ trong trường hợp này.

**Bài 15.** Chứng minh rằng một electron tự do không thể hấp thụ hoàn toàn một photon.

**Bài 16.** Xét hai hệ qui chiếu K và $K'$, trong đó hệ $K'$ chuyển động với vận tốc $\vec{v}$ không đổi (v<<c). Tìm hệ thức liên hệ giữa những năng lượng , động lượng của một photon trong hai hệ qui chiếu đó. Giả thiết là phương chuyển động của photon trùng với $\vec{v}$.

**ĐS:** Hệ thức giữa các năng lượng của photon trong hai hệ qui chiếu là $\frac{\Delta(hf)}{hf} = \frac{hf' - hf}{hf} = \frac{\Delta f}{f} = -\frac{v}{c}$

Và hệ thức giữa các động lượng trong hai hệ qui chiếu là $\frac{\Delta p}{p} = \frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta(hf)}{hf} = -\frac{v}{c}$

**Bài 17.** Một ống Rơn-ghen hoạt động ở hiệu điện thế $10^5$V. Bỏ qua động năng khi electron bứt khỏi bề mặt catot. Một photon có bước sóng nhắn nhất được phát ra từ ống trên tới tán xạ trên một electron tự do đang đứng yên, do kết quả tương tác electron bị giật lùi.

1. Hãy tính góc giật lùi của electron (là góc hợp bởi hướng bay của electron và hướng của photon) và góc tán xạ của photon, biết động năng của electron giật lùi bằng $W_{đe}$= 10KeV.

2.Tính động năng lớn nhất mà electron có thể thu được trong quá trình tán xạ.

ĐS:1. $\alpha \approx 64^0 24'$; 2. $w_{de\max} = \frac{2E_0}{\left(1+\frac{E_0}{\varepsilon}\right)^2 - 1} \approx 28keV$

**Bài 18.**

Xác định giá trị của góc cực đại có thể có được mà ở góc đó một deutron bị tán xạ khi va chạm đàn hồi với một proton lúc đầu đứng nghỉ.

**ĐS:** $\theta_{\max} = 60^0$

# XI.4 CÁC MẪU NGUYÊN TỬ CỔ ĐIỂN.

**I.Các mẫu nguyên tử**

**1.Mẫu nguyên tử Thomson.**

Nguyên tử được coi là hình cầu đường kính d cỡ $10^{-10}$m, trong đó điện tích dương phân bố đều, xung quanh là các electron.

Mẫu này bị thực nghiệm sau 8 năm tồn tại bằng tí nghiệm của Rutherford và Geiger.

**2.Mẫu hành tinh nguyên tử của** Rutherford.

Ngyên tử có dạng hình cầu, trong đó:

- Điện tích +Ze tập trung ở tâm nguyên tử, chiếm thể tích nhỏ, như hầu như nó mang toàn bộ khối lượng nguyên tử.

-Điện tử chuyển động quanh hạt nhân.

-Điện tích âm và dương trung hòa.

**Theo** Rutherford, lực tương tác giữa nguyên tử và hạt nhân giống như lực tương tác giữa các Hành tinh và Mặt trời. Điều này khiến cho chuyển động của điện tử quanh hạt nhân giống như Hành tinh chuyển động xung quanh Mặt trời. Vì vậy mẫu nguyên tử Rutherford còn gọi là mẫu hành tinh nguyên tử.

**3. Mẫu nguyên tử Bohr**.

Về cơ bản mẫu Bohrgiống như mẫu Rutherford chỉ khác một điểm là nguyên tử không thể tồn tại ở trạng thái tùy ý được, mà chỉ tồn tại ở các trạng thái dừng( được xác định bằng quy tắc lượng tử Bohr L= $n\hbar$ hoặc tổng quát hơn đó là quy tắc lượng tử hóa Bohr-Sommerfeld $\oint pdq = nh$)

**II. Nguyên tử Hydro và các ion đồng dạng theo quan niệm của Bohr.**

Lực hướng tâm $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$

**1.Tiên đề thứ nhất của Bohr:**

$mvr_n = n\hbar$

Với n là số tự nhiên (1,2,3..), $\hbar$ là hằng só planck rút gọn:

$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05.10^{-34}(J.s)$

Từ đó t suy ra được $r_n = \frac{n^2\hbar^2}{Kme^2}$; $v_n = \frac{Ke^2}{n\hbar}$

Và năng lượng ở trạng thái dừng thứ n của nguyên tử hydro: $E_n = -\frac{K^2me^4}{2n^2\hbar^2}$

**2.Tiên đề thứ 2 của Bohr.**

Tần số bức xạ điện từ mà nguyên tử phát xạ hoặc hấp thụ

$$f = \frac{|E_n - E_m|}{h}$$

Với $E_n$, $E_m$ là năng lượng trạng thái đầu và cuối của nguyên tử.

$E_n > E_m$ là quá trình phát xạ, $E_n < E_m$ là quá trình hấp thụ.

**3.Quy luật bức xạ của nguyên tử hydro.**

$$f = \frac{K^2me^4}{4\pi\hbar^3}\left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_k^2}\right); \quad \frac{1}{\lambda} = \frac{K^2me^4}{4\pi c\hbar^3}\left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_k^2}\right)$$

Định luật Rydberg $\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_k^2}\right)$

Với hằng số Rydberg $R \approx 1,097.10^7 9m^{-1}$

Trong trường hợp có kể đến ảnh hưởng của sự dật lùi của hạt nhân nguyên tử, ta phải thay đổi khối lượng của electrong bằng khối lượng rút gọn:

$$\mu = \frac{mM}{m+M}$$

# III. Bài tập.

**Bài 1.** Nguyên tử hiđrô ở trạng thái cơ bản, đứng yên hấp thụ một photon. Kết quả là nguyên tử chuyển sang trạng thái kích thích và bắt đầu chuyển động. Hãy tính giá trị vận tốc v của nguyên tử hiđrô. Cho năng lượng kích thích của nguyên tử hiđrô $E_{12} = 1,63.10^{-18}$ J. Năng lượng nghỉ của hiđrô $mc^2 = 1,49.10^{-10}$ J.

ĐS: $v \approx c\frac{hc/\lambda}{mc^2} = c\frac{E_{12}}{mc^2}$

**Bài 2.** Một nguyên tử hiđrô ở trạng thái cơ bản bay đến va chạm với một nguyên tử hiđrô khác cũng ở trạng thái cơ bản và đứng yên. Động năng của hiđrô tới nhỏ nhất phải bằng bao nhiêu để khi va chạm phát ra một photon. Năng lượng ion hoá của nguyên tử hiđrô là 13,6eV.

ĐS: $E_{ng} = \frac{3}{2}E_i = 20{,}4eV$.

**Bài 3.** 1. Theo mẫu nguyên tử Bo, nguyên tử Hidro gồm hạt nhân và một electron chuyển động tròn đều xung quanh hạt nhân. Ở trạng thái cơ bản, bán kính quỹ đạo của electron là $r_0 = 5{,}3.10^{-11}$ m (bán kính Bo). Hãy tính tốc độ dài của electron trên quỹ đạo này. Cho điện tích của electron có độ lớn $e = 1{,}6.10^{-19}$ C, hằng số điện $k = 9.10^9$ N.m$^2$/C$^2$.

2. Con ngươi mắt người có đường kính 4 mm. Mắt con người bắt đầu có cảm giác về ánh sáng nếu có ít nhất 100 photon lọt vào con ngươi mắt trong mỗi giây. Một nguồn sáng phát ra ánh sáng đơn sắc có bước sóng $\lambda = 0{,}6\mu m$ đều theo mọi hướng với công suất của nguồn là 2,4 W. Hỏi người có thể đứng xa nhất cách nguồn sáng này bao nhiêu mà vẫn trông thấy được nguồn sáng này. Bỏ qua sự hấp thụ ánh sáng của môi trường. Cho hằng số P-lăng $h = 6{,}625.10^{-34}$ Js, tốc độ ánh sáng trong chân không $3.10^8$ m/s.

ĐS: 1. $v = e\sqrt{\frac{k}{mr_0}} \approx 2{,}186.10^6\ \frac{m}{s}$; 2. $d_{max} \approx 269{,}2.10^3\ (m)$

**Bài 4.** Dựa vào mẫu Thomson, tính bán kính nguyên tử hydro và bước sóng ánh sáng do nosphats ra, nếu biết năng lượng ion hóa của nguyên tử là E=13,6eV.

**ĐS:** $R = \frac{2}{3}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 E_{ion}}$; $\lambda = \frac{2\pi c}{e}\sqrt{4\pi\varepsilon_0 m r^3}$

**Bài 5.** Với một khoảng cách cực tiểu bằng bao nhiêu, khi một hạt $\alpha$ có động năng T=0,50MeV( Khi va chạm trực diện ) đến gần:

a.một hạt nhân nguyên tử $^{206}Pb$ (nặng)đứng yên;

b. một hạt nhân $^7Li$ (nhẹ) tự do ban đầu đứng yên?

ĐS: a. $d_{\min} \approx 0{,}59\,pm$; b. $d_{\min} \approx 0{,}034\,pm$

**Bài 6.** Một hạt $\alpha$ có động năng T=0,5MeV bị tán xạ dưới góc $\theta = 90^0$ trong trường Coulomb của hạt nhân nguyên từ thủy ngân đứng yên.

a.Tìm bán kính cong nhỏ nhất của quỹ đạo hạt;

b.Khoảng cách cực tiểu mà hạt $\alpha$ lại gần hạt nhân.

ĐS:a. $r_{\min} = \dfrac{1}{8\pi\varepsilon_0}\dfrac{zZe^2}{E_0}(1+\dfrac{1}{\sin\dfrac{\theta}{2}})$; b. $\rho_{\min} = \dfrac{1}{8\pi\varepsilon_0}\dfrac{zZe^2}{E_0}\cot\dfrac{\theta}{2}$

**Bài 7.** Một proton có động năng T và tham số ngắm b, bị tán xạ trong trường Coulomb của một hạt nhân nguyên tử vàng đứng yên.Tìm xung truyền cho hạt nhân này do sự tán xạ.

ĐS: $\Delta p = 2\sqrt{\dfrac{2mE_0}{1+(\dfrac{8\pi\varepsilon_0 E_0 b}{Ze})^2}}$

**Bài 8.** Người ta chiếu một dòng song song các hạt có bán kính r vào một quả cầu đứng yên có bán kính R. Giả sử sự va chạm của hạt với quả cầu hoàn toàn toàn đàn hồi. Tìm:

a.Góc lệch $\theta$ của hạt phụ thuoojcvaof tham số ngắm b của nó;

b.Phần hạt tỉ đối, tán xạ trong khoảng từ $\theta$ đến $\theta$+d$\theta$;

c.Xác xuất tán xạ hạt ở bán cầu trước($\theta < \dfrac{\pi}{2}$).

ĐS: a. $\cos\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{b}{R+r}$; b. $\dfrac{dn}{n} = \dfrac{1}{2}\sin\theta d\theta$; c. $\dfrac{1}{2}$

**Bài 9.** Theo điện động lực học cổ điển, một electron chuyển động với gia tốc $\vec{w}$ sẽ mất một năng lượng do bức xạ theo quy luật: $\dfrac{dE}{dt} = -\dfrac{2e^2}{3c^3}w^2$

Trong đó e là điện tích nguyên tố, c là vận tốc ánh sáng. Xác định khoảng thời gianmaf sau đó năng lượng của electron thực hiện một dao động gần điều hòa với tần số $\omega = 5.10^{15}(rad/s)$ giảm $\eta = 10$ lần.

ĐS: 15ns

**Bài 10.** Đối với nguyên tử hydro và ion $He^+$ hãy tính:

a.Bán kính quỹ đạo Bohr thứ nhất và vận tốc của electron trên quỹ đạo đó.

b.Động năng và năng lượng liên kết của electron ở trạng thái cơ bản;

c.Thế ion hóa, thế kích thích thứ nhất và bước sóng của vạch cộng hưởng(n’=2 $\rightarrow$ n=1)

Tham khảo bảng số lieu hai nguyên tử dưới đây

| | $r_1(pm)$ | $v_1(10^6 m/s)$ | $T_1(eV)$ | $E_{21}(eV)$ | $V(V)$ | $V_{12}(V)$ | $\lambda_{12}(nm)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| H | 52.9 | 2.18 | 13.6 | -13.6 | 13.6 | 10.2 | 121.5 |
| $He^+$ | 26.5 | 4.36 | 54.5 | -54.5 | 54.5 | 40.8 | 30.4 |

ĐS: a. $r_1 = 4\pi\varepsilon_0 \dfrac{\hbar^2}{mZe^2}$; $v_1 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Ze^2}{m\hbar}$; b. $T_1 = \dfrac{1}{(4\pi\varepsilon_0)^2}\dfrac{mZ^2e^4}{2\hbar^2}$; c.Thế ion hóa $V = \dfrac{1}{(4\pi\varepsilon_0)^2}\dfrac{mZ^2e^3}{2\hbar^2}$. Thế (hiệu điện thế) kích thích thứ nhất $V_{21} = \dfrac{1}{(4\pi\varepsilon_0)^2}\dfrac{mZ^2e^3}{2\hbar^2}.\dfrac{3}{4}$; $\lambda_{21} = \dfrac{hc}{E_{21}}$

**Bài 11.** Đối với các hệ tương tự hydro, tìm momen từ $\mu_n$ ứng với chuyển động của electron trên quãy đạo thứ n cũng như tỉ số giữa momen từ của một electron với momen cơ $\dfrac{\mu_n}{L_n}$. Tính momen từ của electron trên quỹ đạo Bohr thứ nhất.

ĐS: Tỉ số giữ momen từ và cơ $\dfrac{\mu_n}{L_n} = \dfrac{e}{2m}$; Momen từ trên quỹ đạo thứ nhất $\mu_1 = \mu_B = \dfrac{1}{2}\dfrac{e\hbar}{m}$

**Bài 12.**

**I.**Trong một mô hình của nguyên tử hydro ở trạng thái cơ bản, người ta coi nguyên tử này gồm:

Một proton tích điện +e được coi là chất điểm đặt tại gốc tọa độ O. Một đám mây tích điện âm có đối xứng cầu bao quanh proton. Biết điện thế tại điểm M bất kỳ (OM = r) có dạng:

$$V(r) = \frac{a}{r}e^{-br} \quad \text{(với a và b là các hằng số dương)}$$

**1.a)** Hãy xác định điện trường $\vec{E}(r)$ tại điểm M.

**b)** Tính điện tích của đám mây tích điện âm nằm trong mặt cầu O bán kính r.

**2.a)** Tính mật độ điện tích $\rho(r)$ của đám mây điện tích âm theo a và b.

**b)** Từ điều kiện trung hòa về điện của nguyên tử hãy tính hằng số a theo e và $\varepsilon_0$.

**3.** Tính thế tĩnh điện $V'(r)$ do đám mây tích điện âm gây ra t ại điểm M (OM= r)

**4.** Tính theo a và b các đại lượng sau:

**a)** Năng lượng $W_{hn}$ của hạt nhân trong đám mây điện tích âm.

**b)** Năng lượng toàn phần W của nguyên tử hydro.

**II.** Tính hiệu chỉnh $\Delta\lambda$ về bước sóng của photon mà nguyên tử Hydro phát ra khi tính đến sự giật lùi của nguyên tử. Coi rằng lúc đầu nguyên tử đứng yên. Lấy khối lượng nguyên tử hidro là $M = 939MeV/c^2$.

ĐS: I.1a $\vec{E} = \frac{a\exp(-br)}{r^2}(1+br)\frac{\vec{r}}{r}$; I.1b. $q(r) = -e + 4\pi\varepsilon_0 a(1+br)e^{-br}$;

I.2a. $\rho(r) = -\frac{\varepsilon_0 ab^2}{r}e^{-br}$

I.2b $a = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}$; I.3 $V'(r) = V(r) - \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[e^{-br} - 1\right]$; I.4a. $W_{hn} = -\frac{e^2 b}{4\pi\varepsilon_0}$;

I.4b $W = W_{hn} + W_e = -\frac{3e^2 b}{16\pi\varepsilon_0}$; II. $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{hc}{2Mc^2\lambda} = \frac{6,6.10^{-6}\overset{0}{A}}{\lambda}$

# CHƯƠNG XII
# VẬT LÝ HẠT NHÂN
## XII.1 PHÓNG XẠ-CHUỖI PHÓNG XẠ

**Bài 1.** Để đo chu kỳ của một chất phóng xạ người ta cho máy đếm xung bắt đầu đếm từ thời điểm $t_0=0$. Đến thời điểm $t_1=2$ giờ, máy đếm được $n_1$ xung, đến thời điểm $t_2=3t_1$, máy đếm được $n_2$ xung, với $n_2=2,3n_1$. Xác định chu kỳ bán rã của chất phóng xạ này.

ĐS: T= 4,71 h.

**Bài 2.** Để đo chu kỳ bán rã của 1 chất phóng xạ, người ta dùng máy đếm xung. Ban đầu trong 1 phút máy đếm được 14 xung, nhưng sau 2 giờ đo lần thứ nhất, máy chỉ đếm được 10 xung trong 1 phút. Tính chu kỳ bán rã của chất phóng xạ. Lấy $\sqrt{2}=1,4$.

ĐS: T = 4 giờ.

**Bài 3.** Chất phóng xạ $^{210}_{84}Po$ có chu kỳ bán rã 138,4 ngày. Người ta dùng máy để đếm số hạt phóng xạ mà chất này phóng ra. Lần thứ nhất đếm trong $\Delta t$ = 1 phút (coi $\Delta t$ <<T). Sau lần đếm thứ nhất 10 ngày người ta dùng máy đếm lần thứ 2. Để máy đếm được số hạt phóng xạ bằng số hạt máy đếm trong lần thứ nhất thì cần thời gian là bao nhiêu?

ĐS: Δt’ = $e^{\frac{10\ln 2}{138,4}}$ Δt = 1,0514 phút = 63,08 s

**Bài 4.** Đồng vị $_{11}^{24}Na$ phóng xạ $\beta^-$ tạo hạt nhân con là magiê (Mg), ký hiệu là $_{12}^{24}Mg$.

1) Ở thời điểm ban đầu t = 0, khối lượng của $_{11}^{24}Na$ là $m_0$ = 4,8g thì sau thời gian t=30h , khối lượng $_{11}^{24}Na$ chỉ còn lại m = 1,2g chưa bị phân rã. Tính chu kỳ bán rã của $_{11}^{24}Na$ và độ phóng xạ (theo đơn vị Ci ) của lượng $_{11}^{24}Na$ sau thời gian t = 30h .

2) Khi khảo sát một mẫu chất người ta thấy ở thời điểm bắt đầu khảo sát thì tỉ số khối lượng $_{12}^{24}Mg$ và $_{11}^{24}Na$ là 0,125. Hỏi sau thời gian bao lâu thì tỉ số đó bằng 8 ? Cho số Avôgađrô $N_A = 6,023.10^{23}$/mol.

ĐS: a. 15h; b. 45h

**Bài 5.** Đồng vị phóng xạ pôlôni $_{84}^{210}$Po phóng xạ α và biến đổi thành hạt nhân chì. Ban đầu có một mẫu pôlôni nguyên chất. Tại thời điểm $t_1$ tỉ lệ giữa số hạt nhân chì và số hạt pôlôni trong mẫu là 7:1. Tại thời điểm $t_2 = t_1$ + 414 ngày đêm, tỉ lệ đó là 63:1. Tìm chu kì bán rã của pôlôni $_{84}^{210}$Po.

ĐS: T= 138 ( ngày đêm )

**Bài 6.** Chất phóng xạ poolooni $_{84}^{210}Po$ phát ra tia $\alpha$ và biến đổi thành chì $_{82}^{206}Pb$. Cho chu kì của $_{84}^{210}Po$ là 138 ngày. Ban đầu (t = 0) có một mẫu pôlôni chuyên chất. Tại thời điểm $t_1$, tỉ số giữa số hạt nhân pôlôni và số hạt nhân chì trong mẫu là $\frac{1}{3}$. Tại thời điểm $t_2 = t_1$ + 276 ngày, tỉ số giữa số hạt nhân pôlôni và số hạt nhân chì trong mẫu là bao nhiêu?

ĐS: $\frac{N_{2Po}}{N_{2Pb}} = \frac{1}{15}$

**Bài 7.** Giả sử ban đầu có một mẫu phóng xạ X nguyên chất, có chu kỳ bán rã T và biến thành hạt nhân bền Y. Tại thời điểm $t_1$ tỉ lệ giữa hạt nhân Y và hạt nhân X là k. Tại thời điểm $t_2 = t_1 + 2T$ thì tỉ lệ đó là bao nhiêu?

ĐS: 4k+3

**Bài** 8**.** Urani 238 là nguyên tố khởi đầu của một họ phóng xạ, cuối cùng cho ra đồng vị bền của chì $^{206}_{82}Pb$. Các phân rã liên tục phát ra hạt $\alpha$ hoặc hạt $\beta^-$. Tuổi thọ của hạt nhân trung gian khá ngắn để người ta có thể bỏ qua sự hiện diện của chúng. Như vậy, sự phân rã có thể thu gọn trong một phản ứng duy nhất :

$$^{238}_{92}U \rightarrow ^{206}_{82}Pb + x\alpha + y\beta^-$$

1.Hãy xác định x và y.
2.Giả thiết rằng, tại thời điểm t = 0, khi đó quặng chứa urani được tạo thành, quặng này chưa chứa một hạt nhân nào của chì Pb206. Kí hiệu $N_U(t)$ và $N_{Pb}(t)$ tương ứng là số hạt nhân U238 và chì Pb206 vào thời điểm t.
a) Tính $N_{Pb}(t)$ ở thời điểm t theo t, $\lambda$, $N_U(t)$ ($\lambda$ là hằng số phóng xạ của U238 với chu kì bán rã T = $4{,}5.10^9$ năm).
b) Xác định tuổi của quặng theo t và theo tỉ số $\frac{N_{Pb}(t)}{N_U(t)}$, giả sử t << T.
Áp dụng số : ở thời điểm t, mẫu quặng chứa 1g U238 và 10mg chì. Tính tuổi của mẫu quặng.
ĐS : 1. x=8 , y=2; b. 2a. $N_{Pb} = N_U(t)(e^{\lambda t}-1)$ ; 2b. t ≈ $7{,}5.10^7$ năm
**Bài 9.** Biết hằng số phân rã $\lambda$ của một hạt nhân, hãy xác địng:

a.Xác suất để nó phân rã trong khoảng thời gian từ 0 đến t.

b. Thời gian sống trung bình $\tau$ của nó.

ĐS: a. $w(t) = 1 - e^{-\lambda t}$; b. $\tau = \frac{1}{\lambda}$

**Bài 10.** Tìm hằng số phân rã và thời gian sống trung bình của đồng vị phóng xạ $^{55}Co$, nếu biết rằng hoạt tính của ó giảm đi 4% sau mỗi giờ? Biết rằng sản phẩm của sự phân rã này không phóng xạ.

ĐS: $\lambda \approx 1{,}1.10^{-5}(s^{-1})$; $\tau = \frac{1}{\lambda} \approx 1$năm

**Bài 11.** Trong quặng uranium , tỉ số giữa hạt nhân $^{238}U$ với số hạt nhân $^{206}Pb$ là $\eta = 2{,}8$. Tính tuổi của quặng, biết rằng toàn bộ chì là sản phẩm cuối cùng của sự phân rawaxcuar chuỗi phóng xạ uranium. Chu kì bán rã của $^{238}U$ bằng $4{,}5.10^9$ năm.

**ĐS:** $t \approx 2.10^9$năm

**Bài 12**. Đồng vị phóng xạ của P32 có chukif bán rã T=14,3 ngày đêm, được tạo thành trong một phản ứng hạt nhân với tốc độ không đổi q=$2{,}7.10^{19}$ hạt nhân/s. Sau bao lâu kể từ lúc bắt đầu tạo thành đồng vijphongs xạ này, hoạt tính của nó sẽ là H=$10^9$ phân rã/s.

ĐS: $t = -\frac{T}{\ln 2}\ln(1-\frac{A}{q}) \approx 9,5$ ngày đêm

**Bài 13.** Một bệnh nhân điều trị bằng đồng vị phóng xạ, dùng tia $\gamma$ để diệt tế bào bệnh. Thời gian chiếu xạ lần đầu là $\Delta t = 20$ phút, cứ sau 1 tháng thì bệnh nhân phải tới bệnh viện khám bệnh và tiếp tục chiếu xạ. Biết đồng vị phóng xạ đó có chu kỳ bán rã T = 4 tháng (coi $\Delta t << T$) và vẫn dùng nguồn phóng xạ trong lần đầu. Hỏi lần chiếu xạ thứ 3 phải tiến hành trong bao lâu để bệnh nhân được chiếu xạ với cùng một lượng tia $\gamma$ như lần đầu?

ĐS: $\Delta t' = e^{\frac{\ln 2}{2}}\Delta t = 28,2$ phút.

**Bài 14. (Trích đề thi HSGQG năm 2017)**

Hiện tượng phóng xạ là hiện tượng một hạt nhân không bền tự phân rã, phát ra các tia phóng xạ và biến đổi thànhhạt nhân khác. Trong quá trình phân rã, số hạt nhân N của chất phóng xạ ở thời điểm t tuân theo quy luật $N(t) = N_0e^{-\lambda t}$, với $N_0$ là số hạt nhân ở thời điểm ban đầu, λ là hằng số phóng xạ đặc trưng cho từng loại chất phóng xạ. Nếu hạt nhân được tạo thành không bền, nó sẽ tiếp tục phân rã tạo thành chuỗi phóng xạ. Trong bài này, ta xét một chuỗi phóng xạ đơn giản.

Cho một chuỗi phóng xạ trong đó hạt nhân A phóng xạ β tạo thành hạt nhân B và hạt nhân B phóng xạ α tạo thành hạt nhân C bền. Giả thiết các hằng số phóng xạ của hạt nhân A và B bằng nhau và bằng λ (chưa biết giá trị). Ban đầu, mẫu chất chỉ gồm $N_{t0} = 2.10^{18}$ hạt nhân A, các hạt nhân B và C chưa được tạo thành.

**1.** Để xác định hằng số phóng xạ λ, người ta dùng máy đếm hạt β: mỗi phân rã β sẽ tạo nên một xung và được máy ghi nhận. Máy được mở tại thời điểm t = 0, sau các khoảng thời gian $t_1 = 48$ giờ và $t_2 = 144$ giờ, máy đếm được số xung β tương ứng là $n_1$ và $n_2 = 2,334n_1$. Tính λ.

**2.** Tính số hạt nhân B tại thời điểm $t_2 = 144$ giờ.

**3.** Tính số hạt α được tạo thành sau 144 giờ kể từ thời điểm t = 0.

**Gợi ý:** Sự phụ thuộc của số hạt nhân B vào thời gian t có thể tìm dưới dạng $(p + q.t)e^{-\lambda t}$, trong đó p và q là hệ số không phụ thuộc vào thời gian và chưa biết.

ĐS: 1. $\lambda = -\frac{\ln x}{t_1} = 1,6.10^{-6}\ s^{-1}$; 2. $N_B = 7,24.10^{17}$; 3. $n_\alpha = 4,03.10^{17}$ hạt

# CHUỖI PHÓNG XẠ

**Bài 15**. ***(OLYMPIC VẬT LÝ ẤN ĐỘ 2006)***.

Hai hạt nhân A, B là những chất phóng xạ theo chuỗi phóng xạ sau $A \rightarrow B \rightarrow C$ A có hằng số phân rã $\lambda_1$, B có hằng số phân rã $\lambda_2$. Hãy xác định thời điểm mà số hạt nhân B đạt cực đại và số hạt nhân cực đại đó.

ĐS: $t = \dfrac{\ln\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}}{\lambda_2 - \lambda_1}$

**Bài 16.** Đồng vị rađi ${}^{226}_{88}Ra$ phân rã phóng xạ $\alpha$.

1.Viết phương trình phân rã phóng xạ của rađi và xác định hạt nhân con X. Tính năng lượng tỏa ra bởi sự phân rã của rađi.

2.Tính động năng của các hạt $\alpha$ và hạt X và tính vận tốc của chúng nếu xét rằng sự phân rã không kèm theo sự phát ra tia $\gamma$.

3.Thực nghiệm cho thấy động năng của hạt $\alpha$ được sinh ra lại có những trị số rời rạc (lượng tử hóa). Hãy giải thích tại sao ?

4.Người ta khảo sát một mẫu rađi nguyên chất có khối lượng 1 gam (mới được luyện xong, không có hạt nhân con).

a. Tính độ phóng xạ ban đầu của mẫu rađi đó. Cho biết, chu lì bán rã của rađi là $T_1$ = 1620 năm.

b. Cho biết các hạt nhân con X vừa được tạo ra do phân rã phóng xạ của mẫu rađi đó, lại phân rã với chu kì bán rã $T_2$ = 3,82 ngày.

Sau vài tuần, người ta thấy khối lượng hạt X không thay đổi (xảy ra *cân bằng phóng xạ*). So sánh độ phóng xạ của rađi và hạt X khi đó, và tính khối lượng hạt X cân bằng phóng xạ với mẫu rađi nói trên.

Cho biết khối lượng của các hạt nhân : m(Ra) = 226,0245u ; m($\alpha$) = 4,0015u ; m(X) = 222,0175u.

ĐS: 1. $\Delta E$ = 5,96 MeV; 2. $E_1 \approx$ 5,85 MeV, $E_2 \approx$0,11 MeV, $v_1$ = 1,68.$10^7$ m/s, $v_2 \approx$ 3,03.$10^5$ m/s; 4a. $H_0 \approx 3,62.10^{10}$Bq $\approx$ 1Ci; 4b. $\frac{m_{Rn}}{m_{Ra}} = \frac{T_1}{T_2}$ => $m_{Rn} = \frac{T_1}{T_2} m_{Ra}$ ; $m_{Rn} = \frac{3,82.1}{1620.365} \approx 6,46.10^{-6}$g

**Bài** 17. Urani tự nhiên có chứa hai đồng vị : ${}^{238}_{92}U$ (chiếm 99,3%) và ${}^{235}_{92}U$ (chiếm 0,7%), nhưng chỉ có U235 là có thể bị phân hạch khi hấp thụ notrôn. Một hạt nhân U238 hấp thụ một notrôn (phản ứng 1), sinh ra hạt nhân X có tính phóng xạ $\beta^-$ (với chu kì bán rã $T_1$ = 23 phút). Hạt nhân X phân rã, sinh ra hạt nhân neptuni (Np) (phản ứng 2) có tính phóng xạ $\beta^-$ (với chu kì bán rã $T_2$ = 2,3 ngày). Hạt nhân neptuni phân rã, sinh ra hạt nhân plutôni (phản ứng 3). Plutôni phân hạch và có tính phóng xạ với chu kì bán rã $T_3$ = 2,4.$10^4$ năm.

1.Viết phương trình phản ứng hạt nhân 1, 2, 3.

2.Sau thời gian bao lâu thì 99% các chất hiện diện sẽ biến mất với từng lọai phân rã xét riêng biệt (phản ứng 2, phản ứng 3 và phản ứng phân rã của plutôni). Từ đó, có thể rút ra kết luận gì về sự điều chế và sử dụng plutôni ?
ĐS: 2. Với phản ứng 2 ( phân rã của U239): $t \approx 153$ phút

Với phản ứng 3 ( phân rã của neptuni ) : $t \approx 15{,}3$ ngày

Với phân rã plutôni :$t \approx 1{,}595.10^4$ năm.

**Bài 18.** Nếu chất phóng xạ 1 có chu kì bán rã $T_1$ rất lớn và phân rã thành chất 2, cũng là chất phóng xạ, nhưng có chu kì bán rã $T_2 << T_1$ thì người ta chứng minh được rằng : nếu ban đầu chỉ có chất 1 thì ở thời điểm bất kì t, với $T_2 < t < T_1$, ta có cân bằng phóng xạ : $\lambda N_1 \approx \lambda N_2$ (1).
1. Nêu ý nghĩa vật lí của đẳng thức (1).
2.Rađi $^{226}_{88}Ra$ là chất phóng xạ có chu kì bán rã $T_{Ra}$ rất lớn. Nó phát ra hạt $\alpha$ và biến thành rađôn (kí hiệu Rn), cũng là chất phóng xạ, với chu kì bán rã $T_{Rn} << T_{Ra}$. Người ta cho 1 gam rađi vào bình. Ban đầu trong bình không có rađôn. Sau 1 năm, người ta hút lượng khí rađôn trong bình ra để đo lường. Khối khí này có khối lượng $m = 6{,}47.10^{-6}$ gam, và độ phóng xạ $H = 1$ curi $= 3{,}7.10^{10}$ phân rã/giây. Còn khối lượng của rađi thì giảm không đáng kể.

a) Viết phương trình phân rã của rađi.
b) Tính các chu kì bán rã của rađi và rađôn.
c) Thực tế số hạt nhân rađi có giảm. Tính số phần nghìn (‰) độ giảm tương đối sau 1 năm.
d) Nếu không hút rađôn sau 1 năm mà hút sau 2 năm (kể từ ban đầu) thì khối lượng rađôn đo được là bao nhiêu ?

ĐS : 2b. $T_{Rn} = \frac{0{,}963}{\lambda_{Rn}} \approx 3{,}8$ ngày ; $T_{Ra} \approx 5{,}843.10^5$ ngày $\approx 1600$ năm.
2c. $\frac{N_0 - N}{N_0} = 0{,}000433 \approx 0{,}433$ %

2d. lượng rađôn giữ không đổi , vẫn là : $m = 6{,}47.10^{-6}$ g

**Bài 19.** Đồng vị phóng xạ $A_1$ có hằng số phân rã $\lambda_1$ biến thành đồng vị phóng xạ $A_2$ có hằng số phóng xạ $\lambda_2$. Biết rằng lúc đầu chế phẩm chỉ chứa hạt nhân của đồng vị $A_1$. Tìm:

a. định luật tích tụ của đồng vị bền $A_2$.

b. Khoảng thời gian mà sau đó hoạt tính của đồng vị phóng xạ $A_2$ đạt đến cực đại.

**ĐS: a.** $N_2(t) = N_{01}\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}\right)$; b. $t = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\ln\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$

**Bài 20.** Đòng vị phóng xạ $A_1$ chịu một chuỗi biến đổi:

$A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3$( bền)

Với các hằng số phân rã tương ứng $\lambda_1$ và $\lambda_2$

Biết rằng lúc đầu chế phẩm chỉ chứa hạt nhân của đồng vị $A_1$ với một số lượng $N_{10}$; tìm định luật tích tụ của đồng vị bền $A_3$

**ĐS:** $N_3(t) = N_{01}\dfrac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}\left(\dfrac{1}{\lambda_1}e^{-\lambda_1 t} - \dfrac{1}{\lambda_2}e^{-\lambda_2 t}\right)$

**Bài 21.**

Đồng vị phóng xạ $^{210}Bi$ phân rã theo chuỗi:

$^{210}Bi \xrightarrow{\lambda_1} {}^{210}Po \xrightarrow{\lambda_2} {}^{206}Pb$ (bền)

Trong đó các hằng số phân rã $\lambda_1 = 1,6.10^{-6}(s^{-1})$, $\lambda_2 = 5,8.10^{-8}(s^{-1})$. Tính độ phóng xạ $\alpha$, $\beta$ của chế phẩm $^{210}Bi$ có khối lượng 1 mmg sau khi điều chế nó một tháng.

**ĐS:** $H_\alpha = \dfrac{m_0 N_A}{\mu}\dfrac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}\left[e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}\right] \approx 1,46.10^{11}(hat/s)$

$H_\beta = \lambda_1\dfrac{m_0 N_A}{\mu}e^{-\lambda_1 t} \approx 0,72.10^{11}(hat/s)$

## XII.2 NĂNG LƯỢNG HẠT NHÂN VÀ PHƯƠNG TRÌNH PHẢN ỨNG HẠT NHÂN.

**Bài 1**. Đồng vị bitmut $^{212}_{83}\mathrm{Bi}$ có tính phóng xạ $\alpha$.

1.Viết phương trình phân rã phóng xạ. Xác định hạt nhân con X được sinh ra.

2.Tính động năng các hạt $\alpha$.

3.Thực nghiệm cho thấy 70% các hạt $\alpha$ có năng lượng 6,09 MeV. Hãy giải thích sự sai biệt so với kết quả tính được ở câu 2. Năng lượng mất đi có thể chuyển hóa thành dạng gì ? Hãy xác minh dự đoán đó. Cho biết khối lượng các hạt nhân : m(Bi212) = 212,9913u ; m(X) = 207,9830u ; m($\alpha$) = 4,0015u.

ĐS: 1. X là hạt nhân tali $^{208}_{81}Tl$; 2. $W_\alpha = \dfrac{m_X}{m_\alpha + m_X}\Delta E$ = 6,23 MeV; 3. Biến thành tia gamma:

$\lambda$=0,09 Å

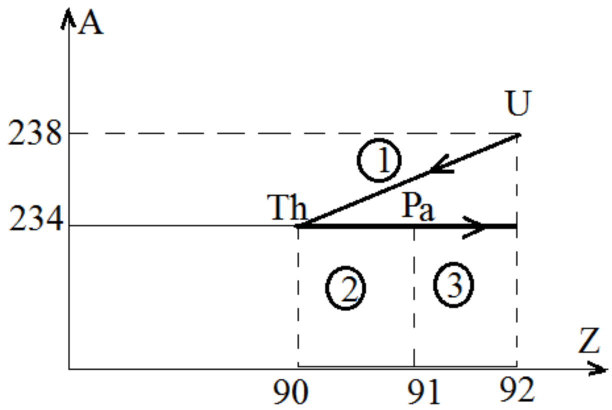
**Bài 2.** Sự phóng xạ muối rađi là do sự phân rã tự phát của các nguyên tử rađi : trung bình trong một năm, cứ 2300 nguyên tử thì có một nguyên tử bị phân rã.

1.Tính số nguyên tử phân rã trong 1s, trong một mẫu rađi có khối lượng 1 mg. Cho biết rađi có A = 226.

2.Trong sự phân rã phóng xạ, mỗi nguyên tử rađi phát ra 4 hạt $\alpha$ có khối lượng $m_\alpha$ và điện tích $q_\alpha$. Toàn bộ số hạt $\alpha$ phát ra từ mẫu nói trên được hứng hết vào một bản tụ điện (có điện dung C = 8nF), bản kia của tụ điện được nối đất. Sau 1 giờ, hiệu điện thế giữa hai bản tụ đó là 21,1V. Từ các trị số đó, hãy tính $q_\alpha$.

ĐS: 1. $n_0 = 3{,}67.10^7$ nguyên tử; 2. $q_\propto = 3{,}2.10^{-19}$ C

**Bài** 3. Các đồng vị phóng xạ đầu tiên của họ phóng xạ urani được cho trên sơ đồ hình 2.14, trong đó mũi tên chỉ sự phân rã phóng xạ : U – kí hiệu đồng vị urani, Th – đồng vị thôri, Pa – đồng vị Protactini.



Hình 2.14

1.Viết phương trình phản ứng phân rã tương ứng với các phân rã phóng xạ 1, 2, 3 trên sơ đồ. Xác định loại phóng xạ của mỗi sự phân rã và xác định hạt nhân X.

2.Trong sự phân rã 1, người ta nhận thấy một số hạt phát ra có động năng ban đầu 4,147 MeV, và một số khác có động năng ban đầu 4,195 MeV. Hãy giải thích các kết quả đó, người ta cũng quan sát được đồng thời có sự phát ra tia $\gamma$. Tính bước sóng tia $\gamma$ đó. Giả thiết rằng sự giật lùi của hạt nhân thôri không đáng kể.

ĐS: 1. Hạt nhân X là urani 234 ($^{234}_{92}U$);

*Phân rã* 1: $^{238}_{92}U \rightarrow {}^{234}_{90}Th + {}^{4}_{2}He$

Phân rã 2 : $^{234}_{90}Th \rightarrow {}^{234}_{91}Pa + {}^{0}_{-1}e + {}^{0}_{0}v$

Phương trình phân rã 3 : $^{234}_{91}Pa \rightarrow {}^{234}_{92}U + {}^{0}_{-1}e + {}^{0}_{0}v.$

2. $\gamma$ = 0,259 Å

**Bài 4.**

Một hạt nhân $Po^{200}$ đứng nghỉ phóng xạ ra một hạt $\alpha$ có động năng $T_\alpha = 5.77MeV$. Tìm vận tốc dật lùi của hạt nhân con. Năng lượng dật lùi của hạt nhân con sẽ tạo ra bao nhiêu phần trăm của năng lượng toàn phân được giải phóng trong quá trình này?

$v_{P_b} \approx 3,4.10^5 m/s; \dfrac{T_{Pb}}{E} = 0,02$

**Bài 5.**

Xác định nhiệt lượng tỏa ra bởi 1.00mg chế phẩm $Po^{210}$ sau một chu kì, bằng thời gian sống trung bình của các hạt nhân này, nếu biết rằng các hạt $\alpha$ được phát ra có động năng $5.3MeV$ và trên thực tế tất cả các hạt nhân con được tạo thành một cách trực tiếp ở trạng thái cơ bản.

ĐS: 1,6MJ.

**Bài 6.**

Quãng đường bay trung bình của một hạt $\alpha$ trong không khí ở các điều kiện thường được xác định bằng công thức sau $R = 0.98 \times 10^{27} v_0^3$ cm, trong đó $v_0$(cm/s) là vận tốc ban đầu của hạt $\alpha$. Dùng công thức này để tìm, đối với một hạt $\alpha$ có động năng ban đầu là $7.0MeV$:

a)Quãng đường bay trung bình của nó;

b)Số cặp Ion trung bình mà hạt $\alpha$ này sinh ra trên suốt đoạn đường $R$, và cả trên nửa đầu của nó, biết rằng năng lượng tạo thành một cặp Ion bằng $34eV$.

**ĐS:** a. 6,1 cm;

b. Số cặp Ion trung bình mà hạt $\alpha$ này sinh ra sau khi vượt một đoạn đường $l$ là:

$$N_l = \frac{E_0 - E}{\Delta E} = \left[1 - \sqrt[3]{\left(\frac{R-l}{R}\right)^2}\right]\frac{E_0}{\Delta E}$$

**Bài** 7. Dùng hạt $\alpha$ có vận tốc $v_\alpha$ bắn phá hạt nhân ${}^{14}_{7}N$ đang đứng yên tạo hạt prôtôn và hạt nhân X.

Hạt X bay theo trục vào tâm O của một vòng dây tròn bán kính R = 0,6m, tích điện đều Q, ban đầu cách tâm O của vòng dây một đoạn l = 0,8m và dừng lại ở tâm vòng dây.

Hạt prôtôn bay vào từ trường đều $\vec{B}$, vuông góc với trục vòng dây, có cảm ứng từ B = 0,4T thì quỹ đạo là đường xoắn ốc với bán kính r = 0,45m và bước của đường xoắn ốc là h = 1,63m.

Coi mỗi trường chỉ tác dụng lên một hạt. Tìm điện tích Q và vận tốc $v_\alpha$.

Cho biết khối lượng của các hạt nhân m($\alpha$) = 4,0015u ; m(p) = 1,0073u ; m(N) = 13,9992u ; m(X) = 16,9947u.

ĐS: $v_\propto = \sqrt{\frac{2K_\propto}{m_\propto}} \approx 1{,}33.10^7$ m/s ; Q = $\frac{k_X}{kq_X(\frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{R^2+l^2}})} \approx 7{,}7\ \mu$C

**Bài** 8. Trong một lò phản ứng hạt nhân, năng lượng được sản xuất ra nhờ sự phân hạch của hạt urani U235 theo phản ứng :

$^{235}_{92}U + ^1_0n \rightarrow ^A_{54}X + ^{94}_ZY + 2(^1_0n)$

1. Viết lại đầy đủ phương trình phản ứng. Tính năng lượng tỏa ra do một hạt nhân U235 bị phân hạch, biết rằng độ hụt khối trong phản ứng là 0,00445u. Năng lượng này dùng để cung cấp cho các nơtrôn thứ cấp những động năng như nhau. Tính vận tốc của nơtrôn thứ cấp.

2.Vận tốc của nơtrôn thứ cấp lá quá lớn (vì để có thể tiếp tục tạo nên sự phân hạch của urani thì vận tốc của nơtrôn chỉ được vào cỡ vài km/s). Vì vậy, người ta đã làm chậm các nơtrôn này bằng cách cho chúng va chạm với các nguyên tử cacbon $^{12}_6C$ có trong khối làm chậm nơtrôn của lò. Biết các nơtrôn này bắn vào các nguyên tử cacbon với vận tốc $2.10^7$ m/s. Sau khi va chạm, các hạt này chuyển động cùng phương và không có sự biến đổi thành hạt khác. Hãy tính vận tốc của các hạt sau khi va chạm. Nhận xét kết quả thu được.

3. Một nơtrôn chậm có vận tốc $2.10^3$ m/s đã được hấp thụ bởi một hạt nhân $^{238}_{92}U$ đứng yên.

a) Tính vận tốc của hạt nhân con.

b) Hạt nhân con sinh ra đó không bền, biến thành plutôni $^{239}_{94}Pu$ và phát ra hai hạt khác nhau. Viết phương trình phân rã và xác định hạt X.

Cho biết khối lượng nơtrôn m(N) = 1,009u ; 1u = $1{,}66.10^{-27}$ kg.

ĐS : 1. Phương trình phản ứng viết lại đầ đủ là

$$^{235}_{92}U + ^1_0n \rightarrow ^{140}_{54}Xe + ^{94}_{38}Sr + 2(^1_0n)$$

$\Delta E \approx 6{,}648.10^{-13}$ J; $V_n = 2.10^7$ m/s.

2. Cùng vận tốc $v_c \approx 3{,}08.10^6$ m/s.

3a. $v_U \approx 8{,}4$ m/s

3b. Phương trình phản ứng đầy đủ: ${}^{239}_{92}U \rightarrow {}^{239}_{94}Pu + 2({}^{0}_{-1}e) + ({}^{0}_{0}\nu)$

**Bài** 9. Đồng vị oxi ${}^{14}_{8}O$ có tính phóng xạ $\beta^-$.

1. Viết phương trình phân rã phóng xạ và xác định hạt nhân con.

2. Biết hiệu số khối lượng hạt nhân oxi O14 và hạt nhân con là 5,62 MeV/c$^2$, khối lượng hạt $\beta^-$ là 0,511 MeV/c$^2$. Xem rằng động năng của hạt nhân con sau phân rã là không đáng kể. Hãy tính động năng cực đại và vận tốc tương ứng của hạt $\beta^-$ khi hạt nhân con sinh ra ở trạng thái cơ bản.

3. Thực ra thì sự phân rã hạt nhân oxi O14 đã tạo nên một hạt nhân con ở trạng thái kích thích. Vì vậy trong sự phân rã đó có phát hiện ra một tia $\gamma$ có bước sóng $\lambda = 5{,}364.10^{-13}$m. Hãy tính độ chênh lệch mức năng lượng giữa trạng thái kích thích và trạng thái cơ bản của hạt nhân con. Tính động năng cực đại của hạt $\beta^-$ trong trường hợp này.

ĐS : 1. ${}^{14}_{8}O \rightarrow {}^{0}_{-1}e + {}^{14}_{7}Ni + {}^{0}_{0}\nu$

2. $E_đ = 4{,}592$MeV; $v \approx 0{,}995$c.

3. Độ chênh lệch năng lượng $\Delta E = 3{,}702.10^{-13}$ J = 2,314MeV

Động năng cực đại của hạt $\beta^-$ trong trường hợp này $E_{đmax} = 2{,}284$ MeV

**Bài 10.** Một kiểu phân hạch của U235 là: ${}^{235}_{92}U + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{95}_{42}Mo + {}^{139}_{57}La + 2{}^{1}_{0}n + 7{}^{0}_{-1}e$ (Mo là kim loại, La là kim loại ALantan họ đất hiếm).

**a)** Tính năng lượng $\Delta E$ toả ra từ phản ứng trên theo đơn vị Jun (J). Cho biết khối lượng của các hạt: $m_U = 234{,}99$u; $m_{Mo} = 94{,}88$u; $m_{La} = 138{,}87$u; $m_n = 1{,}01$u; bỏ qua khối lượng của electron; lấy 1u = 931 MeV/c$^2$.

**b)** Nếu coi giá trị $\Delta E$ tìm được ở trên là năng lượng trung bình cho bởi mỗi phân hạch thì khi 1g U235 phân hạch hết sẽ cho một năng lượng bằng bao nhiêu kWh? Cần phải đốt một lượng than bằng bao nhiêu để được lượng năng lượng đó? Biết năng suất toả nhiệt của than q = 2,93.10$^7$ J/kg.

Lấy số Avôgađrô $N_A = 6,023.10^{23} mol^{-1}$.

**c)** Trong sự cố của các lò phản ứng hạt nhân tại nhà máy điện nguyên tử ở Fukushima (Nhật Bản) do động đất và sóng thần, người ta lo ngại nhất hiện tượng gì sẽ xảy ra? (hiện tượng này có liên quan đến kiến thức em đã được học về phản ứng phân hạch hạt nhân dây truyền). Hiện tượng đó có dễ xảy ra không?

**ĐS: a.** $3,43.10^{-11}$ J; b. $m = 3.10^3$ kg; c. không dễ xảy ra.

**Bài 11.** Dùng một prôtôn có động năng 5,45 MeV bắn vào hạt nhân $^9_4Be$ đang đứng yên. Phản ứng tạo ra hạt nhân X và hạt α. Hạt α bay ra theo phương vuông góc với phương tới của prôtôn và có động năng 4 MeV. Tính động năng của hạt nhân X và năng lượng tỏa ra trong phản ứng này. Lấy khối lượng các hạt tính theo đơn vị khối lượng nguyên tử bằng số khối của chúng.

ĐS: Động năng hặt X: $W_{đX}$ = 3,575 MeV. Năng lượng tỏa ra: ΔW = 2,125 MeV.

**Bài 12.** Cho phương trình phản ứng hạt nhân $N^{14} + \alpha \to p + O^{17}$

Tìm năng lượng của phản ứng $N^{14} (\alpha, p) O^{17}$, nếu động năng bay của hạt $\alpha$ là $T_\alpha = 4.0 MeV$ và proton bay dưới góc $\varphi = 60^0$ với phương chuyển động của hạt $\alpha$, có động năng là $T_p = 2.09 MeV$.

ĐS:Thu năng lượng 1,2MeV

**Bài 13.** Cho phương trình phản ứng hạt nhân $Be^9 + \alpha \to n + C^{12}$

Biết hạt $\alpha$ có động năng $T = 5.3 MeV$ gây ra phản ứng hạt nhân $Be^9 (\alpha, n)$ $C^{12}$ mà năng lượng của phản ứng là: $Q = +5.7 MeV$. Tìm động năng của neutron bay vuông góc với phương chuyển động của hạt $\alpha$.

**ĐS:** 8,5MeV

**Bài 14 .** Phản ứng hạt nhân nhân tạo đầu tiên do Rutherford thực hiện năm 1919

$^{14}N + ^4He \to ^{17}O + p$ là phản ứng thu năng lượng bằng Q = 1,13Mev. Tính động năng ngưỡng cần truyền cho hạt α trong hệ phòng thí nghiệm để khi bắn phá vào hạt nhân bia nitơ đứng yên thì phản ứng có thể xảy ra.

ĐS: $E_{ng} = \frac{m_{He} + m_N}{m_N} Q = 1,45 MeV$

**Bài 15**.

**1.** Hạt a, bay ra từ một máy gia tốc, có động năng $W_a = \frac{1}{2} m_a v_a^2$, bắn vào một hạt nhân A đứng yên (đối với hệ quy chiếu chiếu phòng thí nghiệm (PTN). Sau phản ứng xuất hiện các hạt sản phẩm B và b. Tổng khối lượng hạt sản phẩm là ($m_b$+$m_B$) lớn hơn tổng khối lượng các hạt tương tác ($m_a$+$m_A$) một lượng rất nhỏ so với ($m_b$+$m_B$) và ($m_a$+$m_A$). Kí hiệu năng lượng của phản ứng là W:

$$W=[(m_b+m_B) - (m_a+m_A)]\, c^2$$

1.Gọi tổng động năng của hệ hạt (b, B) đối với hệ quy chiếu PTN và đối với hệ quy chiếu khối tâm G của hệ (b, B) lần lượt là $W_O$ và $W_G$.

a. Hãy chứng minh hệ thức $W_O = W_G + \frac{1}{2}(m_b + m_B) v_G^2$, trong đó $v_G$ là vận tốc khối tâm G hệ đối với hệ quy chiếu PTN.

b. Chứng minh $W_O$ có giá trị nhỏ nhất khi động năng $W_a$ của hạt a có giá trị cực tiểu $W_{amin}$. $W_{amin}$ gọi được gọi là năng lượng ngưỡng của phản ứng hạt nhân nói trên, kí hiệu là $W_{ng}$. Trong trường hợp phản ứng hạt nhân xảy ra xảy ra ở năng lượng ngưỡng, hãy tính:

-Vận tốc của các hạt sản phẩm b và B theo khối lượng các hạt và vận tốc ban đầu $v_{amin}$ của hạt a.

- Năng lượng ngưỡng $W_{ng}$ theo khối lượng các hạt và năng lượng phản ứng W.

**2.** Cho các phản ứng hạt nhân sau:

$$ {}_1^1H + {}_8^{16}O \to {}_8^{15}O + {}_1^2H \qquad (1)$$

$$ {}_1^1H + {}_{83}^{209}Bi \to {}_{83}^{208}Bi + {}_1^2H \qquad (2)$$

a. Tính năng lượng ngưỡng của các phản ứng này.

b. Tính công cần thiết $W_C$ để đưa một Proton tới sát hạt nhân ${}_8^{16}O$ và hạt nhân ${}_{83}^{209}Bi$ ( do tương tác Culong). Cho biết bán kính R của một hạt nhân có số khối A tính theo công thức $R = R_0 A^{1/3}$, với R=1,4.$10^{-15}$m.

c. Đối với mỗi phản ứng trên, hãy so sánh $W_C$ với năng lượng ngưỡng $W_{ng}$ và nêu nhận xét về khả năng xảy ra phản ứng ở năng lượng ngưỡng.

Cho biết khối lượng các hạt nhân:

$m({}_1^1H) = 1,007825u;\ m({}_1^2H) = 2,014102;\ m(O15) = 15,003070u;\ \ m(O16) = 15,994915u$
$m({}_{83}^{208}Bi) = 207,979731u;\ m({}_{83}^{209}Bi) = 208,9803944u;\ 1u = 931,5MeV/c^2$

ĐS: 1b. $v_b = v_B = \dfrac{m_a}{m_b + m_B} v_{a\min}$; $W_{ng} = \dfrac{m_A + m_a}{m_A} W$

2a. $W_{ng1} = 14,28MeV; W_{ng2} = 5,26MeV$ ;2b. $W_{C1} = 2,34MeV; W_{C2} = 12,33MeV$

**Bài 16**. (Trích đề thi chọn đội tuyển dự thi Olympic Quốc tế 2007).

Một lò phản ứng hạt nhân có chứa nhiên liệu urani đã được làm giầu urani 235 (${}_{92}^{235}U$) và chất làm chậm là than chì (${}_{6}^{12}C$). Khi lò hoạt động, urani 235 bị phân hạch theo phản ứng:

$${}_0^1n + {}_{92}^{235}U \rightarrow {}_{39}^{A}X + {}_{z}^{138}Y + 3\left({}_0^1n\right).$$

1. Tính A và Z của các hạt nhân X và Y. Biết rằng độ hụt khối trong phản ứng phân hạch nói trên là 0,006675u và giả thiết toàn bộ năng lượng toả ra trong phản ứng dùng để cung cấp cho các nơtrôn thứ cấp có động năng như nhau. Tính vận tốc của nơtrôn thứ cấp.

2. Các nơtrôn thứ cấp được sinh ra sau phản ứng phân hạch tới va chạm với các nguyên tử cacbon của chất làm chậm (xem là đứng yên). Giả thiết các va chạm đó là hoàn toàn đàn hồi, không có sự biến đổi các hạt thành hạt khác và sau va chạm các hạt chuyển động cùng phương. Hỏi sau bao lần va chạm thì nơtrôn thứ cấp trở thành nơtrôn nhiệt (các nơtrôn nhiệt là các nơtrôn có năng lượng cỡ $k_BT_{ph}$, trong đó $k_B$ là hằng số Boltzmann, $T_{ph}$ = 300K là nhiệt độ phòng).

3. Giả sử một nơtrôn nhiệt bị hấp thụ bởi một hạt nhân urani 238 $\left({}_{92}^{238}U\right)$ có trong nhiên liệu urani.

a. Tính vận tốc của hạt nhân được tạo thành.

b. Hạt nhân được tạo thành không bền, nó biến đổi thành plutoni $\left({}_{94}^{239}Pu\right)$ và phát ra hai hạt X giống nhau. Xác định hạt X. Viết phương trình phân rã đầy đủ. Tìm động năng cực đại và vận tốc tương ứng của hạt X.

*Cho biết khối lượng của nơtrôn, $m_n$ = 1,008665u; khối lượng của hạt nhân urani 238, m(U) = 238,048608u; khối lượng của hạt nhân plutoni, m(Pu) = 239,052146u; đơn vị khối lượng nguyên tử, 1u = 1,66.$10^{-27}$kg = 931MeV/$c^2$.*

ĐS:1. A = 95; Z = 53. Vận tốc của nơtron thứ cấp : $v_n \approx 2,00.10^7 m/s$.

2. 55 lần.

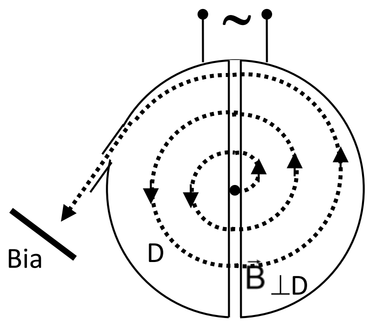
3a. $v \approx \dfrac{m_n}{m_n + m_u} v_0 \approx 9,33 m/s$

3b. Phản ứng phân rã của urani 239: ${}^{239}_{92}U \to {}^{239}_{94}Pu + 2({}^{0}_{-1}e) + 2({}^{0}_{0}\nu)$

Động năng cực đại của electron:3,001.10$^{-13}$J;v=2,2.10$^{8}$m/s

**Bài 17 ( Trích đề thi chọn HSG quốc gia 2008)**

Xiclôtrôn là máy gia tốc hạt tích điện đầu tiên của vật lý hạt nhân (1931). Nó gồm có hai hộp rỗng có dạng trụ nửa hình tròn gọi là các D, đặt cách nhau một khoảng rất nhỏ (khe) trong một buồng đã rút hết không khí (hình vẽ). Các D được nối với hai cực của một nguồn điện sao cho giữa hai D có một hiệu điện thế với độ lớn U xác định, nhưng dấu lại thay đổi một cách tuần hoàn theo thời gian với tần số f nào đó. Một nam châm điện mạnh tạo ra một từ trường đều, có vectơ cảm ứng từ $\vec{B}$ vuông góc với mặt các D (mặt phẳng hình vẽ). Giữa hai thành khe của xiclôtrôn có một nguồn phát ra hạt α (khối lượng $m_\alpha$) với vận tốc ban đầu là




$v_0 = 10^7 m/s$ vuông góc với khe, lúc ấy người ta điều chỉnh nguồn điện để cho D bên phải tích điện âm, D bên trái tích điện dương. Sau đó hạt α chuyển động với vận tốc tăng dần cho đến khi đủ lớn thì nó được lái ra ngoài cho đập vào các bia để thực hiện các phản ứng hạt nhân. Cho $m_\alpha$ = 6,64.10$^{-27}$kg, điện tích nguyên tố

e =1,6.10$^{-19}$C, B = 1T, U = 2.10$^{5}$V.

1. Chứng minh rằng trong lòng các D quỹ đạo của hạt α là nửa đường tròn. Tìm mối liên hệ của bán kính quỹ đạo vào khối lượng, vận tốc, điện tích của hạt α và vào cảm ứng từ B. Với chiều đi của hạt α như trong hình vẽ thì $\vec{B}$ hướng ra trước hay sau mặt phẳng hình vẽ?

2. Nếu lần nào đi qua khe hạt α cũng chuyển động cùng chiều với điện trường do U sinh ra thì lần nào nó cũng được tăng tốc. Để có sự đồng bộ này, f phải thoả mãn điều

kiện gì và lấy giá trị bằng bao nhiêu? Tính vận tốc $v_n$ của hạt α khi đi trên nửa đường tròn thứ n và bán kính $R_n$ của nửa đường tròn đó.

Nếu bán kính của nửa đường tròn cuối là 0,5m thì hạt α đã chuyển động được khoảng bao nhiêu vòng? Tính vận tốc trước khi ra ngoài của nó?

3. Nếu tần số f lấy giá trị như đã tính ở ý 2 (của câu này) và giữ không đổi, đồng thời tiếp tục cho hạt α chuyển động tăng tốc đến vận tốc ngưỡng $v_{ng} \approx 10^5$ km/s thì không điều chỉnh đồng bộ được nữa.

a. Giải thích nguyên nhân.

b. Nêu mối liên hệ tốc độ góc của hạt α với f.

c. Để sự tăng tốc của hạt α đồng bộ với sự đảo chiều của hiệu điện thế thì bán kính tối đa của các D bằng bao nhiêu?

ĐS: 1. $R = \dfrac{m_\alpha v}{2eB}$; 2. $f = \dfrac{eB}{\pi m_\alpha} = \dfrac{1,6.10^{-19}.1}{3,14.6,64.10^{-27}} \approx 7,67MHz$; Vận tốc của hạt α khi đi trên nửa vòng tròn n là $v_n = \sqrt{v_0^2 + \dfrac{4neU}{m_\alpha}}$

Số vòng mà hạt α đã chuyển động là ≈ 12. Sau 12 vòng, vận tốc của hạt α là $v \approx 2,4.10^7 m/s$.

3b. $\omega_\alpha = \dfrac{2eB}{m} = \dfrac{2eB}{m_\alpha}\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2} = 2\pi f\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}$

3c. $R_{max} = \dfrac{mv}{2eB} = \dfrac{m_\alpha v}{2eB\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}} = \dfrac{6,64.10^{-27}.10^8}{2.1,6.10^{-19}.1.\sqrt{1-\left(\dfrac{10^8}{3.10^8}\right)^2}} \approx 2,2m$.

**Bài 18 (APHO 2000).**

1.Năm 1932 hai ông bà Joliot- Curi dùng tia $\alpha$ bắn vào beri ${}_4^9Be$ thấy có bức xạ lạ phát ra. Bức xạ này không có điện tích và khi rọi vào tấm paraffin (chất có nhiều nguyên tử H) thì làm bật các prôtôn có động năng cực đại 5,7MeV. Họ nghĩ rằng các bức xạ ấy là phôtôn. Nếu dùng giả thiết này (bức xạ lạ là phôtôn và phôtôn ấy va chạm đàn hồi vào prôtôn của parafin) thì bước sóng $\lambda$ của phôtôn bằng bao nhiêu? Nêu kết luận về giả thiết này?

2.Nhà vật lý người Anh (Chadwick) nêu giả thiết các bức xạ ấy là các hạt trung hòa có khối lượng nghỉ $m \neq 0$ ( gọi là hạt m).

a. Theo Chadwick, chính hạt này va chạm đàn hồi vào phôtôn đã làm cho hạt prôtôn bật ra với động ngăng cực đại bằng 5,7MeV.

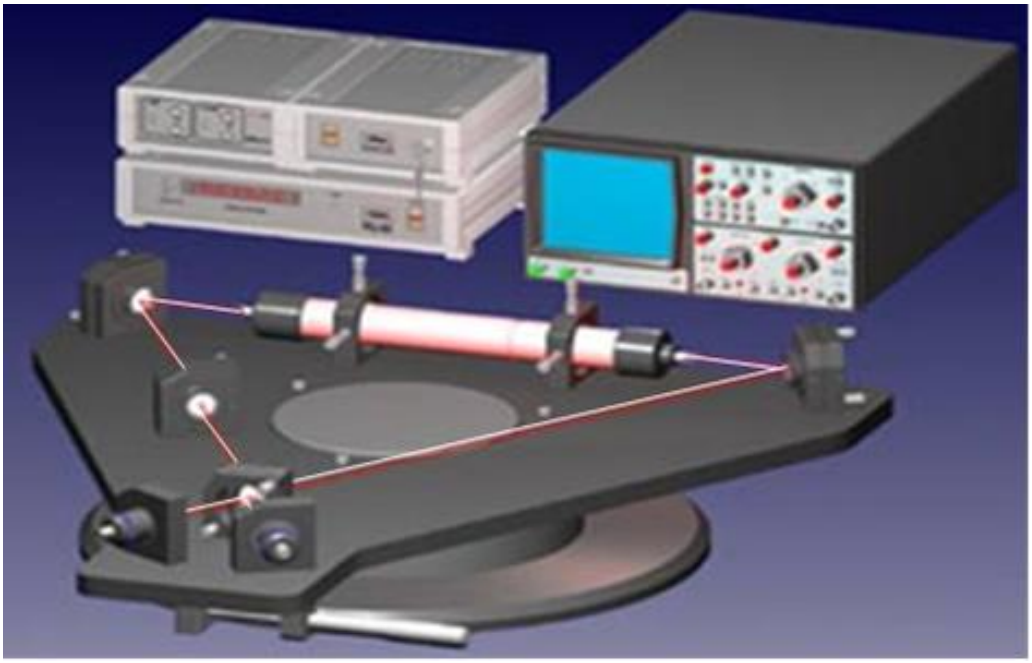
b. Cho hạt ấy va chạm đàn hồi vào hạt nhân nitơ $^{14}_{7}N$ thì hạt nhân này bật ra với động năng cực đại bằng 1,42MeV (giả thiết trong cả hai thí nghiệm hạt m có cùng động năng). Chứng minh rằng từ hai thí nghiệm này có thể tính m theo u (đơn vị khối lượng nguyên tử). Hạt m là hạt gì? Tính động năng của hạt ấy trong hai thí nghiệm trên. Viết phương trình đúng của phản ứng hạt nhân (hạt $\alpha$ bắn vào beri).

Cho khối lượng prôtôn $m_p = 938\dfrac{MeV}{c^2}; h = 6,625.10^{-34}Js; 1u = 931,5\dfrac{MeV}{c^2}$

ĐS: 1. $\lambda = \dfrac{h}{p_\gamma} = 1,5.10^{-14}m$ .Bước sóng này quá nhỏ so với bước sóng tia $\gamma$ $(10^{-11}m)$

2. Với $m \approx 1,00108u$ ; $E = 5,7MeV$ ; Đó chính là nơtron. Phương trình đúng của phản ứng hạt nhân là $^{4}_{2}\alpha + ^{9}_{4}Be \rightarrow ^{12}_{6}C + ^{1}_{0}n$

KHO VẬT LÝ SƠ CẤP
TÀI LIỆU BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI VẬT LÝ
TRUNG HỌC PHỔ THÔNG



# TẬP 3S

## - CƠ HỌC VẬT RẮN
## - DAO ĐỘNG VÀ SÓNG
## - DAO ĐỘNG ĐIỆN TỪ VÀ DÒNG ĐIỆN XOAY CHIỀU
## - QUANG LÝ VÀ VẬT LÝ HIỆN ĐẠI

TP.HCM, THÁNG 5 NĂM 2020
LƯU HÀNH NỘI BỘ

# MỤC LỤC





BIÊN SOẠN: PHẠM VŨ KIM HOÀNG
Email:hoangptnk2015@gmail.com

# CHƯƠNG I

# I.1. MOMEN QUÁN TÍNH

**Bài 1. Tính khối lượng**

Chia vật thành các lớp cầu mỏng.

Xét một lớp cầu mỏng có bán kính r và r + dr, thể tích $dV = 4\pi r^2 dr$

Khối lượng của lớp cầu này là: $dM = \rho dV = \dfrac{12m}{7R^3}(1+\dfrac{r}{R})r^2\,dr$

Khối lượng của vật: $M = \int dM = \int_0^R \dfrac{12m}{7R^3}(1+\dfrac{r}{R})r^2\,dr = \dfrac{12m}{7R^3}(\dfrac{R^3}{3}+\dfrac{R^4}{4R}) = m$

- **Tính mômen quán tính**

Mô men quán tính của một lớp cầu mỏng đối với trục quay đi qua tâm:

$$dI = \frac{2}{3}r^2 dM = \frac{8m}{7R^3}(r^4 + \frac{r^5}{R})dr$$

Mô men quán tính của vật:

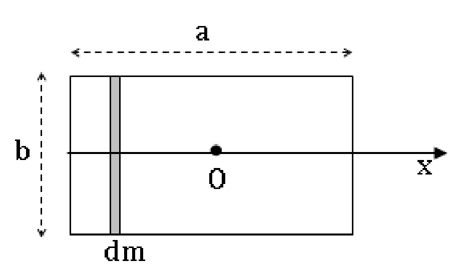
$$I = \int dI = \frac{8m}{7R^3}\int_0^R (r^4 + \frac{r^5}{R})dr = \frac{8m}{7R^3}(\frac{R^5}{5}+\frac{R^6}{6}) = \frac{44}{105}mR^2$$

**Bài 2.** Trục x song song với cạnh a

Coi tấm phẳng, mỏng gồm nhiều thanh mỏng ghép lại

Mômen quán tính của một thanh mỏng có khối lượng dm, chiều dài b đối với trục x là :

$$dI = \frac{1}{12}b^2 dm$$




Mômen quán tính của tấm đối với trục x là :

$$I_x = \int dI = \frac{1}{12}b^2\int_0^m dm = \frac{1}{12}mb^2$$

a. Trục y song song với cạnh b

Tương tự như ý a : $I_y = \dfrac{1}{12}ma^2$

b. Trục z vuông góc với tấm

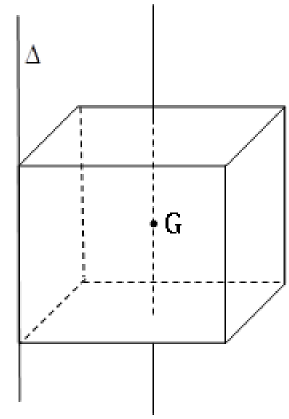
Áp dụng định lí về trục vuông góc ta được: $I_z = I_x + I_y = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$

**Bài 3.** Chia hình lập phương thành rất nhiều

bản mỏng vuông góc với trục quay.

Áp dụng kết quả bài 20 ta có mô men quán tính

của một bản mỏng có khối lượng dm đối với trục quay là:




$$dI = \frac{1}{12}(a^2 + a^2)dm = \frac{1}{6}a^2 dm$$

Mômen quán tính của vật đối với trục đối xứng :

$$I_G = \int dI = \frac{1}{6}a^2\int_0^m dm = \frac{1}{6}ma^2$$

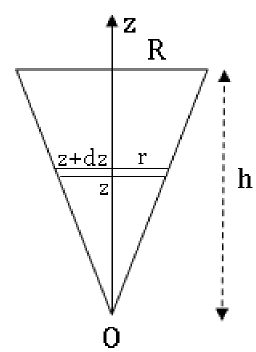
a. Gọi $\Delta$ là trục quay trùng với một cạnh.

Áp dụng định lí Steiner : $I_\Delta = I_G + md^2 = \frac{1}{6}ma^2 + m\frac{a^2}{2} = \frac{1}{3}ma^2$

**Bài 4.**

Chia hình nón thành các lớp đĩa mỏng vuông góc với trục Oz.

Xét một lớp mỏng có tọa độ z và z + dz, bán kính r, khối lượng dm




Ta có: $\frac{r}{R} = \frac{z}{h} \Rightarrow r = R\frac{z}{h}$ với R là bán kính đáy

$$dm = \frac{m}{V}dV = \frac{m}{\frac{1}{3}\pi R^2 h}\pi r^2 dz = \frac{3m}{h^3}z^2 dz$$

Mômen quán tính của lớp mỏng này đối với trục Oz:

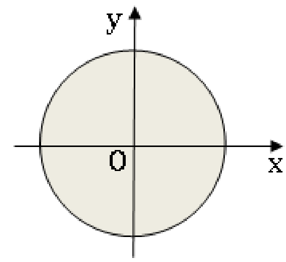
$$dI = \frac{1}{2}r^2 dm = \frac{3mR^2}{h^5}z^4 dz$$

Mômen quán tính của hình nón đối với trục Oz:

$$I = \int dI = \frac{3mR^2}{h^5}\int_0^h z^4 d = \frac{3}{10}mR^2$$

**Bài 5.** Trước tiên ta tìm mô men quán tính của một bản mỏng, phẳng hình tròn khối lượng m, bán kính R đối với trục quay trùng với 1 đường kính của bản

Theo định lí về trục vuông góc ta có:




$I_z = I_x + I_y = 2I_x$ với $I_z$ là mômen quán tính của bản đối với trục quay đi qua khối tâm và vuông góc với mặt phẳng của bản

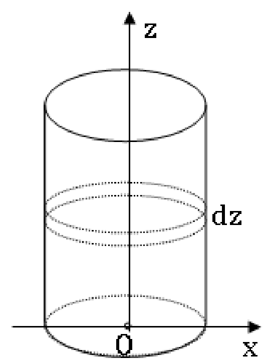
$$\Rightarrow I_x = \frac{I_z}{2} = \frac{mR^2}{4}$$

a. Chia hình trụ thành rất nhiều bản mỏng song song với đáy

Xét một bản mỏng có tọa độ z và z + dz, khối lượng dm

$$dm = \frac{m}{h}dz$$

Mômen quán tính của bản đối với trục quay Ox trùng với đường kính đáy của hình trụ:




$$dI = \frac{1}{4}dm.R^2 + dm.z^2 = \frac{mR^2}{4h}dz + \frac{m}{h}z^2dz$$

Mômen quán tính của vật đối với trục Ox:

$$I_x = \int dI = \frac{mR^2}{4h}\int_0^h dz + \frac{m}{h}\int_0^h z^2dz = \frac{mR^2}{4} + \frac{mh^2}{3}$$

b. Áp dụng định lí Steiner ta có:

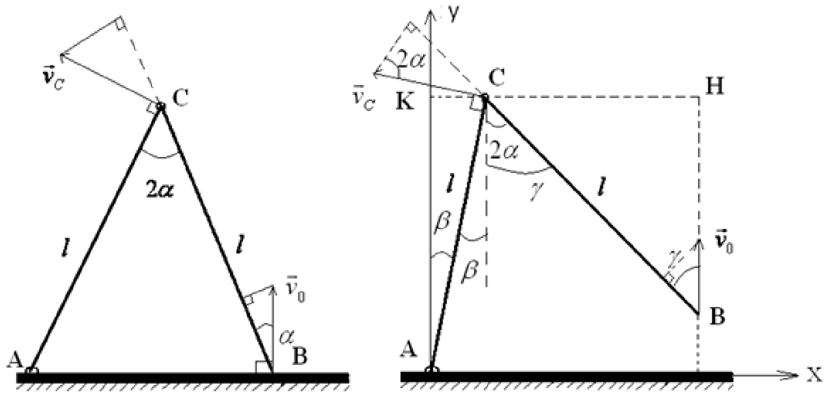
$$I_G = I_x - \frac{mh^2}{4} = \frac{mR^2}{4} + \frac{mh^2}{12}$$

# I.2. ĐỘNG HỌC VẬT RẮN

**Bài 1.**

***Tính $v_c$*** : Hệ đang quay quanhtrục quay tứcthời A, nên

$$\omega_{c/A} = \omega_{B/A} \rightarrow \frac{v_C}{l} = \frac{v_0}{AB} \Rightarrow v_C = \frac{lv_0}{2l\sin\alpha} = \frac{v_0}{2\sin\alpha} \qquad (1)$$




Hình 2.1S1

**Tính** $\overrightarrow{a_C}$ **:**

$\overrightarrow{a_C} = \overrightarrow{a_n} + \overrightarrow{a_t}$

$$a_{Cn} = \frac{v_C^2}{AC} = \frac{v_0^2}{4\sin^2\alpha . l} \qquad (2)$$

+ $v_C$ tại t = 0 (B thuộc sàn) thì hình chiếu vận tốc

$$v_C \sin 2\alpha = v_0 \cos\alpha \Rightarrow v_C = \frac{v_0}{2\sin\alpha}$$

+ Tại $t \neq 0$: $\quad v_C = \dfrac{v_0 \cos\gamma}{\sin(\gamma+\beta)} \qquad (3)$

Nên $a_{Ct} = \dfrac{dv_C}{dt} = v_0\left[\dfrac{-\sin\gamma\sin(\alpha+\beta)\gamma' + \cos(\gamma+\beta)\cos\gamma(\gamma'+\beta')}{\sin^2(\gamma+\beta)}\right] \qquad (4)$

Ta tìm $\beta'\, theo\, \gamma'$:

Ox: ta có hình chiếu AB trên Ox là $(AB)_x$=CK + CH = const

$$\Rightarrow l\sin\beta + l\sin\gamma = const \;\Rightarrow \beta' = -\frac{\cos\gamma}{\cos\beta}.\gamma' \qquad (5)$$

Oy: xét hình chiếu AC trên Oy ta có $(AC)_y = v_0 t + l.\cos\gamma = l\cos\beta$

$$\Rightarrow v_0 - l.\sin\gamma.\gamma' = -l\sin\beta.\beta' \qquad (6)$$

Thay (5) vào (6) ta được:

$$v_0 = l\left[\sin\gamma + \frac{\cos\gamma}{\cos\beta}.\sin\beta\right]\gamma'$$

$$\Leftrightarrow \frac{v_0}{l} = \frac{\sin(\beta+\gamma)}{\cos\beta}.\gamma' \qquad (7)$$

Thay (5) và (7) vào (4) ta được:

$$a_{Ct} = \frac{v_0}{\sin^2(\gamma+\beta)}\left[-\sin\gamma\frac{v_0}{l}\cos\beta + \cos(\gamma+\beta).\cos\gamma\left(1 - \frac{\cos\gamma}{\cos\beta}\right)\gamma'\right]$$

Vậy lúc t = 0 thì $\gamma = \beta = \alpha \Rightarrow a_{Ct} = \dfrac{-v_0^2}{l}.\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2 2\alpha}$

$$a_{Ct}=\frac{-v_0^2}{l}.\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin 2\alpha.2\sin\alpha.\cos\alpha}=\frac{-v_0^2}{2l\sin 2\alpha} \qquad (8)$$

Từ (2) và (8) ta suyra:

$$a_C=\sqrt{a_{Cn}^2+a_{Ct}^2}=\frac{v_0^2}{l}\sqrt{\frac{1}{16\sin^4\alpha}+\frac{1}{4\sin^2 2\alpha}}$$

$$\Rightarrow a_C=\frac{v_0^2}{2l}\sqrt{\frac{1}{4\sin^4\alpha}+\frac{1}{\sin^2 2\alpha}}=\frac{v_0^2}{2l\sin\alpha\sin 2\alpha} \quad (9)$$

b) Tínhv$_C$:

$$\Rightarrow a_{Cn}=\frac{v_C^2}{l}=\frac{v_C^2}{4l\cos^2\alpha} \qquad (10)$$

+ Ta luôn có: $v_C=\dfrac{v_0}{2\cos\alpha}$

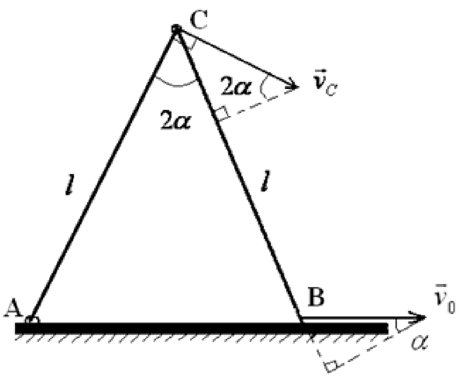
$$a_{Ct}=\frac{dv_C}{dt}=\frac{-v_0\sin\alpha}{2\cos^2\alpha}.\frac{d\alpha}{dt} \qquad (11)$$

Mà: AB = AB(0) + v$_0$t;

$$\sin\alpha=\frac{AB/2}{l}=\frac{AB}{2l}=\frac{AB(0)+vt}{2l}$$

$$\Rightarrow (\sin\alpha)'=\left(\frac{AB(0)+v_0t}{2l}\right)$$

$$\cos\alpha.\frac{d\alpha}{dt}=\frac{v_0}{2l} \qquad (12)$$



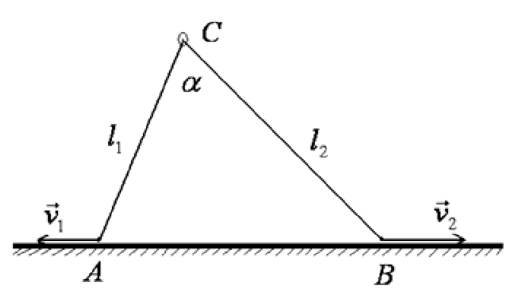

Hình 2.1S2

Thay (12) vào (11) $\Rightarrow a_{Ct}=\dfrac{-v_0\sin\alpha}{\cos^2\alpha}.(\dfrac{v_0}{2l\cos\alpha})=\dfrac{-v_0^2\sin\alpha}{2l\cos^2\alpha}$

Vậy $a_C=\sqrt{a_{Cn}^2+a_{Ct}^2}=\sqrt{\left(\dfrac{v_0^2}{4l\cos^2\alpha}\right)^2+\left(\dfrac{v_0^2\sin\alpha}{2l\cos^3\alpha}\right)^2}$

$$a_C=\frac{v_0^2}{4l\cos^3\alpha}$$

**Bài 2**




Hình 2.2P

*** Hệ qui chiếu gắn với A**$\Rightarrow$v$_{B/A}$ = v$_1$ + v$_2$

$\Rightarrow$(v$_{C/A}$)$_{CB}$=(v$_{B/A}$)$_{CB}$$\Rightarrow$v$_{C/A}$$\sin\dfrac{\pi}{2}=v_{BA}\cos B$ với lưu ý $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$

$\Rightarrow$v$_{C/A}$=(v$_1$ + v$_2$) $\dfrac{l_2}{\sqrt{l_1^2+l_2^2}}$

- Gia tốc hướng tâm của C quay quanh A

$(a_c)_{AC} = \frac{v_{C/A}^2}{l_1} = \frac{(v_1+v_2)^2 l_2^2}{l_1(l_1^2+l_2^2)}$ : đây cũng chính là gia tốc của C đối với đất trên phương AC

* Hệ qui chiếu gắn với B: $v_{A/B} = v_1 + v_2$

Và $(v_{C/B})_{CA} = (v_{A/B})_{CA} \Rightarrow v_{C/B} = (v_1 + v_2)\frac{l_1}{\sqrt{l_1^2+l_2^2}}$

- Gia tốc hướng tâm của C quay quanh B là:

$(a_c)_{CB} = \frac{v_{C/B}^2}{l_2} = \frac{(v_1+v_2)^2 l_1^2}{l_2(l_1^2+l_2^2)}$ : đây cũng chính là gia tốc của C đối với đất trên phương CB

* Hệ qui chiếugắnđất:

$\overrightarrow{a_c} = \overrightarrow{a_{cd/CA}} + \overrightarrow{a_{cd/CB}}$ : vì vuông góc nhau

$\Rightarrow a_C = \sqrt{a_{Cd/CA}^2 + a_{Cd/b}^2} = \sqrt{(a_C)_{AC}^2 + (a_C)_{CB}^2}$

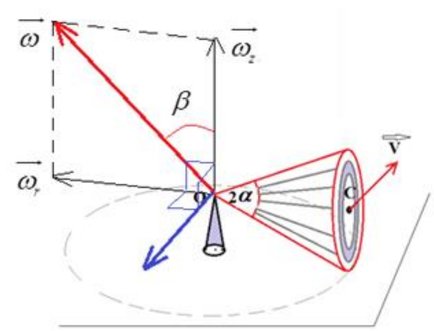
$$\Rightarrow a_C = \frac{(v_1+v_2)^2}{l_1^2+l_2^2}\sqrt{\frac{l_2^4}{l_1^2}+\frac{l_1^4}{l_2^2}} = \frac{(v_1+v_2)^2}{l_1 l_2(l_1^2+l_2^2)}\sqrt{l_2^6+l_1^6}$$

**Bài 2.**

Ta thấy OC quay quanh OZ vớivậntốcgóc$\overrightarrow{\omega_z}$ , toàn bộ hình nón quay quanh OC với vận tốc góc $\overrightarrow{\omega_r}$

Với $\omega_r = \frac{v_{A/C}}{r} = \frac{v_C}{r} = \frac{v}{r}$

$\omega_z = \frac{v_c}{OC} = \frac{v}{r\cot g\alpha} = \frac{v\tan\alpha}{r}$



Hình 2.3S

Vận tốc góc của nón đối với đất$\vec{\omega}$. Theo nguyên lý tương đối Galile

$\vec{\omega} = \vec{\omega}_z + \vec{\omega}_r$

$\rightarrow \omega = \sqrt{\omega_z^2 + \omega_r^2} = \sqrt{(\frac{v}{r})^2 + (\frac{v}{r}\tan\alpha)^2} = \frac{v}{r\cos\alpha} \approx 2,31 rad/s$

$\vec{\omega}$tạo với phương thẳng đứng một góc: $\tan\beta = \frac{\omega_r}{\omega_z} = \cot g\alpha \rightarrow \beta = 60^0$

2.Gia tốc góc hình nón$\vec{\gamma}$ :

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d(\vec{\omega}_z + \vec{\omega}_r)}{dt} = \frac{d\vec{\omega}_r}{dt}, \text{ vì } \vec{\omega}_z = cte \rightarrow \frac{d\vec{\omega}_z}{dt} = 0$$

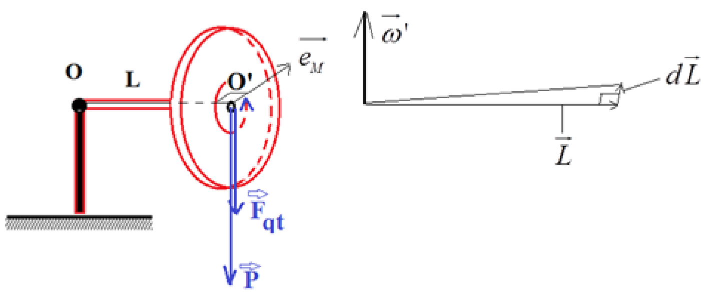
Do đó $\vec{\gamma} = \dfrac{d\vec{\omega}_r}{dt} = \omega_r \dfrac{d\left(\dfrac{\overrightarrow{CO}}{CO}\right)}{dt} = \omega_r \omega_z \vec{e}_\theta = \left(\dfrac{v}{r}\right)^2 \tan\alpha \vec{e}_\theta$

$\gamma \approx 2{,}31 rad/s^2$

**Bài 4**

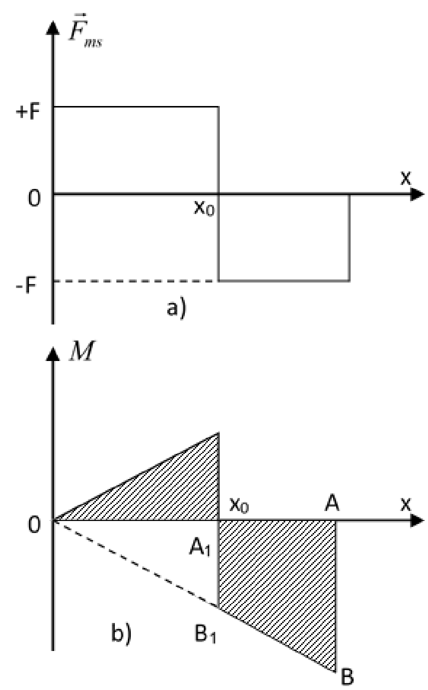
Liên hệ giữa vận tốc góc tiến động với mô men động lượng và tổng momen ngoại lực tác dụng lên con quay

$\vec{M} = \left[\vec{\omega}' x \vec{L}\right]$.




Hình 2.16S

Vì momen động lượng $\vec{L}$ quay quanh trục thẳng đứng qua O với tốc độ góc $\overrightarrow{\omega'}$. Sở dĩ có biểu thức $\vec{M} = \left[\vec{\omega}' x \vec{L}\right]$, ta có thể chứng minh như sau:




Hình 1.24

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{\left|d\vec{L}\right|}{dt}\vec{e}_M = \frac{L\omega' dt}{dt}\vec{e}_M = L\omega' \vec{e}_M = \left[\vec{\omega}' \wedge \vec{L}\right] (1)$$

Mặt Khác $\vec{M} = (\vec{r} \wedge \vec{F}) = (\overrightarrow{OO'} \wedge (\vec{P} + \vec{F}_{qt}) = m(g+a)l.\vec{e}_M$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra được

$\omega' = \dfrac{l(g+a)}{\pi n R^2}$ =301rad/s

**Bài 5.**

Các hình nón chuyển động tương đối với nhau kèm theo sự trượt trừ một điểm tại đó các vận tốc dài của hai hình nón bằng nhau. Ký hiệu toạ độ của điểm đó tính từ đỉnh của nón thứ 2 là $x_0$. Tại điểm đó lực ma sát trượt tác động lên nón thứ 2 đổi dấu

( hình 1.24a). Bởi vì trước điểm đó thì nón thứ nhất có vận tốc lớn hơn nón thứ 2, còn sau điểm đó thì nhỏ hơn.

Hình nón thứ 2 sẽ quay với vận tốc góc không đổi nếu tổng momen của các lực ma sát tác động lên nó bằng không. Vì lực ma sát tác dụng lên đơn vị độ dài của nón là không đổi nên momen của nó tăng theo hàm bậc nhất tính từ đỉnh nón đến đáy nón (Vì cánh tay đòn tăng). Tại điểm $x_0$ momen cũng như lực ma sát sẽ đổi dấu (hình 1.24b).

Gọi H là chiều cao, R là bán kính đáy của nón, $r_0$ là bán kính tại điểm $x_0$. Tổng momen của lực ma sát bằng không có nghĩa là diện tích của tam giác và diện tích hình thang được gạch chéo trên hình 1.24b bằng nhau.

Ta có: $\dfrac{x_0 r_0}{2} = \dfrac{HR}{4}$ (1)

Tam giác OAB đồng dạng với tam giác $OA_1B_1$ ta có:

$$\frac{x_0}{r_0} = \frac{H}{R} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $r_0 = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$

Các vận tốc dài của 2 nón bằng nhau tại điểm $x_0$ nên ta có: $\omega_1(R - r_0) = \omega_2 r_0$ với $r_0 = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$ ta được: $\omega_2 = (\sqrt{2} - 1)\omega_1 \approx 0,41\omega_1$

**Bài 6.**

a.Tại thời điểm thanh rời khỏa giá đỡ, tốc độ góc khối tâm G của thanh là ω:

$$\frac{1}{2}.\frac{1}{3}mL^2\omega^2 = mg\frac{L}{2}cos30^0 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3\sqrt{3}g}{2L}}......$$

Vận tốc khối tâm G:

$$v_G = \omega\frac{L}{2} = \sqrt{\frac{3\sqrt{3}gL}{8}}........$$

Sau khi rời khỏi giá đỡ, chỉ có trọng lực tác dụng lên khối tâm của thanh nên G chuyển động như vật bị ném xiên góc 30° so với phương ngang, còn thanh quay quanh G với tốc độ góc ω không đổi ………………..

Khi thanh chạm sàn ở tư thế thẳng đứng: thanh quay quanh G được k vòng, gocws mành thanh đã quay được:

$$\omega.t = \frac{5\pi}{6} + k\pi.......$$

Khoảng cách nhỏ nhất từ điểm treo đến sàn nhỏ nhất khi k=0, ta có:

$$t = \frac{5\pi}{6}\sqrt{\frac{3\sqrt{3}gL}{8}}\ (1)............$$

Độ dời của G theo phương thẳng đứng kể từ khi thanh dời giá đỡ đến khi chạm sàn:

$$H - \frac{L}{2}cos30^o - \frac{L}{2} = -\left(v_G.\sin 30^o.t - \frac{gt^2}{2}\right)(2)..........$$

Từ (1) và (2): H≈1,6.L=3,2m

b.Chọn trục Oy thẳng đứng hướng lên, O tai điểm treo, phương trình chuyển động khối tâm:

$$y_G = v_G \sin 30^o.t - \frac{gt^2}{2} - \frac{L}{2}cos30^o.........$$

Tọa độ đầu dưới D của thanh:

$$y = y_G + \frac{L}{2}cos\left(\omega t + 30^o\right)$$

$$= v_G \sin 30^o.t - \frac{gt^2}{2} - \frac{L}{2}cos30^o - \frac{L}{2}cos\left(\omega t + 30^o\right).......$$

Độ cao cực đại của đầu dưới đạt được khi:

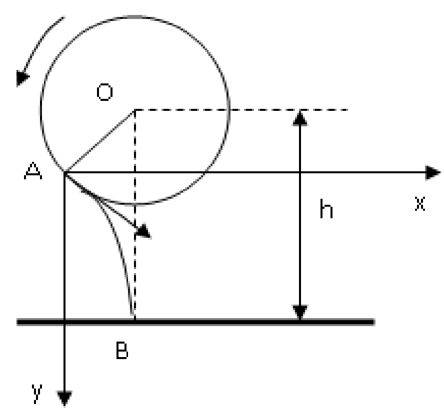
$$\frac{dy}{dt} = 0.........$$

Ta tìm được:

$$t \approx 1.05\sqrt{\frac{L}{g}}.............$$

Từ đó ta có: $y_{Dmax}$=-0,523L nên $H_{Dmax}$=2,68m

**Bài 7.** Để giọt nước rơi chạm đất tại B thì nó phải bắn ra từ điểm A thuộc nửa dưới và bên trái của bánh xe




Gọi $\alpha = AOB$, chọn hệ trục toạ độ Oxy như hình vẽ, ta có phương trình toạ độ của giọt nước:

$$x = v.\cos\alpha.t \quad \left(v = \omega R\right)$$

$$y = v.\sin\alpha.t + \frac{1}{2}gt^2$$

Khi giọt nước chạm đất tại B ta có:

$$x = R\sin\alpha; y = h - R\cos\alpha$$

$$(1) \Rightarrow t = \frac{R\sin\alpha}{\omega R\cos\alpha} = \frac{\tan\alpha}{\omega}\quad (3)$$

$$(2),(3) \Rightarrow \omega R\sin\alpha\frac{\tan\alpha}{\omega}+\frac{1}{2}g\left(\frac{\tan\alpha}{\omega}\right)^2=h-R\cos\alpha$$

$$\Leftrightarrow\left(g+2\omega^2h\right)\cos^2\alpha-2\omega^2R\cos\alpha-g=0$$

$$\Delta'=\omega^4R^2+2\omega^2gh+g^2>0$$

$$\Rightarrow\cos\alpha=\frac{\omega^2R+\sqrt{\omega^4R^2+2\omega^2gh+g^2}}{g+2\omega^2h}$$

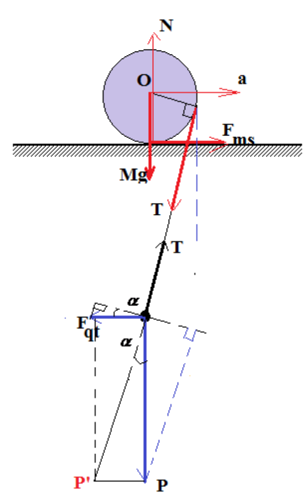
$$\Rightarrow\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{\omega^2R+\sqrt{\omega^4R^2+2\omega^2gh+g^2}}{g+2\omega^2h}\right)^2}$$

$$=\frac{\omega\sqrt{2\left(2\omega^2h^2+gh-\omega^2R^2-R\sqrt{\omega^4R^2+2\omega^2gh+g^2}\right)}}{g+2\omega^2h}$$

Thời gian rơi:

$$t=\frac{\tan\alpha}{\omega}=\frac{\sqrt{2\left(2\omega^2h^2+gh-\omega^2R^2-R\sqrt{\omega^4R^2+2\omega^2gh+g^2}\right)}}{\omega^2R+\sqrt{\omega^4R^2+2\omega^2gh+g^2}}$$

# I.3 ĐỘNG LỰC HỌC VẬT RẮN




**Bài 1.** a.Xét trong hệ quy chiếu không quán tính gắn với tâm đối xứng O của trụ, vật m chịu thêm lực quán tính nằm ngang:

$F_{qt}\cos\alpha=P\sin\alpha$

$\Rightarrow\frac{a}{g}=\tan\alpha$ (1)

Hay $\alpha=\arctan\frac{a}{g}$

b. Vật M thu gia tốc góc không đổi quay quanh khối tâm O của nó:

$\gamma=\frac{(T-F_{ms})R}{\frac{1}{2}MR^2}$ (2)

- Gia tốc tịnh tiến của trụ:

$a=\frac{F_{ms}-T\sin\alpha}{M}$ (3)

-Vì lăn không trượt nên $a=\gamma R$ (4)

Từ (1), (2), (3,(4) ta tìm được

$$T=\frac{\frac{3}{2}Ma}{1-\sin\alpha}=\frac{3}{2}Ma\left(\frac{\sqrt{a^2+g^2}}{\sqrt{a^2+g^2}-a}\right) \qquad (5)$$

c.Trên phương dọc sợi dây, vật m có gia tốc đối với O là $a_{mO}$:

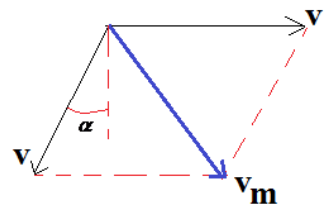
$$\begin{cases} a_{mO}=\gamma R=a \\ a_{mO}=\dfrac{P\cos\alpha+F_{qt}\sin\alpha-T}{m}\end{cases}$$

$$\Rightarrow a=g\cos\alpha+a\sin\alpha-\frac{T}{m} \qquad (6)$$

Từ (1) suy ra $cos\alpha=\dfrac{g}{\sqrt{a^2+g^2}}$, và thay (5) vào (6) ta được $\dfrac{m}{M}=\dfrac{3}{2}.\dfrac{a\sqrt{a^2+g^2}}{(\sqrt{a^2+g^2}-a)^2}$

(7)

d.Gọi $v_m$ là vận tốc của vật nặng m đối với đất, v cũng chính là tốc độ chuyển động tịnh tiến của vật nặng m so khối tâm hình trụ.




- Áp dụng định lý cộng vận tốc, tính được vận tốc vật nặng m đối với đất là $v_m$

$$v_m^2=v^2+v^2-2v.v.\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) \quad \rightarrow v_m=v\sqrt{2(1-\sin\alpha)}$$

Suy ra động năng của vật nặng $W_{dm}=\frac{1}{2}mv_m^2=mv^2(1-\sin\alpha)$

-Tổng động năng của cuộn chỉ $W_{dM}=\frac{1}{2}Mv^2+\frac{1}{2}I\omega^2=...=\frac{3}{4}Mv^2$

- Độ giảm thế năng của vật nặng bằng độ tăng độ năng hệ: $mv^2(1-\sin\alpha)+\frac{3}{4}Mv^2=mgh$

$$\Rightarrow v=\sqrt{\frac{mgh}{m(1-\sin\alpha)+\frac{3}{4}M}}=\sqrt{\frac{gh}{(1-\sin\alpha)+\frac{3}{4}\frac{M}{m}}}=\sqrt{2ah\sqrt{\left(\frac{a^2}{g^2}+1\right)}}$$

**Bài 2.**

- Vì ngoại lực theo phương ngang bằng không ⇒ khối tâm G chuyển động với gia tốc $a_G$ theo phương thẳng đứng.

Có: mg - N = $ma_G$ (1)

- Phương trình chuyển động quay nhanh khối tâm

$$Nl\cos\alpha_0=\frac{1}{3}ml^2\gamma \qquad (2)$$

- Khi thanh hợp với phương ngang góc ($\alpha_0$ - d$\alpha$) thì khối tâm dịch chuyển được một đoạn dy.

Có: dy = lsin $\alpha_0$ - lsin ($\alpha_0$ - d$\alpha$)

$\Rightarrow$ dy = l [(sin$\alpha_0$ - (sin$\alpha_0$cosd$\alpha$ - cos$\alpha_0$ sind$\alpha$)]

Vì d$\alpha$ rất nhỏ nên: sin (d$\alpha$) $\approx$ d$\alpha$ ; cos (d$\alpha$) $\approx$ 1

$\Rightarrow$ dy = lcos$\alpha_0$.d$\alpha$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = l\cos\alpha_0.\frac{d\alpha}{dt}$$

$$\rightarrow a_G = \frac{d^2y}{dt^2} l\cos\alpha_0.\frac{d\alpha}{dt^2} = l\cos\alpha_0.\gamma$$

Thay vào (2): $Nl\cos\alpha_0 = \frac{1}{3}ml^2 \frac{a_G}{l\cos\alpha_0}$

$$\Rightarrow a_G = \frac{3N\cos^2\alpha_0}{m}$$

Thay vào (1): mg - N = m$\frac{3N\cos^2\alpha_0}{m}$

$$\rightarrow N = \frac{mg}{1+3\cos^2\alpha_0}$$

**Bài 3.** a/ Xác định gia tốc của $m_1$ và $m_2$.

+ Biểu diễn các lực trên hình

+ Xét vật $m_1$: $m_1g - T_1 = m_1a \Rightarrow T_1 = m_1(g - a)$ (3.1)

+ Xét vật $m_2$ : $T_2 - F_{ms} = m_2a \Rightarrow T_2 = m_2(\mu g + a)$ (3.2)

+ Xét ròng rọc : $(T_1 - T_2)R = I\gamma \Rightarrow T_1 - T_2 = I\frac{a}{R^2}$ (3.3)

Từ (4.1), (4.2), (4.3) $\Rightarrow$ $a = \dfrac{g(m_1 - \mu m_2)}{\frac{I}{R^2} + m_1 + m_2}$ (3.4)

b/ Tìm điều kiện giữa khối lượng $m_1$, $m_2$ và hệ số ma sát mặt bàn $\mu$ để hệ thống nằm cân bằng.

Để hệ thống nằm cân bằng $P_1 = F_{msn} \le (F_{msn})_{max}$, $\Rightarrow m_2\mu \ge m_1$

**Bài 4.**Gọi $\vec{v}_B$ là vận tốc của dây đối với đất, (và cùng là vận tốc của người B đối với đất ). Theo công thức cộng vận tốc ta có vận tốc của người A đối với đất là:

$$\vec{v}_A = \vec{u} + \vec{v}_B \qquad (1)$$

Chiếu ( 1 ) xuống phương chuyển động của A ta được : $v_A = u - v_B$ ( 2 )

Ban đầu cơ hệ đứng yên nên mômen động lượng của hệ đối với trục ròng rọc bằng không:

$$\left|\vec{L}\right| = 0 \qquad ( 3 ).$$

Khi người A bắt đầu leo lên dây thì mômen động lượng của hệ gồm mômen động lượng của người A, người B và mômen quay của ròng rọc:

$$L^{'} = R.m.v_A - R.m.v_B - I.\omega \quad \text{với } \omega = \frac{v_B}{R}$$

Ta có thể áp dụng định luật bảo toàn mômen động lượng cho hệ : $L = L^{'}$

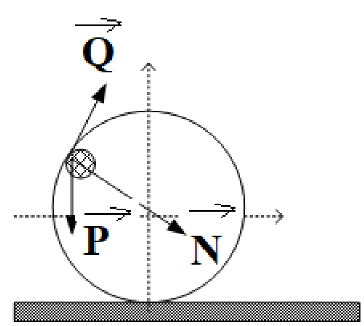
$$\Leftrightarrow \; R.m.v_A - R.m.v_B - I.\omega = 0$$

$$\Leftrightarrow R.m.(U - V_B) - R.m.v_B - \frac{m}{4}.R^2.\frac{v_B}{R} = 0.$$

Ta tìm được: $v_B = \dfrac{4u}{9}$

Vậy vận tốc của người B đối với đất bằng : $v_B = \dfrac{4u}{9}$

**Bài 5.** Khi m ở vị trí bất kì, lực tác dụng vào m có P và F lực mà vành tác dụng vào m. Có thể phân tích lực F thành hai phần: $\vec{N}$ có phương trùng với bán kính vành tròn, chiều hướng tâm, $\vec{Q}$ có phương tiếp tuyến với vòng (hình vẽ).




Định luật II: $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{Q} + \vec{N}$ (1)

Chiếu (1) theo $\vec{Q}$ và theo $\vec{N}$ $\begin{cases} Q = P\sin\alpha \\ P\cos\alpha + N = \dfrac{mv_0^2}{R} \end{cases}$

+Thành phần lực F tác dụng vào m theo phương thẳng đứng: $F_y$ = Qsinα - N cosα (3) . Từ (2) và (3) ta có:

$$F_y = P\sin^2\alpha - \left(\frac{mv_0^2}{R} - P\cos\alpha\right) - \cos\alpha = P - \frac{mv_0^2}{R}\cos\alpha .$$

$(F_y)_{max}$ khi α = 0 vật ở vị trí cao nhất, $F_y$ hướng xuống với $(F_y)_{max} = P - \frac{mv_0^2}{R}$ .

Theo định luật III lực tác dụng từ m vào vành M có phương ngược với $F_y$, ($F_y$’ hướng xuống):

$(F_y)'_{max} = -(F_y)_{max} = \frac{mv_0^2}{R} - P$ . Vành không nảy lên khi:

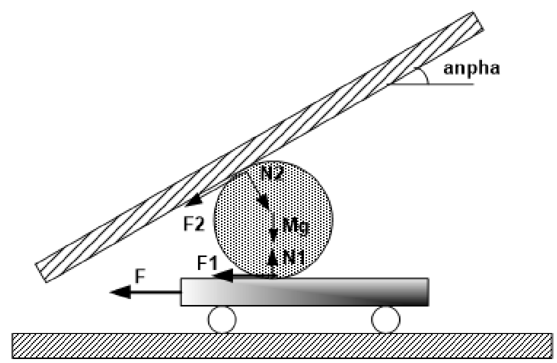
$$(F_y^{'})_{\max} \le Mg \Leftrightarrow \frac{mv_0^2}{R} - P \le Mg \Rightarrow v_0 \le \sqrt{\left(1+\frac{m}{M}\right)gR}$$

**Bài 6.** Hình trụ có hai khả năng quay hay không quay.

Giả sử trụ quay:

Khi mặt phẳng ngang chuyển động đều thì trụ quay đều và gia tốc của khối trụ bằng không

Ta có tổng các Moment lực đối với trục quay qua khối tâm bằng 0:




$F_1 = F_2 = F$

+ Theo phương ngang:

$N\sin\alpha - F_2\cos\alpha - F_1 = 0$ (1)

+ Theo phương thẳng đứng:

$N_1 - Mg - N_2\cos\alpha - F_2\sin\alpha = 0$ (2)

Rút gọn biểu thức ta thu được: $\begin{cases} F = N_2\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \\ N_1 = Mg + N_2 \end{cases}$ (3)

<u>Nhận xét</u> $F$, $N_1$, $N_2$ phụ thuộc vào $\mu_1$, $\mu_2$, α và có hai trường hợp có thể xảy ra:

- Trường hợp 1.

$\mu_1 N_1 > \mu_2 N_2$, hình trụ quay, $F = \mu_2 N_2$

Khi đó từ (3): $N_2 \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \mu_2 N_2$

1.a/ $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} > \mu_2$ => $N_2 = 0$, $F = 0$ với điều kiện $\mu_1 N_1 > \mu_2 N_2$ với mọi giá trị của $\mu_1$, $\mu_2$.

1.b/ $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} < \mu_2$ , khi đó hình trụ bị kẹt, điều kiện $\mu_1 N_1 > \mu_2 N_2$ xảy ra với $\mu_1 > \mu_2$.

- Trường hợp 2.

$\mu_1 N_1 < \mu_2 N_2$, hình trụ không quay được $F = \mu_1 N_1$.

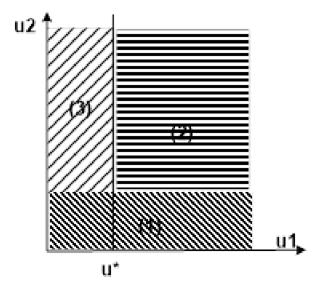
Từ (3) suy ra: $N_2 \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \mu_1 N_1$

$\mu_1(Mg + N_2) = N_2 \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$. Tìm ra $N_2 = \dfrac{\mu_1 Mg}{\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} - \mu_1}$

2.a/ $\mu_1 \geq \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$, khi đó trụ bị kẹt, điều kiện $\mu_1 N_1 > \mu_2 N_2$ khi $\mu_1 < \mu_2$.

2.b/ $\mu_1 < \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$, khi đó $F = \mu_1 N_1 = \mu_1 (N_2 + Mg)$. Hay: $F = \dfrac{\mu_1 Mg}{1 - \mu_1 \dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}}$

Điều kiện $\mu_1 N_1 < \mu_2 N_2$ xảy ra khi




$\mu_2 > \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$

$\mu_2 N_2 > \mu_1 (N_2 + Mg)$

Đánh giá: $\mu^* = \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$

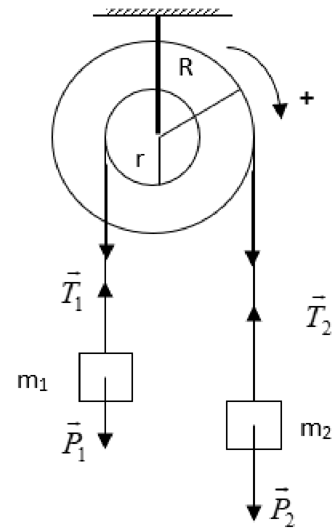
Biểu diễn kết quả qua đồ thị, đồ thị biểu diễn mặt phẳng $\mu_1$, $\mu_2$ chia làm 3 miền

- Miền 1: ứng với trường hợp (1.a)

- Miền 2: ứng với trường hợp (1.b ) và (2.a) hình trụ bị kẹt nên $F = \infty$

- Miền 3: ứng với trường hợp (2.b),

$$F = \frac{\mu_1 Mg}{1-\mu_1\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}}$$




**Bài 7.** Biểu diễn các lực tác dụng lên hệ

Vì $R.P_2 > r.P_1$ nên $m_2$ đi xuống, $m_1$ đi lên

Áp dụng định luật II Newton cho $m_1$, $m_2$:

Vật $m_1$: $-m_1g + T_1 = m_1a_1$ (1)

Vật $m_2$: $m_2g - T_2 = m_2a_2$ (2)

Áp dụng phương trình ĐLHVR cho ròng rọc:

$T_2R - T_1r = I\gamma$ (3)

Mặt khác: $a_1 = r\gamma$ (4)

$a_2 = R\gamma$ (5)

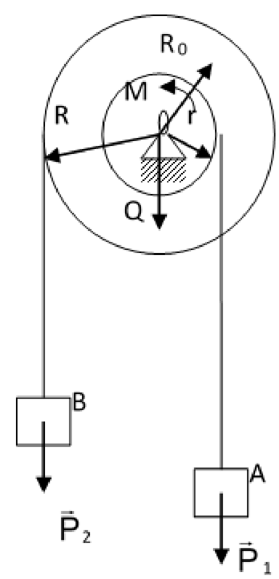
Từ (1), (2), (3), (4), (5):

$$\gamma = \frac{(m_2R - m_1r)g}{m_2R^2 + m_1r^2 + I} \text{ với } I = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{2}mr^2$$

Thay số: $\gamma =$ 20 rad/s$^2$ ; $a_1 = 1$m/s$^2$ ; $a_2 = 2$m/s$^2$ ;

$T_1 = m_1(g + a_1)$; $T_2 = m_2(g - a_2)$ , thay số $T_1 =$ 2,75N; $T_2 =$ 1,6N.

**Bài 8.**




Xét cơ hệ gồm vật nặng A, B, tời C ( hình vẽ ). Các ngoại lực tác dụng lên hệ gồm các trọng lực $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{Q}$.

Mômen $\vec{M}$ và phản lực $\vec{R}_0$, trong đó phản lực $\vec{R}_0$ có mômen đối với trục quay O bằng không.

ÁP dụng định lý biến thiên mômen động lượng đối với trục quay z qua đi qua O của tời ta có: $\frac{d}{dt}L_z = -P_1r + P_2R + M$

( 1 )

Mặt khác ta lại có : $L_z = L_z(A) + L_z(B) + L_z(C)$

Mômen động lượng của vật A là: $L_z(A) = r.\frac{P_1}{g}v_A = \frac{P_1}{g}r^2\omega$

Mômen động lượng của vật B là: $L_z(B) = R.\frac{P_2}{g}v_B = \frac{P_2}{g}R^2\omega$

Mômen động lượng của tời C là: $L_z(C) = I_z\omega = \frac{Q}{g}\rho^2\omega$

$$\Rightarrow L_z = (P_1r^2 + P_2R^2 + Q\rho^2)\ \frac{\omega}{g} \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta được: $\frac{d\omega}{dt} = \gamma = \frac{M + P_2R - P_1r}{P_1r^2 + P_2R^2 + Q\rho^2}$

$$\text{Vậy } \gamma = \frac{M + P_2R - P_1r}{P_1r^2 + P_2R^2 + Q\rho^2}g$$

**Bài 9.** Giả sử trong thời gian Δt khối tâm của ống chỉ đi xuống được một đoạn DH. Lúc này ống chỉ quay quanh khối tâm góc: $\Delta\varphi = \frac{\Delta H}{R} = \frac{2\Delta H}{D}$.

Khối m bị cuốn lên một đoạn: $\Delta\varphi\frac{d}{2} = \Delta H\frac{d}{D}$ so với khối tâm của cuộn chỉ. Vậy khối m đi xuống một đoạn: $\Delta h = \Delta H - \Delta H\frac{d}{D} = \Delta H\frac{D-d}{D}\Delta t$. Gọi a là gia tốc của khối tâm ống chỉ, thì gia tốc của vật m là:

$a_0 = a\frac{D-d}{D}; \Delta H = a\frac{\Delta t^2}{2}; \Delta h = a\frac{D-d}{D}\frac{\Delta t^2}{2}$.

Vận tốc của ống chỉ và của vật m: v = aΔt, $v_0 = a_0\Delta t = a\frac{D-d}{D}\Delta t$. Vận tốc góc của trục chỉ ω = $\frac{2v}{D} = \frac{2a\Delta t}{D}$.

Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng:

MgΔH + mgΔh = $\frac{Mv^2}{2} + \frac{mv_0^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$. $Mga\frac{\Delta t^2}{2} + mga\frac{D-d}{D}\frac{\Delta t^2}{2} = \frac{M(a\Delta t)^2}{2} + \frac{m(a\frac{D-d}{D}\Delta t)^2}{2} + \frac{I}{2}\left(\frac{2a\Delta t}{D}\right)^2$

suy ra a = $g\frac{M - \frac{D-d}{D}m}{M + \left(\frac{D-d}{D}\right)^2 m + \frac{4I}{D^2}}$.

**Bài 10.** Gọi $v_c$ là vận tốc của quả cầu sau khi lăn xuống được độ cao h.

$v_T$ là vận tốc của hình trụ sau khi lăn xuống được độ cao h.

Khi quả cầu, hình trụ lăn không trượt xuống dưới, thì điểm đặt của lực ma sát tĩnh nằm trên trục quay tức thời, mà tại đó vận tốc của các điểm tại bằng không và không ảnh hưởng tới cơ năng toàn phần của vật.

Vai trò của lực ma sát ở đây là đảm bảo cho vật lăn thuần tuỳ không trượt và đảm bảo cho độ giảm thế năng hoàn toàn chuyển thành độ tăng động năng tịnh tiến và chuyển động năng quay của vật.

Vì các lực tác dụng lên hình trụ đặc và quả cầu đều là : $\vec{p}$ ( lực thế ), $\vec{N}$ ( theo phương pháp tuyến) và lực ma sát tĩnh $\vec{F}_{ms}$. Ta có $\vec{N}$ và $\vec{F}_{ms}$ không sinh công

$\Rightarrow A_{\text{các lực không thế}} = 0 \Rightarrow$ cơ năng của hệ được bảo toàn.

Như vậy ta có thể áp dụng định luật bảo toàn cơ năng cho chuyển động của quả cầu và hình trụ:

Với quả cầu: $mgh = \dfrac{mv_c^2}{2} + \dfrac{I_c\omega_c^2}{2}$ ( 1 )

Với hình trụ: $mgh = \dfrac{mv_T^2}{2} + \dfrac{I_T\omega_T^2}{2}$ ( 2 )

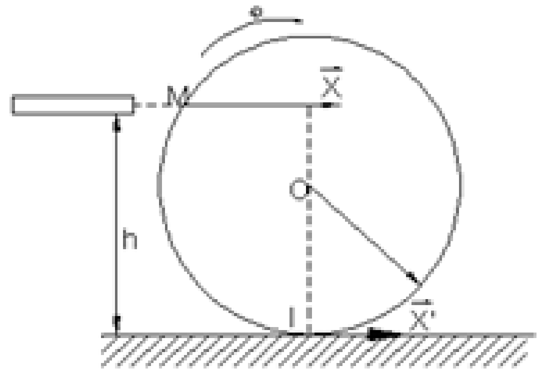
Trong đó: $I_c = \dfrac{2mR^2}{5}$ ; $\omega_c = \dfrac{v_c}{R}$

$I_T = \dfrac{mR^2}{2}$ ; $\omega_T = \dfrac{v_T}{R}$

Thay vào ( 1 ) và ( 2 ) ta có: $mgh = \dfrac{7mv_c^2}{10}$ ; $mgh = \dfrac{3mv_T^2}{4}$

$$\Rightarrow \frac{v_c^2}{v_T^2} = \frac{15}{14} \Rightarrow \frac{v_c}{v_T} = \sqrt{\frac{15}{14}}$$

**Bài 11.** a) Gậy tác dụng vào quả bi- a một xung lực là $\vec{X}$. Tại điểm tiếp xúc I lực ma sát cũng gây ra xung lực $\vec{X'}$ cản sự quay quanh O của quả bi - a. $F_{ms}$ là nhỏ ( do không có thêm lực nén ) nên X'<< X, ta có thể bỏ qua.




Theo định luật bảo toàn momen động lượng ta có:

$$X(h - R) = I_0\omega \qquad (1)$$

Và $X = mv_0$ hay $v_0 = \frac{X}{m}$ (2)

Từ (1) suy ra $X = \frac{2mR^2\omega}{5(h-R)}$ thay vào (2) ta được:

$$v_0 = \frac{2R^2\omega}{5(h-R)} \qquad (3)$$

b) Nghiên cứu chuyển động:

+) $h > \frac{7}{5}R$ : $v_0 < \omega R$

Ta có $\vec{v_I} = \overrightarrow{v_{I/0}} + \overrightarrow{v_{0/dat}} = \vec{v_q} + \vec{v_0}$ $(v_q = \omega R)$

$\longrightarrow$ $V_I = v_q - v_0$ , chiều của $\vec{v_I}$ hướng ra sau. Như vậy ở I sẽ xuất hiện lực ma sát làm cho $\omega$ giảm dần cho tới khi $\omega = \omega$' thì $v_I = 0$, quả bi- a thôi không trượt và chuyển sang chuyển động lăn không trượt, chuyển động chậm dần rồi dừng hẳn.

+) $h = \frac{7}{5}R$ : $v_0 = v_q = \omega R$, $v_I = 0$.

Quả bi- a lăn không trượt, chuyển động chậm dần rồi dừng lại.

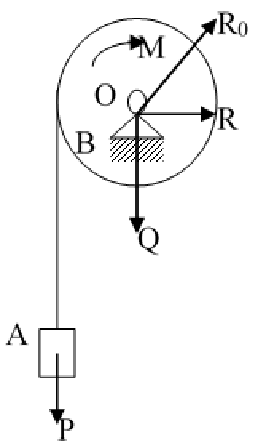
+) $R < h < \frac{7}{5}R$ : $v_0 > v_q = \omega R$.

$v_I = v_0 - \omega R$, hướng về phía trước.

$F_{ms}$ hướng ra sau cản chuyển động nhưng làm tăng $\omega$ đến khi $\omega$": $v_0$" = $\omega$"R thì lúc đó quả bi-a lăn không trượt rồi chuyển động chậm dần rồi dừng lại.

**Bài 12.** Cơ hệ khảo sát gồm vật A chuyển động tịnh tiến; tời B quay quanh một trục cố định.

Các lực tác dụng lên hệ gồm các trọng lực $\vec{P},\vec{Q}$, ngẫu lực $\vec{M}$, phản lực $\vec{R}_0$ và các nội lực.




**Nhận xét**: trọng lực tác dụng chỉ có ngẫu lực $\vec{M}$ và trọng lực $\vec{P}$ sinh công; còn phản lực $\vec{R}_0$ và trọng lực $\vec{Q}$ không sinh công vì các điểm đặt của chúng cố định, các nội lực cũng không sinh công.

Vì có thể tính công hữu hạn của ngẫu lực $\vec{M}$ và trọng lực $\vec{P}$ để tìm vận tốc $\vec{v}_A$ của vật A ta áp dụng định lý biến thiên động năng:

$$T - T_0 = A(\vec{P}) + A(\vec{M}) \qquad (1)$$

trong đó $T_0$ là động năng của hệ tại thời điểm ban đầu ; T à động năng của hệ tại thời điểm ( t ).

Ta có: $T_0 = 0$ vì ban đầu hệ đứng yên . ( 2 )

Ta có: $T = T_A + T_B$ ( 3 )

Vật A chuyển động tịnh tiến nên $T_A = \frac{1}{2}\frac{P}{g}v_A^2$ ( 4 )

Vật B quay quanh trục cố định nên $T_B = \frac{1}{2}I_O\omega^2$

$$\Leftrightarrow T_B = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{Q}{g}R^2\right)\omega^2 = \frac{1}{4}\frac{Q}{g}R^2\left(\frac{v_A}{R}\right)^2 = \frac{1}{4}\frac{Q}{g}v_A^2 \qquad (5)$$

Thay ( 4 ) , ( 5 ) vào ( 3 ) ta có: $T = \frac{(2P+Q)}{2g}\frac{v_A^2}{2}$ ( 6 )

Ta có: $A(\vec{P}) + A(\vec{M})$ = M$\varphi$ - P.h = M$\varphi$ - P.R.$\varphi$ với h = R.$\varphi$

$$\Leftrightarrow A(\vec{P}) + A(\vec{M}) = \left(\frac{M}{R} - P\right)h \qquad (7)$$

Thay ( 2 ), ( 6 ), ( 7 ) vào ( 1 ) ta được: $\frac{(2P+Q)}{2g}\frac{v_A^2}{2} = \left(\frac{M}{R} - P\right)h$

$$\Rightarrow v_A = \sqrt{4g\frac{(M - Ph)}{R(2P+Q)}h}$$

Để tìm gia tốc $a_A$ của vật A ta sử dụng định lý biến thiên động năng dạng vi phân

$$dT = \sum dA_k^i + \sum dA_k^e \Leftrightarrow \frac{(2P+Q)}{2g}v_A.a_A = \left(\frac{M}{R} - P\right)v_A \quad \Rightarrow a_A = 2g\frac{(M - PR)}{R(2P+Q)}$$

Vậy $v_A = \sqrt{4g\frac{(M - Ph)}{R(2P+Q)}h}$ $\qquad a_A = 2g\frac{(M - PR)}{R(2P+Q)}$

**Bài 13.** Vận tốc của vật nặng m tại cuối độ cao h tính được nhờ áp dụng định luật bảo toàn cơ năng : $v_1 = \sqrt{2gh}$ ( 1)

Khi vật nặng bắt đầu làm căng dây, xuất hiện tương tác giữa vật nặng và bánh đà. Vì tương tác xảy ra trong thời gian được xem là rất ngắn nên ta có gần đúng bảo toàn mô men xung lượng (đối với trục quay):

$L_{\text{ngay trước trước tương tác}} = L_{\text{ngay trước sau tương tác}}$

$$\Leftrightarrow m.v_1.R = m.v_2.R + I.\omega \qquad (2)$$

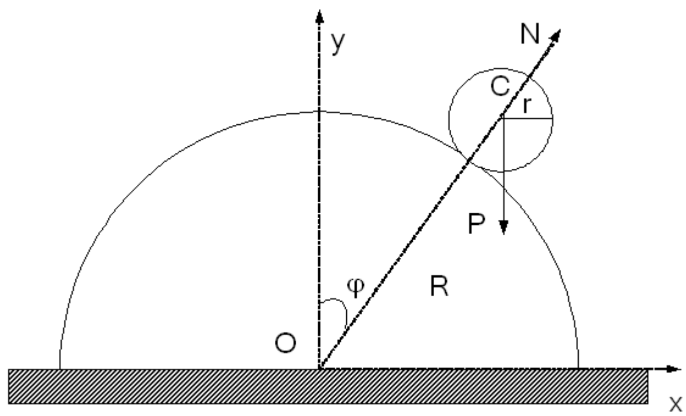
Trong đó $v_2$ là vận tốc của vật m ngay sau tương tác, I là mômen quán tính của bánh đà đối với trục quay, $\omega$ là vận tốc góc của bánh đà ngay sau tương tác.

Ta có: $I = \frac{1}{2}.M.R^2$ ( 3 )

$v_2 = \omega.R$ ( 4 )

Từ ( 1), ( 2 ), ( 3 ), ( 4 ) ta tính được : $\omega = \frac{2m\sqrt{2gh}}{(m+2M).R}$

**Bài 14.** 1. Xác định vận tốc khối tâm hình trụ theo góc φ là góc hợp bởi đường thẳng đứng và đường thẳng nối tâm hai trụ




Áp dụng định lý động năng: $W_đ - W_{đ0} = A_p$ (1)

Với $W_{đ0} = 0$; $W_đ = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}I\omega'^2 (2)$; $v_C = (R+r)\omega$

ω là vận tốc góc của khối tâm C trụ nhỏ đối với tâm O của trụ lớn

$\omega'^2$ kà vận tốc góc của trụ nhỏ quanh khối tâm C

Lăn không trượt nên: ω'r = ω (R +r); (2) $\Rightarrow W_đ = \frac{3}{4}m(R+r)^2\omega^2$ (3)

$A_p = mg(R+r)(1-\cos\varphi)$ (4)

Từ (1), (2), (3), (4) $\Rightarrow v_c = \sqrt{\frac{4g}{3}(R+r)(1-\cos\varphi)}$ (5)

2. Từ vị trí hình trụ r rời mặt trụ R:

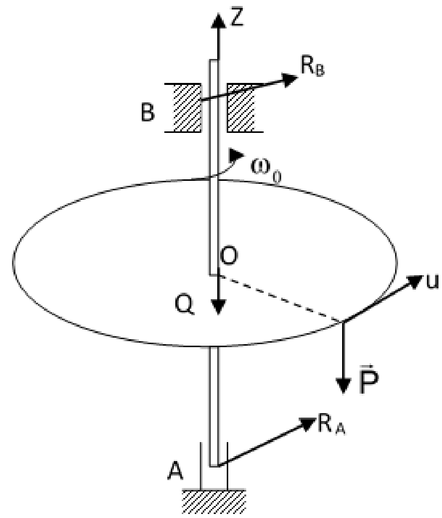
Áp dụng định luật II Niu tơn cho hình trụ: $m\overrightarrow{a_c} = \vec{P} + \vec{N}$

Chiếu hệ thức vec tơ lên trục hướng tâm:

$$m\frac{v_C^2}{R+r} = mg\cos\varphi - N \Rightarrow n = mg\cos\varphi - m\frac{v_C^2}{R+r} \quad (6)$$

Khi đó N = 0. Từ (5) và (6) suy ra: $\cos\varphi = \frac{4}{7} \Rightarrow \varphi = \arccos\frac{4}{7}$

**Bài 15.** Khảo sát cơ hệ gồm đĩa và chất điểm M. Đĩa có thể quay quanh trục cố định z thẳng đứng, còn chất điểm M chuyển động trên mặt đĩa theo đường tròn tâm O, bán kính OM (chuyển động tương đối ) với vận tốc u và cùng quay với đĩa quanh trục z (chuyển động theo)




Các ngoại lực tác dụng lên hệ gồm các trọng lực $\vec{Q}$, $\vec{P}$ và các phản lực $\vec{R}_A$, $\vec{R}_B$ tại các ổ trục A và B.

Vì hệ ngoại lực gồm các lực song song và cắt trục z ta có :

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum M_z(\vec{F}_k^e) = 0 \Rightarrow L_z = \text{const}$$

$$\Rightarrow L_z = L_z(0) \qquad (1)$$

Trong đó: $L_z$ là Mômen động lượng của hệ theo trục z tại thời điểm bất kì. $L_z(0)$ là Mômen động lượng của hệ theo trục z tại thời điểm ban đầu.

Giả sử rằng tại thời điểm đầu chất điểm nằm yên trên đĩa và cùng với đĩa quay quanh trục z theo chiều dương với vận tốc góc $\omega_0$

$\Rightarrow$ Mômen động lượng của hệ theo trục z tại thời điểm ban đầu là:

$$L_z(0) = L_{z1}(0) + L_{z2}(0)$$

Trong đó: $L_1(0) = I_z\omega_0 = \frac{Q}{2g}R^2\omega_0$ là mômen động lượng của đĩa theo trục z tại thời điểm ban đầu.

$L_2(0) = R.\frac{P}{g}.v = R\frac{P}{g}\omega_0 R = \frac{P}{g}R^2\omega_0$ là mômen động lượng của chất điểm theo trục z tại thời điểm ban đầu. $\Rightarrow L_z(0) = \frac{(Q+2P)}{2g}\omega_0 R^2 \qquad (2)$

Khi chất điểm chuyển động đối đĩa với vận tốc u ( theo chiều dương của z ) thì đĩa sẽ quay quanh trục z với vận tốc góc là $\omega$ cùng theo chiều dương.

Suy ra ta có mômen động lượng của hệ theo trục z tại thời điểm bất kì là:

$$L_z = L_{z1} + L_{z2}$$

Trong đó: $L_{z1} = I_z\omega = \frac{Q}{2g}R^2\omega$ là mômen động lượng của chất điểm theo trục z tại thời điểm bất kì.

$L_{z2} = R.\frac{P}{g}.v' = R\frac{P}{g}(\omega R + u)$ là mômen động lượng của chất điểm theo trục z tại thời điểm bất kì. $\Rightarrow L_z = \frac{R\omega(Q+2P)+2PRu}{2g}$ ( 3 )

Thay ( 2 ) và ( 3 ) vào ( 1 ) ta được: $\omega = \omega_0 - \frac{2Pu}{(Q+2P)R}$

Đĩa quay quanh trục z theo chiều âm hay dương phụ thuộc vào $\omega = \omega_0 - \frac{2Pu}{(Q+2P)R}$ dương hay âm.

**Bài 16.** Để bỏ qua các lực đàn hồi chưa biết và có tác dụng gây ra dao động ở các đĩa, ta xem trục và các đĩa như một hệ.

Các lực ngoài tác dụng lên hệ gồm: phản lực của các gối đỡ và trọng lực đều cắt trục x vì vậy:

$$\sum M_x(F_k) = 0 \Rightarrow L_x = \text{const.}$$

Vậy mômen động lượng của hệ bảo toàn.

Ta có mômen xung lượng ban đầu của hệ là: $L_{x1} = 0$ (1)

Ta có mômen động lượng của hệ khi dao động là: $L_{x2} = I_1.\omega_1 + I_2.\omega_2$ (2)

(vì mômen động lượng của hệ đối vớ trục x bằng tổng mômen động lượng của các đĩa đối với cùng trục đó). Từ ( 1) và ( 2) ta có: $\omega_1 = -\frac{I_2}{I_1}\omega_2$ (3)

Tích phân 2 vế ( 3 ) từ 0 cho đến t ta có: $\int_0^t \omega_1 dt = \int_0^t -\frac{I_2}{I_1}\omega_2 dt \Leftrightarrow \varphi_1 = -\frac{I_2}{I_1}\varphi_2$

Trong đó $\varphi_1$ và $\varphi_2$ là các góc xoắn của các đĩa từ vị trí ban đầu. Bởi vậy, dao động sẽ xảy ra ngược chiều nhau, biên độ dao động góc tỷ lệ nghịch với mômen quán tính của các đĩa.

**Bài 17.**

**Cách 1**: Sử dụng phương pháp động lực học

Gọi T là lực căng dây, $\gamma$ là gia tốc góc của trống. $a_y$ là gia tốc của tải m

Ta có: $\begin{cases} M - TR = I\gamma \\ T - mg = ma_y \end{cases}$

$a_y = \gamma R$

tìm được $T = \frac{mRM + mgI}{mR^2 + I}$

$a_y = \frac{T - mg}{m} = \frac{MR - mR^2 g}{mR^2 + I}$

**Cách 2:** Sử dụng $\frac{dL}{dt} = \sum M$ ngoại

$\mathbf{L_z} = I\omega + mRv = (I + mR^2)\frac{v}{R}$

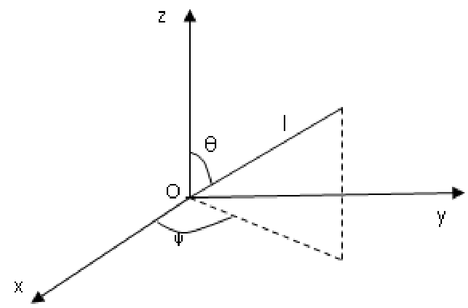
$\sum M_{ngoai} = M - mgR$

Suy ra $(I + mR^2)\frac{a}{R} = M - mgR$ ta tìm được $a = \frac{(M - mgR)R}{I + mR^2}$

**Bài 18.** Xét trục quay qua O

$\overrightarrow{L_o} = \frac{2}{5}mR^2\varphi'\overrightarrow{e_r} + l\sin\theta\varphi' ml\sin\theta\overrightarrow{e_z}$

$$=\frac{2}{5}mR^2\Omega\overrightarrow{e_r}+ml^2\sin^2\theta\omega\overrightarrow{e_z}-ml^2\sin\theta\omega\overrightarrow{e_\theta}$$




$$\theta=const\rightarrow\theta'=0$$

Định lí biến tiên momen động lượng

$$\overrightarrow{M}=\frac{d\overrightarrow{L}}{dt}=-mg\overrightarrow{e_z}\wedge(l.\overrightarrow{e_r})\qquad\leftrightarrow\frac{2}{5}mR^2\Omega\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt}=-mgl\sin\theta\overrightarrow{e_\varphi}$$

$$\leftrightarrow\frac{2}{5}mR^2\Omega(\theta'\overrightarrow{e_\theta}+\varphi'.\sin\theta.\overrightarrow{e_\varphi})=-mgl\sin\theta\overrightarrow{e_\varphi}$$

$$\leftrightarrow mgl\sin\theta\overrightarrow{e_\varphi}=\frac{2}{5}mR^2\Omega\omega\sin\theta.\overrightarrow{e_\varphi}$$

$$\leftrightarrow\omega=\frac{5gl}{2R^2\Omega}$$

**Bài 19.** Trong hệ quy chiếu quay, có 4 lực tác dụng lên người đi xe đạp:

+ Trọng lực đặt tại khối tâm

+ Phản lực và lực ma sát tại điểm tiếp xúc với rãnh

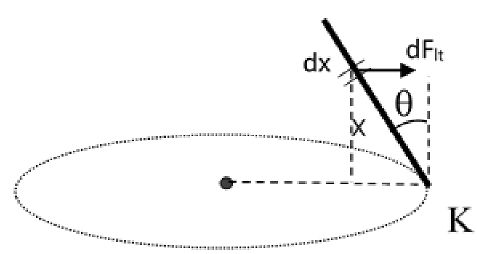
+ Lực quán tính li tâm

1.Do $h \ll R$ nên coi gần đúng tất cả các điểm trên người đi xe đạp đều cách tâm của quỹ đạo một khoảng R, lực quán tính li tâm coi như đặt tại khối tâm và có độ lớn : $F_{lt}=m\omega^2R$ với m là khối lượng của người và xe

Gọi l là khoảng cách từ khối tâm đến điểm tiếp xúc. Trong hệ quy chiếu quay người và xe đứng yên nên mômen của lực quán tính li tâm phải cân bằng với mômen của trọng lực. Do đó:

$$m\omega^2Rl\cos\theta=mgl\sin\theta\Rightarrow\omega=\sqrt{\frac{g}{R}\tan\theta}$$

2. Vì h không thể bỏ qua so với R nên lực quán tính li tâm tác dụng lên thanh thay đổi dọc theo chiều dài của thanh.




Xét một đoạn thanh có chiều dài rất nhỏ dx, cách điểm tiếp xúc K một đoạn x và có khối lượng $dm=\frac{m}{h}dx$

Lực quán tính li tâm tác dụng lên m:

$$dF_{lt} = \omega^2 (R - x\sin\theta)dm = \frac{m\omega^2}{h}(R - x\sin\theta)dx$$

Mômen của $dF_{lt}$ đối với điểm tiếp xúc K:

$$dM_{lt} = dF_{lt}.x\cos\theta = \frac{m\omega^2\cos\theta}{h}(R - x\sin\theta)xdx$$

Mômen của lực quán tính tác dụng lên thanh là:

$$M_{lt} = \int_0^h \frac{m\omega^2\cos\theta}{h}(R - x\sin\theta)xdx = \frac{m\omega^2\cos\theta}{h}\left(\frac{Rh^2}{2} - \frac{h^3\sin\theta}{3}\right) = m\omega^2 h\cos\theta\left(\frac{R}{2} - \frac{h\sin\theta}{3}\right)$$

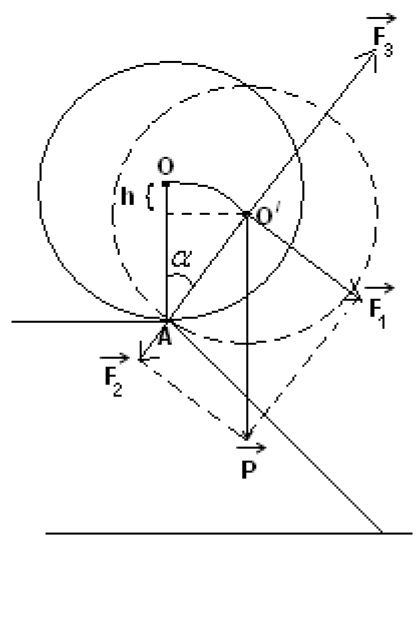
Điều kiện cân bằng của xe trong hệ quy chiếu quay:

$$M_{lt} = M_P \Rightarrow m\omega^2 h\cos\theta\left(\frac{R}{2} - \frac{h}{3}\sin\theta\right) = mg\frac{h}{2}\sin\theta$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\left(\frac{g}{R}\tan\theta\right)\left(1 - \frac{2h}{3R}\sin\theta\right)^{-1}}$$

Nhận xét: khi $h \ll R$ thì $\omega = \sqrt{\frac{g}{R}\tan\theta}$ ( trở về kết quả của câu a)

**Bài 20.** <u>Tìm giá trị vận tốc $v_{0\max}$ của hình trụ lăn trên mặt phẳng ngang để không bị nảy lên tại A</u>




* Ta có động năng của vật trên mặt phẳng ngang:

$$W_d = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

Vì lăn không trượt nên $v = \omega R$.

Mặt khác $I = \frac{1}{2}mR^2$

Suy ra $W_d = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}mR^2.\left(\frac{v}{R}\right)^2 = \frac{3}{4}mv^2$.

* Tại đỉnh A của mặt phẳng nghiêng:

\- Khi hình trụ đang ở trên mặt phẳng ngang, năng lượng là:

$W_0 = \frac{3}{4}mv_0^2 + mgh.$

- Khi hình trụ ở trên mặt phẳng nghiêng có tốc độ khối tâm v; năng lượng là:

$W = \frac{3}{4}mv^2.$

- Theo định luật bảo toàn năng lượng ta có:

$$\frac{3}{4}mv_0^2 + mgh = \frac{3}{4}mv^2 \qquad (1)$$

- A là tâm quay tức thời: Vận tốc tiếp tuyến là v nên lực hướng tâm $F = ma_{ht} = m.\frac{v^2}{R}$

Phân tích trọng lực P làm hai thành phần: $F_1 = P.\sin\alpha$ và $F_2 = P.\cos\alpha$

(có tác dụng gây áp lực lên mặt phẳng nghiêng)

- Hình trụ không nảy lên khỏi A nếu: $F \le F_2$ (2)

- Từ hình vẽ ta có: $h = R - R.\cos\alpha = R(1 - \cos\alpha)$.

Phương trình (1) $\Leftrightarrow \frac{3}{4}v_0^2 + gR(1 - \cos\alpha) = \frac{3}{4}v^2$

$$\Rightarrow v^2 = v_0^2 + \frac{4}{3}gR(1 - \cos\alpha) \qquad (3)$$

Từ phương trình (2) và (3) ta được: $m.\frac{v^2}{R} \le P.\cos\alpha$

$$\Leftrightarrow m.\frac{v_0^2 + \frac{4}{3}gR(1-\cos\alpha)}{R} \le mg.\cos\alpha$$

$$\Leftrightarrow v_0^2 + \frac{4}{3}gR(1 - \cos\alpha) \le g.R.\cos\alpha$$

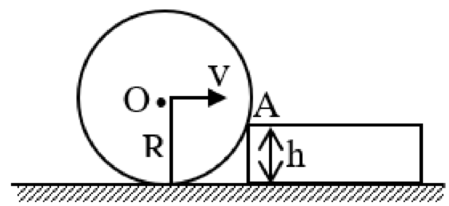
$$\Rightarrow v_0^2 \le g.R.\cos\alpha - \frac{4}{3}gR(1 - \cos\alpha)$$

$$\Leftrightarrow v_0^2 \le \frac{gR}{3}(7\cos\alpha - 4)$$

$$\Rightarrow v_0 \le \sqrt{\frac{gR}{3}(7\cos\alpha - 4)} \approx \sqrt{\frac{10.0,1}{3}(7.\frac{\sqrt{2}}{2} - 4)} \approx 0,6 \text{ (m/s)}$$

Vậy để không bị nảy lên tại A vận tốc $v_{0\max}$ của hình trụ lăn trên mặt phẳng ngang có giá trị bằng 0,6 (m/s).

**Bài 21.**




Giả sử $\omega;\omega_1$ và $L;L_1$ là vận tốc góc của quả cầu đối với khối tâm của nó và mô men xung lượng của nó đối với điểm va chạm A tương ứng trước và sau của quá trình va chạm với bậc thềm ta có:

$$L = mv(R - h) + \frac{2}{5}mR^2\omega = \frac{7}{5}mvR - mvh \quad (1)$$

Quả cầu lăn không trượt nên $v = \omega R$ và $L_1 = \left(\frac{2}{5}mR^2 + mR^2\right)\omega_1 = \frac{7}{5}mR^2\omega_1$ (2)

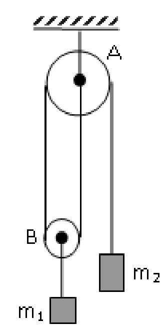
Vì va chạm xẩy ra rất nhanh nên $L = L_1$. $\Rightarrow \frac{7}{5}mvR - mvh = \frac{7}{5}mR^2\omega_1 \Rightarrow \omega_1 = \left(1 - \frac{5h}{7R}\right)\frac{v}{R}$. (3)

+ Để qủa cầu vừa đủ để vượt qua bức thềm phải đủ lớn để cung cấp năng lượng cho quá trình tăng thế năng. ĐLBTNL có $\frac{1}{2}I_A\omega_1^2 \ge mgh$ (4)

Trong đó $I_A = \frac{2}{5}mR^2 + mR^2 = \frac{7}{5}mR^2$ (5) là mô men quán tính đối với A

Thay (3)&(5) vào (4) ta có: $\frac{1}{2}.\frac{7}{5}mR^2\left(1 - \frac{5h}{7R}\right)^2\left(\frac{v}{R}\right)^2 \ge mgh$

Rút gọn có: $v_{\min} = \frac{R\sqrt{70gh}}{7R - 5h}$ (*)




**Bài 22.** 1) Khối lượng của hai ròng rọc không đáng kể thì lực căng dây có giá trị T suốt dọc dây. Ta có các phương trình chuyển động của $m_1$ và $m_2$ (chiều dương đi xuống ).

$$\begin{cases} -T + m_2 g = m_2.a_2 \\ -2T + m_1 g = m_1 a_1 = -m_1\frac{1}{2}a_2 \end{cases}$$

Giải ra ta được: $a_2 = -2a_1 = g\dfrac{4m_2 - 2m_1}{4m_2 + m_1}$

Và $T = m_2(g - a_2) = g\dfrac{3m_2m_1}{4m_2 + m_1}$

$Q = 3T = g\dfrac{9m_2m_1}{4m_2 + m_1}$; $Q' = (m_1 + m_2)g$

$Q' - Q = g\dfrac{(m_1 - 2m_2)^2}{4m_2 + m_1} > 0$. Vậy $Q' > Q$

Áp dụng số: $a_2 = 7,27 m/s^2$, $Q = 4,1N < Q' = 7$ N.

2) Ròng rọc A có khối lượng đáng kể thì các lực căng T bên $m_2$ và T' bên $m_1$ khác nhau. Ta có phương trình:

$- T + m_2 g = m_2.a_2$

$-2T' + m_1 g = m_1a_1 = -m_1\dfrac{1}{2}a_2$

$(T - T')r = I\gamma = \dfrac{1}{2}mra_2$

Giải hệ phương trình trên ta được:

$$a_2 = g\frac{4m_2 - 2m_1}{4m_2 + m_1 + 2m} \quad (1)$$

$$T = m_2(g - a_2)$$

$$T' = \frac{1}{2}m_1\left(g + \frac{1}{2}a_2\right)$$

Theo đầu bài $a_2 = g/n$, ta tìm được:

$$m = 2m_2(n - 1) - m_1\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

Áp dụng số:

a) $m = 2,9$kg ; $I = 0,0145$ kgm$^2$;

Q = 35,2 N;  Q’ = 36 N.

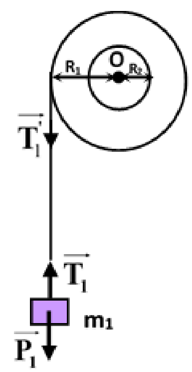
b) $a_2$ = - 2m/s$^2$ ; $m_2$ = 0,133 kg ; T = 1,6N, T’ = 4,5N;

Q = mg + T + 2T’ = 39,6N < Q’ = ($m_1$ +$m_2$ + m)g = 40,3N

**Bài 23.**

* Khi treo vật $m_1$ vào ròng rọc lớn: Các phương trình động lực học cho $m_1$ và ròng rọc là : (chiều dương là chiều chuyển động của $m_1$ và chiều quay của ròng rọc)

$$\begin{cases} P_1 - T_1 = m_1a_1 \\ T_1'R_1 = I\gamma_1 = I\dfrac{a_1}{R_1} \ \text{Vôùi}\ T_1' = T_1 \end{cases} \Rightarrow a_1 = \frac{m_1g}{m_1 + \dfrac{I}{R_1^2}} \quad (1)$$




( I là mô men quán tính của ròng rọc kép )

* Tương tự khi khi treo $m_2$ vào ròng rọc nhỏ: $a_2 = \dfrac{m_2g}{m_2 + \dfrac{I}{R_2^2}}$ (2)

* Lấy hai vế của (1) chia cho (2) được: $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{m_1}{m_2}\dfrac{m_2 + \dfrac{I}{R_2^2}}{m_1 + \dfrac{I}{R_1^2}}$

* Thay $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{76}{55}$ và $m_1$ = 0,3 kg, $m_2$ = 0,5 kg ta được $\dfrac{76}{55} = \dfrac{0,3}{0,5}\dfrac{0,5 + \dfrac{I}{0,05^2}}{0,3 + \dfrac{I}{0,1^2}}$

* Giải phương trình suy ra kết quả I = 1,125.10$^{-3}$ kg.m$^2$.

**Bài 24.** Chọn chiều dương như hình vẽ.

Giả sử chiều của lực ma sát như hình.

- Phương trình ĐL II Niu-tơn cho khối tâm khối trụ A và vật C:

$$\vec{P}_A + \vec{F}_{ms} + \vec{N} + \vec{T} = m\vec{a}_0$$
$$\vec{T}' + \vec{P}_C = m\vec{a}$$

- Phương trình cho chuyển động quay quanh trục đối xứng qua khối tâm G:

$$F_{ms}.R+T.\frac{R}{2}=I_G\gamma$$

- Khối trụ không trượt trên dây nên: $a_0-\frac{\gamma R}{2}=a$

Bỏ qua khối lượng của ròng rọc và ma sát ở trục ròng rọc nên: T = T'.

a, Khối trụ lăn không trượt trên mặt phẳng nghiêng nên: $a_0=\gamma R$

Từ đó ta có hệ:
$$\begin{cases} P\sin\alpha-F_{ms}-T=Ma_0 & (1)\\ F_{ms}.R+T.\frac{R}{2}=I_G\gamma=M\frac{R^2}{2}\gamma=M\frac{R}{2}a_0 & (2)\\ T-\frac{P}{5}=\frac{M}{5}a=\frac{M}{10}a_0 & (3)\\ a_0=\gamma R=2a & (4)\end{cases}$$

Điều kiện: $F_{ms}=F_{msn}\le\mu N\Leftrightarrow\frac{1}{62}Mg\le\mu Mg\frac{\sqrt{3}}{2}\ \rightarrow\mu\ge\frac{\sqrt{3}}{93}$

Từ (3)→ $T=\frac{P}{5}+\frac{M}{5}a=\frac{M}{5}(a_0/2+g)$ (5)

Từ (5),(2) $F_{ms}=I_G\gamma/\mathrm{R}-\frac{T}{2}=M\frac{a_0}{2}-\frac{M}{10}(a_0/2+g)=\frac{M}{10}(\frac{9a_0}{2}-g)$ (6)

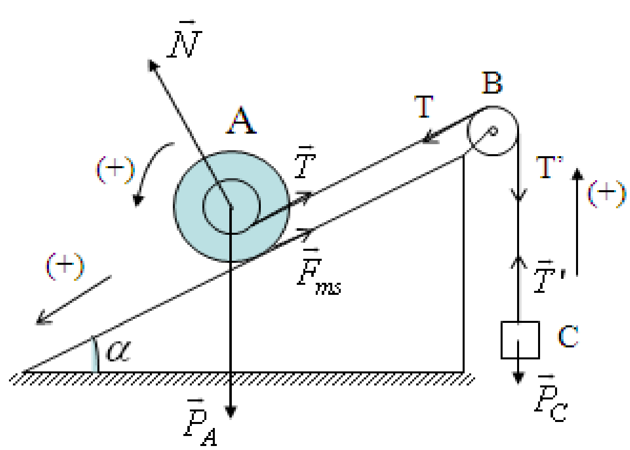
Thay (5),(6) vào (1): $\frac{Mg}{2}-\frac{M}{10}(\frac{9a_0}{2}+g)-\frac{M}{10}(a_0+2g)=Ma_0\rightarrow a_0=\frac{8}{31}g>0$ (7)

Thay $a_0$ vào (6),(4) suy ra:

$$F_{ms}=\frac{M}{10}(\frac{9a_0}{2}-g)=\frac{1}{62}Mg>0$$

$$a=\frac{4}{31}g>0$$

Vậy khối trụ A đi xuống, vật C đi lên và lực ma sát có chiều như hình vẽ.




động cùng chiều dương.
b, Khi xảy ra sự lăn có trượt của khối trụ trên

mặt phẳng nghiêng: $F_{ms}=F_{mst}=\mu N=\mu Mg\frac{\sqrt{3}}{2}$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} P\sin\alpha - F_{mst} - T = Ma_0 & (8) \\ F_{mst}.R + T.\dfrac{R}{2} = I_G\gamma = M\dfrac{R^2}{2}\gamma & (9) \\ T - \dfrac{P}{5} = \dfrac{M}{5}a & (10) \\ a_0 - \dfrac{\gamma R}{2} = a & (11) \end{cases}$

Từ $(9) \rightarrow T = MR\gamma - \mu Mg\sqrt{3}$ (12)

Thay T vào $(10) \rightarrow \text{a} = \dfrac{MR\gamma - \mu Mg\sqrt{3} - Mg/5}{M/5} = 5R\gamma - 5\mu g\sqrt{3} - g$

Thay a vào $(11) \rightarrow a_0 = 5R\gamma - 5\mu g\sqrt{3} - g + \dfrac{\gamma R}{2} = \dfrac{11\gamma R}{2} - 5\mu g\sqrt{3} - g$

Thay $a_0$, T vào $(8) \rightarrow \gamma = \dfrac{3 + 11\sqrt{3}\mu}{13}\dfrac{g}{R}$; $a = -\dfrac{10}{13}\mu g\sqrt{3} + \dfrac{2}{13}g; a_0 = -\dfrac{9}{26}\mu g\sqrt{3} + \dfrac{7}{26}g$

Với $\dfrac{\sqrt{3}}{93} > \mu$ thì a > 0, $a_0$ > 0 khối trụ và vật chuyển

**Bài 25.** Phương trình định luật II Newton cho vật 1 và vật 2:

$p_1\sin\alpha - F_{msn} - T = m_1a$ (1) (bỏ qua ma sát lăn)

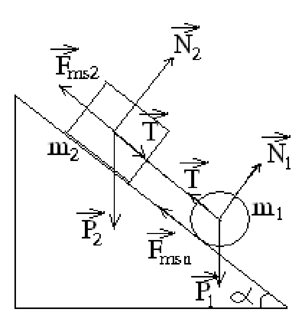
$p_2\sin\alpha + T - F_{ms2} = m_2a$ (2) ,

$N_2 = p_2\cos\alpha$

Cộng (1) và (2): $m_1g\sin\alpha - Fmsn - Fms_2 + m_2g\sin\alpha = (m_1 + m_2)a$ (3)

Trụ lăn không trượt:

$$\begin{cases} F_{msn}\cdot R = I\cdot\gamma \\ a = \gamma\cdot R \\ I = \dfrac{m_1R^2}{2} \end{cases} \Rightarrow Fmsn = \frac{m_1a}{2} \qquad (4)$$




Thế (4) vào (3):

$$m_1g\sin\alpha - \frac{m_1a}{2} + m_2g\sin\alpha - \mu.m_2g\cos\alpha = (m_1 + m_2)a$$

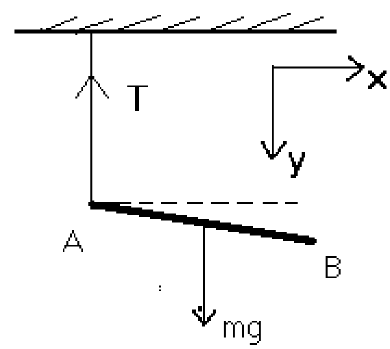
$$\Rightarrow a = \frac{(m_1 + m_2)g\sin\alpha - \mu.m_2 g\cos\alpha}{\frac{3m_1}{2} + m_2} = 3,3 \quad (m/s^2).$$

**Bài 26.**

Ngay sau khi đốt dây các lực tác dụng lên thanh gồm: lực căng dây T, trọng lực mg. Định luật 2 Newton theo trục y:

$mg - T = m.a_y$ (6)

Định luật hai Newton cho chuyển động quay của thanh quanh khối tâm:




$T.l = \frac{1}{3}ml^2\gamma$ (7)

Ta cần tìm mối liên hệ giữa $a_y$ và gia tốc góc γ.

Xét sau một khoảng thời gian t rất nhỏ sau khi đốt dây, dây vẫn còn thẳng đứng, thanh thì bị lệch khỏi phương ngang một góc ϕ nhỏ. Trong khoảng thời gian rất nhỏ đó, ta coi như gia tốc khối tâm và gia tốc góc của thanh là không đổi. Khi đó độ dịch chuyển của khối tâm là: $y = l.\phi$

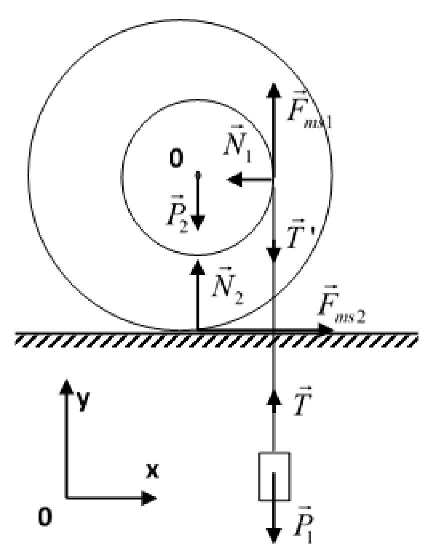
Đạo hàm hai lần hai vế của phương trình trên theo t, ta được:

$\rightarrow a_y = l.\gamma$ (8)

Từ các phương trình (6), (7) ,(8) ta thu được:

$T = \frac{1}{4}mg$

**Bài 27.** Giả sử tìm được giá tri $m_{0,}$ với $m > m_0$ thì ống chỉ bắt đầu quay. Khi $m = m_{0,}$ hệ cân bằng:



Hình 5

$F_{ms1} = \mu_1 N_1$; $F_{ms2} = \mu_2 N_2$ (1)

Áp dụng định luật 2 Niu tơn cho các trục 0x, 0y có:

$F_{ms2} - N_1 = 0$ (2)

$F_{ms1} + N_2 - P_2 - T' = 0$ (3)

$T' = T = m_0g$; $P_2 = Mg$ (4)

Xét trục quay tạm thời qua O, có:

$T'.r - F_{ms1}.r - F_{ms2}.R = 0$ (5)

Giải hệ 5 phương trình trên ta được nghiệm: $m_0 = M\dfrac{\mu_2(1+\frac{r}{R}\mu_1)}{\frac{r}{R}-\mu_2}$

- Với $\mu_2 < \frac{r}{R}$, hệ cân bằng với m < $m_0$. Khi m > $m_0$ ống chỉ quay.

- Nếu $\mu_2$ có giá trị tiến gần đến r/R, thì $m_0$ có giá trị rất lớn. Khi $\mu_2$ = r/R thì hệ cân bằng với mọi giá trị của m.

- Còn nếu $\mu_2 > \frac{r}{R}$ thì cân bằng không thể bị phá vỡ với mọi giá trị của m.

**Bài 28.**

* Xét trong HQC quay với vận tốc góc $\omega$

+ Một phần tử dx có khối lượng dm cách O đoạn x. Lực quán tính li tâm tác dụng lên dx bằng:

$dF = dm\,\omega^2 r = \frac{m}{l}dx.\,\omega^2.x\sin\varphi = \frac{m}{l}\omega^2\sin\varphi.xdx$ (*)

Tổng hợp lực quán tính tác dụng lên thanh bằng:

$F = \frac{m}{l}\omega^2\sin\varphi\int_o^l xdx = \frac{m}{2}l\omega^2\sin\varphi$

* Từ (*) ta thấy lực quán tính li tâm tăng tuyến tính theo x vì vậy ta có hệ lực phân bố tam giác như hình vẽ 2.

+ Do đó $\overrightarrow{F_{qt}}$ tổng hợp phải có giá đi qua trọng tâm của tam giác lực đó, hay có điểm đặt tại M thoả mãn: OM = $\frac{2l}{3}$

+ Điều kiện cân bằng của thanh: $M(F_{qt}/O) = M(P/O)$

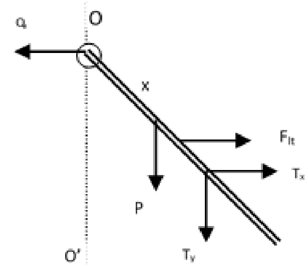
$F_{qt}.\dfrac{2l}{3}.\cos\varphi = P\dfrac{l}{2}\sin\varphi \Rightarrow \varphi = \arccos\left(\dfrac{3g}{2l\omega^2}\right)$

b) Gọi lực của gối cầu tác dụng vào thanh là $\vec{Q}$. Từ pt: $\vec{Q}+\vec{F_{qt}}+\vec{P}=0 \Rightarrow Q = \dfrac{m}{4}\sqrt{7g^2+4\omega^4 l^2}$

c) Xét một đoạn thanh dài x, trong HQC quay.

+ Các lực tác dụng gồm: Q ; $F_{lt}$; $P_x$ và lực kéo T (gồm hai thành phần $T_x$ và $T_y$) của đoạn dưới

+ Theo trên:




$Q_x$ =.....

$F_{lt} = \dfrac{m}{2}x\omega^2\sin\varphi$

+ Theo phương ngang: $Q_x = T_x + F_{lt} \Rightarrow T_x$

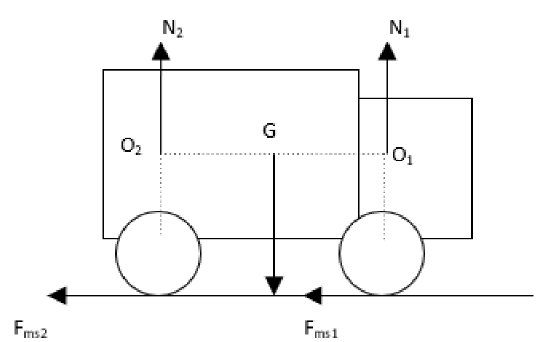
+ Theo phương thẳng đứng: $Q_y = P_x + T_y \Rightarrow T_y$ = .....

**Bài 29.** Gọi khoảng cách hai trục bánh xe là l; chiều cao khối tâm G là h; áp lực của bánh sau lên mặt đường là $N_2$; của bánh trước lên mặt đường là $N_1$.

* Khi phanh bánh sau: ma sát giữa bánh sau với mặt đường là ma sát trượt, động cơ tắt, bánh trước chỉ đóng vai trò bánh đỡ (vì động cơ tắt nên không còn lực ma sát nghỉ đóng vai trò lực phát động). Điều kiên cân bằng của xe đối với trục qua $O_1$ là:

$$N_2 l - mg\frac{l}{2} + F_{ms2}.h = 0 \Rightarrow N_2 l - mg\frac{l}{2} + \mu N_2.h = 0$$

$$\Rightarrow N_2 = \frac{mg}{2(1+\frac{\mu h}{l})} < \frac{mg}{2}$$ ⇒ Công của lực ma sát trượt là: $A_1 = \mu N_2.L_1$ (1)




* Khi phanh bánh trước: ma sát giữa bánh trước với mặt đường là ma sát trượt, động cơ tắt, bánh sau chỉ đóng vai trò bánh đỡ. Điều kiện cân bằng của xe đối với trục qua $O_2$ là:

$$- N_1 l + mg\frac{l}{2} + F_{ms1}.h = 0 \Rightarrow -N_1 l + mg\frac{l}{2} + \mu N_1.h = 0$$

$\Rightarrow \quad N_1 = \dfrac{mg}{2(1-\dfrac{\mu h}{l})} > \dfrac{mg}{2} \quad \Rightarrow$ Công của lực ma sát trượt là: $A_2 = \mu N_1.L_2$ (2)

* Khi phanh cả 4 bánh, ma sát giữa 4 bánh với mặt đường đều là ma sát trượt.

$\Rightarrow$ Công của lực ma sát trượt là: $A_3 = \mu\, mg.L_3$ (3)

* Theo định lí biến thiên động năng thì: $\dfrac{1}{2}mv_o^2 = A_1 = A_2 = A_3$ (4)

* Từ (1); (2); (3) và (4) suy ra $l_3 = 11m$

**Bài 29.** Phương trình chuyển động của vật A (theo phương nghiêng):
$m_1g\sin\alpha - \mu m_1g\cos\alpha = m_1a_1$
⇨ Gia tốc của vật A: $a_1 = g.(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$
- Phương trình chuyển động tịnh tiến của vật B:
$m_2g\sin\alpha - F_{ms2} = m_2a_2$ (1)
- Với $F_{ms2}$ là lực ma sát giữ cho B lăn không trượt, đồng thời gây ra sự quay quanh trục của nó với gia tốc góc γ. Ta có phương trình:
$M = I.\gamma \Leftrightarrow F_{ms2}.r = \dfrac{1}{2}m_2.r^2.\gamma$ (2)
- Vật B lăn không trượt nên: $\gamma = \dfrac{a_2}{r}$ (3)
Từ (1), (2) và (3): $a_2 = \dfrac{2}{3}g.\sin\alpha$ (4)
- Muốn khoảng cách giữa hai vật luôn không đổi thì: $a_1 = a_2$
⇔ $g.(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = \dfrac{2}{3}g.\sin\alpha$
⇨ $tg\alpha = 3\mu$ ⇨ $\alpha = arctg3\mu$
b) Từ (1) và (4) ta có: $F_{ms2} = \dfrac{1}{3}m_2g\sin\alpha$
- Lực ma sát cực đại giữa B và mặt nghiêng: $F_{msnmax} = \mu' m_2g\cos\alpha$
- Điều kiện phải thỏa mãn là: $F_{ms2} \le F_{msnmax}$
⇔ $\dfrac{1}{3}m_2g\sin\alpha \le \mu' m_2g\cos\alpha$ ⇨ $\mu' \ge \dfrac{tg\alpha}{3} = \mu$
**Bài 30.**

- Mô men quán tính của hệ 3 quả cầu và thanh nhẹ đối với trục quay ở O:

$I = m_1 l^2 + m_1(2l)^2 + m_1(3l)^2 = 14m_1 l^2$

Gọi $\omega$ là tốc độ góc của hệ 3 quả cầu và thanh nhẹ ngay sau va chạm.

Xét hệ gồm viên đạn và hệ (3 quả cầu + thanh). Mô men động lượng của hệ ngay lúc bắt đầu va chạm đến lúc vừa va chạm xong được bảo toàn:

$L_{0(m_2)} + L_{0(3m_1)} = L_{(m_2)} + L_{(3m_1)}$

$\Leftrightarrow I_2.\dfrac{v_0}{2l} = I\omega - I_2\dfrac{v}{2l}$

$\Leftrightarrow m_2 v_0 2l = I\omega - m_2 v 2l \Rightarrow \omega = \dfrac{m_2(v_0+v)}{7m_1 l}$ (1) ……...

Gọi $\alpha$ là góc cực đại tạo bởi thanh và phương thẳng đứng sau va chạm. Cơ năng của hệ 3 quả cầu và thanh được bảo toàn nên ta có:

$\dfrac{1}{2}I\omega^2 = m_1 gl(1-\cos\alpha) + m_1 g2l(1-\cos\alpha) + m_1 g3l(1-\cos\alpha)$ (2)

Giải hệ (1) và (2) ta có: $\cos\alpha = 1 - \dfrac{m_2^2(v_0+v)^2}{42m_1^2 gl}$

**Bài 31.**

**a.** Chọn các chiều dương như hình vẽ. Hình trụ chịu tác dụng của các lực như hình vẽ.

Theo định luật II Newton:

$mg\sin\alpha - f = ma$ (1)

Áp dụng định lý biến thiên MMĐL cho trục quay trùng với khối tâm:

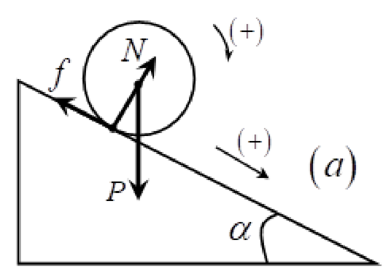
$f.R = I.\gamma$ (2)

Do hình trụ lăn không trượt nên ta có:

$a = \gamma R$ (3)

Từ (1), (2) và (3); giải HPT ta tìm được:

$a = \dfrac{g\sin\alpha}{1+\dfrac{I}{mR^2}}$




+ Hình trụ rỗng: $I = mR^2 \Rightarrow a_r = \dfrac{1}{2}g\sin\alpha$

+ Hình trụ đặc: $I = \dfrac{1}{2}mR^2 \Rightarrow a_d = \dfrac{2}{3}g\sin\alpha$

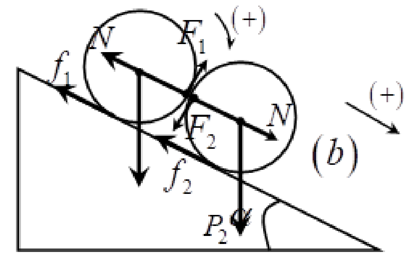
**b.** Chọn các chiều dương như hình vẽ. Các hình trụ chịu tác dụng của các lực như hình vẽ. (để đơn giản, ta không vẽ các phản lực do mặt nghiêng tác dụng)

Do $a_r < a_d$ nên trụ đặc lăn nhanh hơn trụ rỗng, để hai hình trụ luôn tiếp xúc nhau trong quá trình trượt thì phải đặt hình trụ rỗng phía trước hình trụ đặc

Theo định luật II Newton:

$mg\sin\alpha - N - f_1 = ma$ (4)

$mg\sin\alpha + N - f_2 = ma$ (5)




Áp dụng định lý biến thiên MMĐL cho trục quay trùng với khối tâm:

$f_1.R - \mu N.R = \frac{1}{2}mR^2.\gamma_1$ (6)

$f_2.R - \mu N.R = mR^2.\gamma_2$ (7)

Do hai hình trụ luôn tiếp xúc với nhau và lăn không trượt trên mặt nghiêng nên:

$a_1 = a_2 = a = \gamma R$

Thay vào (6), (7) ta được:

$f_1 - \mu N = \frac{1}{2}ma$ (6a)

$f_2 - \mu N = ma$ (7a)

Thay (6a), (7a) vào (4), (5) ta được:

$mg\sin\alpha - (1+\mu)N = \frac{3}{2}ma$ (4a)

$mg\sin\alpha + (1-\mu)N = 2ma$ (5a)

Giải hệ phương trình (4a) và (5a) ta tìm được:

$N = \frac{mg\sin\alpha}{\mu+7}; \quad a = \frac{4g\sin\alpha}{\mu+7}$

**Bài 32.**

1.Khi bánh xe lăn không trượt, ta có các phương trình chuyển động

- tịnh tiến: $mg\sin\alpha - F_{ms} = ma$
- quay: $F_{ms}.r = I.\gamma$ với $\gamma = \frac{a}{r}$ và $I = m.R^2$

Từ các phương trình này rút ra $a = \frac{g\sin\alpha}{1+\left(\frac{R}{r}\right)^2}$

suy ra $F_{ms} = \frac{R^2}{R^2+r^2}mg\sin\alpha$

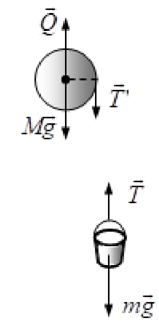
2.Để bánh xe chỉ trượt trên đường ray, lực ma sát đạt giá trị cực đại

$F_{ms} = F_{msmax} = \mu.N = \mu.mg\cos\alpha_0$

Theo kết quả câu 1: thì $F_{ms} = \frac{R^2}{R^2+r^2}mg\sin\alpha_0$ (do $\alpha = \alpha_0$)

$\Rightarrow \tan\alpha_0 = \frac{R^2+r^2}{R^2}\mu$

**Bài 33.**




**a.** Đối với xô:

$$mg - T = ma \quad (1)$$

Đối với ròng rọc:

$$T.R = I\gamma = \frac{1}{2}M.R^2.\frac{a_t}{R} \Rightarrow T = \frac{1}{2}M.a_t \quad (2)$$

Dây không trượt nên ròng rọc có:

$$a_t = a \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) ta tính được: a = 0,56 m/$s^2$, T = 8,4 N

**b.** $h = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}(5,6).(3)^2 = 25,2m$

**Bài 34.**

+ Momen động lượng của hệ ngay trước va chạm:

$$L_1 = I_d.\omega_d = m_d.R^2.\frac{v}{R} = \frac{m_d.v.\ell}{2} \quad (1)$$

+ Momen động lượng của hệ ngay sau va chạm:

$$L_2 = \left(I_d + I_t\right)\omega = \left(\frac{1}{4}m_d\ell^2 + \frac{1}{12}m_t\ell^2\right)\omega$$

+ Áp dụng định luật bảo toàn momen động lượng: $L_1 = L_2$

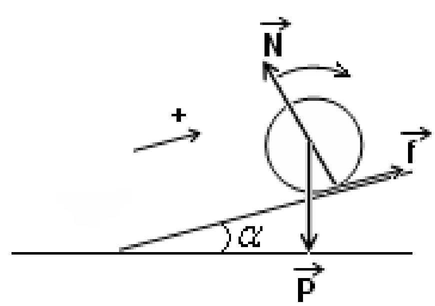
$$\Rightarrow v = \frac{\left(\frac{1}{4}m_d\ell^2 + \frac{1}{12}m_t\ell^2\right)\omega}{m_d.\frac{\ell}{2}} \approx 838,3(m/s)$$

**Bài 35.**

- Các lực tác dụng vào hình trụ gồm:

Trọng lực $\vec{P}$, phản lực vuông góc $\vec{N}$ và lực ma sát $\vec{f}$.

- Áp dụng định luậ II Niutơn cho chuyển động của khối tâm, ta có:




$$f - mg\sin\alpha = ma = m\frac{dv}{dt} \quad (1)$$

Trong chuyển động quay, ta có:

$M_{f/0} = I\gamma$; với $\gamma$ là gia tốc góc.

$\Leftrightarrow$ - fR = I$\gamma$

$$\Rightarrow f = -\frac{I}{R}.\frac{d\omega}{dt} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được: $-\frac{I}{R}.\frac{d\omega}{dt}$ - mgsin$\alpha$ = m$\frac{dv}{dt}$

$\Leftrightarrow$ - I.d$\omega$ - R.m.g. sin$\alpha$.dt = R.m.dv

Khi hình trụ lên đến điểm cao nhất thì dừng lại, nên v = 0 và $\omega$ = 0.

Ta có: - I$\int_{\omega_0}^{0} d\omega$ - Rmgsin$\alpha \int_0^t dt$ = Rm$\int_0^0 dv$

$\Leftrightarrow$ I$\omega_0$ - Rmgsin$\alpha$.t = 0

$$\Rightarrow t = \frac{I\omega_0}{Rmg\sin\alpha} = \frac{\frac{1}{2}mR^2\omega_0}{Rmg\sin\alpha} = \frac{R\omega_0}{2g\sin\alpha}.$$

**Bài 36.** 1.Áp dụng phương trình động lực học vật rắn cho chuyển động quay của thanh quanh một trục tại đầu dưới của thanh và vuông góc với thanh:

$M = mg\frac{h}{2}\sin\alpha = I\gamma = \frac{mh^2\gamma}{3} \Rightarrow \gamma = \frac{3g\sin\alpha}{2h}$

Gia tốc tiếp tuyến của đầu trên ống khói là: $a_t = \gamma.h = 1{,}5g\sin\alpha$

Gia tốc pháp tuyến (hướng tâm): $a_n = \omega^2 h$.

Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng

$\Rightarrow mg.\frac{h}{2} = mg.\frac{h}{2}.\cos\alpha + \frac{1}{2}I.\omega^2 \Rightarrow \omega^2 = \frac{3g(1-\cos\alpha)}{h} \Rightarrow a_n = 3g(1-\cos\alpha)$

Gia tốc của đầu trên của thanh là $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$;

$\Rightarrow a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{(1{,}5g\sin\alpha)^2 + 9g^2(1-\cos\alpha)^2}$

Thay số $a = \sqrt{(1{,}5.9{,}81.\sin 60^0)^2 + 9.9{,}81^2(1-\cos 60^0)^2} = 19{,}4661$ m/s$^2$

b.Ta có $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{(1{,}5g\sin\alpha)^2 + 9g^2(1-\cos\alpha)^2} = g$

$\Rightarrow 2{,}25\sin^2\alpha + 9 - 18\cos\alpha + 9\cos^2\alpha = 1$

$\Leftrightarrow 6{,}75\cos^2\alpha - 18\cos\alpha + 10{,}25 = 0$

Loại nghiệm lớn hơn 1 ta có $\cos\alpha \approx 0{,}8242 \Rightarrow \alpha \approx 34{,}4925^0 = 34^0 29'33''$

**Bài 37.**

Ta có thể biểu diễn các lực tác dụng lên khung như hình vẽ. Ở các trục quay, các tác động của hình cầu lên khung được xác định bởi lực $\vec{F}_1$ và một momen $\vec{M}_1/O_1$ đối với $O_1$ (không vẽ trên sơ đồ), các tác động của hình trụ lên khung được xác định bởi lực $\vec{F}_2$ và một momen $\vec{M}_2/O_2$ đối với $O_2$. Vì các liên kết không có ma sát nên các thành phần của $\vec{M}_1/O_1$ và $\vec{M}_2/O_2$ trên trục 0z là bằng không.

- Phương trình động lực học cho khung:

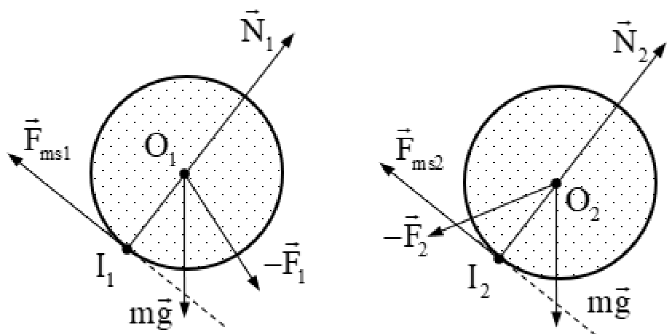
$$m\vec{a}_G = m\vec{g} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \Rightarrow \begin{cases} ma_G = mg\sin\alpha + F_{1x} + F_{2x} & (1) \\ 0 = -mg\cos\alpha + F_{1y} + F_{2y} & (2) \end{cases}$$

- Vì khung không quay, cho nên đối với G, ta có:

$$\vec{0} = \left[ (\overrightarrow{GO_1} \wedge \vec{F}_1 + \overrightarrow{M_1}/O_1) + (\overrightarrow{GO_2} \wedge \vec{F}_2 + \overrightarrow{M_2}/O_2) \right] . \overrightarrow{e_z}$$

Chiếu lên trục z ta có: $F_{1y} = F_{2y}$ (3)

Từ (2) và (3) ta có: $F_{1y} = F_{2y} = \frac{1}{2} mg\cos\alpha$. (4)




- Các phương trình của hình cầu:

$$+\ m\vec{a}_{O1} = m\vec{a}_G = m\vec{g} + \overrightarrow{N_1} + \vec{F}_{ms1} - \vec{F}_1 \Rightarrow \begin{cases} ma_G = mg\sin\alpha - F_{ms1} - F_{1x} & (5) \\ 0 = -mg\cos\alpha + N_1 - F_{1y} & (6) \end{cases}$$

$$+\ \frac{2}{5} mr^2\gamma_1 = r.F_{ms1} \qquad (7)$$

- Các phương trình của hình trụ:

$$+\ m\vec{a}_{O2} = m\vec{a}_G = m\vec{g} + \overrightarrow{N_2} + \vec{F}_{ms2} - \vec{F}_2 \Rightarrow \begin{cases} ma_G = mg\sin\alpha - F_{ms2} - F_{2x} & (8) \\ 0 = -mg\cos\alpha + N_2 - F_{2y} & (9) \end{cases}$$

$$+\ \frac{1}{2} mr^2\gamma_2 = r.F_{ms2}$$

(10)

- Từ các phương trình (1), (5), (8) ta có:

$$3ma_G = 3mg\sin\alpha - F_{ms1} - F_{ms2}$$

(11)

- Từ các phương trình (4), (6), (9) ta có:

$$N_1 = N_2 = 1{,}5.mg\cos\alpha$$

(12)

⊗**Nếu hình cầu P và hình trụ Q lăn không trượt:** $r.\gamma_1 = r.\gamma_2 = a_G$

Khử $F_{ms1}$ và $F_{ms2}$ ở các phương trình (7), (10) và (11) ta có:

$$a_G = a_{O1} = a_{O2} = \frac{10}{13} g\sin\alpha.$$

Thay vào (11) ta có: $F_{ms1} = \frac{2}{5} ma_G = \frac{4}{13} mg\sin\alpha$, $F_{ms2} = \frac{1}{2} ma_G = \frac{5}{13} mg\sin\alpha$.

Kiểu chuyển động này xảy ra khi: $\begin{cases} F_{ms1} \le \mu N_1 \Rightarrow \tan\alpha \le \dfrac{39}{8}\mu \\ F_{ms2} \le \mu N_2 \Rightarrow \tan\alpha \le \dfrac{39}{10}\mu \end{cases} \Rightarrow \alpha \le \alpha_1;\ \tan\alpha_1 = \dfrac{39}{10}\mu$.

**Nếu hình cầu P lăn không trượt và hình trụ Q trượt:**

$r.\gamma_1 = a_G \ \Rightarrow F_{ms1} = 2ma_G/5$ và $F_{ms2} = \mu N_2$.

Khử $F_{ms1}$ và $F_{ms2}$ ở phương trình (11) ta có: $a_G = a_{O1} = a_{O2} = \dfrac{15}{17}g\left(\sin\alpha - \mu\dfrac{\cos\alpha}{2}\right)$

**P lăn không trượt** khi $F_{ms1} \le \mu N_1$

$\Rightarrow F_{ms1} = \dfrac{2}{5}ma_G = \dfrac{6}{17}mg\left(\sin\alpha - \mu\dfrac{\cos\alpha}{2}\right) \le \mu\dfrac{3}{2}mg\cos\alpha \qquad \Rightarrow \alpha \le \alpha_2$ với

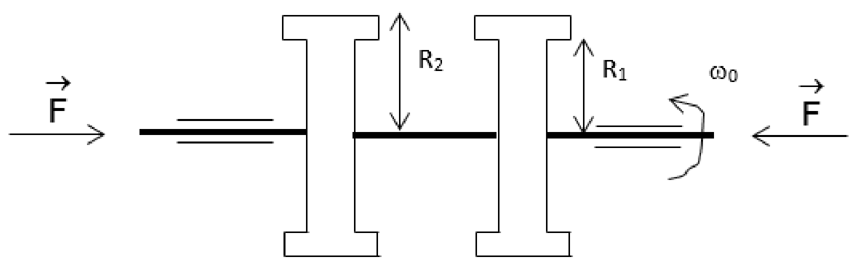
Kiểu chuyển động này là còn xảy ra khi $\alpha_1 \le \alpha \le \alpha_2$.

⊗**Nếu hình cầu P và hình trụ Q đều trượt:** $F_{ms1} = \mu N_1$ và $F_{ms2} = \mu N_2$.

Khi đó $a_G = a_{O1} = a_{O2} = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$.

**Bài 38.**

**1.Tìm tốc độ góc chung của 2 đĩa sau khi nối.**

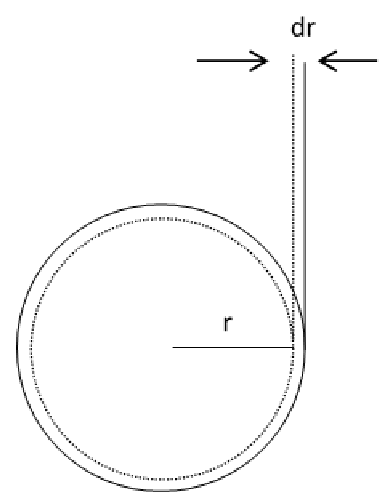



Vận tốc góc chung sau khi nối trục:
Áp dụng định luật bảo toàn
mômen động lượng đối với
trục quay ta có: $I\omega_0 = I\omega + I\omega \rightarrow \omega = \dfrac{\omega_0}{2}$

**2**. <u>Năng lượng hao hụt</u>:

$$\Delta T = T_0 - T = \frac{1}{2}I\omega_0^2 - \frac{1}{2}(I+I)\omega^2 = \frac{1}{2}I\omega_0^2 - I\frac{\omega_0^2}{4} = \frac{I\omega_0^2}{4}$$

**3.** <u>Thời gian nối trục</u>:




Ta chia hình vành khuyên thành các vành nguyên tố có bán kính r, bề dày dr.

Momen của lực ma sát tác dụng lên vành nguyên tố

$dM = r \,.\, dF_{ms}$

với $dF_{ms} = \mu\dfrac{F}{\pi(R_2^2 - R_1^2)}\cdot 2\pi r dr$

$$dM = \frac{2\mu F r^2 dr}{R_2^2 - R_1^2}$$

$$M = \frac{2\mu F}{R_2^2 - R_1^2}\int_{R_1}^{R_2} r^2 dr = \frac{2\mu F}{3\left(R_2^2 - R_1^2\right)}\cdot\left(R_2^3 - R_1^3\right)\text{( 0,25 đ )}$$

* Phương trình chuyển động quay cho đĩa ban đầu đứng yên : $M = I\gamma \rightarrow \gamma = \frac{M}{I} = const$ *

Thời gian nối trục:

$$\omega = \gamma.t \Rightarrow t = \frac{\omega}{\gamma} = \frac{3\left(R_2^2 - R_1^2\right)\omega_0 I}{4\mu F\left(R_2^3 - R_1^3\right)}$$

**Bài 39.**

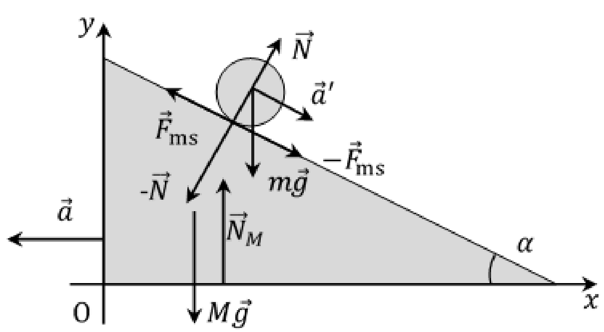
**1.**

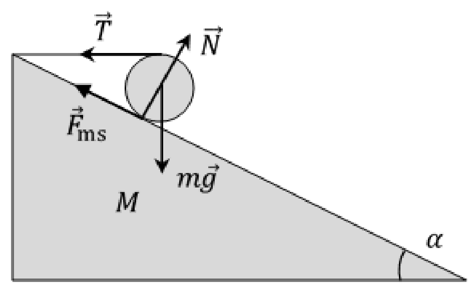
$$\begin{cases} T = F_{ms} \\ N = mg \end{cases}$$

$$N\cos\alpha + F_{ms}\sin\alpha - mg = 0 \Rightarrow$$

$$F_{ms} = \frac{mg - N\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}mg = mg\tan\frac{\alpha}{2}$$

$$F_{ms} \le \mu N \Rightarrow mg\tan\frac{\alpha}{2} \le \mu mg \Rightarrow \mu_{min} = \tan\frac{\alpha}{2}$$




2a.

$$\begin{cases} -\vec{N} - \vec{F}_{ms} + M\vec{g} + \vec{N}_M = M\vec{a} \\ \vec{N} + \vec{F}_{ms} + m\vec{g} = m(\vec{a} + \vec{a}') \\ F_{ms}r = I\gamma = \frac{1}{2}mr^2\gamma = \frac{1}{2}mra' \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{3}\frac{\frac{m}{M}\sin(2\alpha)}{1+\frac{m}{M}\left(1-\frac{2}{3}\cos^2\alpha\right)}g$$

**2b.**

$$\gamma = \frac{a'}{r} = \frac{2}{3}\frac{1+\frac{m}{M}}{1+\frac{m}{M}\left(1-\frac{2}{3}cos^2\alpha\right)}\frac{g\sin\alpha}{r}$$

2c.Ngay trước khi $m$ va chạm với sàn, trục của nó cách sàn một khoảng $r$, tức là trong hệ quy chiếu gắn với $M$ nó đã đi một đoạn

$$s = \frac{h-2r}{\sin\alpha}$$

Gọi vận tốc của $M$ so với sàn và vận tốc của $m$ so với $M$ ngay trước va chạm giữa m và sàn lần lượt là $\vec{V}$ và $\vec{v}_0$, ta có

$$v_0 = \sqrt{2a's} = \sqrt{\frac{4}{3}\frac{1+\frac{m}{M}}{1+\frac{m}{M}\left(1-\frac{2}{3}\cos^2\alpha\right)}g(h-2r)}$$

$$V = \frac{a}{a'}v_0 = \frac{\frac{m}{M}\cos\alpha}{1+\frac{m}{M}}v_0$$

Vận tốc và vận tốc góc của m ngay trước va chạm

$$\begin{cases} v_x = v_0\cos\alpha - V = \dfrac{v_0\cos\alpha}{1+\frac{m}{M}} \\ v_y = -v_0\sin\alpha \\ \omega = \dfrac{v_0}{r} \end{cases}$$

**Bài 40.**

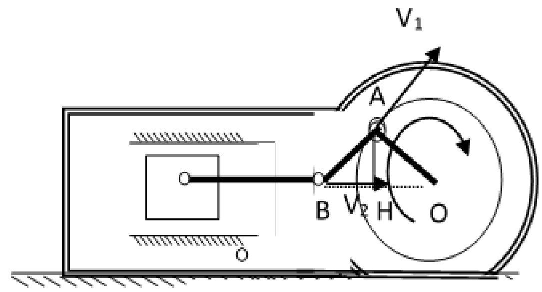
1.Xét tại thời điểm t góc quay của vật BOA = φ = ωt (hình 25a). Các bộ phận có khối lượng $m_1$, $m_2$ có vận tốc lần lượt là $\vec{v}_1$ và $\vec{v}_2$ trong hệ quy chiếu gắn với vỏ. Vỏ có vận tốc $\vec{v}_3$ đối với sàn.

Theo phương ngang hệ không chịu tác dụng của ngoại lực nên bảo toàn động lượng:

$m_3v_3 + m_2(v_2 + v_3) + m_1(v_1\sin\omega t + v_3) = 0$

=> $v_3 = -\dfrac{m_2v_2 + m_1v_1\sin\omega t}{m_1+m_2+m_3}$ (1) với $v_1 = \omega r$,

$v_2 = -\dfrac{dOB}{dt} = -2\dfrac{dOH}{dt} = 2\dfrac{d(r\cos\omega t)}{dt} = 2\omega r\sin\omega t$ (2) thay (2) vào (1) ta có:



Hình 25a

$v_3 = -\dfrac{(2m_2+m_1)\omega r\sin\omega t}{m_1+m_2+m_3}$ (3).

Lấy nguyên hàm của (3) $x = \dfrac{(2m_2+m_1)r\cos\omega t}{m_1+m_2+m_3} + C$

Chọn x = 0 tại t = 0 ta có C = $\frac{(2m_2+m_1)r}{m_1+m_2+m_3}$

vậy x = $\frac{(2m_2+m_1)r(\cos\omega t-1)}{m_1+m_2+m_3}$.

2.Xét cả hệ chỉ có $\vec{v}_1$ có thành phần vận tốc theo phương thẳng đứng:

$v_y = v_1\cos\omega t = \omega r\cos\omega t$, do đó áp lực của hệ lên sàn theo phương thẳng đứng là N = $(m_1+m_2+m_3)g + \frac{d(m_1y)}{dt}$

$N = (m_1+m_2+m_3)g - m_1\omega^2 r.\sin\omega t$.

Động lượng của hệ theo phương ngang khi vỏ được giữ đứng yên là

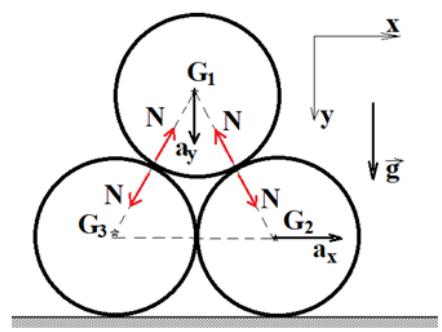
$p = m_2v_2 + m_1v_1\sin\omega t = (m_1 + 2m_2)\omega r.\sin\omega t$.

Do đó lực cắt ngang bulong là

$T = \frac{dp}{dt} = (m_1 + 2m_2)\omega^2 r.\cos\omega t$

**Bài 41.** Đáp số: a. a=g b. $a = \frac{g}{1+\frac{l^2}{12b^2}}$

**Bài 42.** a. Lực tương tác gữa trụ trên và hai trụ dưới là N và độ lớn lực ma sát giữa hai trụ dưới và sàn là F:



Hình 2.6S1

-Vì ban đầu, khối tâm ba trụ tạo thành tam giác đều, nên gia tốc tịnh tiến trụ ($G_2$) dưới có độ lớn

$$a_{2x} = \frac{N\sin 30^0 - F}{m} = \frac{N\frac{1}{2} - F}{m} \qquad (1)$$

Gia tốc trụ trên ($G_1$) là $a_{1y} = \frac{mg - 2N\cos 30^0}{m} = \frac{mg - N\sqrt{3}}{m}$ (2)

Ta coi $G_1G_2$ như là một thanh cứng chiều dài 2R, một đầu tựa tường thẳng đứng và một đầu tựa sàn nằm ngang, nên $v_{G2}\cos 60^0 = v_{G1}\cos 30^0 \rightarrow a_{2x} = a_{1y}\sqrt{3}$ (3)

Vì các trụ dưới lăn không trượt nên $FR = \beta mR^2\frac{a_{2x}}{R} \rightarrow F = \beta m a_{2x}$ (4)

Từ (1) và (4): $ma_{2x} = N\frac{1}{2} - \beta m a_{2x} \Rightarrow N = 2m(1+\beta)a_{2x}$ (5)

Thay (5) vào (2) ta được $a_{1y} = g - \frac{N\sqrt{3}}{m} = g - 2(1+\beta)a_{2x}\sqrt{3}$

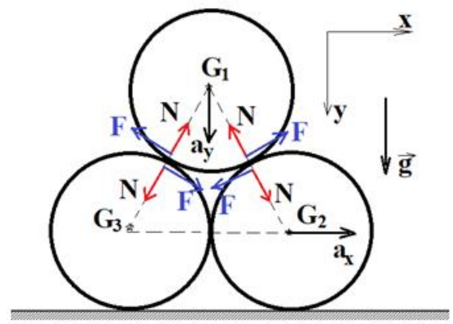
Và kết hợp với (3) ta được $a_{1y} = g - 2(1+\beta)a_{1y}3 \to a_{1y} = \frac{g}{7+6\beta}$ (6)

b. Gọi $a_{2x}$ là độ lớn gia tốc mỗi trụ bên dưới, $a_{1y}$ là gia tốc trụ trên.

Ta có

$$a_{2x} = \frac{N\sin 30^0 - F\sin 60^0}{m} = \frac{N - F\sqrt{3}}{2m} \quad (7)$$

$$a_{1y} = \frac{mg - 2F\sin 30^0 - 2N\cos 30^0}{m} = \frac{mg - F - N\sqrt{3}}{m} \quad (8)$$




Hình 2.6S2

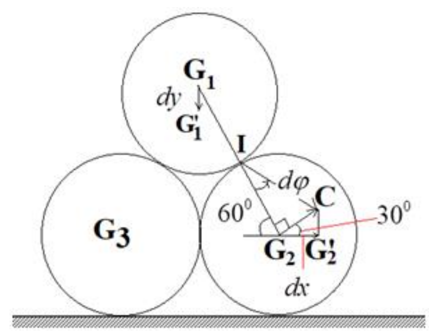
Và các trụ dưới quay với gia tốc góc $\gamma = \frac{FR}{\beta m R^2} = \frac{F}{\beta m R}$ (9)

Giả sử trụ trên $G_1$ đứng yên thì trụ dưới $G_2$ quay một góc $d\varphi$ và khi đó $G_2$ đi đến C: $G_2C = Rd\varphi$

Nhưng vì $G_1$ đi xuống, nên khối tâm của trụ $G_2$ phải đi từ C đến $G_2$'. Nghĩa là trụ $G_2$ đã dời ngang một đoạn

$dx = G_2G_2' = G_2C\cos 30^0 \to dx = Rd\varphi\cos 30^0$

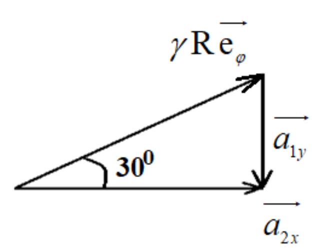
Hay $a_{2x} = R\gamma\cos 30^0 = \gamma R\frac{\sqrt{3}}{2}$ (10)




Hình 2.6S3

(10) CŨNG CÓ THỂ LẬP LUẬN THEO CÁCH KHÁC:

Gọi $I_1$, $I_2$ là 2 điểm rất gần điểm tiếp xúc I và nằm trụ trên $I_1$ và trụ dưới $I_2$:




$\overrightarrow{a_{2x}} = \gamma R\overrightarrow{e_\varphi} + \overrightarrow{a_{1y}}$

$$\overrightarrow{v_{G2}} = \overrightarrow{v_{G2/I2}} + \overrightarrow{v_{I2}} = (\overrightarrow{\omega_{G2}} \wedge \overrightarrow{I_2G_2}) + \overrightarrow{v_{I2}}$$

$$\overrightarrow{v_x} = \omega R\overrightarrow{e_\varphi} + \overrightarrow{v_{I1}} \to \overrightarrow{v_x} = \omega R\overrightarrow{e_\varphi} + \overrightarrow{v_{G1}} \to \overrightarrow{a_{2x}} = \gamma R\overrightarrow{e_\varphi} + \overrightarrow{a_{1y}}$$

Hoặc ta có $\overrightarrow{a_{I1}} = \overrightarrow{a_{I2}} \to \overrightarrow{a_y} = \overrightarrow{a_x} + \overrightarrow{a_{I2/G_2}}$ $(a_{I2/G2} = \gamma R)$. Dựa vào giản đồ véc tơ này tính ta được

$$a_{2x} = R\gamma \cos 30^0 = \gamma R\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Và khi đó $G_1G_1' = CG_2' = G_2G_2'\tan 30^0 \to dy = dx\tan 30^0$

Hay $a_{1y} = a_{2x}\tan 30^0 = a_{2x}\frac{\sqrt{3}}{3}$ (11)

Thay (7), (9) vào (10) ta được $\frac{N - F\sqrt{3}}{2m} = \frac{F}{\beta mR}R\frac{\sqrt{3}}{2} \to N = F\sqrt{3}(1 + \frac{1}{\beta})$ (12)

Thay (7), (8) vào (1) ta được

$$\frac{N - F\sqrt{3}}{2m} = \left(\frac{mg - F - N\sqrt{3}}{m}\right)\sqrt{3} \Leftrightarrow N - F\sqrt{3} = \left(mg - F - N\sqrt{3}\right)2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow N = (2mg - F)\frac{\sqrt{3}}{7} \qquad (13)$$

Từ (12) và (13) suy ra $F = \frac{2\beta mg}{8\beta + 7}$ ; $N = \frac{2\sqrt{3}(\beta + 1)mg}{8\beta + 7}$ (14)

Thay (8) vào (14) ta được

$$a_{1y} = \frac{mg - \frac{2\beta mg}{8\beta + 7} - \frac{2\sqrt{3}(\beta + 1)mg}{8\beta + 7}\sqrt{3}}{m} = g(1 - \frac{2\beta}{8\beta + 7} - \frac{6(\beta + 1)}{8\beta + 7})$$

$$\to a_{1y} = \frac{g}{8\beta + 7}$$

**Bài 43.** Xét trong hệ quy chiếu gắn với mặt phẳng nghiêng, gia tốc góc của quả cầu đối với ván:

$$\gamma = \frac{(mg\sin\alpha + ma)R}{\frac{2}{5}mR^2 + mR^2} = \frac{5}{7}\frac{(g\sin\alpha + a)}{R} \qquad (1)$$

Để quả cầu đứng yên thì: $v_G = 0 \to v_{G/mpn} + v_{mpn} = 0$

Hay $\gamma Rt + (-at) = 0 \rightarrow \gamma R = a$ (2)

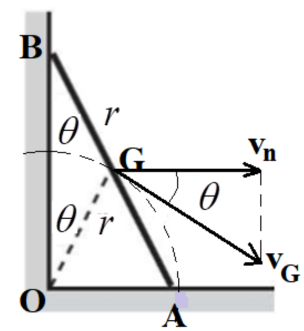
Thay (1) vào (2) ta được $\frac{5}{7}(g\sin\alpha + a) = a \rightarrow \frac{5}{7}g\sin\alpha = \frac{2a}{7}$

Hay $a = \frac{5g\sin\alpha}{2}$

**Bài 44.** Đáp số $a = \frac{2}{7}g$

**Bài 45.** Ở đây ta chỉ xét chuyển động của thanh trong mặt phẳng thẳng đứng vuông góc với tường. Gọi $r = \frac{l}{2}$ là khoảng các từ góc tường O đến khối tâm G của đĩa.

Khi đầu trên B của thanh còn tựa vào tường, thì khối tâm G chuyển động trên đường tròn tâm O bán kính r



Hình 2.9S

Khi đó vận tốc khối tâm G là $v_G = r\theta' = \frac{l}{2}\theta'$ (1)

và vận tốc góc thanh quanh cực G là $\theta'$

Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng $mgr(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}m(\theta' r)^2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{12}ml^2)(\theta')^2$

$$g(1-\cos\theta) = \frac{l}{3}(\theta')^2 \rightarrow \theta' = \sqrt{3\frac{g}{l}(1-\cos\theta)} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra $v_G = \frac{l}{2}\theta' = \frac{l}{2}\sqrt{3\frac{g}{l}(1-\cos\theta)} = \frac{1}{2}\sqrt{3gl(1-\cos\theta)}$ (3)

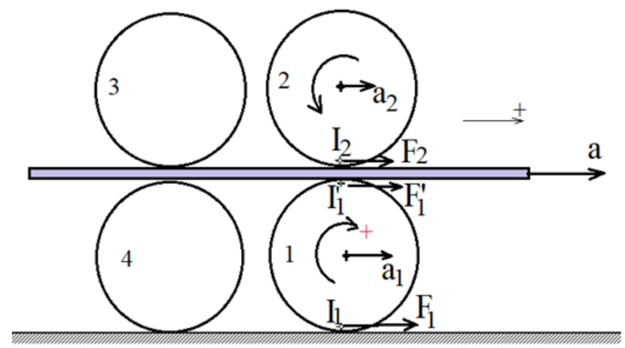
Khi đó vận tốc khối tâm G theo phương ngang: $v_n = v_G\cos\theta = \frac{1}{2}\sqrt{3gl(1-\cos\theta)}.\cos\theta$ (4)

Khi thanh rời bắt đầu rời tường thì thành phần $v_n$ đạt cực đại:

$$\frac{dv_n}{dt} = 0 \rightarrow \frac{\sin\theta\cos\theta}{2\sqrt{(1-\cos\theta)}} - \sqrt{(1-\cos\theta)}\sin\theta = 0$$

$$\frac{dv_n}{dt} = 0 \to \cos\theta - 2(1-\cos\theta) = 0 \to \cos\theta = \frac{2}{3} \Rightarrow \theta \approx 48,2^0$$

**Bài 46.`** **a.** Gọi $a_1, a_2$ lần lượt là gia tốc của trụ 1 và 2; điểm tiếp xúc giữa trụ 1 và sàn là $I_1$, giữa trụ 1 và ván là $I_1$’, và giữa trụ 2 với ván là $I_2$.



Hình 2.10S1

Lưu ý gia tốc của điểm $I_1$’, $I_2$ bằng gia tốc của ván.

**Xét trụ 1**.

$$v_{I'_1} = v_{I'_1/O_1} + v_{O1/I_1} \to a_{I'_1} = a_{I'_1/O_1} + a_{O1/I_1}$$

$$a = a_1 + a_1 \to a_1 = \frac{a}{2} \qquad (1)$$

Ta lại có $a_1 = \dfrac{F_1 + F_1'}{m} \to F_1 + F_1' = \dfrac{ma}{2}$ (2)

Và $\gamma_1 = \dfrac{(F_1' - F_1)\mathrm{R}}{\frac{1}{2}mR^2} = \dfrac{2(F_1' - F_1)}{mR}$ $\gamma_1 = \dfrac{(F_1' - F_1)\mathrm{R}}{\frac{1}{2}mR^2} = \to (F_1' - F_1) = \dfrac{mR\gamma_1}{2}$ (3)

Mặt khác $\gamma_1 = \dfrac{a_{I_1'/O_1}}{R} = \dfrac{a_1}{R} = \dfrac{a}{2R}$ (4)

Kết hợp (2), (3) và (4) ta được $\begin{cases} F_1' = \dfrac{3}{8}ma \\ F_1 = \dfrac{1}{8}ma \end{cases}$ (5)

**Xét trụ 2**. Ta có gia tốc tịnh tiến và gia tốc góc:

$$a_2 = \frac{F_2}{m} \qquad (6)$$

$$\gamma_2 = \frac{-F_2R}{\frac{1}{2}mR^2} = \frac{-2F_2}{mR} \qquad (7)$$

Và $a_2 = a_{O2} = a_{O_2/I_2} + a_{I_2} \rightarrow a_2 = \gamma_2 R + a$ (8)

Thay (6), (7) vào (8) ta được $\frac{F_2}{m} = \frac{-2F_2}{mR}R + a \Rightarrow F_2 = \frac{1}{3}ma$ (9)

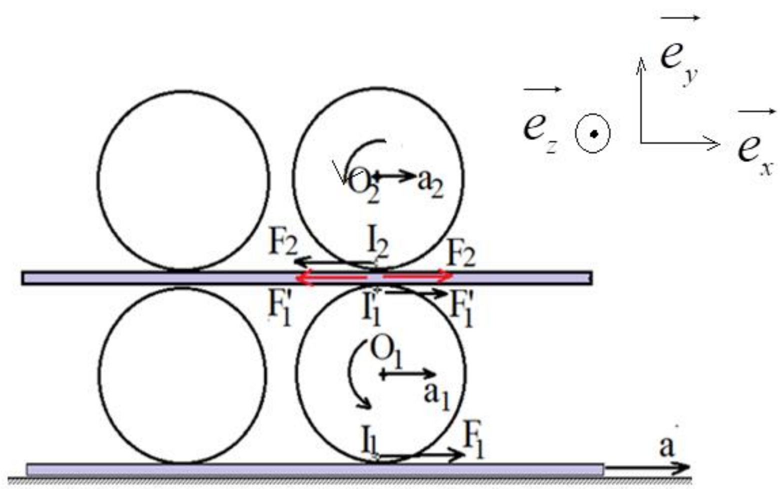
Thay (9) vào (6) ta được $a_2 = \frac{1}{3}a$ (10)

**b.** Trên hình vẽ b, tấm ván I được kéo sang phải với gia tốc a.

**-Xét trụ 1.** Ta có gia tốc $a_1$ tịnh tiến và gia tốc góc $\gamma_1$:

$$\vec{a_1} = \frac{\vec{F_1} + \vec{F_1'}}{m} \rightarrow a_1 = \frac{F_1 + F_1'}{m} \qquad (11)$$

Đối với cực $O_1$: $\vec{\gamma_1} = \frac{(\overrightarrow{O_1I_1} \wedge \vec{F_1}) + (\overrightarrow{O_1I_2} \wedge \vec{F'_1})}{\frac{1}{2}mR^2} \rightarrow \vec{\gamma_1} = \frac{(RF_1\vec{e_z} \wedge \vec{F_1}) + (RF'_1)(-\vec{e_z})}{\frac{1}{2}mR^2}$




Hình 2.10S2

$\rightarrow \frac{1}{2}mR\gamma_1 = F_1 - F_1'$ (12)

Và ta có các phương trình liên kết trong điều kiện lăn không trượt:

$$\vec{a_1} = \vec{a_{O1}} = \vec{a_{O1/I_1}} + \vec{a_{I1}} = (\vec{\gamma_1} \wedge \overrightarrow{I_1O_1}) + \vec{a} \Rightarrow a_1\vec{e_x} = (\gamma_1\vec{e_z} \wedge R\vec{e_y}) + a\vec{e_x}$$

$a_1 = -\gamma_1 R + a$ (13)

-Xét tấm ván II. Vì ván không khối lượng nên $F_1' = F_2$ (15)

-Xét Trụ 2. Theo định luật II Newton: $a_2 = \frac{-F_2}{m} = \frac{-F_1'}{m}$ (16)

$$\overrightarrow{\gamma_2} = \frac{\left(\overrightarrow{O_2I_2} \wedge (-\overrightarrow{F_2})\right)}{\frac{1}{2}mR^2} = \frac{\left(R(-\overrightarrow{e_y}) \wedge (-F_2\overrightarrow{e_x})\right)}{\frac{1}{2}mR^2} \Leftrightarrow \gamma_2\overrightarrow{e_z} = \frac{-RF_2\overrightarrow{e_z}}{\frac{1}{2}mR^2}$$

$$\frac{1}{2}mR\gamma_2 = -F_2 = -F_1' \qquad (17)$$

Mặt khác ta có phương trình liên kết

$$\overrightarrow{a_2} = \overrightarrow{a_{O2}} = \overrightarrow{a_{O2/I_2}} + \overrightarrow{a_{I_2}} = (\overrightarrow{\gamma_2} \wedge \overrightarrow{I_2O_2}) + (\overrightarrow{a_{I_2/I_1}} + \overrightarrow{a_{I_1}})$$

$$a_2\overrightarrow{e_x} = (\gamma_2\overrightarrow{e_z} \wedge R\overrightarrow{e_y}) + (\overrightarrow{\gamma_1} \wedge \overrightarrow{I_1I_2}) + \vec{a}) = \gamma_2R(-\overrightarrow{e_x}) + (\gamma_1\overrightarrow{e_z} \wedge 2\mathrm{R}\overrightarrow{e_y}) + a\overrightarrow{e_x}$$

$$a_2\overrightarrow{e_x} = \gamma_2R(-\overrightarrow{e_x}) + \gamma_1 2\mathrm{R}(-\overrightarrow{e_x}) + a\overrightarrow{e_x}$$

$$a_2 = -\gamma_2R - \gamma_1 2\mathrm{R} + a \qquad (18)$$

Giải hệ từ (11) đến (18) ta được

Từ (14) và (19), suy ra $F_1 = \frac{6}{17}ma$ ; $F_2 = F_1' = \frac{1}{17}ma$; $a_1 = \frac{7}{17}a$ , $a_2 = \frac{-1}{17}a$

$$\gamma_1 = \frac{10}{17}\frac{a}{R}; \gamma_2 = \frac{-2}{17}\frac{a}{R}$$

c.Trong điều kiện câu b, biết rằng ván II có khối lượng m. Tìm gia tốc của các trụ và độ lớn các lực ma sát nghỉ.

**HƯỚNG DẪN**.

Trên hình vẽ , tấm ván I được kéo sang phải với gia tốc a.

-**Xét trụ 1.** Ta có gia tốc $a_1$ tịnh tiến và gia tốc góc $\gamma_1$:

$$\overrightarrow{a_1} = \frac{\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_1'}}{m} \rightarrow a_1 = \frac{F_1 + F_1'}{m} \qquad (19)$$

Đối với cực O$_1$: $\vec{\gamma}_1 = \dfrac{(\overrightarrow{O_1I_1} \wedge \vec{F}_1) + (\overrightarrow{O_1I_2} \wedge \vec{F'}_1)}{\frac{1}{2}mR^2} \rightarrow \vec{\gamma}_1 = \dfrac{(RF_1\vec{e}_z \wedge \vec{F}_1) + (RF'_1)(-\vec{e}_z)}{\frac{1}{2}mR^2}$

$\rightarrow \dfrac{1}{2}m\mathrm{R}\gamma_1 = F_1 - F_1'$ (20)

Và ta có các phương trình liên kết trong điều kiện lăn không trượt:

$\vec{a}_1 = \vec{a}_{O1} = \vec{a}_{O1/I_1} + \vec{a}_{I1} = (\vec{\gamma}_1 \wedge \overrightarrow{I_1O_1}) + \vec{a} \Rightarrow a_1\vec{e}_x = (\gamma_1\vec{e}_z \wedge R\vec{e}_y) + a\vec{e}_x$

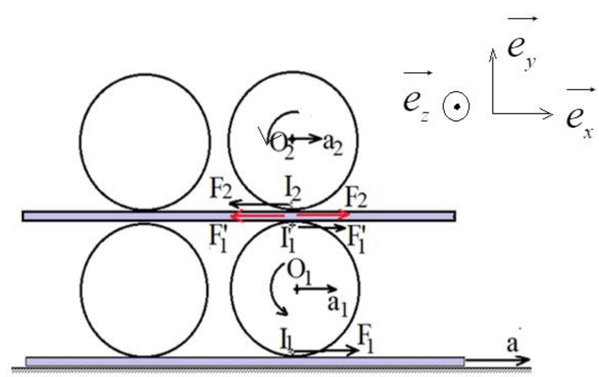
$a_1 = -\gamma_1 R + a$ (21)

-Xét tấm ván II. $= 2(F_2 - F_1') \rightarrow ma_{II} = 2(F_2 - F_1')$ (22)

Và $\vec{a}_{II} = \vec{a}_{I_1'} = \vec{a}_{I_1'/I_1} + \vec{a}_{I_1} = (\vec{\gamma}_1 \wedge \overrightarrow{I_1I_1'}) + \vec{a}$

$a_{II}\vec{e}_x = (\gamma_1\vec{e}_z \wedge 2\mathrm{R}\vec{e}_y) + a\vec{e}_x$

$a_{II} = -\gamma_1 2\mathrm{R} + a$ (23)




Hình 2.10S2

-Xét Trụ 2. Theo định luật II Newton:

$a_2 = \dfrac{-F_2}{m}$ (24)

$$\vec{\gamma}_2 = \frac{\left(\overrightarrow{O_2I_2} \wedge (-\vec{F}_2)\right)}{\frac{1}{2}mR^2} = \frac{\left(R(-\vec{e}_y) \wedge (-F_2\vec{e}_x)\right)}{\frac{1}{2}mR^2} \Leftrightarrow \gamma_2\vec{e}_z = \frac{-RF_2\vec{e}_z}{\frac{1}{2}mR^2}$$

$\dfrac{1}{2}mR\gamma_2 = -F_2$ (25)

Mặt khác ta có phương trình liên kết

$\vec{a}_2 = \vec{a}_{O2} = \vec{a}_{O2/I_2} + \vec{a}_{I_2} = (\vec{\gamma}_2 \wedge \overrightarrow{I_2O_2}) + (\vec{a}_{I_2/I_1} + \vec{a}_{I_1})$

$a_2\vec{e}_x = (\gamma_2\vec{e}_z \wedge R\vec{e}_y) + (\vec{\gamma}_1 \wedge \overrightarrow{I_1\mathrm{I}_2}) + \vec{a}) = \gamma_2 R(-\vec{e}_x) + (\gamma_1\vec{e}_z \wedge 2\mathrm{R}\vec{e}_y) + a\vec{e}_x$

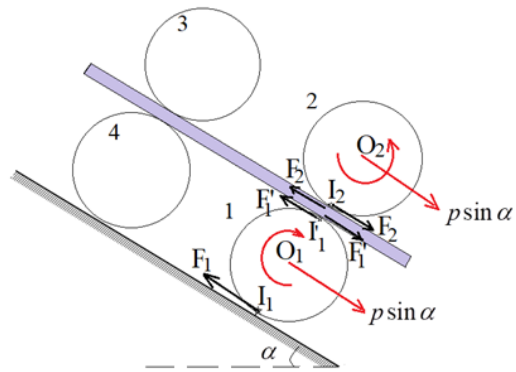
$a_2\vec{e}_x = \gamma_2 R(-\vec{e}_x) + \gamma_1 2\mathrm{R}(-\vec{e}_x) + a\vec{e}_x$

$a_2 = -\gamma_2 R - \gamma_1 2\mathrm{R} + a$ (26)

Giải hệ từ (19) đến (26) ta được $F_1' = \frac{5}{58}ma$; $F_1 = \frac{21}{58}ma$; $F_2 = \frac{1}{29}ma$

$a_1 = \frac{13}{29}a$; $a_2 = -\frac{1}{29}a$; $\gamma_1 = \frac{16}{29}\frac{a}{R}$; $\gamma_2 = \frac{-2}{29}\frac{a}{R}$

**Bài 47.** **Xét trụ 1.** Ta có gia tốc $a_1$ tịnh tiến và gia tốc góc $\gamma_1$:




Hình 2.11S

$$a_1 = \frac{-F_1 - F_1' + p\sin\alpha}{m} \qquad (1)$$

Đối với cực O₁: $\gamma_1 = \frac{(F_1 - F_1')R}{\frac{1}{2}mR^2} = \frac{2(F_1 - F_1')}{mR}$ (2)

Và ta có các phương trình liên kết trong điều kiện lăn không trượt:

$$a_1 = a_{O1} = a_{O1/I_1} + a_{I1} = \gamma_1 R + 0 = \gamma_1 R \qquad (3)$$

Thay (1), (2) vào (3) ta được $\frac{-F_1 - F_1' + p\sin\alpha}{m} = \frac{2(F_1 - F_1')}{mR}R$

$$3F_1 - F_1' = mg\sin\alpha \qquad (4)$$

-Xét tấm ván II. Vì ván không khối lượng nên $F_1' = F_2$ (5)

-Xét Trụ 2. Theo định luật II Newton: $a_2 = \frac{F_2 + p\sin\alpha}{m} = \frac{F_1' + p\sin\alpha}{m}$ (6)

$$\gamma_2 = \frac{-F_2 R}{\frac{1}{2}mR^2} = \frac{-2F_1'}{mR} \qquad (17)$$

Mặt khác ta có phương trình liên kết

$$a_2 = a_{O2} = a_{O2/I_2} + a_{I_2} = \gamma_2 R + a_{I_1'} = \gamma_2 R + (a_{I_1'/I_1} + a_{I_1})$$

$$a_2 = \gamma_2 R + (\gamma_1.2R + 0) \rightarrow a_2 = \frac{-2F_1'}{mR}R + \frac{2(F_1 - F_1')}{mR}.2R$$

$$\rightarrow \frac{F_1' + p\sin\alpha}{m} = \frac{-2F_1'}{m} + \frac{4(F_1 - F_1')}{m} \rightarrow F_1' + p\sin\alpha = -2F_1' + 4(F_1 - F_1')$$

$\rightarrow 7F_1' + p\sin\alpha = 4F_1$ (8)

Thay (4) vào (8) ta được $F_1 = \dfrac{6}{17}mg\sin\alpha$ (9)

Và $F_1' = \dfrac{1}{17}mg\sin\alpha$ (10)

Thay (9), (10) vào (1), (6) ta được $a_1 = \dfrac{10}{17}g\sin\alpha$ (11)

$a_2 = \dfrac{18}{17}g\sin\alpha$ (12)

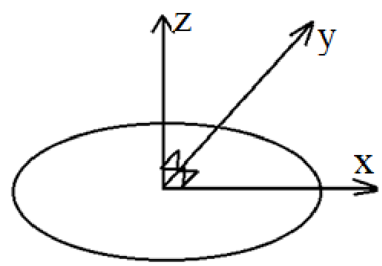
b. Mở rộng:giải lại bài toán trong điều kiện ván có khối lượng m.

**Bài 48**. a.Tính momen quán tính.

Ta có $I_z = \sum r^2 dm = \sum (x^2 + y^2)dm = \sum (x^2 dm + y^2\,\mathrm{dm})$

$\Rightarrow I_z = \sum dI_x + dI_y = 2\sum dI_x$

Hay $I_z = 2I_x \rightarrow I_x = \dfrac{1}{2}I_z = \dfrac{1}{2}mR^2$ (1)



Hình 2.14S1

2.Tìm áp lực N.

Áp dụng định luật II cho cực đi qua G (trục qua Gx đi qua G nằm trong mặt đĩa và vuông góc mặt phẳng chứa $\vec{P}, \vec{N}$)

$\overrightarrow{\beta''} = \dfrac{\overrightarrow{M_{P/G}} + \overrightarrow{M_{N/G}} + \sum\left[\vec{r} \wedge (-dm\overrightarrow{a_G})\right]}{I_x}$, ở đây G là một cực có gia tốc

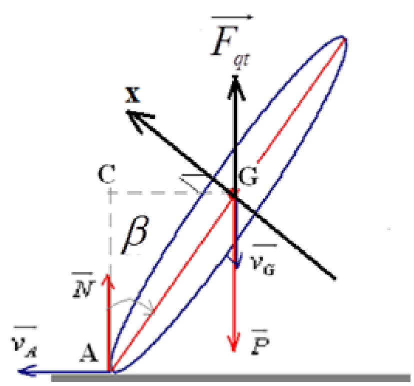
$\overrightarrow{\beta''} = \dfrac{\overrightarrow{M_{N/G}}}{I_x} \rightarrow \beta'' = \dfrac{4N\sin\beta}{mR}$ (2)

Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng, suy ra

$mgR = mgR\cos\beta + \dfrac{1}{2}mv_G^2 + \dfrac{1}{2}I_x\beta'^2$ (3)

Từ(3) đạo hàm xuấ hiện $\beta', \beta''$ ta được (4)

Thay $\beta', \beta''$ từ (2) và (3) vào (4) ta được



Hình 2.14S2

$$N = Mg\,\frac{1 + \dfrac{Mr^2}{I_0}(1-\cos\beta)^2}{(1 + \dfrac{Mr^2}{I_0}\sin^2\beta)^2} = 0{,}24Mg \qquad (I_0 = \frac{Mr^2}{2})$$

(5)

Thay $\beta = 60^0$ vào (5) ta được $N = mg(\sqrt{3} - \frac{3}{2})$

**Bài 49**. Mô men quán tính của đĩa đối với trục Oz

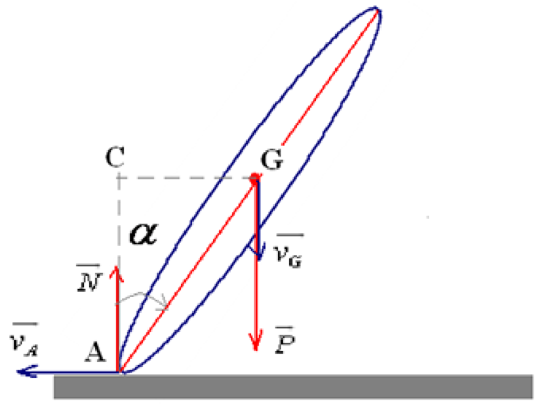
$dI_Z = r^2dm = (x^2 + y^2)dm = x^2dm + y^2dm = dI_x + dI_y$

$\Rightarrow I_z = I_x + I_y = 2I_x \Leftrightarrow \frac{1}{2}mR^2 = 2I_x$

$\Rightarrow I_x = \frac{I_Z}{2} = \frac{1}{4}mR^2$

Lúc này Mômen quán tính đối với trục quay tức thời

$I_C = I_G + mCG^2 = mR^2(\frac{1}{4} + \sin^2\alpha)$



Hình 2.15S

Theo định luật bảo toàn cơ năng

$$\frac{1}{2}I_C\omega^2 = mgR(1-\cos\alpha)$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{g}{R}\sin\alpha\left[\frac{\frac{1}{4} + \sin^2\alpha - 2\cos\alpha(1-\cos\alpha)}{(\frac{1}{4}+\sin^2\alpha)^2}\right] \qquad (1)$$

Định luật II cho chuyển động quay quanh G

$$N\sin\alpha R = I_G\gamma_G \; = \; I_G\gamma \qquad (2)$$

**Lưu ý :** $\gamma_G \; = \gamma_I = \gamma$

Thay (1) vào (2) ta đươc

$$N = mg.\frac{\frac{1}{4} + \sin^2\alpha - 2\cos\alpha(1-\cos\alpha)}{(\frac{1}{4}+\sin^2\alpha)^2} = mg\frac{1+(1-\cos\alpha)^2}{(1+4\sin^2\alpha)} \approx 0,26mg$$

**Bài 50. 1.** Lực tác dụng lên vật gồm trọng lực (mg) và áp lực (N) của hình nón lên vật. Chiếu xuống các phương ta được:

Theo phương thẳng đứng: N.sin$\theta$ = mg

Theo phương ngang: N.cos$\theta$ = m$\frac{v^2}{r}$

Với r = h.tg$\theta$ và v = $\omega$r

Từ đó: $\omega = \frac{1}{tg\theta}\sqrt{\frac{g}{h}}$

**2.** Giả sử vành lăn từ sau tới trước như hình vẽ, khi đó vành có 2 thành phần momen động lượng $\vec{L} = \vec{L_1} + \vec{L_2}$ . Trong đó $\vec{L_1}$ thẳng đứng hướng xuống còn thành phần $\vec{L_2}$ nằm dọc theo đường sinh hướng lên như hình vẽ.

Lực tác dụng lên vòng tròn gồm lực ma sát $\overrightarrow{F_{ms}}$, trọng lực $\overrightarrow{P}$, phản lực của thành $\overrightarrow{N}$. Chiếu xuống phương thẳng đứng và nằm ngang ta được:

*Phương thẳng đứng*: N.sin$\theta$ + F.cos$\theta$ = mg (1)

*Phương ngang*: N.cos$\theta$ - F.sin$\theta$ = m(h.tg$\theta$)$\omega^2$ (2)

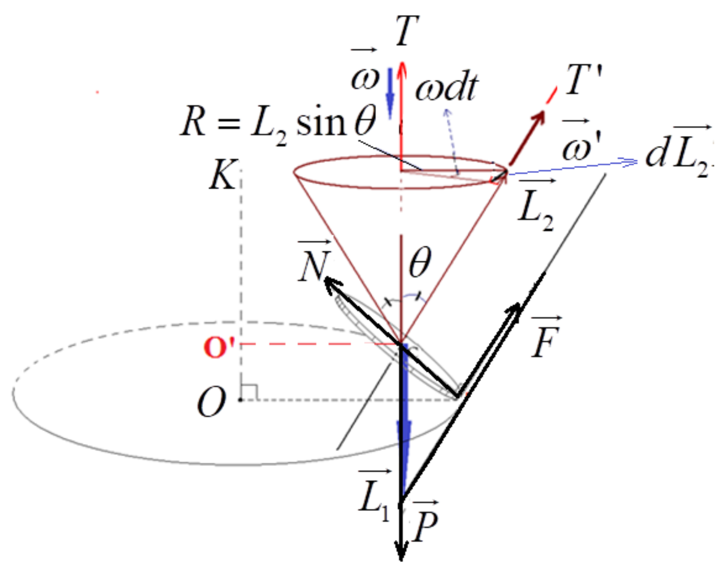
Gọi $\overrightarrow{M}$ là mômen của lực quay tròn, do lực ma sát $\overrightarrow{F_{ms}} = \overrightarrow{F} + \overrightarrow{F'}$ tạo nên. Với $\overrightarrow{F}$ nằm dọc theo đường sinh hướng lên, còn thành phần $\overrightarrow{F'}$ tiếp tuyến với vành và vuông góc với đường sinh tại I

Vì vậy: $\overrightarrow{M} = \left[\overrightarrow{CI} x \overrightarrow{F_{ms}}\right] = \left[\overrightarrow{CI} x \overrightarrow{F}\right] + \left[\overrightarrow{CI} x \overrightarrow{F'}\right] = \left[\overrightarrow{CI} x \overrightarrow{F}\right] \Rightarrow M = r.F$

Thành phần $\left[\overrightarrow{CI} x \overrightarrow{F}\right]$ làm quay $\overrightarrow{L_2}$ còn thành phần $\left[\overrightarrow{CI} x \overrightarrow{F'}\right]$ làm thay đổi độ lớn $\overrightarrow{L_2}$. Vì độ lớn $L_2$ không đổi nên buộc F'=0. Vậy khi đó lực ma sát chỉ còn một thành phần F

M = rF (3)

Mặt khác: $\overrightarrow{M} = \frac{d\overrightarrow{L}}{dt}$, **vì vậy, ta cần xác định** $\frac{d\overrightarrow{L}}{dt}$.



Hình 2.17S

***Phân tích*** $\overrightarrow{L}$ ***thành hai thành phần:***

- Một thành phần qua khối tâm C và quay quanh trục đối xứng của hình nón $\overrightarrow{L_1}$ cùng chiều với $\vec{\omega}$, thành phần này không đổi( do $\vec{P}, \vec{N}, \vec{F}$ đi qua trục quay T nên không có tác dụng làm tăng độ lớn của $L_1$ $\vec{N}$, $\vec{F}$ đi qua trục quay đối xứng mặt nón), vì vậy có thể bỏ qua khi lấy tính $\frac{d\overrightarrow{L}}{dt}$.
- Thành phần $\overrightarrow{L_2}$ dọc theo đường sinh hình nón do chuyển động quay của vòng tròn quanh C gây nên. $\overrightarrow{L_2}$ vạch nên hình nón khi đỉnh của mút $\overrightarrow{L_2}$ chuyển động trên đường tròn bán kính $R_L$= $L_2$.sin$\theta$ và tần số góc của chuyển động $\overrightarrow{L_2}$ này là $\omega$ bằng tốc độ quay của vòng( khối tâm C) quanh trục OK mặt nón (hình vẽ)·

Vì vậy: $\frac{d\overrightarrow{L_C}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{L_2}}{dt} = \vec{\omega} R_L =$ ( thủ thuật đạo hàm một vec tơ)

hay $\frac{dL_C}{dt} = \omega L_2 \sin\theta$ (4)

Từ đó $\overrightarrow{M_C} = \frac{d\overrightarrow{L_C}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{L_2}}{dt}$

Nên r F = $\omega L_2.\sin\theta$ (5)

Nhưng $L_2$ = I.$\omega' = mr^2\omega'$, vơi $\omega'$ là vận tốc góc của vòng tròn (vành)quanh tâm C vòng dây, I là momen quán tính của vòng đối với tâm C vòng dây.

**Liên hệ $\omega'$ với $\omega$ theo công thức (dựa vào tốc độ dài trên quỹ đạo):**

$r\omega' = (h.tg\theta + r/\cos\theta).\omega \approx htg\theta\omega$ ( vì giả thiết cho $r << h\tan\theta$)

Vì vậy: $L_2 = mr(h.\ tg\theta).\omega$ (6)

Kết hợp (6) và (5) ta được:

F = $m\omega^2(h.tg\theta)\sin\theta$ (7)

Từ (1), (2) và (7) ta giải được hệ phương trình gồm 3 ẩn N, F và $\omega$ bằng cách nhân (1) với $\cos\theta$, (2) với $\sin\theta$ rồi trừ cho nhau:

F = mg.$\cos\theta$ - $m\omega^2(h.tg\theta)\sin\theta$ (8)

Cân bằng (7) và (8) ta được:

$$\omega = \frac{1}{tg\theta}\sqrt{\frac{g}{2h}} \quad (9)$$

Tần số này bằng $\frac{1}{\sqrt{2}}$ tần số của câu 1.

**Bài 51.**

- Áp dụng định luật II Niutơn trên phương AB và vuông góc AB khi chưa trượt:

+ C có gia tốc tren phương bán kính CO: $a_n = \frac{F_{ms} - P.\sin\theta}{m} \Leftrightarrow -ma\theta'^2 = P.\sin\theta - F_{ms}$ (1)

+ C có gia tốc tiếp tuyến trên phương vuông góc AB: $a_t = \frac{P\cos\theta - N}{m} \Leftrightarrow ma\theta'' = P.\cos\theta - N$

(2)

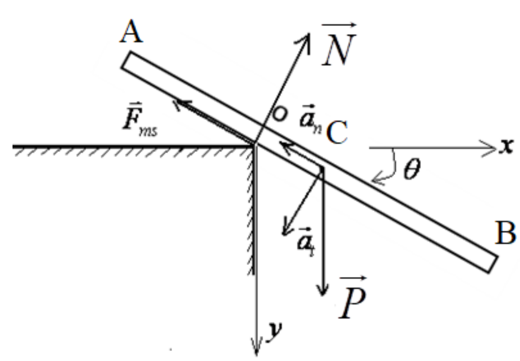
- Áp dụng định lý mômen động lượng trên trục Oz đối với trục quay qua O

$$\frac{d(I_0\omega)}{dt} = mga.\cos\theta$$

$$\Leftrightarrow I_0\theta'' = mga\cos\theta$$

$$\Rightarrow (ma^2 + \frac{1}{3}mb^2)\theta'' = mga\cos\theta$$

(3)



Hình 2.18S

Từ (3) ta nhân 2 vế cho $\theta'$ và tiến hành lấy tích phân

$$\Rightarrow (ma^2 + \frac{1}{3}mb^2)\theta''.\theta' = mga.\cos\theta.\theta'$$

$$\frac{d\theta'^2}{dt} = 2\theta''.\theta' \ ; \ \frac{d(\sin\theta)}{dt} = \cos\theta.\theta'$$

(3) $\Rightarrow (ma^2 + \frac{1}{3}mb^2).\frac{1}{2}\frac{d\theta'^2}{dt} = mga\frac{d(\sin\theta)}{dt}$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\theta'} \frac{1}{2}(ma^2 + \frac{1}{3}mb^2)d(\theta'^2) = \int_0^{\theta} mgad\sin\theta$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(a^2 + \frac{1}{3}b^2)\theta'^2 = mga\sin\theta \qquad (4)$$

Thay $\theta'$ ; $\theta''$ từ (1) và (2) vào (3) và (4) ta được:

$$F_{ms} = mg\sin\theta \qquad (5)$$

$$N = mg\cos\theta.\frac{b^2}{9a^2+b^2} \qquad (6)$$

Thanh không trượt khi $F_{ms} \le k.N$ (7)

Thay (5), (6) vào (7) ta được:

$$tg\theta \le tg\theta_0 = k\frac{b^2}{9a^2+b^2}$$

Hay $\theta_0 = arctg\left[k\frac{b^2}{9a^2+b^2}\right]$

**Bài 52.**

$$a_n = \frac{P.\cos\alpha - N}{m} \qquad (a_n = \omega^2 R = R\alpha'^2)$$

$$\Leftrightarrow -mR\alpha'^2 = N - mg\cos\alpha \qquad (1)$$

$$a_t = -F_{ms} + mg\sin\alpha \Leftrightarrow mR\alpha'' = -F_{ms} + mg\sin\alpha \qquad (2)$$

- Áp dụng định lý mômen động lượng đối với trục quay A.

$$I_A\frac{d\omega}{dt} = mgR\sin\alpha \qquad (I_A = mR^2 + \frac{1}{2}mR^2 = \frac{3}{2}mR^2)$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}mR^2\alpha'' = mg.R\sin\alpha \qquad (3)$$

( Nhân 2 vế cho $\alpha$ ’)

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}mR^2\alpha''.\alpha' = mg.R\sin\alpha.\alpha' \qquad ($$

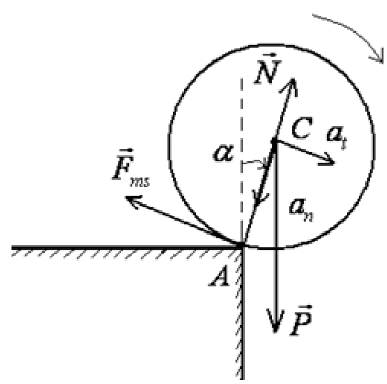
$$\alpha''.\alpha' = \frac{1}{2}(\alpha'^2)'_t \ ; \ \sin\alpha.\alpha' = (-\cos\alpha)'_t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}mR^2.\frac{d(\alpha'^2)}{dt} = mgR\frac{d(-\cos\alpha)}{dt}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}mR^2.d(\alpha'^2) = mgRd(-\cos\alpha)$$

Lấy tích phân 2 vế ta được:

$$\frac{3}{4}mR^2.\alpha'^2 = mgR(-\cos\alpha + 1) \qquad (4)$$



Hình 2.19S

Từ (1), (2), (3), (4) khử $\alpha$ ’ và $\alpha$ ’’ ta tìm được

$F_{ms}=\frac{1}{3}mg\sin\alpha$ (5)

$N=\frac{1}{3}mg(7\cos\alpha-4)$ (6)

- Với giả thiết : N $\geq$ 0 $\Rightarrow 7\cos\alpha-4\geq 0 \Rightarrow \alpha\leq\alpha_1$ $(\cos\alpha_1=\frac{4}{7})$

- Mặt khác: $F_{ms}\leq$ kN (7)

Thay (5) , (6) vào (7)

$\Rightarrow \sin\alpha_2\leq k(7\cos\alpha_2-4) \Rightarrow \alpha_0=|\alpha_2|=0{,}47=27^0$

**Bài 53.**

- Xét vật:

+ Trên phương AB: $a_n=\frac{F_{ms}-mg.\sin\alpha}{m} \Leftrightarrow -m a\alpha'^2=F_{ms}-mg\sin\alpha$ (1)

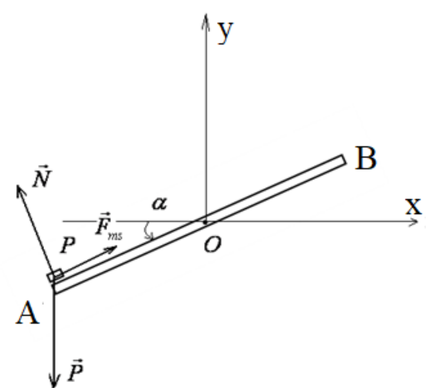
+ Trên phương vuông góc AB:

$a_t=\frac{mg\cos\alpha-N}{m} \Leftrightarrow -ma\alpha''=N-mg\cos\alpha$ (2)

- Áp dụng định lý mômen động lượng trên trục quay Oz cho cả hệ vật (P và thanh AB)

$(I_0+ma^2)\alpha''=mga\cos\alpha$ (3)

Từ (3) ta đặt $A=\frac{mga}{I_0+ma^2}=\frac{mga}{(\frac{1}{3}Ma^2+ma^2)}=\frac{mg}{(\frac{1}{3}Ma+ma)}$ (4)




Hình 2.20S

(3) $\Rightarrow \alpha''=A.\cos\alpha$ Nhân 2 vế với $\alpha'$ sau đó lấy tích phân ta được:

$\alpha'h2=2A.\sin\alpha$ (5)

Giải hệ (1), (2), (3), (5) ta được:

$F_{ms}=mg\sin\alpha+2ma.\frac{mg}{(\frac{1}{3}Ma+ma)}.\sin\alpha=\frac{(9M+m)Mg\sin\theta}{3M+m}$ (6)

$N=mg\cos\alpha-ma.\frac{mg}{(\frac{1}{3}Ma+ma)}\cos\alpha=\frac{Mmg\cos\theta}{3M+m}$ (7)

- Để P còn trên thanh và không trượt thì: $F_{ms}\leq$ kN

$tg\alpha\leq tg\alpha_0=k\frac{g-aA}{g+2aA}=k\frac{M}{M+9m}$

**Bài 44.**

Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng, tại vị trí 2: $\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{mgl}{2} \rightarrow \frac{1}{12}ml^2\omega^2 = mgl$

$$\omega = \sqrt{12\frac{g}{l}} \qquad (1)$$

Áp dụng định luật II: $F_n = m\omega^2 r = m\omega^2\frac{l}{2} = \frac{3}{2}mg$ (2)

Mặt khác $ma = mg - F_d \rightarrow F_d = m(g-a)$ (3)

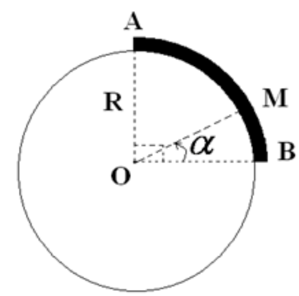
Với $a = \frac{l}{2}\gamma = \frac{l}{2}\frac{P.\frac{l}{2}}{I} = \frac{g}{4}$ (4)

Thay (4) vào (3) ta được $F_d = \frac{1}{4}mg$

**Bài 55.**

+ Lúc buông dây, hợp lực tác dụng lên dây theo phương tiếp tuyến bán cầu.

$F_t = \sum \Delta P\cos\varphi = \int_0^{\pi/2}\frac{m}{L}gR\cos\varphi\, d\varphi = \frac{mgR}{\frac{\pi R}{2}}\int_0^{\pi/2}\cos\varphi\, d\varphi = \frac{2mg}{\pi}$




Hình 2.24P

+ Gia tốc của dây khi đó: $a = \frac{F_t}{m} = \frac{2g}{\pi}$

+ Xét đoạn dây AM:

Ta có: $Ma = \int_0^{\alpha}\frac{mgR\cos\varphi}{\frac{\pi R}{2}}d\varphi + T_M \ (M = m - \frac{m\alpha}{\frac{\pi}{2}} = m(1-\frac{2\alpha}{\pi}))$

$\Rightarrow T_M = m(1-\frac{2\alpha}{\pi})a - \frac{2mg}{\pi}(1-\sin\alpha) = \frac{2mg}{\pi}\left[\sin\alpha - \frac{2\alpha}{\pi}\right]$

b) Tọa độ ban đầu khối tâm trên trục Oy//OA là

$y = \frac{1}{m}\int_0^{\pi/2} ydm = \frac{1}{m}\int_0^{\pi/2} R\sin\varphi.\frac{mRd\varphi}{\frac{\pi}{2}R} = \frac{2R}{\pi}$

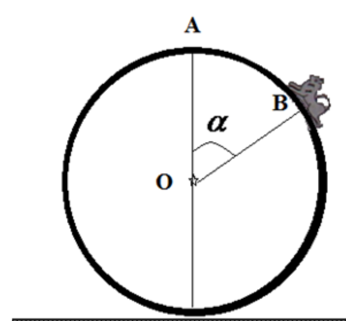
$\frac{mv^2}{2} = mg(\frac{2R}{\pi} + \frac{\pi R}{4}) \Rightarrow v = \sqrt{2gR(\frac{2}{\pi}+\frac{\pi}{4})}$

**Bài 56**.

Câu 1,2)-Chó thu gia tốc theo phương ngang là a, suy ra trụ đã tác dụng lên chó một lực **ma**; ngoài ra chó còn chịu tác dụng trọng lực và lực nâng của trụ là Ny=mg.

-Khi đó trụ chịu tác dụng $F_{ms}$,-ma, $N_y$' gây ra chuyển động.

Câu 3. Ta tính đông năng hệ, vật tốc tịnh tiến theo thời gian.




Hình 2.26P

Theo đinh nghĩa công suất chó là $N_{max} = \frac{dK}{dt}$ ; K là tổng động năng chó và trụ. Dựa vào vận tốc cực đại ta tính t

**1**.Theo đề bài, Chó giữ khoảng cách không đổi so với điểm cao nhất A của mặt trụ nên:

- Theo phương ngang , Chó thu gia tốc theo phương ngang là a, suy ra trụ đã tác dụng lên chó một lực **ma**

- Ngoài ra trên phương thẳng đứng chó cân bằng nên lực nâng mặt trụ tác dụng lên chó đúng bằng trọng lực tác dụng lên chó

**- Phương trình chuyển động của khối trụ quay quanh trục quay tức thời qua I**

$$\begin{cases} \gamma = \dfrac{mgR\sin\alpha - ma(R\cos\alpha + R)}{MR^2 + MR^2} \\ \gamma = \dfrac{a}{R} \end{cases} \Rightarrow a = \frac{mg\sin\alpha}{2M + m(1+\cos\alpha)} \quad (1)$$

**2**. Khi đó hệ vật trụ và chó thu gia tốc theo phương ngang dưới tác dụng của lực ma sát

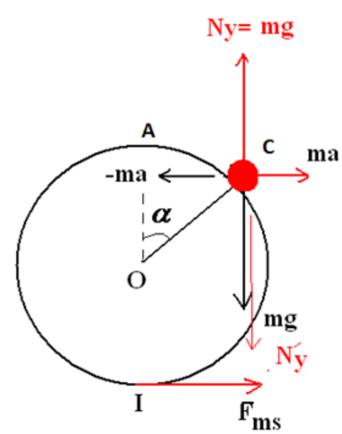
$F_{ms}$: $F_{ms} = (M+m)a = \dfrac{(M+m)}{2M + m(1+\cos\alpha)} mg\sin\alpha$ (2)

**3**. Động năng của hệ trụ và chó là:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = (\frac{1}{2}m + M)v^2 = (\frac{1}{2}m + M)a^2t^2$$

Công suất chó theo thời gian

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{dK}{dt} = 2(\frac{1}{2}m + M)a^2t$$



Hình 2.26S

Suy ra

$$N_{max} = 2(\frac{1}{2}m + M)a^2t_{max} \Rightarrow t_{max} = \frac{N_{max}}{(m+2M)a^2} = \frac{N_{max}}{(m+2M)}\left[\frac{2M + m(1+\cos\alpha)}{mg\sin\alpha}\right]^2 \quad (3)$$

Vận tốc chuyển động tịnh tiến cực đại của hình trụ

$$v_{max} = at_{max} = \frac{N_{max}}{(m+2M)a} = \frac{N_{max}}{(m+2M)}\frac{2M + m(1+\cos\alpha)}{mg\sin\alpha} \quad (4)$$

**Bài 57.** 1.Vì mặt trụ luôn tiếp xúc A, nên khối tam C của trụ quay quành A trên một cung tròn, bán kính r=CA.

2. ta thấy $x_C = \frac{x_B}{2} \Rightarrow v_{Cx} = \frac{v_{Bx}}{2} = \frac{v}{2}$

Do đó $v_C = \frac{v_{cx}}{\sin\alpha} = \frac{v}{2\sin\alpha}$

C có gia tốc hướng tâm quay quanh A là

$a_{ht} = \frac{v_C^2}{r} = \frac{v^2}{4r\sin^2\alpha}$ (1)

Ta thấy $v_{cx}$=const nên hợp lực trên phương ngang bằng không. Do đó hai phản lực từ A và B lên khối trụ bằng nhau và bằng N.

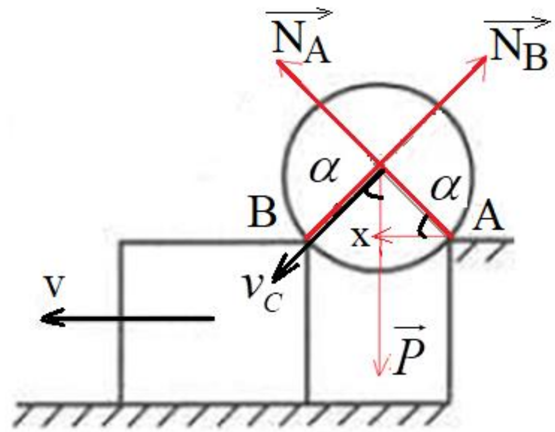
Áp dụng định luật II

$$N.\cos 2\alpha + mg\sin\alpha - N = ma_c \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra được:

$$N = \frac{m}{2\sin^2\alpha}(g\sin\alpha - \frac{v^2}{4r\sin^2\alpha}) \quad (3)$$

Khi $AB = r\sqrt{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$. Điều kiện vẫn còn tiếp xúc thì N>0. Do đó suy ra được $v^2 \le gr\sqrt{2}$




Hình 2.27S

3. Với $v^2 < gr\sqrt{2}$ thì khi $AB = r\sqrt{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$, khối trụ chưa rời , thay vào (3) ta được

$$N = m(\frac{g}{\sqrt{2}} - \frac{v^2}{2r})$$

Lưu ý: Trong bài toán này ta thấy

$\gamma_A = \gamma_C = 0$

Nghĩa là khối trụ chuyển động tịnh tiến quanh A. Do vậy giải theo hướng coi khối trụ là vật rắn thì thường khó khăn hơn hoặc bị bế tắt.

**Bài 58. 1a.** Vì sau thời điểm t = τ, quả cầu lăn không trượt theo chiều dương trục Ox, lúc này quả cầu quay theo chiều kim đồng hồ, nên lực ma sát tác dụng lên quả cầu có tác dụng làm chậm chuyển động quay và sau đó đảo chiều chuyển động này. Do đó, lực ma sát có tác dụng lên quả cầu có hướng ngược chiều dương Ox.

Cũng dưới tác dụng của lực ma sát, khối tâm của quả cầu chuyển động chậm dần đều cho đến khi sự lăn không trượt xảy ra, bắt đầu từ lúc t = τ, ma sát chuyển thành ma sát nghỉ và do lực này không làm mất năng lượng của quả cầu nên chuyển động lăn không trượt sau đó là ổn định.

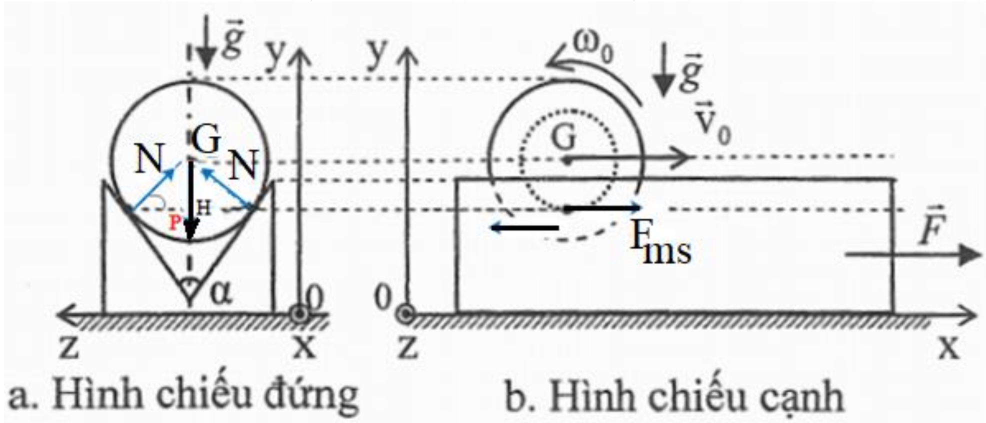
**1b.** Để tính quãng đường quả cầu đi được trong thời gian τ, ta đi khảo sát các đặc trưng tịnh tiến và quay của quả cầu trong thời gian này trước. Chọn chiều dương của chuyển động tịnh tiến và quay tương ứng với chiều của $v_0$ và $\omega_0$.

Vì quả cầu không nhảy lên theo phương thẳng đứng nên hợp lực tác dụng lên nótrong mặt phẳng này, gồm hai phản lực N và trọng lực P sẽ triệt tiêu:

$$2N\sin\frac{60^0}{2} = P \to N = P = Mg \text{ và } F_{ms} = \mu N = \mu Mg \quad (1)$$

Phương trình chuyển động tịnh tiến của khối tâm quả cầu:

$$MA = -2F_{ms} = -2\mu Mg \to A = -2\mu g \quad (2)$$




Hình 2.29S

Đối với chuyển động quay quanh trục nằm ngang đi qua khối tâm G, các lực ma sát có cùng cánh tay đòn $GH = R\sin\frac{60^0}{2} = \frac{R}{2}$, gây ra momen:

$$-2F_{ms}.GH = \frac{2}{5}MR^2.\gamma \to \gamma = -\frac{5\mu g}{2R} \qquad (3)$$

Tốc độ dài khối tâm G và tốc độ góc của quả cầu tại thời điểm t

$$v = v_0 + At = v_0 - 2\mu gt \qquad (4a)$$

$$\omega = \omega_0 + \gamma t = \omega_0 - \frac{5\mu g}{2R}t \qquad (4b)$$

Tại thời điểm t = τ, sự lăn không trượt bắt đầu thì tốc độ của các tiếp điểm của quả cầu và mặt nghiêng của thanh triệt tiêu. Do đó, đường thẳng nối hai tiếp điểm này là trục quay tức thời của quả cầu. Điều kiện lăn không trượt của quả cầu cho ta

$$v = -\omega.GH \to v_0 - 2\mu g\tau = -\left(\omega_0 - \frac{5\mu g}{2R}\tau\right)\frac{R}{2}$$

$$\to \tau = \frac{2(\omega_0 R + 2v_0)}{13\mu g} \qquad (5)$$

Quãng đường quả cầu đi được trên thanh trong khoảng thời gian τ

$$s = v_0\tau + \frac{1}{2}A\tau^2$$

$s = \frac{2}{169\mu g}(2v_0 + \omega_0 R)(9v_0 - 2\omega_0 R)$ (6).

**2a**. Dưới tác dụng của lực $\vec{F}$, thanh chuyển động theo chiều dương của trục Ox. Do quán tính, quả cầu sẽ lăn (không trượt) theo chiều ngược lại.

Trong hệ quy chiếu gắn với thanh, khối tâm quả cầu có vận tốc $\vec{v}_{21} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$. Do quả cầu lăn không trượt trên thanh nên $\vec{v}_{21}$ hướng ngược chiều dương trục Ox và có tốc độ góc $\omega = \frac{v_{21}}{GH} = \frac{2v_{21}}{R}$.

Cũng trong hệ quy chiếu này, đường thẳng nối hai tiếp điểm của quả cầu và thanh là trục quay tức thời của quả cầu nên tốc độ của một điểm M bất kì trên quả cầu được xác định bởi $v_M = \omega.d$ , với d là khoảng cách từ M đến trục quay này.

Để $v_M$ đạt cực đại thì cánh tay đòn d là lớn nhất. Điểm M thỏa mãn hai điều kiện này là điểm cao nhất trên quả cầu (đỉnh quả cầu), với $d_{max}$ = R + GH =1,5R.

Tốc độ lớn nhất ứng với điểm M ở đỉnh quả cầu là
$v_M = \omega.d_{max} = 3v_{21} = 3|\vec{v}_2 - \vec{v}_1|$.

2b. Để quả cầu lăn không trượt theo hướng ngược chiều dương trục Ox, lực ma sát nghỉ do thanh tác dụng lên quả cầu là nguyên nhân gây ra gây ra chuyển động quay này (xét đối với trục quay qua G). Từ đây ta suy ra, chiều của lực ma sát tác dụng lên quả cầu cùng chiều dương trục Ox, và phản lực của nó, lực ma sát do quả cầu tác dụng lên thanh hướng ngược chiều dương trục Ox (theo định luật III Newton).

Gọi a là gia tốc của thanh đối với đất. Theo định luật II Newton:

$$F - 2F_{ms} = ma. \qquad (7)$$

Trong hệ quy chiếu gắn với thanh, quả cầu còn chịu thêm lực quán tính $\vec{F}_{qt} = -M\vec{a}$ . Lực này hướng ngược chiều dương trục Ox, kéo vật trượt về hướng này.

Áp dụng định luật II Newton cho khối tâm quả cầu

$$-F_{qt} + 2F_{ms} = -MA$$

với A là gia tốc của khối tâm G đối với thanh,

Hay là
$$-Ma + 2F_{ms} = -MA. \qquad (8)$$

Phương trình chuyển động quay của quả cầu quanh khối tâm G

$$2F_{ms}.GH = I_G.\gamma \quad (9a)$$

Trong đó, $I_G = \frac{2}{5}MR^2$ là momen quán tính của quả cầu đối với G và γ là gia tốc góc của quả cầu. Điều kiện lăn không trượt cho ta A = γ.GH = 0,5γR. Do đó, phương trình (9a) được viết lại thành

$$F_{ms} = 0{,}8MA. \qquad (9b).$$

Từ các phương trình (7), (8) và (9), ta tính được

$$F_{ms} = F\frac{4M}{13m + 8M}. \qquad (10)$$

Mặc khác, do không có dịch chuyển nào trong mặt phẳng thẳng đứng nên các phản lực N của thanh lên quả cầu cũng được xác định theo công thức (1) tính được trên đây N = Mg.

Để quả cầu lăn không trượt thì ma sát là nghỉ, do đó $F_{ms} \le \mu N$. Ta suy ra điều kiện của lực F để điều này xảy ra (chuyển động của quả cầu là lăn không trượt trên thanh):

$$F \le \mu g(2M + \frac{13m}{4}).$$

Vậy giá trị cực đại của lực F là $F_{max} = \mu g(2M + \frac{13m}{4})$.

**Bài 59 .** 1.Tại thời điểm t tâm vành có tọa độ x so với vị trí ban đầu

$$ma = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha$$

$$\Rightarrow a = x'' = g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha = g\sin\alpha - \frac{x}{l}g\cos\alpha = -\frac{g\cos\alpha}{l}(\mathrm{x} - l\tan\alpha)$$

Đặt $\mathrm{y = x\text{-}\ ltan}\alpha$

$$\mathrm{y'' = x''},\ \omega = \sqrt{\frac{g\cos\alpha}{l}} = 2{,}94 rad/s$$

$$y'' = -\omega^2 y \Rightarrow y = A\cos(\omega \mathrm{t} + \varphi) \Rightarrow \mathrm{x} = l\tan\alpha + \mathrm{A}\cos(\omega\mathrm{t} + \varphi)$$

Tại t =0, x =0 , x” = 0 ta có

$$\varphi = 0; \mathrm{A} = -l\tan\alpha$$

$$\Rightarrow \mathrm{x} = l\tan\alpha\left(1 - cos\omega t\right) = 0{,}58\left[1 - \cos(2{,}94t)\right]$$

Phương trình quay :

$$F_{ms}R = I\gamma \Leftrightarrow \frac{x}{l}mgR\cos\alpha = mR^2\gamma$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{g\cos\alpha}{R}\frac{x}{l} = 125\left[1 - \cos(2{,}94\,\mathrm{t})\right]$$

Mặt khác :

$$\gamma = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow d\omega = \gamma dt = \frac{g\sin\alpha}{R}\left(1 - \cos\omega\,\mathrm{t}\right)dt \Rightarrow$$

$$\omega = \frac{g\sin\alpha}{R}\left(1 - \frac{1}{\omega}\sin\omega\,\mathrm{t}\right) = 125\left(1 - \frac{1}{2{,}94}\sin 2{,}94\,\mathrm{t}\right)$$

2. Vận tốc tịnh tiến : $v = \frac{dx}{dt} = l\tan\alpha.\omega.\sin\omega t$

Vành lăn không trượt

khi : $v = \omega R \Rightarrow l\tan\alpha.\omega^2.\sin\omega\,\mathrm{t} = \mathrm{g}\sin\alpha\left(\omega t - \sin\omega t\right) \Rightarrow \omega t = 2\sin\omega t$

Giải phương trình ta được t = 0,64s

# CHƯƠNG II
# NĂNG LƯỢNG VẬT RẮN, VA CHẠM VẬT RẮN
## II.1 NĂNG LƯỢNG VẬT RẮN

**Bài 1.** a) * *Khi ma sát nghỉ đủ lớn thì hình trụ sẽ lăn không trượt:*

Tại thời điểm bất kỳ, vận tốc chuyển động tịnh tiến của hình trụ là: $v = \omega R$ (1)

Động năng toàn phần của hình trụ khi lăn không trượt được xác định bằng tổng của động năng chuyển động tịnh tiến và động năng của chuyển động quay (định lý Kiôning):

$$E_k = \frac{mv^2}{2} + \frac{m(\omega R)^2}{2} = mv^2 \quad (2)$$

Giả sử sau một thời gian nào đó, hình trụ lăn xuống theo mặt nghiêng được một đoạn $S$ thì độ giảm thế năng của nó là:

$$mgh = mgS\sin\alpha \quad (3).$$

Nhưng do không có tỏa nhiệt (vì lăn không trượt) nên cơ năng bảo toàn: Độ tăng động năng bằng độ giảm thế năng: $mgS\sin\alpha = mv^2 \;\Rightarrow\; S.g\sin\alpha = v^2$ (4).

Như vậy bình phương của vận tốc tỷ lệ với quãng đường đi - đây chính là quy luật của chuyển động nhanh dần đều với vận tốc ban đầu bằng không. Trong chuyển động này thì $v^2 = 2aS$, so sánh với (4), ta nhận được: $a = \dfrac{g\sin\alpha}{2}$ (5)

Vậy hình trụ lăn xuống nhanh dần đều với gia tốc bằng một nửa so với trường hợp trượt không ma sát theo mặt nghiêng. Từ đó ta kết luận được chính lực ma sát đã làm giảm gia tốc của hình trụ đi một nửa:

$$F_{ms} = \frac{mg\sin\alpha}{2} \quad (6)$$

Từ (6) ta xác định được lực ma sát đủ lớn để bảo đảm cho hình trụ lăn không trượt:

$$\frac{mg\sin\alpha}{2} \le \mu N = \mu mg\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \mu \ge \frac{tg\alpha}{2} \quad (7)$$

* *Khi hình trụ có thể trượt:*

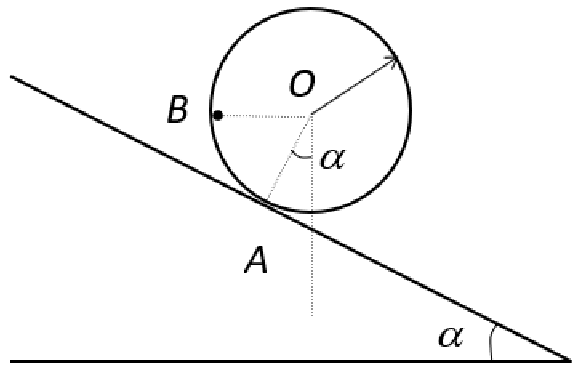
Khi hệ số ma sát không thỏa mãn điều kiện trên thì hình trụ sẽ trượt và có sự tỏa nhiệt. Khi đó, ta áp dụng định luật II Niutơn theo phương của mặt nghiêng:

$ma = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \quad (8)$

Như vậy gia tốc của hình trụ trên mặt nghiêng phụ thuộc vào góc nghiêng theo quy luật:

$$a = \begin{cases} \dfrac{g\sin\alpha}{2} & Khi\,\alpha \le \alpha^*; \quad \alpha^* = arctg(2\mu) \\ g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) & Khi\,\alpha \ge \alpha^* \end{cases}$$

**b)** * Sau khi gắn vật nhỏ vào thành trong của hình trụ thì hệ có thể cân bằng khi hệ số ma sát giữa mặt nghiêng và hình trụ đủ lớn và nhờ sự cân bằng của mômen lực tác dụng lên hình trụ đối với điểm tiếp xúc giữa hình trụ và mặt nghiêng (điểm A trên hình vẽ).




Giá trị nhỏ nhất ứng với trường hợp đoạn OB nằm ngang. Phương trình cân bằng mômen đối với điểm A khi đó:

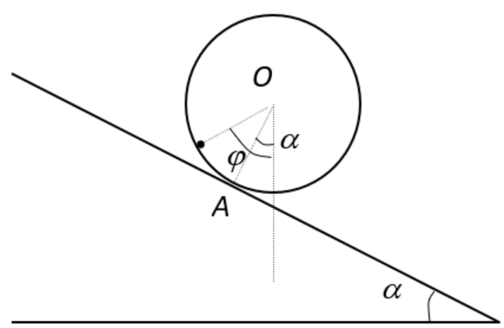
$$m_0 g(R - R\sin\alpha) = mgR\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad m_0 = \frac{\sin\alpha}{1-\sin\alpha}m \quad (10)$$

Điều kiện cân bằng trước hết là không có sự trượt theo mặt nghiêng:

$$\mu \ge tg\alpha \quad (11)$$

* Vị trí cân bằng được xác định bởi góc lệch $\varphi$ của vật so với phương đứng. Điều kiện cân bằng khi đó là:

$$mgR\sin\alpha = m_0 gR(\sin\varphi - \sin\alpha) \quad \Rightarrow \quad \sin\varphi = \frac{m+m_0}{m_0}\sin\alpha.$$




Phương trình này có 2 nghiệm trên đoạn $[0; 2\pi]$, một trong hai nghiệm tương đương với trạng thái cân bằng không bền. Vì vậy chỉ lấy được 1 góc có độ lớn:

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{m+m_0}{m_0}\sin\alpha\right).$$

**Bài 2.** a. Khi m cân bằng thì lực căng dây bằng trọng lực của m → T = mg.

Áp dụng quy tắc mômen cho thanh với trục quay O.

$Mg.\frac{l}{2}.\cos\alpha = T.l.\cos\frac{\alpha}{2}$ → $T = \frac{Mg.\cos\alpha}{2\cos\frac{\alpha}{2}} = mg$

→ $\frac{M}{m} = \frac{2\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha} = 2\sqrt{3}$

b. Chọn mốc tính thế năng trọng trường tại VTCB của mỗi vật.

- Khi thanh OA nằm ngang thì độ cao trọng tâm của nó ở trên vị trí cân bằng một khoảng $h_G = \frac{l}{2}\sin\alpha = \frac{l\sqrt{3}}{4}$, còn vật m ở dưới vị trí cân bằng của nó một đoạn $h_m = SA = l$.

- Gọi vận tốc của m khi thanh đi qua VTCB là v, giá trị của v bằng thành phần vận tốc của điểm A theo phương dây → $v = v_A.\sin\alpha = \frac{\omega l\sqrt{3}}{2}$ → $\omega = \frac{2v}{l\sqrt{3}}$

- Cơ năng ban đầu của hệ. $W = Mgh_G - mgh_m = Mgl\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{Mgl}{2\sqrt{3}} = \frac{Mgl}{4\sqrt{3}}$.

- Cơ năng của hệ tại VTCB: $W' = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{M}{2\sqrt{3}}v^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{3}Ml^2\left(\frac{2v}{l\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{Mv^2\left(9+8\sqrt{3}\right)}{36\sqrt{3}}$

- Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng ta được: $\frac{Mgl}{4\sqrt{3}} = \frac{Mv^2\left(9+8\sqrt{3}\right)}{36\sqrt{3}}$

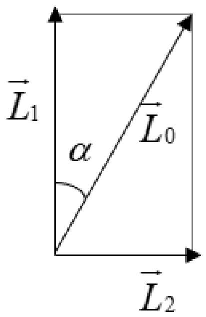
→ $v = \sqrt{\frac{9gl}{9+8\sqrt{3}}}$

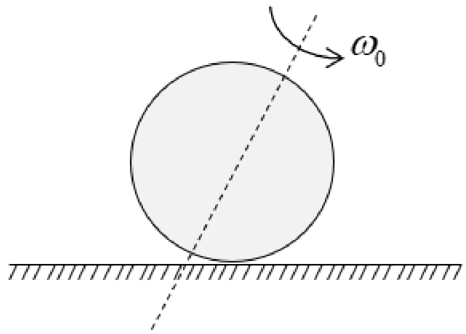
**Bài 3.** Phân tích mô men động lượng :

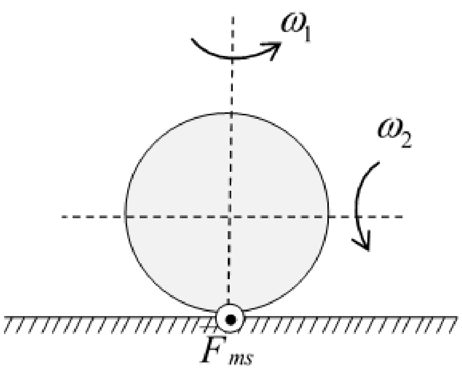
$\vec{L}_0 = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$, với

$L_1 = L_0\cos\alpha \rightarrow \omega_1 = \omega_0\cos\alpha$

$L_2 = L_0\sin\alpha \rightarrow \omega_2 = \omega_0\sin\alpha$




Thành phần $\omega_1$ có giá trị không đổi khi quả cầu chạm vào mặt sàn do không có lực nào gây ra mô men cản. Động năng ứng với thành phần này:

$$W_{d1} = \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 = \frac{1}{2}\frac{2}{5}mR^2\omega_0^2\cos^2\alpha.$$

Thành phần $\omega_2$ thay đổi do mô men của lực ma sát trượt $F_{ms}$ hướng ra (hình). Gọi $v$ và $\omega$ là vận tốc của tâm và vận tốc góc theo phương ngang của quả cầu khi nó bắt đầu lăn không trượt, ta có:

$$v = \omega R \qquad (1)$$

Phương trình mômen:

$$F_{ms}R = -I\frac{d\omega}{dt} = -\frac{2}{5}mR^2\frac{d\omega}{dt}$$
$$\rightarrow F_{ms} = -\frac{2}{5}mR\frac{d\omega}{dt} \qquad (2)$$

Phương trình định luật II Newton:

$$F_{ms} = m\frac{dv}{dt} \qquad (3)$$

Từ (2) và (3):

$$dv = -\frac{2}{5}Rd\omega \rightarrow \int_0^v dv = -\frac{2}{5}R\int_{\omega_2}^{\omega} d\omega$$

$$\rightarrow v = \frac{2}{5}R(\omega_2 - \omega) \qquad (4)$$

Từ (1) và (4) rút ra: $\omega = \frac{2}{7}\omega_2 = \frac{2}{7}\omega_0 \sin\alpha; \quad v = R\omega = \frac{2}{7}R\omega_0 \sin\alpha.$

Vậy, động năng của quả cầu tại điểm ngừng trượt là:

$$\mathrm{W}_d = \mathrm{W}_{d1} + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2}{5}mR^2\omega_0^2\cos^2\alpha + \frac{1}{2}m\left(\frac{2}{7}R\omega_0 \sin\alpha\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}mR^2\left(\frac{2}{7}\omega_0 \sin\alpha\right)^2$$

$$= \frac{1}{5}mR^2\omega_0^2\cos^2\alpha + \frac{2}{35}m\left(R\omega_0 \sin\alpha\right)^2 = \frac{1}{35}mR^2\omega_0^2\left(5\cos^2\alpha + 2\right).$$

Thay số

$$v = \frac{2}{7}R\omega_0 \sin\alpha = 0,0594m/s;$$

$$\mathrm{W}_d = \frac{1}{35}mR^2\omega_0^2\left(5\cos^2\alpha + 2\right) = 0,1938J.$$

**Bài 4.** 1. Khi đầu B của thanh đi vào vùng có ma sát, ở cách mép của nó một khoảng x thì lực ma sát tác dụng lên thanh là : $F_{ms} = \mu.\frac{x}{l}.mg$.

- Công của lực ma sát để thực hiện cho đến lúc đó là : $A_{ms} = \int_0^x \mu\frac{x}{l}mgdx = \frac{\mu mgx^2}{2l}$

- Khi toàn bộ thanh nằm trên vùng có ma sát thì x $\geq \sqrt{l}$ . Như vậy, điều kiện về $v_0$ để khi dừng lại toàn bộ thanh nằm trong vùng có ma sát là : $\frac{mv_0^2}{2} \geq \frac{\mu mg}{2l}.l^2 \rightarrow v_0 \geq \sqrt{\mu gl}$

2. Khi đầu B của thanh đã đi vào vùng có ma sát, áp dụng định luật II Niu-tơn ta có :

ma = $-\frac{\mu mg}{l}x^2 \to$ x'' + $\frac{\mu mg}{l}=0$; với x là khoảng cách từ đầu B đến đầu mép vùng có ma sát.

- Phương trình chuyển động của thanh là: x = Asinωt, với ω = $\sqrt{\frac{\mu g}{l}}$. Lưu ý rằng lúc t = 0 thì x = 0. (Chọn gốc thời gian t = 0 là lúc B vừa chạm vào mép), ta có: $v_B$ = $x_B$ = ωAcosωt.

- Theo đề bài $v_{Bmax}$ = $v_0$, nên ta có : A = $\frac{v_0}{\omega}=v_0\sqrt{\frac{l}{\mu g}}$

* Ta xét các trường hợp sau :

a) Trường hợp $v_0 \geq \sqrt{\mu gl}$. Khi đó A $\geq l$. Lúc $x_B$ = l (thanh bắt đầu lọt hoàn toàn vào vùng có ma sát) ta có: $l = A\sin\omega t_1 \to t_1 = \frac{1}{\omega}\arcsin\left(\frac{l}{A}\right)=\sqrt{\frac{l}{\mu g}}\arcsin\left(\frac{l}{A}\right)$

$t_1$ khoảng thời gian kể từ lúc bắt đầu B bắt đầu chạm vào mép vùng có ma sát cho đến khi đầu A bắt đầu chạm vào mép đó.

+ Nếu $v_0 = \sqrt{\mu gl}$ thì A $= l$; $t_1$ = $\sqrt{\frac{l}{\mu g}}\arcsin 1=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{\mu g}}$ và khi đó $v_B$ = $x'_B$ = ωAcos$\frac{\pi}{2}$ = 0; thanh dừng lại. Như vậy, nếu $v_0 = \sqrt{\mu gl}$, thì khoảng thời gian kể từ lúc đầu B bắt đầu chạm vào mép vùng có ma sát cho đến khi thanh dừng lại bằng $t_1$ = $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{\mu g}}$ và khi đó đầu A ở ngang mép vùng có ma sát ($x_A$ = 0).

+ Nếu $v_0 > \sqrt{\mu gl}$ thì A $> l$. Trong trường hợp đó, lúc thanh dừng lại đầu A sẽ ở cách mép (ở bên trái A) một khoảng $x_A \neq 0$.

- Để tính $x_A$ ta áp dụng định luật bảo toàn năng lượng : $\frac{mv_0^2}{2}=\frac{\mu mg}{2l}l^2+\mu mgx_A \to x_A=\frac{v_0^2}{2\mu g}-\frac{1}{2}$

-Khoảng thời gian kể từ lúc A bắt đầu chạm vào mép cho đến khi thanh dừng lại là $t_2$ :

$$x_A = \frac{1}{2}\mu g t_2^2 \to t_2 = \sqrt{\frac{2x_A}{\mu g}} = \sqrt{\left(\frac{v_0}{\mu g}\right)^2 - \frac{l}{\mu g}}$$

Như vậy, khoảng thời gian cần tìm là : t = $t_1$ + $t_2$.

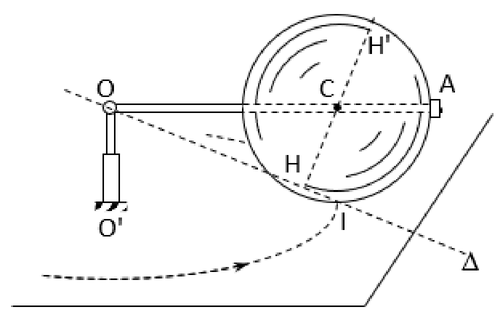
b) Trường hợp $v_0 < \sqrt{\mu g l}$ : trong trường hợp này khi thanh đứng lại chỉ có một phần thanh nằm trong miền có ma sát. Khi thanh dừng lại ta có : $\frac{mv_0^2}{2} = \frac{\mu mg}{2l}x_B^2$; với $x_B$ là khoảng cách từ đầu B tới mép vùng có ma sát. Từ đó : $x_B = \sqrt{\frac{l}{\mu g}}.v_0$

- Đầu A cách mép (về bên phải) : $x_A = l - x_B = l - \sqrt{\frac{l}{\mu g}}.v_0$

- Thời gian cần tìm : $x_B = A\sin\omega t_3$ . $\sqrt{\frac{l}{\mu g}}v_0 = v_0\sqrt{\frac{l}{\mu g}}\sin\sqrt{\frac{\mu g}{l}}t_3 \rightarrow t_3 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{\mu g}}$

**Bài 5.** Xét chuyển động quay quanh trục quay tức thời

Ở mỗi thời điểm, trục quay tức thời đóng vai trò như một trục quay cố định.



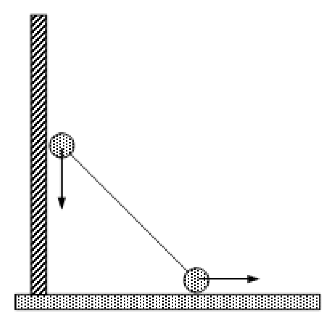

Áp dụng định lý Stai-nơ, Momen quán tính đối với trục quay Δ :

$$I_\Delta = I_O + m.CH^2 =$$

$$= \frac{2}{5}mR^2 + m.\frac{R^2.r^2}{R^2+r^2} = \frac{mR^2}{5}.\frac{2.R^2+7.r^2}{R^2+r^2}.$$

$$W_đ = \frac{1}{2}.I_\Delta.\omega_\Delta^2 = \frac{1}{2}.\frac{mR^2}{5}.\frac{2.R^2+7.r^2}{R^2+r^2}.\frac{v^2.(R^2+r^2)}{R^2r^2} = \frac{7.m.v^2}{10}(1+\frac{2R^2}{7r^2}).$$

**Bài 6.** a. Vào thời điểm đầu A còn tựa vào tường. AB hợp với phương ngang một góc α. Vận tốc của A và B là $\vec{v_A}$ và $\vec{v_B}$ lúc đó A đi xuống một đoạn x - l(1-sinα)



b. Định luật bảo toàn cơ năng: mgx =

$$\frac{1}{2}m(v_A^2+v_B^2) \Rightarrow mgl(1-\sin\alpha) = \frac{1}{2}m(v_A^2+v_B^2) \ (1)$$

Vì thanh AB cứng nên theo định lí về hình chiếu của hai điểm A, B trên vật rắn: $v_A\sin\alpha = v_B\cos\alpha \Rightarrow v_A = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}v_B$

Từ (1) và (2) ta suy ra; $gl(1-\sin\alpha) = \frac{1}{2}v_B^2\frac{1}{\sin^2\alpha} \Rightarrow v_B^2 = 2gl(1-\sin\alpha).\sin^2\alpha$

Khi A chưa rời tường thì lực gây ra gia tốc và vận tốc theo phương ngang nằm ngang là phản lực của tường tác dụng lên A theo phương ngang. Lực này là $v_{Gx}$ tăng dần. Nên khi đầu A rời tường tức N = 0, $a_{Gx} = 0$ và $v_{Gx}$ đạt cực đại

Mà $v_B = 2v_{Gx}$ nên $v_B$ đạt giá trị cực đại

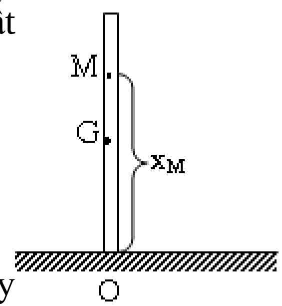
Xét phương trình: $v_B^2 = 2gl(1-\sin\alpha).\sin^2\alpha = 8gl(1-\sin\alpha)\dfrac{\sin\alpha}{2}.\dfrac{\sin\alpha}{2}$

Ta thấy : $(1-\sin\alpha)\dfrac{\sin\alpha}{2}.\dfrac{\sin\alpha}{2} \le \dfrac{1}{27}\left[(1-\sin\alpha)+\dfrac{\sin\alpha}{2}+\dfrac{\sin\alpha}{2}\right]^3 = const$

Nên $v_B$ đạt cực đại khi $(1-\sin\alpha) = \dfrac{\sin\alpha}{2} \Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{2}{3}; \alpha \approx 42^0$

b. Thay sinα = 2/3 vào (3) ta được $v_B = \sqrt{\dfrac{8}{27}gl}$

**Bài 7.** a, Khi thanh đổ xuống có thể xem thanh quay quanh điểm O với vận tốc góc w .




Khi thanh ở vị trí thẳng đứng thỡ thanh cú thế năng (thay thanh bằng chất điểm nằm tại khối tâm G cách O một đoạn l/2)

$$U = \frac{mgl}{2}$$

Khi chạm đất thỡ thế năng của thanh biến hoàn toàn thành động năng quay của thanh :

$$K_{quay} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{ml^2}{3}\omega^2 = \frac{mgl}{2}$$

Từ đó : $w = \sqrt{\dfrac{3g}{l}}$

Vận tốc dài của đỉnh thanh được tính theo công thức v = w l = $\sqrt{3gl}$

b, Ta biết rằng vật rơi tự do ở độ cao h khi chạm đất thì có vận tốc là v = $\sqrt{2gh}$ .

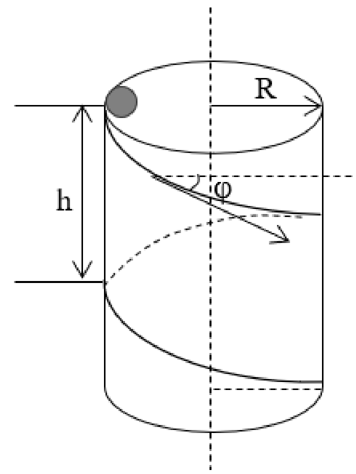
Áp dụng công thức này với điểm M có độ cao $x_M$ : $v_M = \sqrt{2gx_M}$

Theo đầu bài : $\sqrt{2gx_M} = x_M w = x_M\sqrt{\frac{3g}{l}}$

Từ đó tìm được : $x_M = \frac{2}{3}l$

**Bài 8.** Gọi I là mômen quán tính của máng, dễ thấy: $I = mR^2$ (1)

Theo định luật bảo toàn mômen động lượng: gọi u là vận tốc của vật đối với máng, ω là tốc độ góc quay ta được:




$$I\omega + m\left(u\cos\varphi + R\omega\right)R = 0 \qquad (2)$$

Theo định luật bảo toàn năng lượng:

$$I\omega^2 + m\left[\left(u\cos\varphi + R\omega\right)^2 + u^2\sin^2\varphi\right] = 2mgh \qquad (3)$$

Thay (1) vào (2) ta được: $\omega = -\frac{u\cos\varphi}{2R} = -\frac{u\sqrt{2}}{4R}$ (4)

và : $u\cos\varphi + R\omega = -R\omega$ (5)

Thay (1) và (5) vào (3), ta được:

$$mR^2\omega^2 + m\left(R^2\omega^2 + u^2\sin^2\varphi\right) = 2mgh$$

$$\Rightarrow 2R^2\omega^2 + u^2\sin^2\varphi = 2gh$$

Thay biểu thức (4) vào ta có: $2R^2\frac{u^2\cos^2\varphi}{4R^2} + u^2\sin^2 = 2gh$

Vậy: $u = \sqrt{\frac{8gh}{3}}$ thay vào (4) ta được: $\omega = -\frac{1}{R}\sqrt{\frac{gh}{3}}$

cuối cùng ta có:

$v^2 = \left(u\cos\varphi + R\omega\right)^2 + u^2\sin^2\varphi$ thay vào (5) ta được:

$$v^2 = \left(R\omega\right)^2 + u^2\sin^2\varphi$$

thay u và ω vào ta được: $v = \sqrt{\frac{5gh}{3}}$

**Bài 9.**

1, Khi ống đứng yên

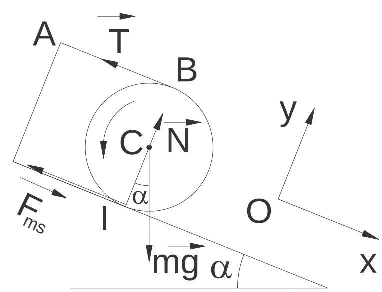
Do ống không quay nên: $\vec{T} = \overrightarrow{F_{ms}}$

+) Điều kiện cân bằng:

$$\begin{cases} \vec{P} + \vec{N} + \vec{T} + \overrightarrow{F_{ms}} = 0 & (1) \\ F_{ms} \le f.N & (2) \end{cases}$$

+) Chiếu lên trục 0x, 0y ta được:

$$\begin{cases} N = mg\cos\alpha \\ F_{ms} = T = \frac{1}{2} mg\sin\alpha \end{cases}$$




Thế vào (2) rút ra: $tg\alpha \le 2f$

Vậy với $\alpha$ thoả mãn : $tg\alpha \le 2f$ thì ống dây còn đứng yên.

2, Khi ống chuyển động ( $tg\alpha > 2f$) : trụ trượt trên mặt phẳng nghiêng và lăn không trượt trên dây AB.

Ta có: $F_{ms} = fmg\cos\alpha$

+) $mg\sin\alpha - fmg\cos\alpha - T = ma$ (3)

+) $(T - F_{ms})R = \frac{1}{2} mR^2 \frac{a}{R}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra: $a = \frac{2}{3} g(\sin\alpha - 2f\cos\alpha)$

Biến thiên động năng gữa thời điểm t và $t_0 = 0$ là: $\Delta E_d = E_t - E_0 = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}$

Trong đó : $v = a.t$

$\omega = \frac{v}{R} = \frac{a.t}{R}$

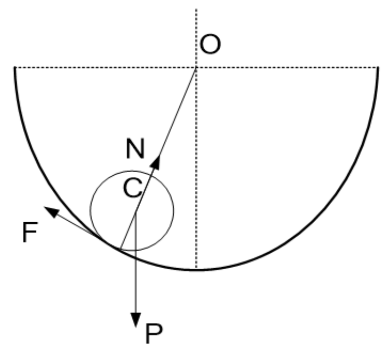
Ta tìm được: $\Delta E_d = \frac{3}{4} mg^2(\sin\alpha - 2f\cos\alpha)^2.t^2$

**Bài 10.** Áp lực của khối trụ tài một vị trí tuỳ ý xác định bởi góc α.

Phương trình chuyển động của khối trụ: $\vec{P} + \vec{N} + \vec{F} = m\vec{a}$ (1).

Hợp lực tác dụng vào vật hướng tâm quỹ đạo là lực hướng tâm.

Chiếu (1) lên phương pháp tuyến ta được: $\frac{mv^2}{(R-r)} = N - P\cos\alpha$ (2)




Chọn mốc tính thế năng tại vị trí cân bằng của khối tâm trụ

Xét vật tại vị trí ban đầu góc $\alpha_0$:

Cơ năng: $W_1 = W_l = W_t = mg(R - r)(1-\cos\alpha_0)$ (3)

Xét vật tại vị trí góc α bất kì.

Cơ năng: $W_2 = mg(R - r)(1-\cos\alpha) + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$

(Trong đó $I = 1/2mR^2$ là mômen quán tính của khối trụ, $\omega = \frac{v}{r}$ là vận tốc góc của khối trụ quay quanh khối tâm.

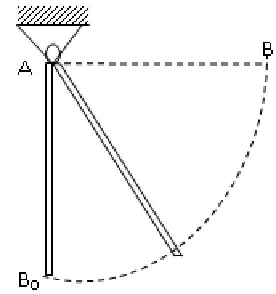
$W_2 = mg(R-r)(1-\cos\alpha) + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}mr^2\frac{v^2}{r^2}; W_2 = mg(R-r)(1-\cos\alpha) + \frac{3}{4}mv^2$ (4)

Vì $W_1 = W_2 \Leftrightarrow mg(R - r)(\cos\alpha - \cos\alpha_0) = 3/4mv^2$; $\Rightarrow \frac{mv^2}{(R-r)} = \frac{4}{3}mg(\cos\alpha - \cos\alpha_0)$ (5)

Thay (5) vào (1) ta tìm được: $N = P/3(7\cos\alpha - 4\cos\alpha_0)$

**Bài 11.** Các đại lượng đã biết là : $\omega_1 = 0$ và độ dời của hệ xác định bởi góc $B_0AB_1$. Do đó để giải bài toán này tiện hơn cả là sử dụng định lý biến thiên động năng.

Vì đây là hệ không biến hình, ta có phương trình biến thiên động năng là:




$$T_1 - T_0 = A_{01}^{ng} \qquad (1)$$

Gọi m là khối lượng của thanh, ta hãy xác định các đại lượng tham gia phương trình.

Ta có động năng của hệ ở vị trí ban đầu là:

$$T_0 = \frac{1}{2} I_A \omega_0^2 = \frac{1}{6} ml^2 \omega_0^2 \qquad (2)$$

Vì vân tốc của thanh ở vị trí cuối cũng bằng không $\Rightarrow T_1 = 0$ ( 3 )

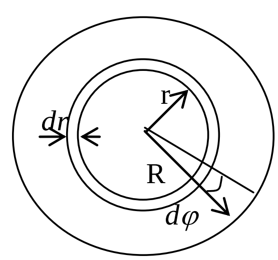
Liên kết ( khớp A ) là lý tưởng, nên chỉ có lực chủ động P = mg thực hiện công và bằng:

$$A = - P.h_c = - mg\frac{l}{2} \qquad (4)$$

Thay ( 2 ), ( 3 ) và ( 4 ) vào ( 1 ) ta được : $-\frac{1}{6} ml^2 \omega_0^2 = - mg\frac{l}{2} \quad \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{l}}$

Vậy phải tạo cho thanh một vận tốc góc nhỏ nhất $\omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{l}}$ để thanh có thể đạt đến vị trí nằm ngang.

**Bài 12.** Theo định lí động năng: $A_{ms} = \frac{I.\omega_0^2}{2}$ (1)




+ Để tính công của lực ma sát, ta chia đĩa thành những hình vành khăn có bán kính r bề dày dr như hình vẽ, khi đó lực ma sát tác dụng lên mẩu rất nhỏ trên hình vành khăn xác định bởi góc $d\varphi$ là:

$$dF_{ms} = \mu.d\varphi.r.dr.h.\rho.g$$

Mô men của lực ma sát tác dụng lên mẫu này là: $dM = r.dF_{ms} = \mu.\rho.gh.r^2.dr.d\varphi.$

+ Mô men của lực ma sát tác dụng lên cả đĩa là:

$$M = \int_0^{2\pi}\int_0^{R} \mu.\rho.gh.r^2.dr.d\varphi = \mu\rho gh.2\pi R^3/3 = 2\mu.R.mg/3. \qquad (2)$$

Cho tới lúc dừng, đĩa đã quay được một góc $\alpha$ thì công của lực ma sát tác dụng lên cả đĩa là:

$$A_{ms} = \int_0^{\alpha} M.d\alpha = \int_0^{\alpha} 2\mu Rmg.d\alpha/3 = 2\mu Rmg.\alpha/3 \qquad (3).$$

Thay (3) vào (1) ta được: $\dfrac{mR^2.\omega_0^2}{4} = \dfrac{2\mu Rmg.\alpha}{3} \Rightarrow \alpha = \dfrac{3R\omega_0^2}{8\mu g}$

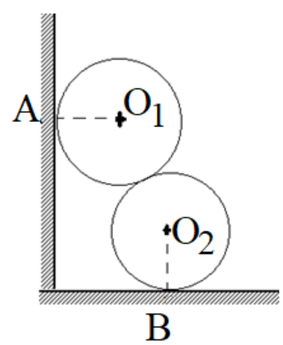
Suy ra số vòng mà đĩa quay được là: $N = \dfrac{\alpha}{2\pi} = \dfrac{3R\omega_0^2}{16\pi.\mu.g}$

**Bài 13.** Hệ lực tác dụng lên từng quả cầu có tính chất xuyên tâm, do đó các quả cầu chỉ chuyển động tịnh tiến.

Cho đến khi hai quả cầu chưa rời nhau: $O_1O_2 = 2R = const$

$\Rightarrow v_1.\cos\alpha = v_2.\sin\alpha \Rightarrow v_1 = v_2 tg\alpha$

Tại thời điểm hai quả cầu rời nhau, $N_R = 0$, quả cầu hai có vận tốc cực đại: $\left(\dfrac{dv}{dt} = a = 0\right)$



Hình 2.31P

Áp lực không sinh công, cơ năng bảo toàn. Định luật bảo toàn cơ năng:

$$mg2R(1-\cos\alpha) = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}m(v_2.tg\alpha)^2$$

$$v_2^2 = 4gR(1-\cos\alpha)\cos^2\alpha$$

Đặt $y = 2.\cos^2\alpha(1-\cos\alpha)$

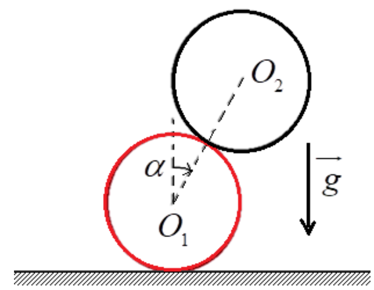
Xét: $y = \cos\alpha.\cos\alpha(2-2\cos\alpha) \le \dfrac{1}{27}(\cos\alpha+\cos\alpha+2-2\cos\alpha)^3 v_2^2 \le \dfrac{16gR}{27}$

$$\Rightarrow (v_2)_{max} = \sqrt{\frac{16gR}{27}}$$

* Có thể dùng đạo hàm: $(v_2^2)'=0 \Rightarrow \cos\alpha=\frac{2}{3} \Rightarrow v_2=v_{2\max}=\sqrt{\frac{16gR}{27}}$

**Bài 14.** Giả sử ban đầu, quả cầu 2 lăn không trượt trên quả cầu 1 đến vị trí góc $\alpha$ giữa đường nối tâm của chúng và phương thẳng đứng. Gọi $\beta$ là góc quay tương ứng của quả cầu 1 quanh tâm của nó.

Điều kiện lăn không trượt $(\beta-\alpha)R=\alpha R \to \beta=2\alpha$ (1).



Hình 2.32P

Do tâm của quả cầu 2 chuyển động tròn trên quỹ đạo bán kính $2R$ quanh tâm quả cầu 1 nên tốc độ dài của khối tâm quả cầu 2 là $v=2R.\alpha'$ (2).

Trong thời gian lăn không trượt, lực ma sát ở mặt lăn là ma sát nghỉ nên cơ năng của quả cầu 2 bảo toàn:

$$mg.2R(1-\cos\alpha)=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}I(\beta')^2=\frac{1}{2}m(2R.\alpha')^2+\frac{1}{2}.\frac{2}{5}mR^2(2\alpha')^2$$

Vì $v$ tăng nên $\alpha'>0$, ta chọn nghiệm dương của phương trình trên đây $\alpha'=\sqrt{\frac{5g}{7R}(1-\cos\alpha)}$ (3).

Gia tốc tiếp tuyến và pháp tuyến của khối tâm quả cầu 2 lần lượt là:

$$a_\tau=v''=2R\alpha''=2R\sqrt{\frac{5g}{7R}}\frac{\sin\alpha}{2\sqrt{1-\cos\alpha}}\alpha'=\frac{5g}{7}\sin\alpha \quad (4a)$$

$$a_n=\frac{v^2}{2R}=\frac{(2R.\alpha')^2}{2R}=\frac{10g}{7}(1-\cos\alpha) \quad (4b)$$

Sở dĩ có $a_n=\frac{v^2}{2R}$ là do 2R là bán kính chính khúc của quỹ đạo $O_2$ tại một thời điểm bất kì.

Áp dụng định luật II Newton cho khối tâm của quả cầu 2: $m\vec{g}+\vec{N}+\vec{F}_{ms}=m\vec{a}$ (5).

Chiếu phương trình này lên phương $\vec{a}_n$: $mg\cos\alpha-N=ma_n$, ta tính được

$$N=\frac{mg}{7}(17\cos\alpha-10) \quad (5a);$$

Chiếu phương trình (5) lên phương $\vec{a}_\tau$: $mg\sin\alpha-F_{ms}=ma_\tau$, ta tính được

$$F_{ms}=\frac{2mg}{7}\sin\alpha \quad (5b).$$

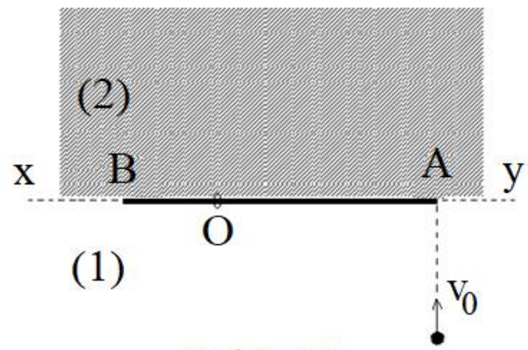
Tại thời điểm quả cầu 2 bắt đầu trượt thì $F_{ms}=kN \to 17k\cos\alpha-2\sin\alpha=10k$

Nếu lấy k=1 thì $\rightarrow \alpha = 47,5^0$.

**Bài 14.** Mômen quán tính của thanh đối với trục quay O

I = $\frac{1}{12}(3m)(3l)^2 + (3m)(\frac{l}{2})^2 = 3ml^2$

a) Theo định luật bảo toàn mômen động lượng:



Hình 2.33P

$$I\omega + (mv_1.2l) = mv_0.2l \Rightarrow v_0 - v_1 = \frac{3}{2}\omega l \qquad (1)$$

Theo định luật bảo toàn năng lượng:

$$\frac{1}{2}I.\omega^2 + \frac{1}{2}mv_1^{\ 2} = \frac{1}{2}mv_0^{\ 2} \Rightarrow 3l^2\omega^2 = v_0^{\ 2} - v_1^{\ 2} \qquad (2)$$

Giải hệ phương trình (1) và (2) $\Rightarrow \begin{cases} \omega = \frac{4}{7}\frac{v_0}{l} = \frac{400}{7} rad/s \\ v_1 = \frac{1}{7}v_0 = \frac{10}{7} m/s \end{cases}$

b) Vận tốc khối tâm ngay sau khi vừa va chạm:

$$v_G = \omega.\frac{l}{2} = \frac{2}{7}.v_0$$

$$F_{dh} = F_{ht} = (3m)\frac{v_G^{\ 2}}{(\frac{l}{2})} = \frac{48}{49l}mv_0^{\ 2} = \frac{480}{49} \approx 9,8N$$

c) Khi thanh AB quay được nửa vòng, công lực ma sát tác dụng lên thanh là

$A_{ms1}$=$-k.2mg.\pi l$=-0,1256J

Khi thanh AB quay được 1 vòng, tổng công lực ma sát tác dụng lên thanh là:

$$A_{ms} = -\left[k.2mg.\pi l + k.mg.\pi\frac{l}{2}\right] = -\frac{5}{2}kmg\pi l = -0,157\,J$$

Động năng của thanh khi vừa va chạm xong:

$$W_1 = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{48}{98}mv_0^2 = \frac{480}{98}J$$

$31A_{ms} < W_1 < 31A_{ms} + A_{ms1}$, nên góc quay của thanh là

$$\varphi = 31x2\pi + \frac{W_1 - 31|A_{ms}|}{|A_{ms1}|}x2\pi \simeq 62,5\pi$$

2. Theo định lý động năng:

$$-\frac{1}{2}I\omega^2 = -\frac{5}{2}kmg\pi d \Rightarrow v_0 = \frac{7}{4}\sqrt{\frac{5kg\pi d}{3}} = 1{,}79m/s$$

- Quãng đường vật nặng trượt được trong phần mặt phẳng (2) cho đến khi dừng lại:

$$\frac{m(\frac{v_0}{7})^2}{2} = kmgS \Rightarrow S = \frac{v_0^{\ 2}}{49.2.kg} = \frac{5}{96}\pi d = 0{,}016m$$

**Bài 16**. Áp dụng định lý động năng cho hệ đĩa 1 và tay quay OA:

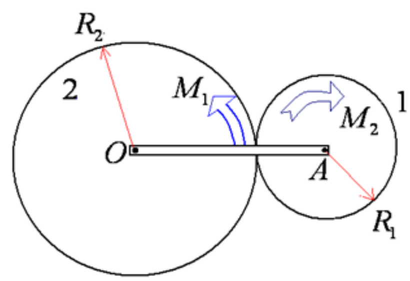
$$W_đ - W_{đO} = \sum A \qquad (1)$$

với động năng ban đầu của hệ bằng không $W_{đO} = 0$

Mà động ngăng ban đầu của hệ bằng động năng của đĩa 1 và tay quay OA

$$W_đ = W_{đOA} + W_{đ1}$$

$W_{đOA}, W_{đ1}$ là động năng của tay quay OA và của đĩa 1



Hình 2.34P

Trong đó tay quay OA: $W_{đOA} = \frac{1}{2}I_0\omega^2$ với

$$I_0 = \frac{ml^2}{3} = \frac{1}{3}m(R_1+R_2)^2$$

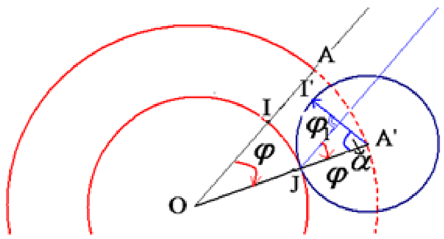
$$\Rightarrow W_{đOA} = \frac{m(R_1+R_2)^2.\omega^2}{6}$$

Động năng đĩa 1: $W_{đ1} = \frac{1}{2}mv_A^{\ 2} + \frac{1}{2}I_A\omega_1^{\ 2}$ với $I_A = \frac{1}{2}m_1R_1^{\ 2} \Rightarrow W_{đ1} = \frac{1}{2}mv_A^{\ 2} + \frac{m_lR_1^{\ 2}\omega_1^{\ 2}}{4}$

Vậy động năng của hệ là:

$$W_đ = \frac{m(R_1+R_2)^2}{3}.\frac{\omega^2}{2} + \frac{m_1R_1^{\ 2}}{2}.\frac{\omega_1^{\ 2}}{2} + \frac{m_1v_A^{\ 2}}{2}$$

**Tính $\omega_1$ và $v_A$ theo $\omega$:**




$$\begin{cases} JI' = JI \Rightarrow \alpha R_1 = \varphi R_2 \\ \alpha + \varphi = \varphi_1 \end{cases} \Rightarrow \varphi_1 R_1 = \varphi(R_1 + R_2)$$

$$\Rightarrow \omega(R_1 + R_2) = \omega R_1$$

Hình 2.34S

$\omega_1$ là tốc độ góc của bánh răng 1 quanh tâm A; $v_A$ vận tốc dài của tâm đĩa 1 đối với tâm O ; $\omega$ tốc độ góc tâm đĩa 1 quanh O

$$\omega_1 = \frac{R_1 + R_2}{R_1}\omega; \qquad v_A = (R_1 + R_2)\omega$$

Thay $\omega_1$ và $v_{A\ \text{vào}}$ biểu thức $W_đ$, ta được:

$$W_đ = \frac{1}{6}(2m + 3m_1)(R_1 + R_2)^2 \frac{\omega^2}{2} \qquad (2)$$

* Tính $\sum A theo\, \omega$ :

$$\sum A = M_1\varphi - M_2\varphi_1 = \left(M_1 - M_2\frac{R_1 + R_2}{R_1}\right)\varphi$$

Đặt $\left(M_1 - M_2\frac{R_1 + R_2}{R_1}\right) = M$ ta được $\sum A = M\varphi_1$ (3)

Thay (2), (3) vào (1) ta có:

$$\frac{1}{6}(2m + 3m_1)(R_1 + R_2)^2 \frac{\omega^2}{2} = M\varphi$$

Suy ra: $\omega = \dfrac{2}{R_1 + R_2}\sqrt{\dfrac{3M}{2m + 3m_1}\varphi}$

Đạo hàm hai vế theo thời giant a được kết quả:tay quay nhanh dần đều với gia tốc góc:

$$\varepsilon = \frac{6M}{(2m + 3m_1)(R_1 + R_2)^2}$$

**Bài 17.** LƯU Ý: Véc tơ vận tốc $\vec{v}$ không nằm dọc theo mặt máng, mà chỉ có véc tơ vận tốc tương đối cảu vật so với máng $\vec{u}$ thì nằm dọc theo mặt máng.

Gọi I là mômen quán tính của máng, dễ thấy: I=mR$^2$ (1)

Theo định luật bảo toàn mômen động lượng: gọi u là vận tốc của vật đối với máng, ω là tốc độ góc quay ta được:

$$I\omega + m\left(u\cos\varphi + R\omega\right)R = 0 \qquad (2)$$

( Ở đây $\omega$ có giá trị âm)

Theo định luật bảo toàn năng lượng:

$$I\omega^2 + m\left[\left(u\cos\varphi + R\omega\right)^2 + u^2\sin^2\varphi\right] = 2mgh \qquad (3)$$

Thay (1) vào (2) thu được $u\cos\varphi + R\omega = -R\omega$ (4)

ta được: $\omega = -\dfrac{u\cos\varphi}{2R} = -\dfrac{u\sqrt{2}}{4R}$ (5)

Thay (1) và (4) vào (3), ta được:

$$mR^2\omega^2 + m\left(R^2\omega^2 + u^2\sin^2\varphi\right) = 2mgh$$

$$\Rightarrow 2R^2\omega^2 + u^2\sin^2\varphi = 2gh$$

Thay biểu thức (5) vào ta có: $2R^2\dfrac{u^2\cos^2\varphi}{4R^2} + u^2\sin^2 = 2gh$

Vậy: $u = \sqrt{\dfrac{8gh}{3}}$ thay vào (5) ta được: $\omega = -\dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{gh}{3}}$

cuối cùng ta có:

$v^2 = \left(u\cos\varphi + R\omega\right)^2 + u^2\sin^2\varphi$ thay vào (4) ta được:

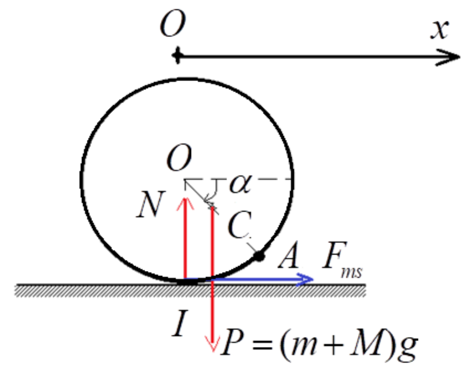
$$v^2 = \left(R\omega\right)^2 + u^2\sin^2\varphi$$

thay u và ω vào ta được: $v = \sqrt{\dfrac{5gh}{3}}$

**Bài 18.**a) Tìm biểu thức lực ma sát.

- Khối tâm C của hệ cách tâm vành O một đoạn r:

$$r = OC = \frac{m}{M+m}R = \frac{R}{4} \qquad (a1)$$



Hình 2.36S1

-Gọi a và $\gamma$ lần lượt là gia tốc tịnh tiến của tâm O và gia tốc góc của vành đối với O($\gamma$ cũng chính là gia tốc của vành đối với tâm quay tức thời I) $a_{Cx}$ là gia tốc khối tâm C trên trục Ox:

+ Vì lăn không trượt nên ta có $\gamma = \dfrac{a}{R}$ (a2)

+ Trên Ox ta có tốc khối tâm C $a_{Cx} = \dfrac{F_{ms}}{M+m}$ ( chỉ viết được cho khối tâm C thôi)

+ Chọn hệ quy chiếu không quán tính gắn với tâm O có gia tốc a thì vật phải chịu lực quán tính:

$$\gamma = \frac{(M+m)grco\alpha + F_{qt} r\sin\alpha - F_{ms}R}{MR^2+mR^2} = \frac{(M+m)grco\alpha + (M+m)ar\sin\alpha - F_{ms}R}{(M+m)R^2}$$

$$\Leftrightarrow \gamma = \frac{(M+m)grco\alpha + (M+m)\gamma Rr\sin\alpha - F_{ms}R}{(M+m)R^2}$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{g\cos\alpha - \dfrac{F_{ms}}{m}}{4R} \qquad (a3)$$

-Nếu ta chọn C làm cực(C là HQC có gia tốc nhưng lực quán tính đã đi qua C nên không gây ra gia tốc góc) do vậy

$$\gamma = \gamma_C = \frac{Nr\cos\alpha - F_{ms}(R - r\sin\alpha)}{I_C} = \frac{Nr\cos\alpha - F_{ms}(R - r\sin\alpha)}{MR^2 + M(\frac{1}{4}R)^2 + m(\frac{3}{4}R)^2} = \frac{N\cos\alpha - F_{ms}(4-\sin\alpha)}{15mR} \quad (a4)$$

C là HQC có gia tốc nhưng lực quán tính đã đi qua C nên không gây ra gia tốc góc: Giai thích như sau

$$\overrightarrow{M_{qt/C}} = \sum(\vec{r}_i x\Delta m_i \overrightarrow{a_C}) = \sum(\vec{r}_i \Delta m_i) x\overrightarrow{a_C} = (\overrightarrow{r_C}\ x\overrightarrow{a_C}) = 0 \quad (\ \overrightarrow{r_C} = 0)$$

+Áp dụng định lý hàm số cos cho tam giác IOC ta tìm được được đoạn IC

$$IC^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\sin\alpha = \frac{17 - 8\sin\alpha}{16}R^2$$

-Nếu chọn trục quay tức thời đi qua I làm cực thì đây là HQC quán tính:

$$\gamma = \gamma_I = \frac{\Pr\cos\alpha}{I_I} = \frac{\mathrm{P}\dfrac{R}{4}\cos\alpha}{I_C + (M+m)CI^2} = \frac{(M+m)g\dfrac{R}{4}\cos\alpha}{\dfrac{15}{4}mR^2 + 4m.CI^2} = \frac{gR\cos\alpha}{\dfrac{15}{4}R^2 + 4CI^2}$$

$$\gamma == \frac{gR\cos\alpha}{\frac{15}{4}R^2 + \frac{17-8\sin\alpha}{4}R^2} = \frac{g\cos\alpha}{2R(4-\sin\alpha)} \qquad \text{(a5)}$$

Từ (a3),(a4), (a5) ta suy ra được

$$F_{ms} = mg\cos\alpha\left[\frac{2-\sin\alpha}{4-\sin\alpha}\right] \qquad \text{(a6)}$$

Và $N = mg\left[\frac{31-12\sin\alpha+2\sin^2\alpha}{2(4-\sin\alpha)}\right]$ (a7)

Mà để vật không trượt thì

$$F_{ms} \le kN \rightarrow k \ge \frac{F_{ms}}{N} \qquad \text{(a8)}$$

Đặt $f(\alpha) = \frac{F_{ms}}{N} = \frac{mg\cos\alpha\left[\frac{2-\sin\alpha}{4-\sin\alpha}\right]}{mg\left[\frac{31-12\sin\alpha+2\sin^2\alpha}{2(4-\sin\alpha)}\right]} = \frac{2\cos\alpha[2-\sin\alpha]}{31-12\sin\alpha+2\sin^2\alpha}$

Và khi đó $k \ge f(\alpha) \rightarrow k \ge \frac{2\cos\alpha[2-\sin\alpha]}{31-12\sin\alpha+2\sin^2\alpha}$ (a9)

Khi $\alpha = 0 \rightarrow k \ge \frac{4}{31}$

b) Mở rộng:Tìm vận tốc v của tâm O và vận tốc $v_c$ của khối tâm hệ.

Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng ta có:

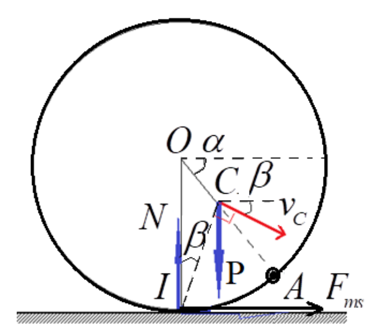
$$\frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}(MR^2)\omega^2 + \frac{1}{2}mv_A^2 = mg.\Delta h = mgr\sin\alpha \qquad \text{(b1)}$$

Với $v_A$ là vận tốc m nhỏ và có thể tính theo tốc độ góc $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$ và bán kính IA quay quanh tâm tức thời I:

Ta có $IA = 2R\sin\frac{(\frac{\pi}{2}-\alpha)}{2} = 2R\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2})$

và $v_A = \omega.IA = \frac{v}{R}2R\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}) = 2v\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2})$ (b2)

Thay (b2) vào (b1) ta được:




Hình 2.36S2

$$v=\sqrt{\frac{2\frac{m}{M+m}.mgR\sin\alpha}{2M+4m\sin^2(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2})}}=\ldots=\sqrt{\frac{mgR\sin\alpha}{12+8\sin^2(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2})}} \qquad \text{(b3)}$$

-Áp dụng định lý hàm số cos cho tam giác IOC ta tìm được được đoạn IC

$$IC=\sqrt{R^2+r^2-2Rr\sin\alpha}$$

Do đó ta tìm được vận tốc khối tâm C đối với đất là:

$$v_C=\omega.IA=\frac{v}{R}.\sqrt{R^2+r^2-2Rr\sin\alpha}=....=\frac{v}{4}\sqrt{17-8\sin\alpha} \qquad \text{(b4)}$$

**Bài 19.** a.Khi quả cầu lăn không trượt, cơ năng bảo toàn:

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}(\frac{2}{5}mr^2)\varphi'^2+mg(R+r)\cos\theta=mg(R+r) \qquad (1)$$

Với lưu ý vận tốc tâm quả cầu nhỏ: $v=r\varphi'=(R+r)\theta'$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\theta'=\sqrt{\frac{10(1-\cos\theta)g}{7(R+r)}}$ (3)

Thay (3) vào (2) ta được, vận tốc tâm quả cầu nhỏ:

$$v=(R+r)\theta'=\sqrt{\frac{10(R+r)(1-\cos\theta)g}{7}} \qquad (4)$$

b. Khi quả cầu còn lăn trên mặt cầu lớn, áp dụng định luật II, trên phương bán kính:

$$mgcos\theta-N=\frac{mv^2}{R+r}\rightarrow N=mgcos\theta-\frac{mv^2}{R+r} \qquad (5)$$

Khi bắt đầu rời mặt cầu lớn, thì N=0, thay vào (5) ta được $\cos\theta_1=\frac{10}{17}$ (6)

Điều này chỉ áp dụng cho trường hợp lực ma sát nghỉ đủ lớn.

c. Gọi f là lực ma sát nghỉ. Khi lăn không trượt, trên phương tiếp tuyến của quỹ đạo ta có

$$mg\sin\theta-f=ma_t=m\frac{dv}{dt} \quad (7)$$

Và phương trình gia tốc góc quanh tâm quả cầu nhỏ:

$$fr=I\gamma=\frac{2}{5}mr^2\frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad (8)$$

Và theo (2) $v=r\varphi'=(R+r)\theta'$

ta suy ra được biểu thức lực ma sát nghỉ: $f=\frac{2}{7}mg\sin\theta$ (9)

Khi quả cầu nhỏ bắt đầu trượt thì $f = \mu.N$ (10)

Thay (5) vào 10 ta được $f = \mu\left(mgcos\theta - \frac{mv^2}{R+r}\right)$ (11)

Từ (9) và (11): $\frac{2}{7}mg\sin\theta = \mu\left(mgcos\theta - \frac{mv^2}{R+r}\right)$

$2\sin\theta = 17\mu cos\theta - 10\mu$ (12)

Nghiệm (12) cho ta $\cos\theta_2 = \frac{179\mu^2 \pm \sqrt{756\mu^2+4}}{289\mu^2+4}$ (12)

Với điều kiện $\theta_2 < \theta_1$ , nên trong (12) ta phải chọn nghiệm (+):

$$\cos\theta_2 = \frac{179\mu^2 + \sqrt{756\mu^2+4}}{289\mu^2+4}$$

Suy ra $\theta_2 = \arccos\left(\frac{179\mu^2 + \sqrt{756\mu^2+4}}{289\mu^2+4}\right)$ (13)

**Bài 20.** Ta gọi $\omega$ là vận tốc quay quanh tâm O của quả cầu trước va chạm và v là vậ tốc khối tâm O trước va chạm.

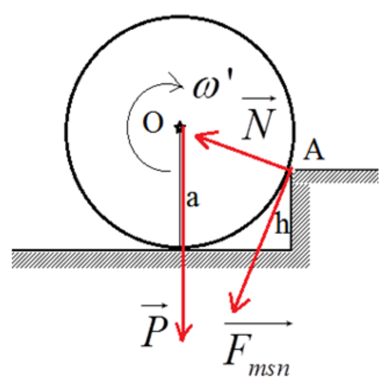
Vì lăn không trượt $\omega = \frac{v}{a}$, nên momen động lượng của quả cầu đối với trục quay tức thời A là:

$$L_A = mv(a-h) + \frac{2}{5}ma^2\omega = mv(a-h) + \frac{2}{5}ma^2.\frac{v}{a} = \frac{7}{5}mva - mvh \quad (1)$$

Gọi $\omega'$ là vận tốc góc của quả cầu quanh trục quay tức thời chính là điểm va chạm A:

$$L_A' = (\frac{2}{5}ma^2 + mOA^2)\omega' = \frac{7}{5}ma^2\omega' \quad (2)$$

Hoặc $L_A' = (\frac{2}{5}ma^2\omega' + mv'a) = ... = \frac{7}{5}ma^2\omega'$



Hình 2.38S1

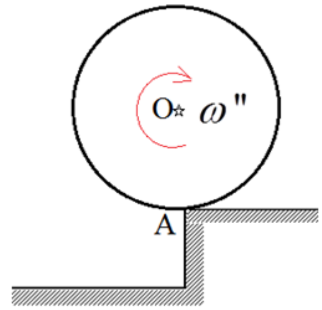
Đối với cực A, khi va chạm có hai thành phần lực $\vec{N}, \vec{F}_{msn}$ có giá đi qua A; thành phần xung lực do trọng lực tác dụng không đáng kể( $m\vec{g}.\Delta t <<$ do bỏ qua thời gian tương tác), nên co momen động lượng đối với cực A bảo toàn

Do đó $\frac{7}{5}ma^2\omega' = \frac{7}{5}mva - mvh \rightarrow \omega' = (1 - \frac{5h}{7a})\frac{v}{a}$ (3)

Khi lăn từ mặt dưới lên mặt trên, thì công trọng lực (khi đó $\vec{N}, \vec{F}_{msn}$ không sinh công vì độ dời điểm đặt lực bằng không) bằng độ biến thiên động năng:

$\frac{1}{2}I_A\omega''^2 - \frac{1}{2}I_A\omega'^2 = -mgh \rightarrow \frac{1}{2}I_A\omega''^2 = \frac{1}{2}I_A\omega'^2 - mgh$

(4)



Hình 2.38S2

Xét trong trường hợp tối thiểu $\omega'' \geq 0 \rightarrow \frac{1}{2}I_A\omega'^2 - mgh \geq 0$

(5)

Thay (3) vào (5) ta được $v \geq \frac{a\sqrt{70gh}}{7a - 5h}$

**Bài 21.** a.(i) Trường hợp lăn không trượt thì ta có liên kết động học: $R\theta = r\varphi$ (1)

Đạo hàm (1) ta được vận tốc góc quả cầu $\omega = \varphi' = \frac{R}{r}\theta' = \frac{v}{r}$ (2)

Với v là vận tốc tịnh tiến tâm C quả cầu

Tại đỉnh vòng tròn mặt trụ rỗng quả cầu không rơi, áp dụng định luật II cho khối tâm C quả cầu:

$N_t + mg = \frac{mv^2}{R} \rightarrow N_t = \frac{mv^2}{R} - mg \geq 0$ (3)

$v \geq \sqrt{gR}$ (4)

Ta đặt $v_r = \sqrt{gR}$ là vận tốc giới hạn tại đỉnh quả cầu để không rơi.

Tại đỉnh có động năng $T_t = \frac{1}{2}mv_t^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}mr^2\omega_t^2 = \frac{7}{10}mv_t^2$

Áp dụng định laaujt bảo toàn cơ năng khi quả cầu đi từ đáy đến đỉnh:

$T_b = T_t + 2mgR$

$\rightarrow \frac{7}{10}mv_1^2 = \frac{7}{10}mv_t^2 + 2mgR \rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{27}{7}gR}$ (5)

(ii) **Trường hợp trượt không lăn**:

Tương tự tại đỉnh ta vẫn có $N_t + mg = \frac{mv^2}{R} \rightarrow N_t = \frac{mv^2}{R} - mg \geq 0 \rightarrow v \geq \sqrt{gR}$

Nên ta vẫn có $v_r = \sqrt{gR}$, do đó động năng tại đỉnh $T_t = \frac{1}{2}mv_t^2 = \frac{1}{2}mgR$

Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng khi quả cầu đi từ đáy đến đỉnh vòng tròn:

$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_t^2 + 2mgR \rightarrow v_1 = \sqrt{5gR}$ (6)

b.Giả sử quá trình bắt đầu rơi tại góc $\theta_r$. Ở thời điểm đó vận tốc tâm quả cầu là $v_r$. áp dụng định luật bảo toàn cơ năng: $\frac{1}{2}m(0,9v_1)^2 = \frac{1}{2}mv_r^2 + mgR(1-\cos\theta_r)$ (7)

và áp dụng định luật II tại vị trí đó $N - mg\cos\theta_r = \frac{mv_r^2}{R}$ (8)

Với N=0

Từ (7) và (8) ta rút ra được $3Rg\cos\theta_r = 2Rg - 0,81v_1^2 = -2,05Rg$

Suy ra $\cos\theta_r = -0,683 \rightarrow \theta_r = 133,1^0$

**Bài 22.** Gọi X là xung lực do A tác dụng lên B. Gọi $v_A, \omega_A; v_B, \omega_B$ laanf lượt vận tốc và vận tốc góc của vật A và B sau va chạm.

+Vật A: định luật II: $-X = m_A(v_A - 10)$ (1)

Biến thiên momen động lượng $\frac{l}{2}X = \frac{1}{12}m_A l^2\omega_A \rightarrow \frac{1}{2}X = \frac{l}{12}m_A\omega_A$ (2)

+Vật B: định luật II: $X = m_B v_B$ (3)

Biến thiên momen động lượng $\frac{l}{2}X = \frac{1}{12}m_B l^2\omega_B \rightarrow \frac{1}{2}X = \frac{l}{12}m_B\omega_B$ (4)

Vì va chạm hoàn toàn đàn hồi, do đó vận tốc tương đối của điểm va chạm trên B đối với điểm va chạm trên A trước và sau va chạm phải bằng nhau. Gọi K' là điểm va chạm tên B; K là điểm va chạm trên A: $\left(v_{K'/K}\right)_{sau} = \left(v_{K'/K}\right)_{truot}$

Hay $(v_B + \frac{l}{2}\omega_B) - (v_A - \frac{l}{2}\omega_A) = 10m/s$ (5)

Lưu ý, nếu không dùng biểu thức (5) ta phải dùng định luật bảo toàn năng lượng, việc giải sẽ dài hơn.

Giải hệ 5 phương trình trên ta được: $X = \frac{5m_A m_B}{m_A + m_B} = \frac{10}{3}(N.s)$

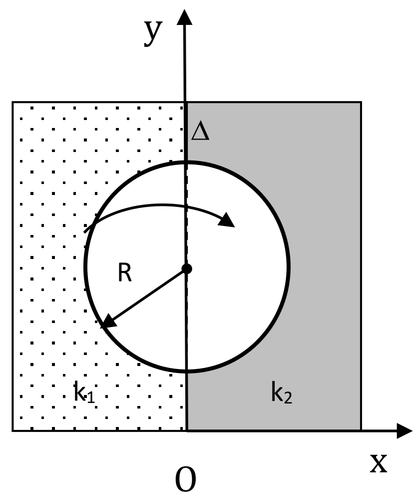
$$v_A = 10 - \frac{X}{m_A} = \frac{20}{3} m/s \; ; \; v_B = \frac{X}{m_B} = \frac{5}{3} m/s$$

$$\omega_A = \frac{6X}{m_A} = 20 rad/s \; ; \; \omega_B = \frac{6X}{m_B} = 10 rad/s$$

Năng lượng của hệ trước và sau va chạm:

Trước $E_i = \frac{1}{2} m_A v_{0A}^2 = 50J$

Sau: $E_f = (\frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} I_A \omega_A^2) + (\frac{1}{2} m_B v_B^2 + \frac{1}{2} I_B \omega_B^2) = 50J$




**Bài 23.** Tại thời điểm ban đầu, vật chỉ có chuyển động quay quanh khối tâm nên lực cản ma sát tại một vị trí trên đĩa sẽ hướng theo phương tiếp tuyến với véc tơ bán kính:

- Mômen lực cản tác dụng lên nửa vành tròn bán kính r, độ dày dr.

$$dM = rdF = -k.dS.\omega_0 r^2 = -\pi k \omega_0 r^3 dr$$

Tích phân trong toàn mặt đĩa:

$$M = -\pi(k_1 + k_2)\omega_0 \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} MR^2 \gamma \Rightarrow \gamma = -\frac{\pi(k_1 + k_2)\omega_0 R^2}{2M}$$

- Do tính chất đối xứng nên ta có thể thấy thành phần lực cản vuông góc với Δtự triệt tiêu nhau, nên để tìm hợp lực ta chỉ cần đi tìm thành phần song song với trục Δ.

+ Xét cho vi phân diện tích dS có véc tơ bán kính r hợp với Δ một góc α, độ dày dr, góc nhìn từ tâm dα.

$$dF_\Delta = k.dS.v\sin\alpha = kr.d\alpha.dr.\omega_0 r\sin\alpha$$

+ Xét trên nửa đĩa:

$$F_i = \int dF_\Delta = k\omega_0\int_0^\pi \sin\alpha d\alpha \int_0^R r^2 dr = \frac{2k\omega_0 R^3}{3}$$

+ Xét trên toàn bộ mặt đĩa

$$F = \frac{2}{3}\left(k_2 - k_1\right)\omega_0 R^3 = Ma_G \Rightarrow a_G = \frac{2\left(k_2 - k_1\right)\omega_0 R^3}{3M}$$

Vectơ $a_G$ngược chiều với trục Oy.

1. Tại thời điểm bất kì, giả sử đĩa có vận tốc khối tâm v và vận tốc góc ω. Ta có thể tách vận tốc của một điểm trên đĩa thành hai phần v và ωr. Có thể nhận thấy lực cản có hợp lực luôn song song với Δ nên tâm đĩa luôn nằm trên Δ.

- Với thành phần ωr, tương tự như trên ta có:

+ Mô men cản: $M_1 = -\frac{1}{4}\pi\left(k_1 + k_2\right)\omega R^4$

+ Lực kéo: $F_1 = \frac{2}{3}\left(k_1 - k_2\right)\omega R^3$

- Với thành phần v, ta có:

+ Lực cản: $F_2 = \frac{1}{2}\left(k_1 + k_2\right)\pi R^2 v$

+ Mô men kéo

$$M_2 = \frac{1}{2}\left(k_1 - k_2\right)\pi R^2 v\frac{4R}{3\pi} = \frac{2}{3}\left(k_1 - k_2\right)R^3 v$$

Vậy ta có:

$$\begin{cases} \frac{2}{3}\left(k_1 - k_2\right)R^3 v - \frac{1}{4}\pi\left(k_1 + k_2\right)\omega R^4 = \frac{1}{2}MR^2\frac{d\omega}{dt} \\ \frac{2}{3}\left(k_1 - k_2\right)\omega R^3 - \frac{1}{2}\left(k_1 + k_2\right)\pi R^2 v = M\frac{dv}{dt} \end{cases}$$

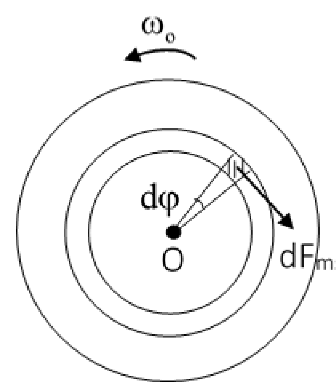
Nhân hai cả hai vế với dt và tích phân hai vế ta được:

$$\begin{cases} \frac{2}{3}(k_2 - k_1)R^3L - \frac{1}{4}\pi(k_1 + k_2)R^4\Delta\varphi = \frac{1}{2}MR^2(-\omega_0) \\ \frac{2}{3}(k_2 - k_1)R^3\Delta\varphi - \frac{1}{2}(k_1 + k_2)\pi R^2L = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2}{3}(k_1 - k_2)R^3L - \frac{1}{4}\pi(k_1 + k_2)R^4\Delta\varphi = \frac{1}{2}MR^2(-\omega_0) \\ \Delta\varphi = \frac{3\pi}{4}\frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2}\frac{2}{3}\frac{L}{R} \end{cases}$$

$$L = \frac{M\omega_0}{\frac{3\pi}{8}\frac{(k_1 + k_2)^2}{k_1 - k_2} - \frac{4}{3}(k_1 - k_2)}$$

**Bài 24.** Xét một phần tử nhỏ của đĩa có diện tích dS, khối lượng dm, được giới hạn bởi hai hình quạt có bán kính r và r + dr, góc ở tâm là $d\varphi$.




$$dS = \frac{1}{2}(r + dr)^2.d\varphi - \frac{1}{2}r^2.d\varphi \approx r.dr.d\varphi$$

$$dm = \frac{m}{S}dS = \frac{m}{\pi R^2}.r.dr.d\varphi$$

Gọi $dF_{ms}$ là lực ma sát tác dụng lên phần đĩa có diện tích dS .

Ta có: $dF_{ms} = \mu g dm = \frac{\mu mg}{\pi R^2}.r.dr.d\varphi$

Momen của lực ma sát $dF_{ms}$ đối với O là :

$$dM_{ms} = r.dF_{ms} = \frac{\mu mg}{\pi R^2}.r^2.dr.d\varphi.$$

Momen của lực ma sát do mặt phẳng tác dụng lên đĩa

$$M_{ms} = \int dM_{ms} = \frac{\mu mg}{\pi R^2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^2.dr = \frac{2\mu mgR}{3}$$

Phương trình chuyển động của đĩa: $-M_{ms} = I\gamma$

$$\Rightarrow -\frac{2\mu mgR}{3} = \frac{1}{2}mR^2\gamma \Rightarrow \gamma = \frac{-4\mu g}{3R}$$

Thời gian chuyển động của đĩa:

$$t = \frac{0-\omega_o}{\gamma} = \frac{3\omega_o R}{4\mu g}$$

**Bài 25.** Ngay trước va chạm lăng trụ quay với $\omega_1$, mômen động lượng đối với trục quay 0 là :

$L_0 = I\omega_1 = \frac{5}{2}ma^2\omega_1; \vec{v}_0 \perp OB$ do trước va chạm, lăng trụ quay quanh B

Đối với trục quay A: Ngay trước va chạm :

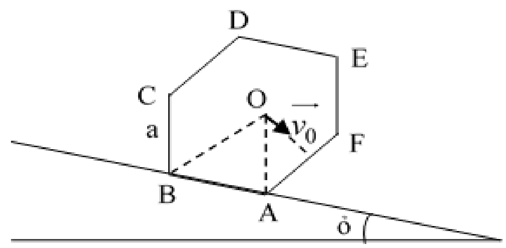
$$L_A = L_0 + a.mv_0 \sin 30^0 = \frac{5}{12}ma^2.\omega_1 + \frac{mav_0}{2}$$

$$L_A = \frac{5}{12}ma^2\omega_1 + \frac{1}{2}ma^2\omega_1 = \frac{11}{12}ma^2\omega_1 \quad (1)$$

Ngay sau va chạm lăng trụ quay quanh A với $\omega_2$, đối với (A):

$$L_A^{'} = I_A.\omega = (\frac{5}{12}ma^2 + ma^2).\omega_2 = \frac{17}{12}ma^2\omega_2 \quad (2)$$

Mômen động lượng bảo toàn vì coi như có phản lực N (va chạm) và $F_{ms}$ qua trục quay, suy ra mômen bằng 0 (mômen của vecto $\vec{p}$ trong thời gian rất nhỏ ta bỏ qua)




$$L_A = L_A^{'} \Rightarrow \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{11}{17}$$

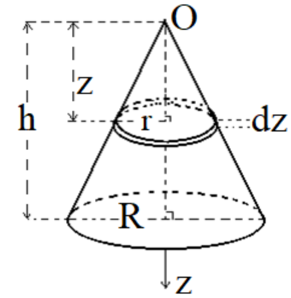
**Bài 26.** 1. Chia hình nón thành các khối lượng dm như hình 2.65S1, ta có:

$$dm = \frac{Mr^2dz}{\frac{1}{3}hR^2} \quad ; \quad r = \frac{Rz}{h} \quad ; \quad dI_z = \frac{1}{2}dm.r^2 = \frac{3mR^2z^4dz}{2h^5}$$

$$I_z = \int_0^h \frac{3mR^2 z^4 dz}{2h^5} = \frac{3}{10} mR^2 = 0{,}3mR^2$$

$$z_G = \frac{\iiint zdm}{m} = \frac{\iiint z\rho\pi r^2 dz}{m} = \frac{\int_0^h \rho\pi(\frac{z}{h}R)^2 zdz}{m} = \frac{\rho\pi\frac{h^4}{4}R^2}{m}$$

$$Hay\ \ z_G = \frac{\rho\pi\frac{h^4}{4}R^2}{\rho\pi R^2\frac{h}{3}} = \frac{3}{4}h$$

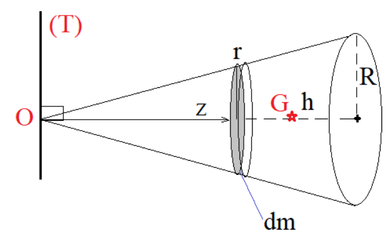



Hình 2.65S1

2. Lưu ý: Xét một cái đĩa trên mặt phẳng Oxy và tâm đĩa tại O, sẽ có moomen quán tính đối với các trục Ox, Oy, Oz lần lượt là $I_x$, $I_y$, $I_z$.

Khi đó $dI_z = r^2dm = x^2dm + y^2dm = dI_y + dI_x$ $\quad (y^2dm = dI_x;\ x^2dm = dI_y)$

$$\Rightarrow I_z = I_y + I_x = 2I_x = 2I_y$$




Mà $I_z = \frac{1}{2}mr^2$ nên suy ra $I_x = I_y = \frac{I_z}{2} = \frac{1}{4}mr^2$

$$dI_T = z^2dm + \frac{1}{4}r^2dm = (z^2 + \frac{1}{4}(\frac{z}{h}R)^2)dm = (z^2 + \frac{1}{4}(\frac{z}{h}R)^2)\rho dV$$

$$dI_T = \left[1 + \frac{1}{4}(\frac{R}{h})^2\right] z^2 (\frac{m}{\frac{1}{3}\pi R^2.h})(\pi r^2 dz)$$

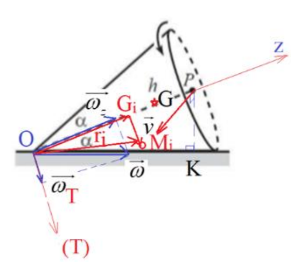
$$dI_T = \left[1 + \frac{1}{4}(\frac{R}{h})^2\right](\frac{3m}{h^3})z^4dz) \to I_T = \left[1 + \frac{1}{4}(\frac{R}{h})^2\right](\frac{3m}{5})h^2 = \frac{3m}{5}\left[h^2 + \frac{R^2}{4}\right]$$

3. Động năng $K = I_z\frac{\omega_z^2}{2} + I_n\frac{\omega_n^2}{2}$

Cụ thể động năng :

$$K = \sum_{Toan\ vat} m_i \frac{(\vec{v_i})^2}{2} = \sum_{Toan\ vat} m_i \frac{(\overrightarrow{v_{i/Gi}} + \overrightarrow{v_{Gi}})^2}{2} = \sum_{Toan\ vat} m_i \frac{(\overrightarrow{v_{i/Gi}})^2 + (\overrightarrow{v_{Gi}})^2 + 2\overrightarrow{v_{i/Gi}}\overrightarrow{v_{Gi}}}{2}$$

$$K = \sum_{Toan\ vat} m_i \frac{m_i(M_iG_i.\omega_z)^2 + m_i(OG_i.\omega_n)^2 + 2m_i\overrightarrow{v_{i/Gi}}\overrightarrow{v_{Gi}}}{2}$$



$$K=\sum_{Toan\ vat}\frac{m_i(M_iG_i)^2}{2}\omega_z^2+\sum_{Toan\ vat}\frac{m_i(OG_i)^2}{2}\omega_n^2+\sum_{Toan\ vat}\left[\left(\sum_{Toan\,dia}m_i\overrightarrow{v_{i/Gi}}\right)\overrightarrow{v_{Gi}}\right]$$

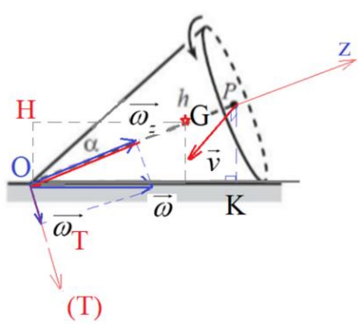
$$K=\left[\sum_{Toan\ vat}m_i(M_iG_i)^2\right]\frac{\omega_z^2}{2}+\left[\sum_{Toan\ vat}m_i(OG_i)^2\right]\frac{\omega_n^2}{2}+\sum_{Toan\ vat}\left[\left(\vec{0}\right)\overrightarrow{v_{Gi}}\right]$$

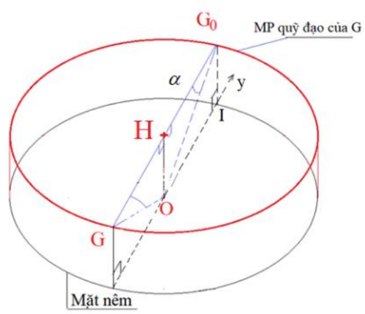
$$K=I_z\frac{\omega_z^2}{2}+I_T\frac{\omega_T^2}{2}$$

Vận tốc góc:

Khi đó mọi điểm trên hình nón dọc OK đều đứng yên, nên OK là trục quay tức thời. Từ đó ta xác định được $\vec{v}=(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{KP})\rightarrow v=\omega h\sin\alpha\rightarrow\omega=\dfrac{v_P}{h\sin\alpha}$

Trong đó $\vec{\omega}=\overrightarrow{\omega_z}+\overrightarrow{\omega_T}=\omega\cos\alpha\vec{e_z}+\omega\sin\alpha.\vec{e_n}=\dfrac{v_P}{htg\alpha}\vec{e_z}+\dfrac{v_P}{h}\vec{e_T}$




Thế năng U giảm một lượng $-\Delta U=mg.2HG_o\sin\beta=mg.2OG_o\cos\alpha.\sin\beta$

$-\Delta U=mg.2\dfrac{3}{4}h\cos\alpha.\sin\beta=\dfrac{3}{2}mgh\cos\alpha.\sin\beta$ ($\beta$ =$30^0$ góc nghiêng của phẳng nghiêng)

Hay $-\Delta U=mg.2\dfrac{3}{4}h\cos\alpha.\sin\beta=\dfrac{3}{4}mgh\cos\alpha$

Áp dụng định luật bảo toàn co năng: $K=-\Delta U\rightarrow I_z\dfrac{\omega_z^2}{2}+I_T\dfrac{\omega_T^2}{2}=\dfrac{3}{4}mgh\cos\alpha$

$$\frac{3mR^2}{10}\frac{1}{2}\left(\frac{v_P}{htg\alpha}\right)^2+\frac{3m}{5}\left[h^2+\frac{R^2}{4}\right]\frac{1}{2}\left(\frac{v_P}{h}\right)^2=\frac{3}{4}mgh\cos\alpha$$

$$\frac{1}{10}v_P^2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{R}{htg\alpha}\right)^2+\left[1+\frac{R^2}{4h^2}\right]\right]=\frac{1}{4}gh\cos\alpha\rightarrow\frac{1}{10}v_P^2\left[\frac{3}{2}+\frac{R^2}{4h^2}\right]=\frac{1}{4}gh\cos\alpha\rightarrow v_P^2=\frac{5gh}{3+\dfrac{R^2}{2h^2}}\cos\alpha$$

$$\rightarrow v_P = \sqrt{\frac{5gh}{3+\frac{R^2}{2h^2}}\frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}}} \rightarrow v_G\frac{3}{4} = \sqrt{\frac{5gh}{3+\frac{R^2}{2h^2}}\frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}}}$$

$$v_G = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{5gh}{3+\frac{R^2}{2h^2}}\frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}}}$$

# II.2. VA CHẠM VẬT RẮN

**Bài 1.** a. Va chạm đàn hồi.

Sau va chạm, vật C có vận tốc v, khối tâm G có vận tốc $v_G$ và thanh có tốc độ góc $\omega$

- Áp dụng định luật bảo toàn động lượng:

$$mv + m\,v_G = mv_0 \Rightarrow v = v_0 - v_G \qquad (1)$$

-Áp dụng định luật bảo toàn động năng trước và sau va chạm

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2}.+\frac{mv_G^2}{2}+\frac{I_G\omega^2}{2} \Rightarrow v_0^2 = v^2.+v_G^2+\frac{l^2\omega^2}{12} \qquad (2)$$

- Ta chọn cực quay K cố định với mặt sàn tại trung điểm GA khi vật nhỏ C chưa va (tức vị trí khối tâm G' của hệ trước va chạm)

+ Trước va chạm hệ có mô men động lượng đối với cực K là $L_K$ :

$$L_K = mv_0 KA = mv_0\frac{l}{4}$$

+ Ngay sau vừa va chạm thì hệ có momen động lượng đối với cực K là $L_K$ ':

$$L_K' = mvKA + \left|(\overrightarrow{L_G} + (\overrightarrow{KG}\wedge m\overrightarrow{v_G})\right| = mv\frac{l}{4} + I_G\omega - KG.mv_G$$

Ta sử dụng công thức kơnic khi chuyển cực cho thanh từ G sang K:

$$\overrightarrow{L_K} = \overrightarrow{L_G} + \left[\overrightarrow{KG}\wedge m\overrightarrow{v_{GK}}\right])$$

- Áp dụng định luật bảo toàn momen động lượng đối với cực K:

$$L_K = L_K'$$

$$mv_0\frac{l}{4}=mv\frac{l}{4}+I_G\omega-mv_G\frac{l}{4}\Leftrightarrow v_0\Leftrightarrow v_0=v+\frac{1}{3}l\omega-v_G \qquad (3)$$

Thay (1) và (3) suy ra $l\omega=6v_G$ (3')

Thay (1) và (3') vào (2) ta tìm được $v_G$:

$$\Rightarrow v_0^2=(v_0-v_G)^2.+v_G^2+\frac{36v_G^2}{12} \qquad \Rightarrow v_G=\frac{2v_0}{5}; \qquad \omega=\frac{12v_0}{5l}$$

**b. Va chạm mềm.**

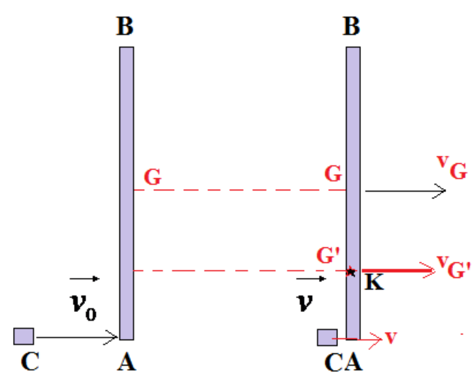
Chọn cực gắn trên G' của hệ và G' hệ chuyển động vận tốc $v_{G'}=\frac{v_0}{2}$

Mô men động lượng lúc đầu của vật và thanh đối với G' là

$$L_{G'}=m\frac{v_0}{2}\frac{l}{4}\bigg|_{Vat}+\left|\int_G^B dm\frac{v_0}{2}.r\right|_{Thanh}=m\frac{v_0}{2}\frac{l}{4}+\left|\int_{l/4}^{3l/4}\frac{v_0}{2}\frac{m}{l}.rdr\right|_{Thanh}=m\frac{v_0}{2}\frac{l}{4}+\frac{v_0}{2}\frac{m}{l}\int_{l/4}^{3l/4}.rdr$$

$$=m\frac{v_0}{2}\frac{l}{4}+\frac{v_0}{2}\frac{m}{l}(\frac{1}{2})\left[\left(\frac{3l}{4}\right)^2-\left(\frac{l}{4}\right)^2\right]=m\frac{v_0l}{8}+m\frac{v_0l}{8}=m\frac{v_0l}{4}$$

(vận tốc của m đối với G' là $\frac{v_0}{2}$ và của đoạn thanh GB đối với G' là-$\frac{v_0}{2}$)



Hình 2.51S

Mô men động lượng lúc sau của vật và thanh đối với G' là

$$L'_{G'}=I\omega=\left[m(\frac{l}{4})^2+(m(\frac{l}{4})^2+\frac{1}{12}ml^2)\right]\omega=\left[\frac{1}{8}ml^2+\frac{1}{12}ml^2\right]\omega=$$

Áp dụng định luật bảo toàn momen động lượng đối với G':

$$L'_{G'}=L_{G'} \qquad \Leftrightarrow\frac{5}{24}ml^2\omega=m\frac{v_0l}{4} \qquad \Rightarrow\omega=\frac{6}{5}\frac{v_0}{l}$$

**Bài 2.** Bảo toàn mômen động lượng với trục quay A.

$$\text{m.l.v}_0=\left(\frac{1}{3}\text{ml}^2+\text{ml}^2\right)\omega$$

→ $\omega = \frac{3}{4}\frac{v_0}{l}$

→ vận tốc của viên đạn sau va chạm: $v = \omega l = \frac{3v_0}{4}$

**Bài 3.** Bảo toàn động lượng:

$mv_0 = mv + mv_G$ (1).

Bảo toàn mômem động lượng với trục quay G.

$m.l.v_0 = m.l.v + \frac{1}{3}ml^2\omega$ ( chiều dài thanh là 2l) (2).

Bảo toàn cơ năng:

$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{3}ml^2\omega^2$ (3).

Từ (1), (2), (3) ta tìm được: $v_G = \frac{v_0}{5}$; $\omega l = \frac{3v_0}{5}$

→ $v_A = \omega l - v_G = \frac{2v_0}{5}$

**Bài 4.** a) Theo định luật biến thiên momen động lượng ta có:

$dL = Mdt = F_{ms}Rdt = dP_xR$

→ $Id\omega = mRdv_x$

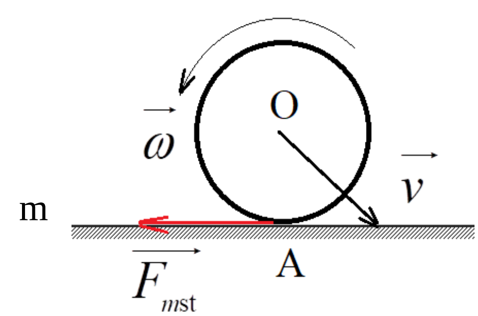
→ $I\int_{\omega}^{\omega'} d\omega = mR\int_{v_x}^{v_x'} dv$

→ $I(\omega' - \omega) = mR(v_x' - v_x)$ (1)

Ta có $v_y' = - v_y$

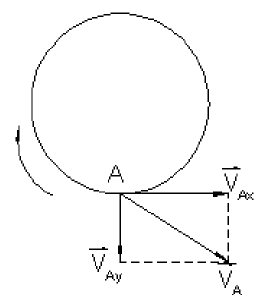
*) Theo định luật bảo toàn động năng ta có:

$\frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = \frac{mv'^2}{2} + \frac{I\omega'^2}{2}$ ⇒



$(v_x^2 - v'^2_x) = I(\omega'^2 - \omega^2)$ (2)

*) Thay (1) vào (2) rút ra
$$\begin{cases} \omega' = -\dfrac{1}{7}\left(3\omega + 10\dfrac{v_x}{R}\right) \\ v_x' = \dfrac{3v_x - 4\omega R}{7} \end{cases}$$



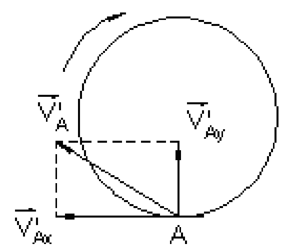

*) Biện luận:

+) $\omega' < 0$ siêu bóng quay ngược lại với chiều quay ban đầu sau va chạm.

+) $v_x' > 0$ $v_x > \dfrac{4}{3}\omega R$

+) $v_x' = 0$ $v_x = \dfrac{4}{3}\omega R$

+) $v_x' < 0$ $v_x < \dfrac{4}{3}\omega R$




b.Ban đầu (trước va chạm):

$v_{Ax} = v_x + \omega R$

$v_{Ay} = v_y$

Sau va chạm:

$v'_{Ax} = v'_x + \omega' R = -(v_x + \omega R)$

$v'_{Ay} = v'_y = -v_y$

$\overrightarrow{v_{A'}} = -\overrightarrow{v_A}$

Như vậy: Vận tốc điểm A trước và sau va chạm có độ lớn bằng nhau, chiều ngược nhau.

**Bài 5.** Vì hệ có tính đối xứng nên A chuyển động trên đường thẳng cố định B và C có quỹ đạo đối xứng nhau qua quỹ đạo của A.

Vì các vòng đệm tròn nên va chạm là xuyên tâm do đó các vòng B và C sẽ chuyển động theo các phương 12 và 13. Gọi $\vec{v'};\overrightarrow{v_B};\overrightarrow{v_C}$ lần lượt là các vec tơ của vòng tròn A, B, C sau va chạm.

Theo định luật bảo toàn động lượng: $m\vec{v} = m\vec{v'} + \overrightarrow{v_B} + m\overrightarrow{v_C}$.

Suy ra: mv = mv' + 2m$v_B$cosφ (1)

Trong đó $v_B = v_C$, φ là góc giữa quỹ đạo của A và phương của chuyển động B hoặc C.

Ta có: cosφ = $\dfrac{\sqrt{4R^2-(NR)^2}}{2R} = \dfrac{\sqrt{4-N}}{2}$ (với $O_AO_B = 2R$) (2)

Thay (2) vào (1) v = v + $V_B$. $\sqrt{4-N^2}$

Vì và chạm là đàn hồi nên:

$\dfrac{mv^2}{2} = \dfrac{mv^2}{2} + \dfrac{mv_B^2}{2} + \dfrac{mv_C^2}{2} \Leftrightarrow v^2 = v^2 + v_B^2 + v_C^2$ (4)

Từ (3) và (4) tìm được v = v' (5)

hoặc v' = $\dfrac{N^2-2}{6-N^2}v$ (6)

Với kết quả (5) suy ra $v_B = v_C = 0$. do đó loại trường hợp này.

* Vậy vận tốc A sau va chạm là v' = $\dfrac{N^2-2}{6-N^2}v$

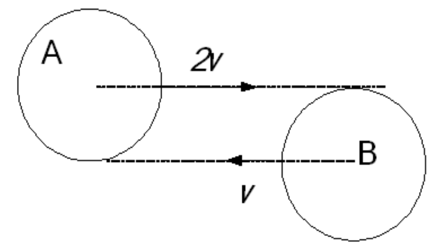
* Để A bật ngược trở lại thì v' < 0 hay $\dfrac{N^2-2}{6-N^2} < 0$ và để A va vào cả B và C thì N ≤ 2. Do đó $N^2$ - 2 < 0 suy ra 0 < N < $\sqrt{2}$.

* Để A đứng yên thì v; = 0 suy ra N = $\sqrt{2}$.

* Để A tiếp tục tiến lên phía trước 2 ≥ N > $\sqrt{2}$.

**Bài 6.** Chọn hệ toạ độ xOy như hình vẽ.

Gọi $\overrightarrow{V_A};\overrightarrow{V_B}$ là vận tốc của mỗi quả cầu ngay sau va chạm $v_{1x}$, $v_{1y}$, $v_{2y}$, $v_{2x}$ là thành vận tốc sau va chạm của A và B theo các trục Ox, Oy.




+ Xung lực tác dụng khi va chạm: $\Delta P_A = F_1\,\Delta t$, $\Delta P_B = F_2\Delta t$.

Vì $F_1 = F_2 \Rightarrow \Delta P_A = \Delta P_B = \Delta P$.

Xét quả cầu A: + $mv_{1x} = m2v - \Delta P\cos\alpha \Rightarrow v_{1x} = 2v - \dfrac{\Delta P\sqrt{3}}{2m}$ (1)

+ $mv_{1y} = \Delta P\sin\alpha \Rightarrow v_{1y} = \dfrac{\Delta P}{2m}$ (2)

*Xét quả cầu B: + $mv_{2x} = \Delta P\cos\alpha - mv \Rightarrow v_{2x} = \dfrac{\Delta P\sqrt{3}}{2m} - v$ (3);

+ $mv_{2y} = -\Delta P\sin\alpha \Rightarrow v_{2y} = -\dfrac{\Delta P}{2m}$ (4)

+ Định luật bảo toàn cơ năng: E(trước) = E(sau)

$$\frac{1}{2}m(2v)^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(v_{1x}^2 + v_{1y}^2) + \frac{1}{2}m(v_{2x}^2 + v_{2y}^2) \quad (5)$$

Từ (1) - (4) vào (5) sau khi biến đổi: $8\Delta P^2 = \dfrac{3}{2}mv\sqrt{3}$ (6).

Thay (6) vào (1) - (4) ta được:

$$v_{1x} = \frac{-v}{4}; v_{1y} = \frac{3v\sqrt{3}}{4}; v_{2x} = \frac{5v}{4}; v_{2y} = -\frac{3v\sqrt{3}}{4} \quad (7)$$

+ Từ hình vẽ: $tg\beta = \left|\dfrac{v_{1y}}{v_{1x}}\right| = 3\sqrt{3} \Rightarrow \beta = 79^0; tg\gamma = \left|\dfrac{v_{2y}}{v_{2x}}\right| = \dfrac{3\sqrt{3}}{5} \Rightarrow \gamma = 46^0$

* Góc giữa $\overrightarrow{v_A}$ và $2\vec{v}$ là : $180^0 - 79^0 = 101^0$. Góc giữa $\overrightarrow{v_B}$ và $\vec{v}$ là: $180^0 - 46^0 = 134^0$

**Bài 7.** Sau khi vừa va chạm vật có vận tốc v, thanh có vận tốc góc ω

+ Bảo toàn mômen động lượng: $mv_0\dfrac{l}{2} = m\dfrac{l}{2}v + \dfrac{1}{12}ml^2\omega \Rightarrow v_0 = v + \dfrac{1}{6}l\omega$ (1)

+ Bảo toàn năng lượng $\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{12}ml^2\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v_0^2 = \frac{1}{12}l^2\omega^2 + v^2$ (2)

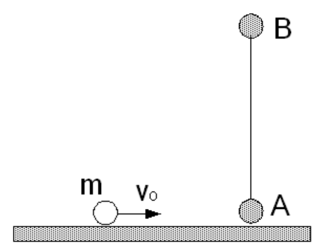
Từ (1) và (2) $\Rightarrow \omega = \frac{3v_0}{l}$ (3).

Áp dụng định lý động năng: $-\frac{1}{2}I_G\omega^2 = A_{ms}$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{12}ml^2\left(\frac{3v_0}{l}\right) = \mu mg\frac{l}{4}\phi. \text{ Vậy: } \phi = \frac{3}{2}\frac{v_0^2}{\mu gl}$$

**Bài 8.** Sau khi vừa va chạm hệ quả cầu 1 và 3 có vận tốc: $v_{13} = \frac{mv_0}{2m} = \frac{v_0}{2}$.

Khối tâm C hệ 3 quả cầu có vận tốc: $v_c = \frac{v_0}{3}$.




* Xét trong hệ quy chiếu h ệ quán tính Q có vận tốc $\frac{\vec{v_0}}{3}$ so với sàn thì C đứng yên, còn quả cầu 1,3 có vận tốc: $v_{13Q} = \frac{v_0}{2} - \frac{v_0}{3} = \frac{v_0}{6}$.

* Gia tốc hướng tâm vật 1, 3 đối với tâm C: $(a_{13Q})_{ht} = \frac{\left(\frac{v_0}{6}\right)^2}{\frac{l}{3}} = \frac{v_0^2}{12l}$

Gia tốc khối tâm C của  hệ trên có phương thẳng đứng $a_0$ = -g.

Gia tốc vật 1,3 đối với đất trên phương thẳng đứng là: $a_{13} = (a_{13Q})_{ht} + a_c$. $a_{13} = \frac{v_0^2}{12l} - g$

Để vật 1 và 3 nâng lên $a_{13} > 0$ suy ra $v_0^2 > 12gl$

Vậy để vật (1, 3) không bị nâng lên thì $v_0^2 \le 12gl$.

* Xét trong hệ quy chiếu gắn với sàn:

- Vì vật 1, 3 không nâng lên nên trước khi vật 2 va chạm sàn thì vận tốc theo phương ngang 3 vật là:

$v_{1n} = v_{2n} = v_{3n} = \frac{v_0}{3}$. Theo ĐLBTCN:

$$\frac{mv_{1n}^2}{2} + \frac{mv_{3n}^2}{2} + \frac{m(v_{2n}^2 + v_{2d}^2)}{2} = \frac{mv_0^2}{2} + mgl \Rightarrow v_{2d}^2 = \frac{2v_0^2}{3} + 2gl$$

Vậy vận tốc vật trước khi chạm sàn: $v_2 = \sqrt{v_{2n}^2 + v_{2d}^2} = \sqrt{\frac{7}{9}v_0^2 + 2gl}$

Với $\beta = (\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_0})$ thì $tg\beta = \frac{v_{2d}}{v_{2n}} = \frac{\sqrt{\frac{2v_0^2}{3} + 2gl}}{\frac{v_0}{3}} = \frac{3}{v_0}\sqrt{\frac{2v_0^2}{3} + 2gl}$

**Bài 9.** a. Vận tốc của vật m ngay sau va chạm.

Khi thanh rơi xuống cơ năng của nó được bảo toàn. Chọn gốc tính thế năng tại mặt bàn ta có: W = $W_0$

$Mg\frac{l}{2} + \frac{l}{2}I\omega^2 = Mgl$ trong đó I = 1/3 $Ml^2$

Giải phương trình ta được $\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}}$. Xét va chạm giữa thanh và vật m.

Theo định luật bảo toàn mômen động lượng ta có: L = $L_0$ ⇔ Iω' + mv.l = I ω

Va chạm là hoàn toàn đàn hồi nên động năng của hệ bảo toàn.

$W_đ = W_{0đ}$ ⇔ $1/2I\omega'^2 + 1/2mv^2 = 1/2\, I\omega^2$ (2)

Giải hệ phương trình (1) và (2) ta được: $\omega' = \frac{M-3m}{M+3m}\sqrt{\frac{3g}{l}}; v = \frac{2M}{M+3m}\sqrt{3gl}$

b. Quãng đường mà vật m đi được trên bàn

Gia tốc của m trên bàn là a = - μg.

Quãng đường vật đi thêm được cho đến khi dừng lại là:

$$s = -\frac{v^2}{2a} = \frac{\frac{4M^2}{M+3m}.3gl}{2\mu g} = \frac{6M^2 l}{\mu(M+3m)^2}$$

**Bài 10.** a) Trong suốt quá trình va cham, monme của ngoại lực tác dụng lên hệ "chất điểm + thanh" bằng 0 ( đối với trục quay qua O). Nên $\vec{L}_{/0} = \overrightarrow{const}$.

Ta có: Bảo toàn momen động lượng: mvl = mv'l + I$\omega$ (1)

Bảo toàn động năng: $m\frac{v^2}{2} = m\frac{v'^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$ (2)

Mômen quán tính của thanh: $I = \frac{Ml^2}{3}$ (3)

ml(v - v') = I$\omega$; m($v^2$ - $v'^2$) = $I\omega^2$

$\omega = \frac{v+v'}{l}$

ml(v - v') = $\frac{Ml^2}{3}\omega$ Suy ra $v' = \frac{3m-M}{3m+M}.v$ (4)

ta tìm được: $\omega = \frac{6m}{3m+M}.\frac{v}{l}$ (5)

Sau va chạm $\vec{v}'$ cùng phương chiều với $\vec{v}$ nên ta có $v' \geq 0 \Leftrightarrow 3m \geq M$

b) Theo định luật bảo toàn cơ năng:

$$\frac{I\omega^2}{2} = Mg\frac{l}{2}(1-\cos\theta_m)$$

$$\Rightarrow \sin^2\theta_m = \frac{I\omega^2}{2gl} = \left(\frac{mv}{3m+M}\right)^2\frac{6}{gl} \qquad \Rightarrow \sin\theta_m = \frac{v}{3+\frac{M}{m}}.\sqrt{\frac{6}{gl}}$$

c) Sự mất mát năng lượng tương đối

$$Q = \frac{I\frac{\omega^2}{2}}{\frac{mv^2}{2}} = \frac{I\omega^2}{mv^2} \Rightarrow Q = \frac{12Mm}{(3m+M)^2} = \frac{12}{\frac{9m}{m}+\frac{M}{m}+6}$$

Mà $\frac{9m}{M}+\frac{M}{m} \geq 2\sqrt{9} = 6$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{m}{M} = \frac{1}{3}$

Nên $Q_{max}=\frac{12}{6+6}=1 \Leftrightarrow \frac{m}{M}=\frac{1}{3}$

**Bài 11.** 1. + Sau khi va chạm mềm mô men quán tính của hệ ( gồm thanh và vật ) là :

$$I=\frac{Ml^2}{3}+ml^2$$

+ Phương trình dao động của thanh :

$$\vec{M}=I\vec{\gamma}$$

$$\frac{1}{2}Mgl\sin\theta+mgl\sin\theta=gl(\frac{M}{2}+m)\theta=-(\frac{Ml^2}{3}+ml^2)\ddot{\theta}$$

Với $\theta$ nhỏ $\sin\theta\approx\theta$ khi đó ta được phương trình vi phân bậc hai :

$$\ddot{\theta}+\omega^2\theta=0$$

+ Nghiệm của phương trình là hàm dao động điều hoà :

$\theta=\theta_0\sin(\omega t+\varphi)$ với $\omega=\sqrt{\frac{3}{2}\frac{g(M+2m)}{l(M+3m)}}$.

+ Chọn gốc thời gian là thời điểm ngay sau va chạm $(t_0=0)$ ta có

$$\omega.\theta_0=\theta_0'=\frac{d\theta}{dt}\Big|_{t=0}$$ (1) ( vận tốc góc ngay sau va chạm )

+ Áp dụng định luật bảo toàn mô men động lượng cho hệ ( gồm thanh và vật ) ta có :

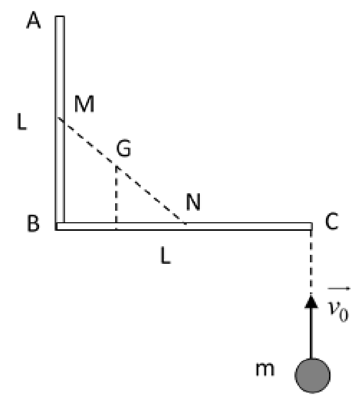
$$mv_0l=I\theta_0'=(\frac{Ml^2}{3}+ml^2)\theta_0'\Rightarrow\theta_0'=\frac{3mv_0}{(M+3m)l}$$ (2)

+Thay (1) vào (2) ta được biên độ góc:

$\theta_{max}=\theta_0=\frac{3mv_0}{(M+3m)\omega l}$. với $\omega=\sqrt{\frac{3}{2}\frac{g(M+2m)}{l(M+3m)}}$.

**Bài 12.** Áp dụng định luật bảo toàn động lượng và mômen động lượng đối với G:

$mv_o = mv_1 + Mv_2$ (1)




$$mv_o.\frac{3l}{4} = mv_1.\frac{3l}{4} + I\omega \quad (2)$$

áp dụng định luật bảo toàn cơ năng:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{Mv_2^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} \quad (3)$$

Với : $I_G = 2\left[\dfrac{(\frac{M}{2})L^2}{12} + (\frac{M}{2})NG^2\right]$

$$NG = \sqrt{2}\frac{L}{4} \quad \to I_G = \frac{5}{24}ML^2$$

$$v_2 = \frac{5}{18}\omega L \Rightarrow \omega L = \frac{18}{5}v_2$$

Giải hệ phương trình $v_0 + v_1 = \frac{5}{24}v_2$

$$m(v_o - v_1) = Mv_2$$

Điều kiện m bị bật ngược trở lại là $v_1 < 0$. Rút ra: $\frac{M}{m} < \frac{5}{29}$.

**Bài 13.** Gọi I là điểm tiếp xúc giữa vành đai và bậc. Phân tích $v_0$ thành 2 thành phần: $\vec{v}_0 = \vec{v}_n + \vec{v}_t$ trong đó $v_n$ hướng dọc theo bán kính OI.

$v_n = v_0 \cos\alpha$ ; $v_t = v_0 \sin\alpha$ với $\sin\alpha = \frac{R-h}{R}$ ; $v_0 = \omega R$

Do va chạm là hoàn toàn mềm nên thành phần pháp tuyến của vận tốc sau va chạm bằng 0, ngay sau va chạm vận tốc của vành là $v_t'$ có phương tiếp tuyến và vận tốc góc là ω', vì không có sự trượt nên $v_t' = \omega' R$.

Định lý biến thiên động lượng theo phương tiếp tuyến.

$- F_{ms}.\Delta t = m(v_t' - v_t)$

Định lý biến thiên mômen xung lượng:

$F_{ms}.R.\Delta t = I(\omega' - \omega) = mR^2(\omega' - \omega)$

→ $mR^2(\omega' - \omega) + mR^2(\omega' - \omega\sin\alpha) = 0$ → $\omega' = \dfrac{\omega(1-\sin\alpha)}{2}$ (1)

Để vành lên được bậc thì động năng của nó sau va chạm phải lớn hơn hoặc bằng độ tăng thế năng: $W_d = \frac{1}{2}\frac{3}{2}mR^2\omega'^2 \geq mgh$ (2)

Thay (1) vào (2) ta sẽ tìm được điều kiện của ω: $\frac{1}{2}\frac{3}{2}mR^2\left(\frac{\omega(1-\sin\alpha)}{2}\right) \geq mgh$

$\omega \geq \frac{8}{3}\frac{gh}{R^2(1-\sin\alpha)} \rightarrow v_0 \geq \frac{8}{3}\frac{gh}{R(1-\sin\alpha)}$

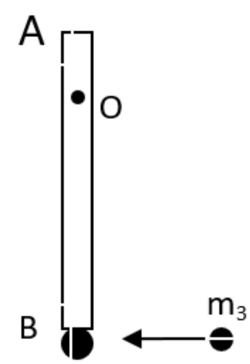
**Bài 14.**

1. Khảo sát trong HQC gắn với mặt đất, chọn chiều dương cùng chiều chuyển động của $m_3$ trước va chạm.

Gọi vận tốc góc của thanh AB ngay sau va chạm là $\omega$, khối tâm của thanh AB là G.

Mômen quán tính của hệ thanh AB và quả cầu C là:

$$I = \frac{1}{12}m_1l^2 + m_1.OG^2 + m_2.OB^2 = \frac{41}{750}\ (kgm^2)$$




Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng cho hệ thanh AB và quả cầu C trong giai đoạn sau va chạm ta có:

$$m_1g.OG.(1-\cos\alpha) + m_2g.OB.(1-\cos\alpha) = \frac{1}{2}I\omega^2$$

Thay số tính được: $\omega = 4{,}23$ (rad/s)

2. Khảo sát hệ $(m_1+m_2+m_3)$ trong quá trình va chạm

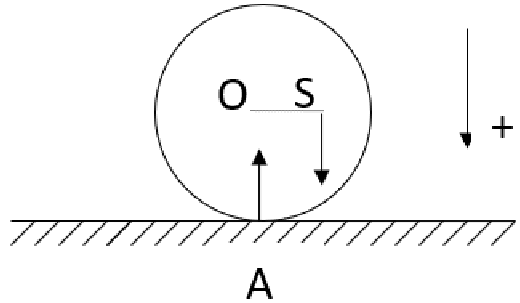
Gọi v' là vận tốc của $m_3$ ngay sau va chạm, áp dụng định luật bảo

toàn mômen động lượng và bao toàn động năng cho hệ ở thời điểm ngay trước và ngay sau va chạm ta có:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}m_3v^2 = \frac{1}{2}m_3v'^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \\ m_3v.OB = I.\omega + m_3v'.OB \end{cases} \Rightarrow \quad .....$$

Thay số giải được $v = 3{,}16$ (m/s

**Bài 15.** Gọi $\omega$ là vận tốc quay quanh S sau va chạm, $v_S$ là vận tốc chuyển động tịnh tiến của S. Do các ngoại lực $\vec{N}, \vec{P}$ và cả $\vec{v_0}$ đều vuông góc với mặt sàn nên $\vec{v_S}$ cũng vuông góc với chướng ngại vật (chiều $\vec{v_S}$ thực chất là ngược lại).




Ta chọn chiều dương như trên hình vẽ.

Do va chạm nhanh và tổng năng lượng không đổi nên

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_S^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \qquad (1)$$

Do trong va chạm thì N>> P nên ta bỏ qua tác dụng của $\vec{P}$ mà do $\vec{N}$ có giá đi qua A nên $M_{(\vec{N})}^{A} = 0$ (bỏ qua $M_{(\vec{P})}^{A}$) .

Suy ra mô men động lượng của hệ đối với điểm A được bảo toàn, do đó:

$$mv_0 D = mv_S D + I\omega \qquad (2)$$

Từ (1) suy ra : $m(v_0 - v_S)(v_0 + v_S) = I\omega^2$ (1')

Từ (2) suy ra $m(v_0 - v_S)D = I\omega$ (2')

$$\Rightarrow \frac{I\omega}{D}(v_0 + v_S) = I\omega^2 \Rightarrow v_0 + v_S = \omega D$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_0 + v_S = \dfrac{I\omega}{mD} \\ \dfrac{v_0 + v_S}{D} = \omega \end{cases} \Rightarrow v_0 - v_S = \frac{I(v_0 + v_S)}{mD^2}$$

$$\Rightarrow v_0\left(1 - \frac{I}{mD^2}\right) = v_S\left(1 + \frac{I}{mD^2}\right)$$

$$\Rightarrow v_S = v_0 \frac{mD^2 - I}{mD^2 + I}$$

$$\Rightarrow v_S = -v_0.\frac{1-\frac{mD^2}{I}}{1+\frac{mD^2}{I}}.$$

Như vậy, $v_S < 0$ nên quả cầu bật trở lại. Do đó, vận tốc của khối tâm S sau va chạm là

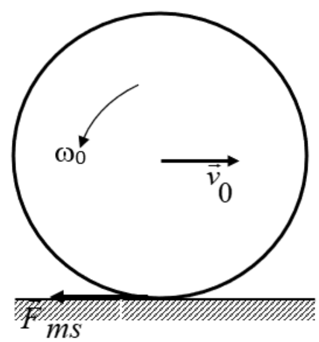
$$v_S = -v_0.\frac{1-\frac{mD^2}{I}}{1+\frac{mD^2}{I}}.$$

**Bài 16.**

Giai đoạn 1: Khối trụ chuyển động sang phải, lực ma sát trượt: $F_{ms} = \mu mg$.

Theo phương trình động lực học cho chuyển động tịnh tiến. Gia tốc chuyển động tịnh tiến của khối tâm :

$$a = -\frac{F_{ms}}{m} = -\mu g = -1\ (m/s^2) \qquad (1)$$




Theo phương trình động lực học cho chuyển động quay quanh một trục . Gia tốc góc của chuyển động quay quanh khối tâm :

$$\gamma = -\frac{F_{ms}R}{I} = -\frac{2\mu g}{R} = -10\ (rad/s^2) \qquad (2)$$

Vận tốc khối tâm giảm đến 0 sau thời gian: $t_1 = -\frac{v_0}{a} = 5$ (s)

Lúc này tốc độ góc của chuyển động quay quanh khối tâm:

$$\omega_1 = \omega_0 + \gamma t_1 = 15\ (rad/s) \qquad (3)$$

Giai đoạn 2: Khối trụ chuyển động sang trái, vận tốc chuyển động tịnh tiến của khối tâm tăng dần, tốc độ góc giảm dần cho đến khi $v = \omega R$ thì khối trụ lăn không trượt.

Gia tốc chuyển động tịnh tiến:

$$a' = \frac{F_{ms}}{m} = \mu g = 1\ (m/s^2) \qquad (4)$$

Gia tốc góc vẫn không đổi, xác định theo (2)

Gọi $t_2$ là thời gian khối trụ chuyển động sang trái cho đến khi lăn không trượt. Vận tốc khi chuyển động ổn định: $v = \mu g t_2$ (5)

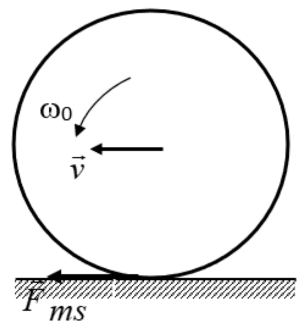
Tốc độ góc khi chuyển động ổn định: $\omega = \omega_1 + \gamma t_2$ (6)

Mặt khác: $v = R\omega$ (7)

Giải (5), (6), (7) ta được: $t_2 = 1$ (s)

$V = 1$(m/s)

$\omega = 5$ (rad/s)




Động năng của vật kúc này: $W_đ = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$

Công của lực ma sát (ngoại lực) bằng độ biến thiên động năng:

$A = \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) + \frac{1}{2}I(\omega^2 - \omega_0^2) = -1080$ J.

(Sau khi chuyển động ổn định lực ma sát nghỉ không sinh công.)

**Bài 17.** Động năng của quả cầu trước va chạm: $W_1 = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{I\omega_1^2}{2}$.

Do $I = \frac{2}{5}mR^2$ và $\omega_1 = \frac{v_1}{R}$ nên:

$$W_1 = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{1}{2}.\frac{2}{5}mR^2.\frac{v_1^2}{R^2} = \frac{7}{10}mv_1^2.$$

Sau va chạm, quả cầu bật ra và lăn không trượt với vận tốc $v_2$ nên có thể tính tương tự như trên, ta nhận được động năng của nó:

$$W_2 = \frac{7}{10}mv_2^2.$$

Nhiệt lượng tỏa ra trong quá trình va chạm băng độ giảm động năng của quả cầu:

$$Q = \Delta W_d = 0,7m(v_1^2 - v_2^2) = 0,7.2.(10^2 - 8^2) = 50,4J$$

**Bài 18.** Mômen quán tính $I_g$ của con gián đối với trục quay là: $I_g = m.R^2$.

Vận tốc góc của con gián đối với trục quay là: $\omega_g = \frac{v}{R}$.

Mômen động lượng của hệ khi con gián bò là:

$$L = I_g\omega_g - I\omega_0 = mR^2\frac{v}{R} - I\omega_0 = mRv - I\omega_0 \qquad (1)$$

Mômen động lượng của hệ khi con gián dừng lại là:

$$L' = (I + I_g)\omega = (I + mR^2)\omega \qquad (2)$$

Theo định luật bảo toàn mômen động lượng thì :

$$L = L' \Leftrightarrow (I + mR^2)\omega = mRv - I\omega_0$$

$$\Leftrightarrow \omega = \frac{mRv - I\omega_0}{I + mR^2} \qquad (3)$$

Động năng của hệ khi con gián đang bò là:

$$K_1 = K_g + K_0 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega_0^2 \qquad (4)$$

Động năng của hệ khi con gián dừng lại là:

$$K_2 = \frac{1}{2}(I + I_g)\omega^2 = \frac{1}{2}(I + mR^2)\left(\frac{mRv - I\omega_0}{I + mR^2}\right) \qquad (5)$$

Độ biến thiên động năng trong quá trình biến thiên đó là:

$$\Delta K = K_2 - K_1 \qquad (6)$$

Thay ( 4 ) , ( 5 ) vào ( 6 ) và biến đổi ta có:

$$\Delta K = K_2 - K_1 = -\frac{mI(v + R\omega_0)^2}{2(I + mR^2)} < 0$$

$\Rightarrow K_2 < K_1$: Động năng( cơ năng ) của hệ bị giảm (không được bảo toàn).

**Bài 19.**

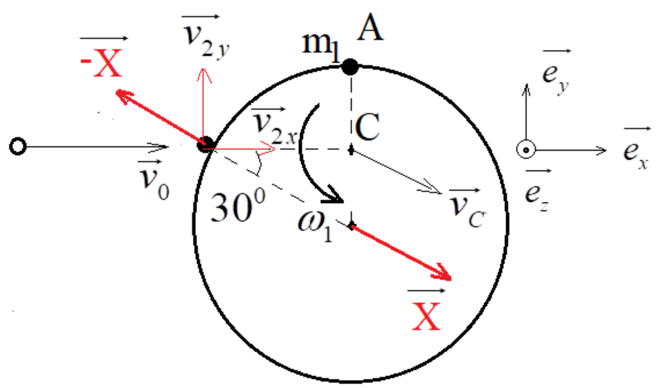
1. Momen quán tính của hệ đối với khối tâm C:

$$I = mR^2 + m(\frac{R}{2})^2 + m_1(\frac{R}{2})^2 = \frac{3}{2}mR^2 \qquad (1)$$

Động năng $K = \frac{1}{2}I\omega_0^2 = \frac{1}{2}.\frac{3}{2}mR^2\omega_0^2 = \frac{3}{4}mR^2\omega_0^2$ (2)

Momen động lượng đối với khối tâm C: $L = I\omega_0 = \frac{3}{2}mR^2\omega_0$ (3)

2.Ta đặt $\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{v_{2x}} + \overrightarrow{v_{2y}}$; $\overrightarrow{v_C} = \overrightarrow{v_{Cx}} + \overrightarrow{v_{Cy}}$ .




Hình 1S

**Đối với hệ khung bi thứ nhất** :

$$(m+m_1)v_C = X \rightarrow v_C = \frac{X}{2m} \qquad (4)$$

**Đối với bi thứ 2:**

$$m_2v_{2x} - m_2v_0 = -X\cos 30^0 \rightarrow v_{2x} = v_0 - \frac{X}{m}\frac{\sqrt{3}}{2} = v_0 - v_C\sqrt{3} \qquad (5)$$

$$m_2v_{2y} = X\sin 30^0 \rightarrow v_{2y} = \frac{X}{2m} = v_C \qquad (6)$$

**Đối với hệ:**

-Áp dụng định luật bảo toàn momen động lượng đối với cực qua C

$$I\omega_0 = I\omega - m_2v_{2y}R\cos 30^0$$

$$\rightarrow 3R\omega_0 = 3R\omega - v_{2y}\sqrt{3} \qquad (7)$$

Thay (6) vào (7) ta được

$$3R\omega_0 = 3R\omega - v_C\sqrt{3} \rightarrow R\omega = R\omega_0 + v_C\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad (8)$$

-Va chạm đàn hồi, nên động năng hệ bảo toàn

$$\frac{1}{2}m_2v_0^2 + \frac{1}{2}I\omega_0^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}(m+m_1)v_C^2$$

$$\rightarrow v_0^2 + \frac{3}{2}R^2\omega_0^2 = (v_{2x}^2 + v_{2y}^2) + \frac{3}{2}R^2\omega^2 + 2v_C^2 \qquad (9)$$

Thay (4), (5), (6), (8) vào (9) ta được

$$\rightarrow v_0^2 + \frac{3}{2}R^2\omega_0^2 = \left(v_0 - v_C\sqrt{3}\right)^2 + v_C^2 + \frac{3}{2}\left(R\omega_0 + v_C\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 2v_C^2$$

$$v_C = \frac{2\sqrt{3}}{13}v_0 \qquad (10)$$

Suy ra $v_{2y} = v_C = \frac{2\sqrt{3}}{13}v_0$; $v_{2x} = v_0 - v_C\sqrt{3} = v_0 - \frac{6}{13}v_0 = \frac{7}{13}v_0$

$$v_2 = \sqrt{v_{2x}^2 + v_{2y}^2} = \frac{\sqrt{61}}{13}v_0 \qquad (11)$$

$$\omega R = R\omega_0 + v_C\frac{\sqrt{3}}{3} = v_0 + \frac{2\sqrt{3}}{13}v_0\frac{\sqrt{3}}{3} = v_0 + \frac{2}{13}v_0 \rightarrow \omega = \frac{15}{13}\frac{v_0}{R} \qquad (12)$$

Khi đó bi thứ nhất có vận tốc

$$v_1 = \sqrt{v_{1x}^2 + v_{1y}^2} = \sqrt{(v_{Cx} - \frac{\omega R}{2})^2 + v_{Cy}^2} = \sqrt{(v_C\cos 30^0 - \frac{\omega R}{2})^2 + (-v_C\sin 30^0)^2}$$

$$\rightarrow v_1 = \frac{\sqrt{93}}{26}v_0 \qquad (13)$$

**Bài 20.** Gọi F là lực chọc vào bi tạo ra xung lực $F\Delta t$

+Xung lực gây chuyển động tịnh tiến của khối tâm O: $M.\Delta v = F\Delta t$ (1)

+Xung lực gây chuyển động quay khối tâm O $I.\Delta\omega = (F\Delta t)(h - R)$ (2)

Với $I=\frac{2}{5}MR^2$ thay vào (1) và (2) ta được $\Delta v=\frac{2R^2\Delta\omega}{5(h-R)}$ (3)

Vì ban đầu bi a đứng yên nên: $v=\Delta v=\frac{2R^2\omega}{5(h-R)}$ (4)

Qua bi lăn không trượt nên $v=\omega R$ (5)

Thay (4) vào (5) ta được $h=\frac{7}{5}R$

**Bài 21**. Sau va chạm, con lắc có vận tốc $\overrightarrow{v_G}=\overrightarrow{v_\parallel}+\overrightarrow{v_\perp}=\overrightarrow{v_\parallel}+\overrightarrow{v_{dai/Q}}$

Ta coi hai dây treo QA và QC luôn căng khi va chạm.

Áp dụng định luật bảo toàn động lượng theo phương ngang dọc trục

$(M+m)\overrightarrow{v_\parallel}=m\overrightarrow{v_0}\rightarrow v_\parallel=\frac{m}{M+m}v_0$ (1)

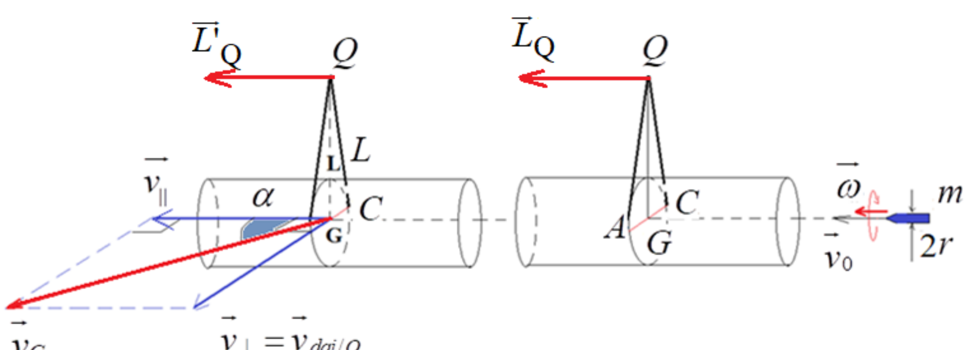
Mặt khác $\overrightarrow{L_Q}=\overrightarrow{L_G}+\left[\overrightarrow{QG}\wedge m\overrightarrow{v_{G/Q}}\right]$

Lúc đầu $L_Q=\frac{1}{2}mr^2\omega$ (2)

Lúc sau $\left(v_{G/Q}\right)_\perp=v_\perp=\omega_Q L=\omega_G L$ , nên momen động lượng lúc sau

$L'_Q=L_G'+QGv_\perp=(\frac{1}{2}mr^2+\frac{MR^2}{2})\omega_G+(m+M)v_\perp$ (3)

vì tốc độ góc đối với các trục là như nhau nên $\omega_G=\omega_Q=\frac{v_\perp}{L}$




Hình 2.44S

Thành phần momen động lượng trên trục đi qua Q và song song trục đối xứng được bảo toàn: $L'_Q=L_Q$

Hay $(\frac{1}{2}mr^2+\frac{MR^2}{2})\frac{v_\perp}{L}+(m+M)v_\perp=\frac{1}{2}mr^2\omega$

Suy ra $v_\perp=\dfrac{mr^2\omega L}{mr^2+MR^2+2(M+m)L^2}$ (4)

Đặt $\alpha=\angle(\overrightarrow{v_\parallel},\overrightarrow{v_G})$ thì $\tan\alpha=\dfrac{v_\perp}{v_\parallel}=\dfrac{\omega r^2}{2v_0L\left[\dfrac{m}{M+m}(\dfrac{r^2}{2L^2})+\dfrac{M}{M+m}(\dfrac{R^2}{2L^2})+1\right]}$

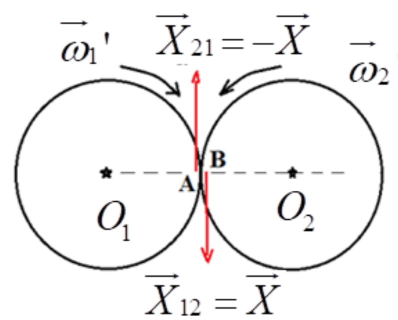
**Bài 22**. Bài này có thể tính momen động lượng tăng giảm qua lực ma sát trượt

Chọn chiều dương là chiều $\overrightarrow{\omega_1}$ và ta giả sử $I_1>I_2$ để dễn dàng biểu diễn.

Ta cần lưu ý: $\overrightarrow{L_A}=\overrightarrow{L_G}+m(\overrightarrow{AG}\wedge\vec{v}_{GA})$

Ban đầu hệ có momen động lượng đối với trục quay qua $O_1$

$\overrightarrow{L_{O1}}=I_1\overrightarrow{\omega_1}+\left[\overrightarrow{L_{O2}}+m_2(\overrightarrow{O_1O_2}\wedge\overrightarrow{v_{O_2O_1}})\right]$ với $\overrightarrow{L_{O2}}=I_2\overrightarrow{\omega_2};\overrightarrow{v_{O_2O_1}}=\vec{0}$



Hình 2.45S

Nên $\overrightarrow{L_{O1}}=I_1\overrightarrow{\omega_1}+I_2\overrightarrow{\omega_2}\to L_{O1}=I_1\omega_1+I_2\omega_2$ (1)

+Lúc sau Ta có độ biến thiên momen động lượng đĩa 1

$I_1\overrightarrow{\omega'_1}-I_1\overrightarrow{\omega_1}=(\overrightarrow{O_1A}\wedge\overrightarrow{X_{21}})$

Hay $I_1(\omega_1'-\omega_1)=-XR$ (2)

Và độ biến thiên momen động lượng đĩa 1

$I_2\overrightarrow{\omega'_2}-I_2\overrightarrow{\omega_2}=(\overrightarrow{O_2B}\wedge\overrightarrow{X_{12}})$ (KQ áp dụng định lý biến thiên momen động lượng)

$I_2(\omega_2'-\omega_2)=-XR$ (3)

Khi ổn định sau va chạm thì đặt $\omega=\omega_1'=-\omega'_2$ (4)

Từ (1), (2),(3),(4) ta khử X, từ đó suy ra

$$\omega=\frac{I_1\omega_1-I_2\omega_2}{I_1+I_2}=\frac{I_1-I_2}{I_1+I_2}\omega_0 \quad (5)$$

Độ giảm monen động lượng $|\Delta L|=L_{O1}-L_{O1}'=...=\dfrac{4I_1I_1}{I_1+I_2}\omega_0$

Độ giảm động năng $|\Delta K| = K - K' = (\frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2) - (\frac{1}{2}I_1\omega'^2_1 + \frac{1}{2}I_2\omega'^2_2)$

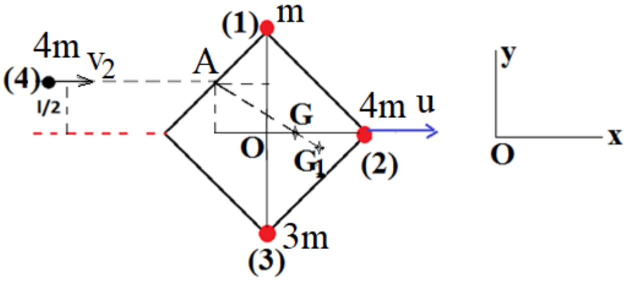
Thay (5) vào ta được $|\Delta K| = \left|\frac{-2I_1I_2\omega_0^2}{I_1+I_2}\right| = \frac{2I_1I_2}{I_1+I_2}\omega_0^2$

**Bài 23.** Chọn cực K gắn chặt G cùng chuyển động với vận tốc 2u

Gọi O là tâm hình vuông; $G_1$ là khối tâm hệ 3 vật (1,2,3)

$$x_{G1} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = ... = \frac{l}{2}$$

$$y_{G1} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3} = ... = -\frac{l}{4}$$




Hình 2.46S

Tương tự khối tâm G của hệ 4 vật $x_G = \frac{l}{6}; y_G = 0$

Động lượng hệ trước va chạm $P_G(m + 3m + 4m)u + 4mv_2 = 12m.2u \rightarrow v_2 = 4u$

Vì động lượng hệ bảo toàn nên, vận tốc khối tâm hệ sau va chạm $v_G' = v_G = 2u$

Áp dụng định luật bảo toàn momen động lượng đối với trục qua G và vuông góc mặt khung (HQC quán tính gắn G): $m_4v_{2/G}\frac{l}{2} - 8mv_{G1/G}\frac{l}{6} = I\omega \rightarrow \omega = \frac{18}{29}\frac{u}{l}$

Lưu ý $v_{G1/G} = v_{G1} - v_G = u - 2u = -u$

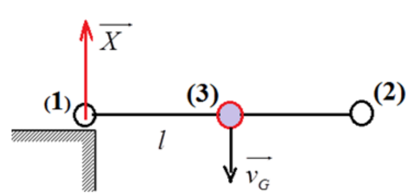
**Bài 24.** tốc độ góc $\omega$

Áp dụng định luật II cho khối tâm hệ $X = 3m(v_0 - v_G)$ (1)

Định lí momen động lượng khi va chạm đối với cực đi qua G

$Xl = I_G\omega = 2ml^2\omega \rightarrow X = 2ml\omega$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $v_G = \frac{3v_0 - 2\omega l}{3}$ (3)




Hình 2.47S

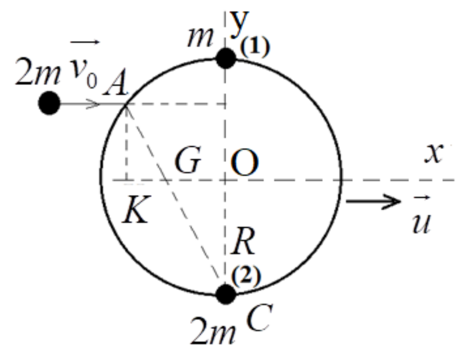
Vì va chạm hoàn toàn đàn hồi, nên động năng bảo toàn:

$$\frac{1}{2}(3m)v_0^2=\frac{1}{3}(3m)v_G^2+\frac{1}{2}I_G\omega^2 \qquad (4)$$

Thay (3) vào (4) ta được $\omega=\frac{6}{5}\frac{v_0}{l}$

**Bài 25**. T*a nên hiểu trước va chạm vòng dây chuyển động vận tốc –u, sau va chạm tâm quán tính hệ chuyển động với vận tốc +u*

Tọa độ khối tâm của hệ 3 vật nặng trước va chạm




Hình 2.48S

$$x_G=\frac{2m(-\frac{\sqrt{3}}{2}R)}{5n}=\frac{-\sqrt{3}}{5}R;$$

$$y_G=\frac{mR+2m\frac{R}{2}-2mR}{5m}=0$$

-Định luật bảo toàn động lượng

$$2mv_0-mu-2mu=5mu\rightarrow u=\frac{v_0}{4}$$

-Bảo tòan momen động lượng đối với cực G (HQCQT có vận tốc $v_G=u=\frac{v_0}{4}$)

Ta có $L=L_{1G}+L_{2G}+L_{3G}=mRv_{1G}+2mRv_{2G}+2mv_{3G}\frac{R}{2}$

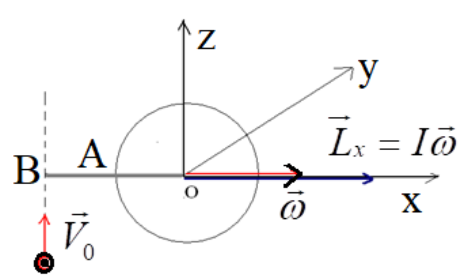
$$\Leftrightarrow L=\frac{-mRv_0}{2}+\frac{2mRv_0}{2}+\frac{3mRv_0}{4}=\frac{5mRv_0}{4}$$

Mà $L=L'\Leftrightarrow\frac{5mRv_0}{4}=I_G\Omega\Leftrightarrow\frac{5mRv_0}{4}=\frac{22}{5}mR^2\Omega$

Suy ra $\Omega=\frac{25}{88}\frac{v_0}{R}$

**Bài 26.** Ban đầu $\vec{V_0}$ , $\vec{\omega}$, $\vec{L_x}=I\vec{\omega}$ nằm trong mặt phẳng Oxz, nên mô men động lượng lúc đầu của hệ là

$$\vec{L_0}=m(\overrightarrow{OB}\wedge\vec{V_0})+\vec{L_x}=m(\overrightarrow{OB}\wedge\vec{V_0})+I\vec{\omega}$$




Hình 2.49S1

Mô men động lượng lúc sau là $\vec{L} = \vec{L}_x + \vec{L}_y = I\vec{\Omega}_x + I\vec{\Omega}_y$

Áp dụng định luật bảo toàn mômen động lượng ta được

$$\vec{L} = \vec{L}_0 \Rightarrow \begin{cases} \vec{\Omega}_x = \vec{\omega} \\ \vec{\Omega}_y = \dfrac{2RmV_0}{I}\vec{e_y} \end{cases} \qquad (1)$$

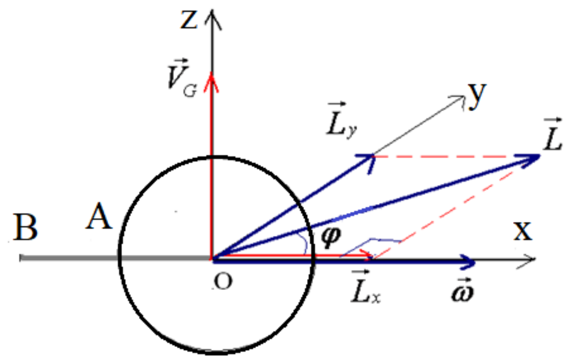
Bảo toàn động lượng

$$mV_0 = MV_G \qquad (2)$$

Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng

$$\frac{m}{2}V_0^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{M}{2}V_G^2 + \frac{1}{2}I\Omega_x^2 + \frac{1}{2}I\Omega_y^2 \qquad (3)$$

$$I = \frac{2}{5}MR^2 \qquad (4)$$



Hình 2.49S2

Từ (1),(2),(3),(4) ta suy ra M=11m và

Sau va chạm, quả cầu quay quanh trục đối xứng nằm trên $\vec{L}$, do vậy các véc tơ $\vec{L}_x, \vec{L}_y$ quay trên các mặt nón. $\vec{L}_x$ quay trên mặt nón có nửa góc ở đỉnh là $\varphi$

$$\tan\varphi = \frac{L_y}{L_x} = \frac{5}{11}.\frac{V_0}{R\omega}$$

Vậy nan hoa AB sẽ quay trên một mặt nón(có nửa góc ở đỉnh là $\varphi$) và mặt nón này tiếp xúc với mặt phẳng Oxz, do đó nan hoa lệch một góc cực đại đối với mặt phẳng Oxz là $2\varphi$ với $\varphi = \frac{1}{55}rad = 1^0$

**Bài 27.** Sau va chạm, tâm của quả cầu bị va chạm sẽ bắt đầu chuyển động với vận tốc ban đầu $v_0$

Vận tốc khối tam tại thời điểm t còn lại là $v = v_0 - kgt$

Vận tốc góc tức thời là $\omega$, chính momen lực ma sát làmbến thiên vận tốc góc

$$I\frac{d\omega}{dt} = kmr \rightarrow \frac{2}{5}r\frac{d\omega}{dt} = kg$$

Hay $\omega = \omega_0 + \dfrac{5}{2}\dfrac{kgt}{r}$

Góc $\alpha$ được xác định $\tan\alpha = \dfrac{5}{2}\dfrac{kgt}{r\omega_0}$

Tại thời điểm bắt đầu lăn không trượt $\frac{5}{2}kgt = v_0 - kgt \Rightarrow t = \frac{2v_0}{7kg}$

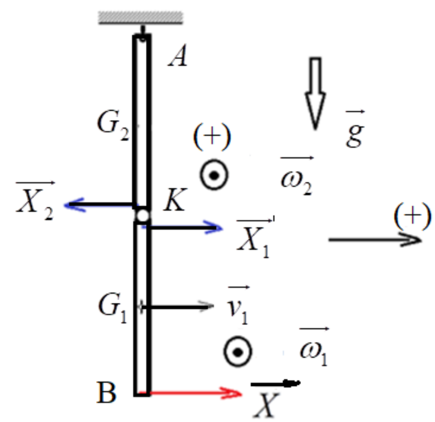
Từ thời điểm này, góc $\alpha$ không đổi đối với góc lăn $\tan\alpha_1 = \frac{5}{7}\frac{v_0}{r\omega_0}$

Trong trường hợp riêng $v_0 = \omega_0 r$ ta tính đượ $\tan\alpha = \frac{5}{7} \to \alpha = 35^0 32'$

Chú ý, đáp số tìm được xác định độ xoay của trục quay so với không gian bên ngoài chứ không phải so với bên trong quả cầu.

**Bài 28**. Gọi $\overrightarrow{\omega_1}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{X}$ là vận tốc góc, vận tốc $G_1$ và các xung lực tác dụng lên thanh KB

Gọi $\overrightarrow{\omega_2}, \overrightarrow{X_2}$ là vận tốc góc và xung lực tác dụng lên thanh AK



Hình 2.52S

* Đối với thanh KB, ta có

$$mv_1 = X + X_1 \to v_1 = \frac{X + X_1}{m} \quad (1)$$

và $I_{G_1}\omega_1 = \frac{l}{2}X - \frac{l}{2}X_1 \to \frac{1}{12}ml^2\omega_1 = \frac{l}{2}X - \frac{l}{2}X_1$

$$\to l\omega_1 = \frac{6(X - X_1)}{m} \quad (2)$$

*Đối với thanh AK:

$$I_{2A}\omega_2 = lX_2 \to \frac{1}{3}ml^2\omega_2 = lX_2$$

$$\to l\omega_2 = \frac{3X_2}{m} \to l\omega_2 = \frac{-3X_1}{m} \quad (3)$$

Mặt khác ta có phương trình liên kết vận tốc:

$$v_{K1} = v_{K2} \to v_{K1/G_1} + v_{G1} = \omega_2 l \to -\omega_1\frac{l}{2} + v_1 = \omega_2 l \qquad (4)$$

Thay (1),(2),(3) vào (4) ta tìm được $X_1$ theo X:

$$-\frac{\frac{6(X-X_1)}{m}}{2}+\frac{X+X_1}{m}=\frac{-3X_1}{m}$$

$$\Leftrightarrow -3(X-X_1)+X+X_1=-3X_1$$

$$\Rightarrow X_1=\frac{2}{7}X \qquad (*)$$

Lấy (2) chia (3) đồng thời thay (*) vào ta được

$$\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{6(X-X_1)}{-3X_1}=\frac{6(X-\frac{2}{7}X)}{-3\frac{2}{7}X}=-5$$

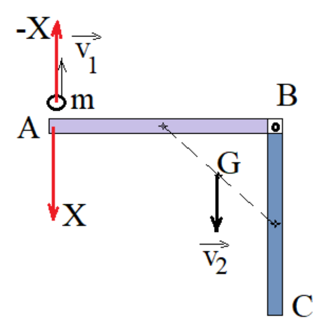
**Bài 29. a.** Gọi $\vec{v_1},\vec{v_2}$ lần lượt là vận tốc của bi và thước gấp sau va chạm.

-Áp dụng định luật bảo toàn động lượng:

$$mv_0=mv_1+mv_2 \rightarrow v_0=v_1+v_2 \qquad (1)$$

Gọi I là momen quán tính thước gấp đối với trục quay qua khối tâm

$$I=2\left[\frac{1}{12}(\frac{m}{2})l^2+\frac{m}{2}(\frac{l\sqrt{2}}{4})^2\right]=\frac{5}{24}ml^2 \qquad (2)$$



Hình 2.53S1

-Bảo toàn cơ năng $\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}mv_1^2+\frac{1}{2}mv_2^2+\frac{1}{2}I\omega^2$

$$\rightarrow v_0^2=v_1^2+v_2^2+\frac{5}{24}l^2\omega^2 \qquad (3)$$

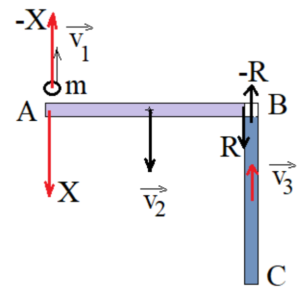
Và ta lại có $\begin{cases} I\omega=X\frac{3}{4}l \\ mv_1-mv_0=-X \end{cases} \rightarrow I\omega=(mv_0-mv_1)\frac{3}{4}l$

Thay (2) vào ta được $\frac{5}{18}l\omega=v_0-v_1 \qquad (4)$

Từ (1), (3), (4) ta suy ra đươc $\omega=\frac{72}{40}\frac{v_0}{l}$ ; $v_1=\frac{27}{47}v_0$ ; $v_2=\frac{20}{47}v_0$

b. Gọi $v_1, v_2, v_3$ lần lượt là vận tốc chuyển động tịnh tiến khối tâm của bi, thanh AB, thanh BC sau vừa va chạm; $\omega_2$ là vận tốc góc thanh AB sau vừa va chạm.

-Đối với bi: $-X = (mv_1 - mv_0)$ (5)



Hình 2.53S2

-Thanh AB $\begin{cases} (X+R) = \dfrac{m}{2}v_2 & (6) \\ (X-R)\dfrac{l}{2} = \dfrac{1}{12}(\dfrac{m}{2})l^2\omega_2 & (7) \end{cases}$

-Thanh BC $\begin{cases} -R = \dfrac{m}{2}v_3 & (8) \\ v_3 = v_B = -\omega_2\dfrac{l}{2} + v_2 & (9) \end{cases}$

-Bảo toàn động năng trong va chạm đàn hồi:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + (\frac{1}{2}\frac{1}{12}\frac{m}{2}l^2\omega_2^2 + \frac{1}{2}\frac{m}{2}v_2^2) + \frac{1}{2}\frac{m}{2}v_3^2 \qquad (10)$$

Từ các biểu thức trên, ta suy ra được

$$v_1 = \frac{27}{37}v_0;\ v_2 = \frac{28}{37}v_0;\ \omega_2 = \frac{72}{37}\frac{v_0}{l}; v_3 = -\frac{8}{37}v_0$$

**Bài 30.** Mô men quán tính của hệ 3 quả cầu và thanh nhẹ đối với trục quay ở O:

$$I = m_1 l^2 + m_1(2l)^2 + m_1(3l)^2 = 14m_1l^2 \qquad (1)$$

Gọi $\omega$ là tốc độ góc của hệ 3 quả cầu và thanh nhẹ ngay sau va chạm.

Xét hệ gồm viên đạn và hệ (3 quả cầu + thanh). Mômen động lượng của hệ ngay lúc bắt đầu va chạm đến lúc vừa va chạm xong được bảo toàn:

$$L_{0(m_2)} + L_{0(3m_1)} = L_{(m_2)} + L_{(3m_1)} \Leftrightarrow I_2.\frac{v_0}{2l} = I\omega + I_2\frac{v}{2l}$$

$$\Leftrightarrow m_2v_0 2l = I\omega + m_2 v 2l \Rightarrow \omega = \frac{m_2(v_0 - v)}{7m_1 l} \qquad (2)$$

Gọi $\alpha$ là góc cực đại tạo bởi thanh và phương thẳng đứng sau va chạm. Cơ năng của hệ 3 quả cầu và thanh được bảo toàn nên ta có

$$\frac{1}{2}I\omega^2 = m_1gl(1-\cos\alpha)+m_1g2l(1-\cos\alpha)+m_1g3l(1-\cos\alpha)+\frac{1}{2}I\omega'^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}14m_1l^2\left[\frac{m_2(v_0-v)}{7m_1l}\right]^2 = 6m_1gl(1-\cos\alpha)+\frac{1}{2}14m_1l^2\omega'^2$$

$$\Leftrightarrow 7\left[\frac{m_2(v_0-v)}{7m_1}\right]^2 = 6gl(1-\cos\alpha)+7l^2\omega'^2 \quad (3)$$

-Điều kiện để thanh cứng quay tròn quanh O, khi đó $\alpha=\pi$ và $\omega'^2>0$.

Khi đó $\rightarrow \dfrac{m_2(v_0-v)}{7m_1} > \sqrt{\dfrac{12gl}{7}}$ (4)

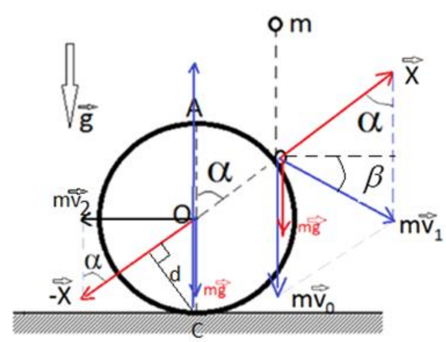
-Nếu $\dfrac{m_2(v_0-v)}{7m_1} \le \sqrt{\dfrac{12gl}{7}}$ thì góc quay cực đại quanh O là $\alpha_{max}$ được xác định bằng biểu thức

$$\cos\alpha_{max} = 1-\frac{7}{6gl}\left[\frac{m_2(v_0-v)}{7m_1}\right]^2 \quad (5)$$

**Bài 31.** Vận tốc quả cầu nhỏ lớn nhất trước khi va chạm: $v_0=\sqrt{2gR}$

Sau khi vừa va chạm xong, gọi $\vec{v_1}$ vận tốc quả cầu nhỏ, $\vec{v_2}$ và $\vec{\omega}$ là vận tốc tịnh tiến và vận tốc góc của quả cầu lớn.

a. Va chạm đàn hồi.



Hình 2.55S1

**Thứ nhất**: Trong trường hợp này, thành phần xung lực $-\vec{X}$ theo phương thẳng đứng tác dụng lên quả cầu rỗng luôn cân bằng với hợp hai xung lực $(\vec{N}+\vec{P})\Delta t$ nên quả cầu không nảy lên.

**Thứ hai**: Thành phần $-\vec{X}$ trên phương ngang có tác dụng làm cho khối tâm O quả cầu chuyển động tịnh tiến, không có tác dụng làm quay.

Theo lập luận trên thì tốc độ góc của quả cầu rỗng $\omega=0$

-Quả cầu lớn $mv_2 = X\sin\alpha = X\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (1)

-Quả cầu nhỏ: $m\vec{v_1}-m\vec{v_0}=\vec{X} \rightarrow m\vec{v_1}=m\vec{v_0}+\vec{X}$

$$(m\vec{v_1})^2 = (m\vec{v_0})^2 + \left(\vec{X}\right)^2 + 2m\vec{v_0}.\vec{X}$$

$$\Rightarrow (mv_1)^2 = (mv_0)^2 + \left(X\right)^2 + 2mv_0 X\cos 45^0$$

Thay X từ (1) vào ta được $(mv_1)^2 = (mv_0)^2 + \left(mv_2\sqrt{2}\right)^2 + 2mv_0 mv_2$

$$v_1^2 = v_0^2 + 2v_2^2 - 2v_0v_2 \qquad (2)$$

Vì va chạm đàn hồi, nên bảo toàn động năng khi va chạm:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 \rightarrow v_1^2 + v_2^2 = v_0^2 \rightarrow v_1^2 = v_0^2 - v_2^2 \qquad (3)$$

Thay (2) và (3) vào ta được $v_0^2 - v_2^2 = v_0^2 + 2v_2^2 - 2v_0v_2 \rightarrow v_2 = \frac{2}{3}v_0$ (4)

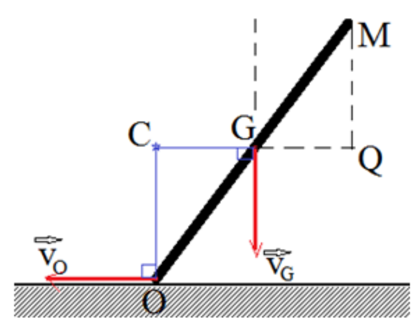
Do đó ta tìm được $v_1 = \frac{\sqrt{5}}{3}v_0$ (5)

Đặt $\beta$ là góc tạo bởi $\vec{v_1}$ và phương ngang. Theo định luật bảo toàn động lượng trên phương ngang ta có

$$mv_2 = mv_1\cos\beta \rightarrow \cos\beta = \frac{v_2}{v_1} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \beta \approx 26,56^0$$

b. **Va chạm mềm**. Vì trước và sau va chạm, khối tâm G của hệ hai vật luôn chuyển động trên phương thẳng đứng, còn sau va chạm O chỉ chuyển động theo phương ngang( không nảy lên), nên ta dễ dàng xác định tâm quay tức thời của hệ hai quả cầu trong va chạm.

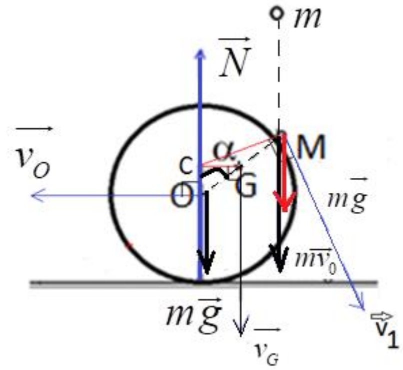
(*Khi đó ta coi đoạn OM là một cái thanh có trọng tâm G chỉ đổ xuống theo phương thẳng đứng và đầu O chỉ trượt theo phương ngang khi va chạm)*




Hình 2.55S2

Gọi C là tâm quay tức thời của hệ hai quả cầu khi va chạm. C là điểm giao nhau giữa hai đường thẳng vuông góc giá véc tơ $\vec{v_O}$ và $\vec{v_G}$ được vẽ từ O và G

-Nếu bỏ qua thời gian va chạm thì ta bỏ qua xung lực do trọng lực gây ra đối với cực C, nên momen động lượng đối với cực C là bảo toàn:



Hình 2.55S3

Khi đó $mv_0R\dfrac{\sqrt{2}}{2} = I_C\omega = (\dfrac{2}{3}mR^2 + mOC^2 + mCM^2)\omega$

Với $CM^2 = CQ^2 + QM^2 = (R\dfrac{\sqrt{2}}{2})^2 + (\dfrac{R}{2}\dfrac{\sqrt{2}}{2})^2 = \dfrac{1}{2}(1+\dfrac{1}{4})R^2 = R^2\dfrac{5}{8}$

Và $OC^2 = (\dfrac{R}{2\sqrt{2}})^2 = R^2.\dfrac{1}{8}$

$$mv_0R\frac{\sqrt{2}}{2} = (\frac{2}{3}mR^2 + \frac{1}{8}mR^2 + \frac{5}{8}mR^2)\omega = \frac{17}{12}mR^2\omega \rightarrow v_0\sqrt{2} = \frac{17}{6}R\omega \Rightarrow \omega = \frac{6\sqrt{2}}{17}\frac{v_0}{R}$$

Vậy: $\omega = \dfrac{6\sqrt{2}}{17}\dfrac{v_0}{R}$

Vì tâm quay tức thời C vẫn chuyển động theo phương thẳng đứng, nên vận tốc khối tâm O quả cầu là $v = \omega.OC = \dfrac{6\sqrt{2}}{17}\dfrac{v_0}{R}.\dfrac{R}{2\sqrt{2}} = \dfrac{3}{17}v_0 = \dfrac{3}{17}\sqrt{2gR}$

Quả cầu nhỏ có vận tốc $v_1 = \omega.CM = \dfrac{6\sqrt{2}}{17}\dfrac{v_0}{R}.\dfrac{R\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{5}}{17}v_0 = \dfrac{3}{17}\sqrt{10gR}$

*Tại sao không lấy trục O: Vì ta không biết được vận tốc của m đối với O (do O trượt sang trái đồng thời O thu gia tốc theo phương ngang khi va chạm; còn m thì có vận tốc $\vec{v_1}$ đối với C và vuông góc với MC, vì C đứng yên)*

*+Xét quả cầu sau va chạm đối với cực C:* $\overrightarrow{L_{C1}} = \overrightarrow{L_O} + \overrightarrow{CO} \wedge m\overrightarrow{v_0} = \dfrac{2}{3}mR^2\vec{\omega} + mCO^2\vec{\omega}$

*+Xét viên bi sau va chạm đối với cực C:* $\overrightarrow{L_{C2}} = \overrightarrow{CM} \wedge m\overrightarrow{v_2} = mCM^2\vec{\omega}$

*Nên tổng momen động lượng hệ đối với C sau va chạm:*

$$\overrightarrow{L_C} = (\frac{2}{3}mR^2 + mCO^2)\vec{\omega} + \mathrm{m}\mathrm{CM}^2\vec{\omega}$$

**Xét momen động lượng hệ đối với cực O(ở đây cực O có vận tốc) thì ta sẽ gặp khó khăn* gì?

$$\overrightarrow{L_O} = \frac{2}{3}mR^2\vec{\omega} + (\overrightarrow{OM} \wedge m_1\overrightarrow{v_{1/O}}) = \frac{2}{3}mR^2\vec{\omega} + m\overrightarrow{OM} \wedge (\vec{v_1} - \vec{v_0})$$

$$\overrightarrow{L_O} = \frac{2}{3}mR^2\vec{\omega} + m(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v_1}) - m(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v_0}) = \frac{2}{3}mR^2\vec{\omega} + m\left[(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{\mathrm{CM}}) \wedge \vec{v_1}\right] + m\left[\overrightarrow{OM} \wedge (-\vec{v_0})\right]$$

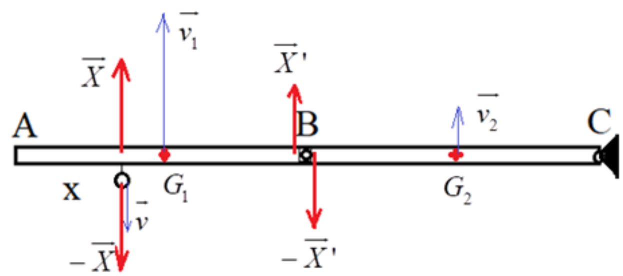
$$\overrightarrow{L_O} = \frac{2}{3}mR^2\vec{\omega} + m(\overrightarrow{OC} \wedge \vec{v_1}) + m(\overrightarrow{CM} \wedge \vec{v_1}) + mRv_0\frac{\vec{\omega}}{\omega}$$

$$\overrightarrow{L_O} = \frac{2}{3}mR^2\vec{\omega} + m(\overrightarrow{OC} \wedge \vec{v_1}) + mCM^2\vec{\omega} + mRv_0\frac{\vec{\omega}}{\omega}$$

$$\overrightarrow{L_O} = \frac{2}{3}mR^2\vec{\omega} + mCM^2\vec{\omega} + \left[mROC\vec{\omega} + m(\overrightarrow{OC} \wedge \vec{v_1})\right] \neq \frac{2}{3}mR^2\vec{\omega} + mCM^2\vec{\omega}$$

**vì** $\left[mROC\vec{\omega} + m(\overrightarrow{OC} \wedge \vec{v_1})\right] \neq \vec{0}$

**Bài 32.** a.Sau va chạm, theo giả thiết hai thanh quay cùng chiều $\omega_1 = \omega_2 = \omega$



Hình 2.56S

-Xét vật : $Mv - Mv_0 = -X \rightarrow v - v_0 = \dfrac{-X}{3m}$ (1)

-Thanh AB:

$$\begin{cases} mv_1 = X - X' \\ X(\frac{l}{2} - h) + X'\frac{l}{2} = I_{G1}\omega_1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_1 = \dfrac{X - X'}{m} \\ X(\frac{l}{2} - h) + X'\frac{l}{2} = \frac{1}{12}ml^2\omega \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_1 = \dfrac{X - X'}{m} & (2) \\ \dfrac{6X}{m}(l - 2h) + \dfrac{6X'}{m}l = l^2\omega & (3) \end{cases}$$

Và $v_1 = \dfrac{3l}{2}\omega$ (4)

-Thanh BC: $\begin{cases} v_2 = \omega\frac{l}{2} \\ X'l = I_{2C}\omega_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_2 = \omega\frac{l}{2} & (5) \\ \dfrac{3X'}{m} = l\omega \rightarrow X' = \dfrac{ml\omega}{3} & (6) \end{cases}$

-Va chạm đàn hồi, nên động năng bảo toàn:

$$\frac{1}{2}3mv_0^2 = (\frac{1}{2}I_{G1}\omega_1^2 + \frac{1}{2}mv_1^2) + \frac{1}{2}I_{2C}\omega_2^2 + \frac{1}{2}3mv^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}3mv_0^2 = (\frac{1}{2}\frac{1}{12}ml^2\omega^2 + \frac{1}{2}mv_1^2) + \frac{1}{2}\frac{1}{3}ml^2\omega^2 + \frac{1}{2}3mv^2$$

$$\Leftrightarrow 3v_0^2 = (\frac{1}{12}l^2\omega^2 + \frac{9}{4}l^2\omega^2) + \frac{1}{3}l^2\omega^2 + 3v^2$$

$$\Leftrightarrow 36v_0^2 = 32l^2\omega^2 + 3v^2 \qquad (7)$$

Thay (4),(6) vào (2) ta được $\frac{3}{2}\omega l = \frac{X - \frac{m\omega l}{3}}{m} \to X = \frac{5}{6}m\omega l$ (8)

Thay (6), (8) vào (3) ta được: $5\omega l(l-2h) + 2\omega l^2 = l^2\omega \to (l-2h) = \frac{-l}{5} \to l + \frac{l}{5} = 2h$

Hay $h = \frac{3l}{5}$ (9)

b. Thay (8) vào (1) ta được $v - v_0 = \frac{-\frac{5}{6}m\omega l}{3m} \to v = v_0 - \frac{5}{18}\omega l$ (10)

Thay (10) vào (7) ta được

$$\Leftrightarrow 36v_0^2 = 32l^2\omega^2 + 3(v_0 - \frac{5}{18}\omega l)^2 \to 36v_0^2 = 32l^2\omega^2 + 3\left[v_0^2 - \frac{5}{9}v_0\omega l + (\frac{5}{18}\omega l)^2\right]$$

$$\to (32 + \frac{25}{108})(\omega l)^2 - \frac{5}{3}v_0\omega l - 33v_0^2 = 0$$

$$\Delta = (\frac{5}{3}v_0)^2 + 4.33v_0^2(32 + \frac{25}{108}) \to \sqrt{\Delta} = v_0\sqrt{(\frac{5}{3})^2 + 4.33(32 + \frac{25}{108})}$$

$$\omega l = \frac{\frac{5}{3} + \sqrt{(\frac{5}{3})^2 + 4.33(32 + \frac{25}{108})}}{2(32 + \frac{25}{108})}v_0$$

**Bài 33.**

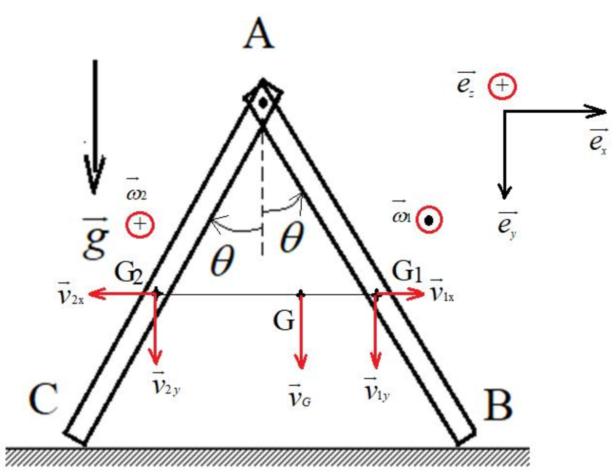
1.a Gọi vận tốc khối tâm và vận tốc góc của thanh thứ nhất lần lượt là $\vec{v_1} = \overrightarrow{v_{1x}} + \overrightarrow{v_{1y}}, \vec{\omega}_1$ và của thanh thứ 2 lần lượt là $\vec{v_2} = \overrightarrow{v_{2x}} + \overrightarrow{v_{2y}}, \vec{\omega}_2$; vận tốc khối tâm G là $\vec{v_G}$.

Ta dễ dang thấy A,B,C luôn tạo thành 1 tam giác cân. Do vậy khối tâm hai thanh $G_1$, $G_2$ và khối tâm G của hệ luôn nằm trên một đường thẳng nằm ngang.

Ta có quan hệ động học :

$$v_{1y} = v_{2y} = v_G = \frac{dy_G}{dt} = \frac{d(l-h_G)}{dt} = \frac{d(l - \frac{l}{2}\cos\theta)}{dt} = \frac{l}{2}sin\theta.\theta' \quad (1)$$

$$\vec{\omega}_1 = -\vec{\omega}_2 = -\frac{d\theta}{dt}\vec{e_z} = -\theta'\vec{e_z} \rightarrow \omega_2 = -\omega_1 = \theta' = \omega \quad (2)$$




Vì G không chuyển động theo phương ngang, nên

$$\overline{GG_1}.2m + \overline{GG_2}.m = 0 \rightarrow \overline{GG_2} = -2\overline{GG_1}$$

$$v_{2x} = -2v_{1x} \quad (3)$$

Mặt khác về hình học $\overline{GG_1} - \overline{GG_2} = 2.(\frac{l}{2}\sin\theta) = l\sin\theta$

$$v_{1x} - v_{2x} = lcos\theta.\theta' \quad (4)$$

Thay (3)vào (4) ta được $3v_{1x} = lcos\theta.\theta'$. Ta suy ra được

$$v_{1x} = \frac{lcos\theta.\theta'}{3} \quad (5)$$

$$v_{2x} = -\frac{2lcos\theta.\theta'}{3} \qquad (6)$$

Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng:

$$\frac{1}{2}.2m.v_1^2 + \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + 2mgh_1 + \frac{1}{2}m.v_2^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 + mgh_2 = 3mg\frac{l}{2}$$

Lưu ý $I_1 = \frac{1}{12}2ml^2 = \frac{1}{6}l^2; I_2 = \frac{1}{12}ml^2;\ h_1 = h_2 = h_G = \frac{l}{2}\cos\theta$

Do đó $v_1^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{6}l^2\omega_1^2 + 2g\frac{l}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}v_2^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{12}l^2\omega_2^2 + g\frac{l}{2}\cos\theta = 3g\frac{l}{2}$

$$v_1^2 + \frac{1}{8}l^2\omega^2 + \frac{1}{2}v_2^2 + 3g\frac{l}{2}\cos\theta = 3g\frac{l}{2}$$

$$(v_{1x}^2 + v_{1y}^2) + \frac{1}{8}l^2\omega^2 + \frac{1}{2}(v_{2x}^2 + v_{2y}^2) + 3g\frac{l}{2}\cos\theta = 3g\frac{l}{2} \qquad (7)$$

Thay (1), (2), (5), (6) vào (7) ta được

$$(\frac{lcos\theta.\omega}{3})^2 + (\frac{l}{2}sin\theta.\omega)^2 + \frac{1}{8}l^2\omega^2 + \frac{1}{2}(-\frac{2lcos\theta.\omega}{3})^2 + \frac{1}{2}(\frac{l}{2}sin\theta.\omega)^2 = 3g\frac{l}{2}(1-\cos\theta)$$

$$\omega^2 l^2\left[(\frac{cos\theta}{3})^2 + (\frac{1}{2}sin\theta)^2 + \frac{1}{8} + \frac{1}{2}(\frac{2cos\theta}{3})^2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}sin\theta)^2\right] = 3g\frac{l}{2}(1-\cos\theta)$$

$$\omega^2 l\left[\frac{cos^2\theta}{3} + \frac{3}{8}sin^2\theta + \frac{1}{8}\right] = \frac{3g}{2}(1-\cos\theta)$$

$$\omega^2 l\left[\frac{8cos^2\theta + 9sin^2\theta}{24} + \frac{1}{8}\right] = \frac{3g}{2}(1-\cos\theta)$$

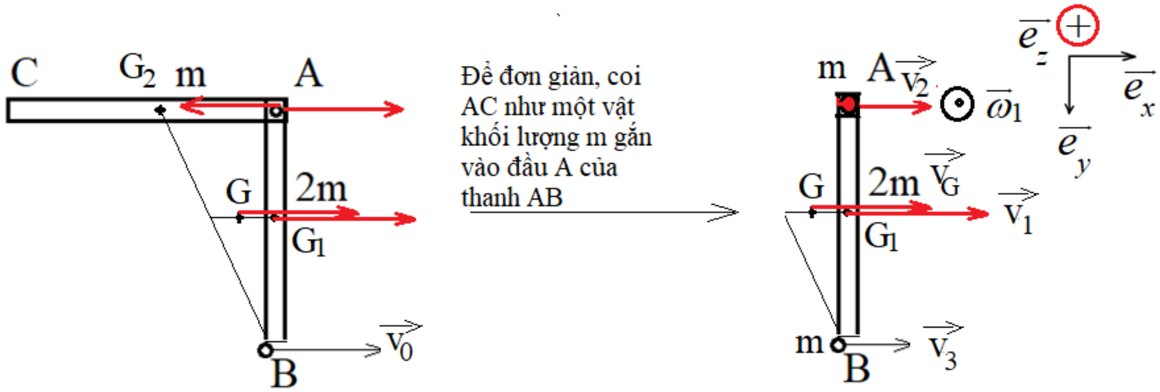
$$\omega^2 l\left[\frac{8cos^2\theta + 9sin^2\theta}{12} + \frac{1}{4}\right] = 3g(1-\cos\theta)$$

$$\omega^2\left[sin^2\theta + 11\right] = 36\frac{g}{l}(1-\cos\theta) \to \omega = 6\sqrt{\frac{g}{l}\frac{(1-\cos\theta)}{(sin^2\theta+11)}} \qquad (8)$$

b. ( 1,0 đ) Khi chốt A sắp chạm đất $\theta \to \frac{\pi}{2}; \cos\theta \to 0, sin\theta \to 1$

thì $$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}}$$

2. Sau khi vừa va chạm xong, gọi $\vec{\omega}_1$ là vận tốc góc thanh thứ nhất; $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ là vận tốc lần lượt của thanh thứ nhất và thứ 2 sau va chạm; $\vec{v}_3$ là vận tốc bi; $\vec{v}_G$ là vận tốc khối tâm hệ.




Áp dụng định luật bảo toàn động lượng cho vận tốc khối tâm $2m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 + m\vec{v}_3 = 4m\vec{v}_G$

Ta thấy $\vec{v}_2 // \vec{v}_3 // \vec{v}_G$ nên $\vec{v}_1 // \vec{v}_G$

Do đó $2mv_1 + mv_2 + mv_3 = 4mv_G = mv_0$

$\rightarrow 2v_1 + v_2 + v_3 = v_0$ (2.1)

Bảo toàn momen động lượng đối với cực đi qua G1 tai thời điểm va chạm:

$$(\overrightarrow{G_1B} \wedge \overrightarrow{mv_0}) = (\overrightarrow{G_1B} \wedge m\vec{v}_3) + \left[(\overrightarrow{G_1A} \wedge m\vec{v}_2) + I_1\vec{\omega}_1\right]$$

$$(\overrightarrow{G_1B} \wedge \overrightarrow{mv_0}) = (\overrightarrow{G_1B} \wedge m\vec{v}_3) + \left[(\overrightarrow{G_1A} \wedge m\vec{v}_2) + I_1\vec{\omega}_1\right]$$

$$\frac{l}{2}mv_0(-\vec{e}_z) = \frac{l}{2}mv_3(-\vec{e}_z) + \left[\frac{l}{2}mv_2(\vec{e}_z) + \frac{1}{12}.2ml^2\omega_1(-\vec{e}_z)\right]$$

$$v_0 = v_3 - v_2 + \frac{1}{3}l\omega_1 \qquad (2.2)$$

**Mặt khác ta có phương trình liên kết tại chốt A**:

$$\begin{cases}\overrightarrow{v_2}=\overrightarrow{v_{2/A}}+\overrightarrow{v_A}\\ \overrightarrow{v_1}=\overrightarrow{v_{1/A}}+\overrightarrow{v_A}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{v_2}=\vec{0}+\overrightarrow{v_A}\\ \overrightarrow{v_1}=(\overrightarrow{\omega_1}\wedge\overrightarrow{AG_1})+\overrightarrow{v_A}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{v_A}=v_2\overrightarrow{e_x}\\ v_1\overrightarrow{e_x}=\omega_1\dfrac{l}{2}\overrightarrow{e_x}+\overrightarrow{v_A}\end{cases}$$

$$\Rightarrow v_1\overrightarrow{e_x}=\omega_1\frac{l}{2}\overrightarrow{e_x}+v_2\overrightarrow{e_x}$$

$$\rightarrow v_1=\omega_1\frac{l}{2}+v_2 \qquad (2.3)$$

**Liên kết giữa v₁ và v₃:** $\overrightarrow{v_3}=\overrightarrow{v_{3/1}}+\overrightarrow{v_1}=(\overrightarrow{\omega_1}\wedge\overrightarrow{G_1B})+\overrightarrow{v_1}\rightarrow v_3=\omega_1\frac{l}{2}+v_1$ (2.4)

Từ các phương trình trên suy ra ta được $v_3=\omega_1\frac{l}{2}+\omega_1\frac{l}{2}+v_2=\omega_1 l+v_2$

Từ đó

$$\begin{cases}2v_1+v_2+v_3=v_0\\ v_0=v_3-v_2+\dfrac{1}{3}l\omega_1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}2(\omega_1\dfrac{l}{2}+v_2)+v_2+(\omega_1 l+v_2)=v_0\\ v_0=(\omega_1 l+v_2)-v_2+\dfrac{1}{3}l\omega_1\end{cases}$$

$$\rightarrow\begin{cases}(2\omega_1 l+4v_2)=v_0\\ v_0=\dfrac{4}{3}l\omega_1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}(\dfrac{3}{2}v_0+4v_2)=v_0\\ \omega_1=\dfrac{3}{4}\dfrac{v_0}{l}\end{cases}$$

Suy ra $v_2=-\frac{v_0}{8}$, $\omega_1=\frac{3}{4}\frac{v_0}{l}$

**Bài 34.** 1. Mô men: $I=\int_r^R\left(\frac{m}{\pi(R^2-r^2)}\right)2\pi r_1^3dr_1$ ; r = R/2, $I=m\frac{(R^2+r^2)}{2}=\frac{5mR^2}{8}$

2. Gọi X là xung lực của lực ma sát ở nơi tiếp xúc giữa hai đĩa; $v_{1\perp}$, $v_{2\perp}$ tương ứng là độ lớn thành phần vuông góc của vận tốc hai đĩa với đường nối tâm của chúng, có phương ngược với chiều quay của các đĩa này:

$m_1v_{1\perp}=m_2v_{2\perp}$ (1)

$I(\omega_1'-\omega_1)=-RX$ ;

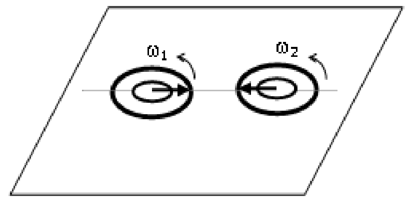
$I\ (\omega_2'-\omega_2)=-RX$

$\Rightarrow \omega_1' - \omega_1 = \omega_2' - \omega_2$ (2)

$m_1 v_{1\perp} = -I(\omega_1' - \omega_1)/R$ (3)

**Theo giả thiết, sau va chạm, thành phần vuông góc của vận tốc dài của các tiếp điểm ở hai vành đĩa bằng nhau:**

$v_\perp = \omega_1' R - v_{1\perp} = -\omega_2' R + v_{2\perp}$ (4)




Giải hệ 4 phương trình, 4 ẩn: $\omega'_1$, $\omega'_2$, $v_{1\perp}$;$v_{2\perp}$;

$\omega_1' + \frac{I}{mR^2}\left(\omega_1' - \omega_1\right) = -\omega_2' - \frac{I}{mR^2}\left(\omega_2' - \omega_2\right)$ (5).

Từ (2) và (5):

$$\omega_1' = \frac{(1+\frac{2I}{mR^2})\omega_1 - \omega_2}{2+\frac{2I}{mR^2}}, \quad \omega_2' = \frac{(1+\frac{2I}{mR^2})\omega_2 - \omega_1}{2+\frac{2I}{mR^2}};$$

Thay $I=\frac{5mR^2}{8}$, thì:

$\omega_1' = \frac{9\omega_1 - 4\omega_2}{13}$; $\omega_2' = \frac{9\omega_2 - 4\omega_1}{13}$. Còn

$v_{1\perp} = \frac{5(\omega_1 + \omega_2)R}{26}$;

$v_\perp = \omega_1' R - v_{1\perp} = \frac{(\omega_1 - \omega_2)R}{2}$

( nếu $\omega_1 > \omega_2$ $v > 0$, vận tốc này có hướng theo chiều quay của đĩa 1)

# CHƯƠNG III.
# DAO ĐỘNG VẬT RẮN

**Bài 1.**

1.Sau khi va chạm mềm mô men quán tính của hệ ( gồm thanh và vật ) là :

$$I = \frac{Ml^2}{3} + ml^2$$

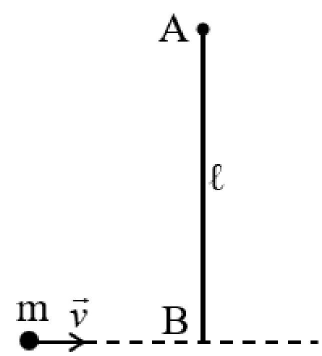
+ Phương trình dao động của thanh :

$$\vec{M} = I\vec{\gamma}$$

$$\frac{1}{2}Mgl\sin\theta + mgl\sin\theta = gl(\frac{M}{2} + m)\theta = -(\frac{Ml^2}{3} + ml^2)\ddot{\theta}$$

Với $\theta$ nhỏ $\sin\theta \approx \theta$ khi đó ta được phương trình vi phân bậc hai :

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$$




+ Nghiệm của phương trình là hàm dao động điều hoà :

$\theta = \theta_0 \sin(\omega t + \varphi)$ với $\omega = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{g(M+2m)}{l(M+3m)}}$.

+ Chọn gốc thời gian là thời điểm ngay sau va chạm $(t_0 = 0)$ ta có

$\omega.\theta_0 = \theta_0' = \frac{d\theta}{dt}|_{t=0}$ (1) ( vận tốc góc ngay sau va chạm )

+ Áp dụng định luật bảo toàn mô men động lượng cho hệ ( gồm thanh và vật ) ta có :

$mv_0 l = I\theta_0' = (\frac{Ml^2}{3} + ml^2)\theta_0' \Rightarrow \theta_0' = \frac{3mv_0}{(M+3m)l}$ (2)

+Thay (1) vào (2) ta được biên độ góc:

$\theta_{max} = \theta_0 = \frac{3mv_0}{(M+3m)\omega l}$. với $\omega = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{g(M+2m)}{l(M+3m)}}$.

2. Chọn mốc thế năng tại B .

Ta có cơ năng của hệ ( gồm thanh và vật ) ngay sau va chạm tại B :

$$W_B = W_{t_B} + W_{d_B}$$

$$= Mg\frac{l}{2} + \frac{I(\theta_0')^2}{2} = Mg\frac{l}{2} + \frac{1}{2}I\left(\frac{mv_0 l}{I}\right)^2 = Mg\frac{l}{2} + \frac{3m^2v_0^2}{2(M+3m)} \quad (3)$$

Ta có cơ năng của hệ ( gồm thanh và vật ) tại B' là điểm cao nhất :

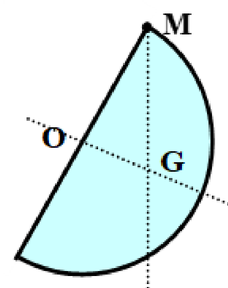
$$W_{B'} = W_{t_{B'}} + W_{d_{B'}} = Mg\frac{3l}{2} + 2lmg + W_{d_{B'}} \quad (4)$$

+ Theo yêu cầu của bài để v nhỏ nhất thì $W_{d_{B'}} = 0$ . Khi đó theo (3) và (4) ta được :

$$Mg\frac{l}{2} + \frac{3m^2{v_0}^2}{2(M+3m)} = \frac{(3M+4m)gl}{2} \Rightarrow {v_0}^2 = \frac{2(M+2m)(M+3m)gl}{3m^2},$$

$$\Rightarrow v_0 = \frac{1}{m}\sqrt{\frac{2(M+2m)(M+3m)gl}{3}}$$

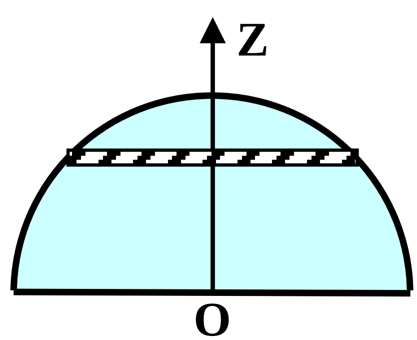
**Bài 2.**




- Do tính chất đối xứng, khối tâm của tấm sẽ nằm trên trục Oz. Chia tấm thành những tấm nhỏ dày dz, khối lượng

$$dm = \frac{2m}{\pi r^2}2\sqrt{R^2 - z^2}dz$$

1- Vị trí khối tâm:




- Chọn trục Oz qua tâm và vuông góc với đường kính.

- Vị trí khối tâm của tấm

$$z_G = \frac{1}{m}\int zdm = \frac{4}{\pi R^2}\int_0^R z\sqrt{R^2 - z^2}.dz$$

- Tính $\int_0^R z\sqrt{R^2-z^2}.dz = \frac{1}{2}\int_0^R \sqrt{R^2-z^2}.dz^2 = -\frac{1}{2}\int_0^R \sqrt{R^2-z^2}.d\left(R^2-z^2\right) = \frac{R^3}{3}$

- Tìm được: $z_G = \frac{4R}{3\pi}$

2. Chu kì dao động của tấm quanh trục qua M: $T = 2\pi\sqrt{\frac{I_M}{mg.MG}}$

- Tính $I_M$:

+ do tính đối xứng nên $I_O = \frac{1}{2}\times\frac{2mR^2}{2} = \frac{mR^2}{2}$

+ $I_O = I_G + m\times OG^2 \Rightarrow I_G = I_O - m\times OG^2$

$\Rightarrow I_M = I_G + m.MG^2 = I_o - m.OG^2 + m.MG^2 = I_o + mR^2 = \frac{3mR^2}{2}$

- Tìm $MG = \sqrt{R^2 + OG^2} = \sqrt{R^2 + \frac{16R^2}{9\pi^2}} = \frac{R}{3\pi}\sqrt{9\pi^2+16}$

- Tìm được chu kì dao động của vật là: $T = 2\pi\sqrt{\frac{9\pi R}{2g\sqrt{9\pi^2+16}}}$ .

3. Chu kì dao động quanh trục qua O: $T_O = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\frac{3}{2}mg.d}}$

- Tìm mô men quán tính của hệ đối với tâm O:

$$I = \frac{mR^2}{2} + \frac{m}{2}x^2 = \frac{m}{2}\left(R^2 + x^2\right)$$

- Vị trí khối tâm của hệ:

$$d=\frac{m\times OG+\frac{m}{2}x}{\frac{3}{2}m}=\frac{m\times\frac{4R}{3\pi}+\frac{m}{2}x}{\frac{3}{2}m}=\frac{8R+3\pi x}{9\pi}$$

Tìm được: $T_O=2\pi\sqrt{\dfrac{I}{\frac{3}{2}mg.d}}=2\pi\sqrt{\dfrac{3\pi\left(R^2+x^2\right)}{g\left(8R+3\pi x\right)}}$

- $T_O$ min $\Leftrightarrow y=\dfrac{R^2+x^2}{8R+3\pi x}$ min

Xét $y=\dfrac{R^2+x^2}{8R+3\pi x}\Leftrightarrow x^2-3\pi yx+\left(R^2-8yR\right)=0$

Phương trình có nghiệm $\Rightarrow\Delta=9\pi^2y^2-4\left(R^2-8yR\right)\geq 0$

$$\Rightarrow y_{\min}=\frac{-16+2\sqrt{9\pi^2+64}}{9\pi^2}R$$

- Tìm được $T_O=2\pi\sqrt{\dfrac{\left(-16+2\sqrt{9\pi^2+64}\right)R}{3\pi g}}$ khi $x=\dfrac{-8+\sqrt{9\pi^2+64}}{3\pi}R$

**Bài 3.**

Chọn đĩa làm hệ qui chiếu. Chính lực ly tâm tác dụng lên thanh làm cho thanh dao động.

Tuy nhiên gia tốc ly tâm thay đổi theo khoảng cách từ O đến một điểm trên thanh, do đó ta phải sử dụng công cụ tích phân.

Chia thanh AB thành những đoạn nhỏ có chiều dài *dx*, có khối lượng $dm=\dfrac{m}{l}dx$

Lực ly tâm tác dụng lên phần tử *dm* là: $dF=dm.\omega^2.r=\dfrac{m}{l}dx.\omega^2.r$

Ta có: $dM=dF.x.\sin\beta=\dfrac{m}{l}.\omega^2.r.\sin\beta.x.dx$ (với $x=AI$)

Áp dụng định lý hàm sin trong $\Delta OAI$, ta có: $\dfrac{a}{\sin\beta}=\dfrac{r}{\sin\alpha}\Rightarrow r.\sin\beta=a.\sin\alpha$

Do đó: $dM = \frac{m}{l}.\omega^2.a.\sin\alpha.x.dx$

Vì $\alpha$ là góc nhỏ nên: $\sin\alpha \approx \alpha$

Suy ra: $dM = \frac{m}{l}.\omega^2.a.\alpha.x.dx$

$$M = \int_0^l \frac{m}{l}.\omega^2.a.\alpha.x.dx = \frac{m}{l}.\omega^2.a.\alpha\int_0^l x.dx = \frac{m}{l}.\omega^2.a.\alpha\frac{l^2}{2} \Rightarrow M = \frac{1}{2}m.l.\omega^2.a.\alpha \quad (1)$$

Phương trình chuyển động quay của thanh AB: $M = -I\gamma \quad (2)$

Trong đó: $I = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ml^2 \quad (3)$

(I là momen quán tính của thanh đối với trục quay A)

Thay (1) và (3) vào (2):

$$\frac{1}{2}m.l.\omega^2.a.\alpha = -\frac{1}{3}m.l^2.\gamma \Rightarrow \gamma = -\frac{3}{2}.\frac{\omega^2.a}{l}\alpha$$

Suy ra: $\alpha^{//} = \gamma = -\frac{3}{2}.\frac{\omega^2.a}{l}\alpha \quad (4)$

Đặt $\omega_0^2 = \frac{3}{2}.\frac{\omega^2.a}{l}$ suy ra: $\omega_0 = \omega\sqrt{\frac{3a}{2l}}$

(4) trở thành $\alpha^{//} = -\omega_0^2\alpha$ : thanh AB dao động điều hoà đối với đĩa.

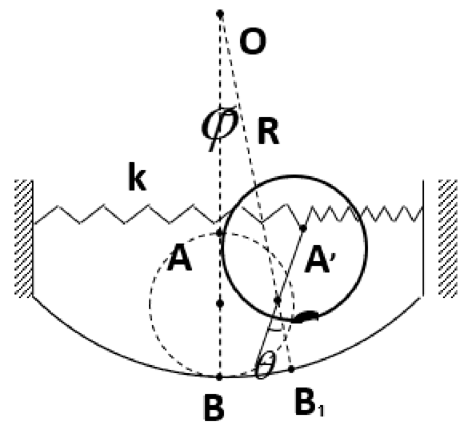
**Bài 4.** Gọi $\theta$ là góc quay quanh trục C của trụ, $\omega_1$ là vận tốc góc của chuyển động quay quanh trục và V là vận tốc tịnh tiến của trục.

$$\omega_1 = \theta' = \frac{v}{r}$$

Mặt khác, ta có: $v = \varphi'(R - r) \Rightarrow \omega_1.r = \varphi'(R-r) \Rightarrow r\theta = (R-r)\varphi$

Động năng: $E_d = \dfrac{mv^2}{2} + \dfrac{1}{2}I\omega_1^2 = \dfrac{3}{4}m(R-r)^2(\varphi')^2$ víi

$I = \dfrac{1}{2}mr^2$




Thế năng: $E_t = \dfrac{2kx^2}{2} + \dfrac{1}{2}mg(R-r)\varphi^2$

$x = r\theta + (R-r)\varphi = 2(R-r)\varphi$

Do đó:

$$E_t = k.4(R-r)^2\varphi^2 + \frac{1}{2}mg(R-r)\varphi^2 = \left[4k + \frac{mg}{2(R-r)}\right](R-r)^2\varphi^2$$

Cơ năng: $E = E_t + E_d = \text{const}$ . Lấy đạo hàm hai vế

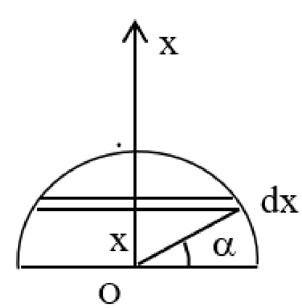
$$\frac{3}{4}m(\varphi')^2 + \left[4k + \frac{mg}{2(R-r)}\right]\varphi^2 = 0 \;\Rightarrow\; \omega = \frac{4k + \dfrac{mg}{2(R-r)}}{\dfrac{3}{4}m} = \frac{16k}{3m} + \frac{2g}{3(R-r)}$$

Vậy chu kỳ dao động $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{2}{3}\dfrac{g}{(R-r)} + \dfrac{16k}{m}}}$

Trường hợp riêng: - Khi $k = 0$ thì $\omega = \dfrac{2g}{3(R-r)}$

- Khi $R \to \infty$ thì : $\omega = \dfrac{16k}{3m}$

**Bài 5.**



Hình 1

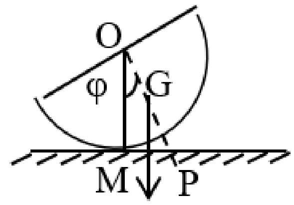
1. Do đối xứng, G nằm trên trục đối xứng Ox. Chia bán cầu thành nhiều lớp mỏng dày dx nhỏ.

Một lớp ở điểm có toạ độ x= R sin α, dày dx= Rcosα.dα có khối lượng dm = $\rho\pi(R\cos\alpha)^2dx$ với $m=\rho\frac{2}{3}\pi R^3$ nên:

$$x_G=\frac{\int_0^m xdm}{m}=\frac{\int_0^{\pi/2}\rho\pi R^4\cos^3\alpha\sin\alpha d\alpha}{m}$$

$$d = x_G=-\frac{\rho\pi R^4}{4m}\cos^4\alpha\Big|_0^{\pi/2}=\frac{\rho\pi R^4}{4m}=\frac{3R}{8}\text{(đpcm)}$$

2. Xét chuyển động quay quanh tiếp điểm M: gọi $\varphi$ là góc hợp bởi OG và đường thẳng đứng



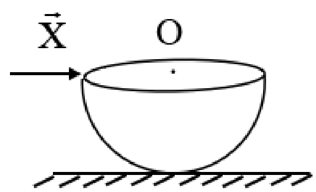
Hình 2

- $mgd\varphi = I_M.\varphi''$ (1) $\Rightarrow \varphi$ biến thiên điều hoà với $\omega=\sqrt{\frac{mgd}{I_M}}$

$I_O$, $I_G$, $I_M$ là các mômen quán tính đối với các trục quay song song qua O,G,M. Mô men quán tính đối với bán cầu là:

$I_O=\frac{2}{5}mR^2$ ; $I_O = I_G + md^2$

$I_M = I_G + m(MG)^2$ . Vì $\varphi$ nhỏ nên ta coi MG = R-d



Hình 2

$\Rightarrow I_M=\frac{2}{5}mR^2+m(R^2-2Rd)=\frac{13}{20}mR^2$

$\omega=\sqrt{\frac{mgd}{I_M}}=\sqrt{\frac{15g}{26R}}\quad\Rightarrow T=2\pi\sqrt{\frac{26R}{15g}}$

3. a) Giải hệ:

$X = mv_G$ (1) $\quad Xd = I_G\omega$ (2) $\quad v_0= v_G +\omega d$ (3)

Với $I_G = I_O- md^2=\frac{83}{320}mR^2$. $\quad v_G=\frac{v_0}{1+md^2/I_G}=\frac{83v_0}{128}$ ; $\omega=\frac{md}{I_G}v_G=\frac{120}{83R}.v_G=\frac{15}{16R}.v_0$

Động năng của bán cầu:

$$E=\frac{mv_G^2}{2}+\frac{I_G\omega^2}{2}=\frac{83mv_0^2}{256}\approx 0,32\ \frac{mv_0^2}{2}$$

b) Khối tâm bán cầu chuyển động với thành phần vận tốc theo phương ngang bằng $v_G$ không đổi. Bán cầu dao động quanh khối tâm.

**Bài 6.** a) $I_O = I_G + mx^2 = \frac{1}{12}ml^2 + mx^2$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_O}{mgx}} = 2\pi\sqrt{\frac{l^2 + 12x^2}{12gx}}$$

b) $T_{min}$ khi $\left(\frac{l^2 + 12x^2}{x}\right)$ min

$$\frac{l^2 + 12x^2}{x} = \frac{l^2}{x} + 12x \geq 2\sqrt{12l^2}$$

$T_{min}$ khi $\frac{l^2}{x} = 12x$ hay $\frac{x}{l} = \frac{1}{\sqrt{12}} \approx 0{,}289$

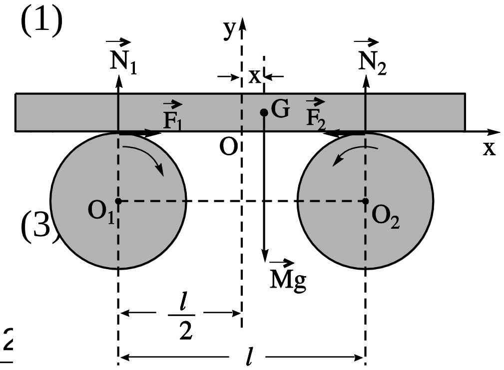
c) $T_{min} = 2\pi\sqrt{\frac{2l^2\sqrt{12}}{12gl}} = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{g\sqrt{12}}} = 2\pi\sqrt{\frac{2.1{,}00}{9{,}8.\sqrt{12}}} \approx 1{,}53$ s.

**Bài 7 .**a) VTCB của thanh là vị trí khi trọng tâm G nằm trên trục Oy. Hình chỉ các lực tác dụng vào thanh khi thanh bị lệch đi một đoạn là x. Ở vị trí này hai lực pháp tuyến $N_1$ và $N_2$ không bằng nhau, do đó hai lực ma sát cũng không bằng nhau. Ta có hệ phương trình:

$\Sigma F_x = F_1 - F_2 = \mu(N_1 - N_2)$ (1)

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_1 + N_2 - mg = 0$

$\sum M_{(O)} = 0 \Rightarrow N_1\left(\frac{l}{2} + x\right) - N_2\left(\frac{l}{2} - x\right) = 0$ (3




Từ (2) và (3): $N_1 = \frac{mg(l - 2x)}{2l}$ ; $N_2 = \frac{mg(l + 2}{2l}$

Thay vào (1) ta được: $F_{hl} = -\frac{2\mu mg}{l}x$ (4)

Vì hợp lực theo phương ngang có dạng $F_{hl}$ = -kx nên thanh DĐĐH theo phương ngang.

b) Tần số góc được tìm thấy từ phương trình chuyển động của thanh:

$$ma = -\frac{2\mu mg}{l}x \text{ hay } x'' + \frac{2\mu g}{l}x = 0.$$

Suy ra: $\omega = \sqrt{\frac{2\mu g}{l}}$.

c) Nếu đổi chiều quay của cả hai xilanh thì $\vec{F}_{hl}$ cũng đổi chiều và đẩy thanh theo hướng dịch chuyển. Thanh chuyển động thẳng nhanh dần.

$$a = \frac{F_{hl}}{m} = \frac{2\mu mgx}{ml} = \frac{2\mu g}{l}x$$

*Chú ý:* Tuy hợp lực của hai lực ma sát trượt có dạng $F_{hl}$ = -kx nhưng không phải là lực thế. Lực ma sát trượt thực hiện công làm giảm cơ năng của hệ. Ở đây ta phải kể đến vai trò của động cơ làm quay hai xilanh. Động cơ thực hiện công để bù vào phần cơ năng mất đi vì chuyển thành nhiệt năng.

**Bài 8.**

*1.Thời điểm tốc độ dài của một điểm trên vành trụ nhỏ bằng tốc độ ván (0,75điểm*

+ Chọn gốc O trùng khối tâm của ván khi nó ở VTCB

+ Khi G có tọa độ x:

$$\begin{cases} \frac{N_1}{N_2} = \frac{l/2 - x}{l/2 + x} \\ N_1 + N_2 = mg \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_1 = \frac{2mg}{l}(l/2 - x) \\ N_2 = \frac{2mg}{l}(l/2 + x) \end{cases}$$

+ Ban dầu ma sát trượt, nên theo định luật II Niu Tơn:

$$F_{ms1} - F_{ms2} = mx^{//} \Rightarrow -\frac{2\mu mg}{l}.x = mx^{//} \Rightarrow x^{//} + \frac{2\mu g}{l}.x = 0 \ (1)$$

Chứng tỏ ban đầu vật chuyển động pt:

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi) \text{ với } \omega_0 = \sqrt{2\mu g / l} = 0,5(rad/s)$$

Trong đó: t = 0 ta có: $\begin{cases} x = 2(m) \\ V = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A.\cos\varphi = 2 \\ \sin\varphi = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2m \\ \varphi = 0 \end{cases}$

Do đó đầu tiên vật dao động theo pt: $x = 2.\cos(0,5t)$ (m) khi mà ma sát giữa ván và các trụ đều là ma sát trượt (khi mà $F_{ms2} = \mu N_2 > \mu N_1 = F_{ms1}$)

+ Khi mà khối tâm G của ván đi về O thì phản lực $N_2$ giảm, $N_1$ tăng nên $F_{ms2}$ giảm còn $F_{ms1}$ tăng (và dễ thấy khi $G \equiv O$ thì $F_{ms1}=F_{ms2}$). Vì vậy, đến thời điểm $t_1$ và vận tốc của ván có độ lớn bằng vận tốc dài của một điểm trên vành trụ nhỏ thì sau đó lực ma sát giữa ván với trụ nhỏ là ma sát nghỉ

+ Ta xác định thời điểm $t_1$:

$$|V_1| = |-\omega_0.A\sin\omega_0 t_1| = \omega r \Rightarrow \sin\omega_0 t_1 = 2.0,25 = 0,5 \Rightarrow \omega_0 t_1 = \pi/6 \Rightarrow t_1 = \pi/3(s)$$

( vì $t_1 < T_0/4$)

**2.** *Tìm sự phụ thuộc của toạ độ khối tâm của ván theo thời gian (1,25điểm)*

+ Ở thời điểm $t_1$ khối tâm ván có tọa độ $x_1 = 2.\cos(0,5.t_1) = \sqrt{3}m$

+ Ta thấy từ thời điểm $t_1$ đến thời điểm $t_2$ (là thời điểm G trùng O: $F_{ms1} = F_{ms2}$) thì ván chuyển động thẳng đều vì lực ma sát nghỉ giữa ván và trụ nhỏ cân bằng với ma sát trượt giữa ván và trụ lớn. Ở thời điểm $t_2$ khối tâm ván có li độ

$x_2 = 0$: ván ở VTCB , nên: $t_2 = t_1 + \frac{|x_1 - x_2|}{V_1} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 4,5(s)$

+ Sau khi qua VTCB thì $N_1 > N_2$ nên $F_{ms1} > F_{ms2}$ : ván trượt trên hai trụ, vì khi đó vận tốc của ván giảm, do đó ván dao động điều hòa với biên độ: $A_1 = \frac{V_1}{\omega_0} = 1m$ .

+ Khi vận tốc của ván đã triệt tiêu, $F_{ms1}$ kéo ván về VTCB theo pt (1), hơn nữa

vận tốc cực đại của ván bây giờ:

$V_{max} = \omega_0.A_1 = 0,5m/s < \omega r < \omega R$ (chỉ bằng vận tốc dài của một điểm trên vành

trụ nhỏ khi ván qua VTCB) nên ván luôn trượt trên hai trụ., nghĩa là nó dao động

điều hòa theo pt (1)

+ Ta có pt dao động của ván sau thời điểm $t_2$:

$x = 1.cos(0,5.t + \varphi_1)$, tại t = 4,5(s):

$$\begin{cases} x = 0 \\ V = -0,5(m/s) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} cos(2,25 + \varphi_1) = 0 \\ -\sin(2,25 + \varphi_1) = -1 \Rightarrow \varphi_1 = -0,68(rad) \end{cases}$$

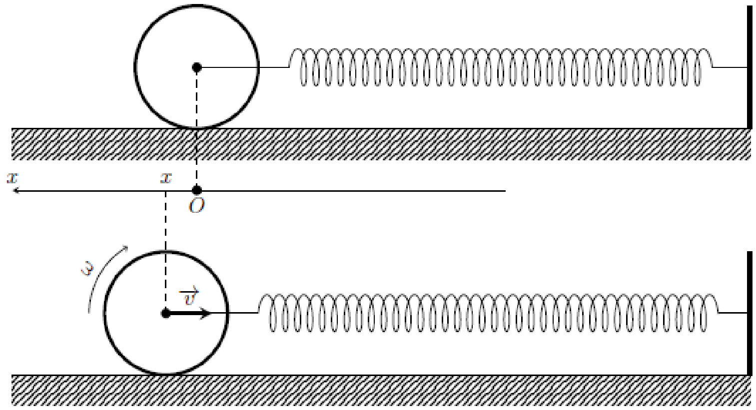
$\Rightarrow x = 1.cos(0,5t\text{-}0,68)(m)$

*Vậy*: * với $0 \le t \le \frac{\pi}{3}(s)$ tọa độ khối tâm của ván là: $x = 2.cos(0,5t)(cm)$

* với $\frac{\pi}{3}(s) \le t \le 4,5(s)$ : tọa độ khối tâm của ván: $x = \sqrt{3} - 0,5.(t - \frac{\pi}{3})(cm)$

* với $t \ge 4,5(s)$ : tọa độ khối tâm của ván: $x = 1.cos(0,5t\text{-}0,68)(m)$

**Bài 9.**




Hình 1

Chọn trục Ox như hình vẽ.

Tại vị trí tâm quả cầu có li độ x, do ma sát nghỉ không sinh công, áp dụng định luật bảo toàn cơ năng:

$$W = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}kx^2 = const$$

Đạo hàm 2 biểu thức trên theo thời gian:

$$mva + I\omega\gamma + kxv = 0$$

Hình trụ đặc nên $I = \frac{1}{2}mR^2$.

Do lăn không trượt nên $\omega = \frac{v}{R}$ và $\gamma = \frac{a}{R}$.

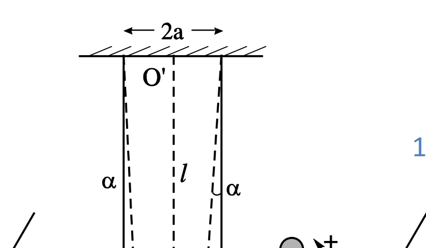
Do đó: $mva + \frac{1}{2}mR^2\frac{v}{R}\frac{a}{R} + kvx = 0$

Suy ra $ma = -\frac{2}{3}kx$

Vậy hình trụ dao động điều hòa với chu kỳ $T = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{2k}}$.

**Bài 10**

Tạ đôi dao động quanh trục OO'. Giả sử tạ đôi ở li độ góc φ. Từ hình vẽ ta có: $l\alpha = a\varphi \Rightarrow \alpha = \frac{a}{l}\varphi$ (1)



$$2T\cos\alpha = 2mg \Rightarrow T = \frac{mg}{\cos\alpha} \qquad (2)$$

Xét chuyển động quay quanh OO':

$$M_{\vec{T},O} = I_O\gamma$$

$$-2T\sin\alpha.a = 2mb^2\varphi''$$

Thay (2) vào ta được:

$$-2mga\tan\alpha = 2mb^2\varphi''$$

$$-ga\alpha = b^2\varphi''$$

Thay (1) vào, ta được: $-\frac{ga^2}{l}\varphi = b^2\varphi''$ hay $\varphi'' + \frac{a^2}{b^2}.\frac{g}{l}\varphi = 0$

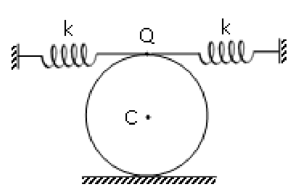
Vậy $\omega = \frac{a}{b}\sqrt{\frac{g}{l}}$ và $T = \frac{2\pi b}{a}\sqrt{\frac{l}{g}}$

**Bài 11.**

- Thế năng: $W_t = 2\left[\frac{1}{2}k(2x)^2\right] = 4kx^2$.

- Động năng: $W_đ = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{4}mv^2$.

- Cơ năng: $4kx^2 + \frac{3}{4}mv^2$ = hằng số.




Đạo hàm 2 vế: $8kxv + \frac{3}{2}mva = 0$

- Tính được: $\omega = = 4\ \frac{rad}{s}$.

- Tính được: $v_C = \omega A = 8\ \frac{cm}{s}$.

- Tính được: $v_Q = 16\frac{cm}{s}$.

- Tính được thời gian: $t = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{8}s = 0,39$ s.

**Bài 12**. a) Tại vị trí cân bằng: $2mg + Mg = k\Delta l_0$

$$\Rightarrow \Delta l_0 = \frac{2mg + Mg}{k}$$

b) Vì bỏ qua ma sát, hệ chỉ chịu tác dụng của lực thế (đàn hồi và trọng lực) nên cơ năng hệ bảo toàn

- Giả sử dây luôn căng trong quá trình chuyển động, vật A đi xuống một đoạn x thì ròng rọc đi xuống một đoạn x/2.

- Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng, ta có:

$$\frac{1}{2}kX^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_0^2 + \frac{1}{2}mv_A^2 = const \qquad (1)$$

Trong đó: $X = \frac{1}{2}x$ là độ dịch chuyển ròng rọc; $v_A = x'$ là vận tốc vật nặng A;

Vận tốc chuyển động tịnh tiến ròng rọc $v_0 = X' = \frac{1}{2}x'$ (2)

Mặt khác: $v_A = 2v_0$ và $v_A = v_0 + \omega R$ suy ra $\omega R = v_0 = \frac{1}{2}x'$ (3)

Thay hệ (2), (3) vào (1) ta được:

$$\frac{1}{8}kx^2 + \frac{1}{8}\frac{I}{R^2}x'^2 + \frac{1}{8}Mx'^2 + \frac{1}{2}mx'^2 = const \qquad (4)$$

Từ (4) đạo hàm hai vế theo thời gian ta được:

$$x'\left(\frac{kx}{4} + \frac{I}{4R^2}x'' + \frac{M}{4}x'' + mx''\right) = 0$$

$$\Rightarrow x'' + \frac{k}{M + 4m + \frac{I}{R^2}}x = 0 \qquad (5)$$

Đặt $\omega^2 = \dfrac{k}{M + 4m + \dfrac{I}{R^2}}$ thay vào (5) ta được:

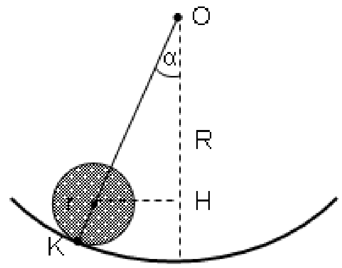
$x'' + \omega^2 . x = 0$

Vậy hệ dao động điều hòa với chu kì $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{M + 4m + \dfrac{I}{R^2}}{k}}$

**Bài 13.** *Phương pháp năng lượng.*

Chọn gốc thế năng hấp dẫn tại tâm O của máng cong.

Quả cầu lăn không trượt nên K là tâm quay tức thời.




Cơ năng của quả cầu tại li độ góc α.

$$W = -mg(R - r)\cos\alpha + I_K\frac{\omega_K^2}{2} = const\,(*)$$

Với: $I_K = \dfrac{2}{5}mr^2 + mr^2 = \dfrac{7}{5}mr^2; V_G = \omega_O(R - r) = \omega_K r$

$\Rightarrow \omega'_O(R - r) = \omega_K ' r = \alpha''(R - r)$

Lấy đạo hàm hai vế của phương trình (*) ta được:

$$\begin{cases} mg(R - r)\sin\alpha.\alpha' + \dfrac{7}{5}mr^2\dfrac{2.\omega_K.\omega'_K}{2} = 0 \\ \omega'_K = \dfrac{\alpha''(R - r)}{r};\ \sin\alpha \approx \alpha; \end{cases}$$

$$\Rightarrow mg(R - r)\alpha.\alpha' + \frac{7}{5}mr^2\frac{\omega_O(R - r)}{r}\frac{\alpha''(R - r)}{r} = 0$$

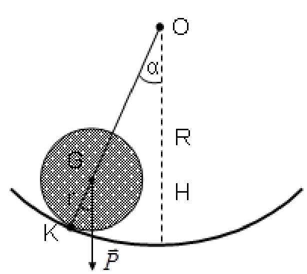
Vậy: $g\alpha + \dfrac{7}{5}(R - r)\alpha'' = 0 \Leftrightarrow \alpha'' + \dfrac{5g}{7(R - r)}\alpha = 0.$

Vậy quả cầu dao động điều hòa với biên độ nhỏ với chu kì: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{7(R - r)}{5g}}$

**Phương pháp động lực học.**

Vì quả cầu lăn không trượt nên K là tâm quay tức thời.

Phương trình động lực học vật rắn đối với tâm K.



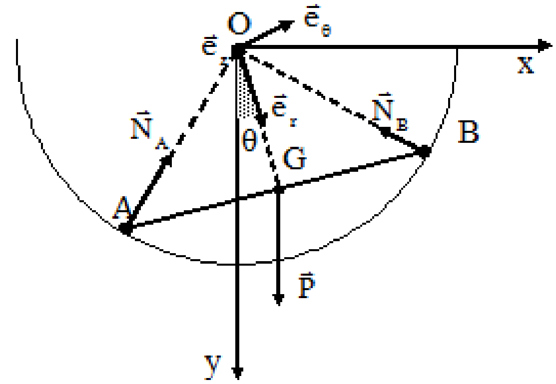
$-mgr\sin\alpha = I_K\gamma$

Với $I_K = \frac{2}{5}mR^2 + mR^2 = \frac{7}{5}mR^2; \gamma = \frac{R-r}{r}\alpha''$

Kết quả thu được phương trình:

$$\alpha'' + \frac{5g}{7(R-r)}\alpha = 0.$$

**Bài 14.** *Phương pháp động lực học.*




Xét mối quan hệ trong tam giác OAB ta được OG = R/2.

Các lực tác dụng vào thanh gồm hai phản lực pháp tuyến tại A, B, và trọng lực $\vec{P}$ tại G.

Trong hệ quy chiếu Galile áp dụng cho thanh đối với khối tâm G. Xét theo các phương OG và Oz (hình vẽ)

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}mR\theta'' = N_{Ar} + N_{Br} + mg\cos\theta \\ \frac{1}{2}mR(\theta')^2 = N_{A\theta} + N_{B\theta} - mg\sin\theta \end{cases} \quad (*)$$

Trong hệ quy chiếu trọng tâm của thanh, áp dụng định lí momen động lượng ở G khi chiếu lên Oz ta được: $\ell(N_{Ar} - N_{Br}) = I\theta''$

Vì không có ma sát nên $\vec{N}_A$, $\vec{N}_B$ hướng vào tâm O. Do đó:

$$\begin{cases} N_{Ar} = -N_A\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{N_A}{2}; N_{A\theta} = N_A\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}N_A \\ N_{Br} = -N_B\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{N_B}{2}; N_{B\theta} = -N_B\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}N_B \end{cases} \quad (**)$$

Thay (**) vào (*) và khử $N_A$, $N_B$ ta được phương trình: $\theta'' + \frac{g}{R}\theta = 0$

Hay thanh dao động điều hòa với chu kì: $T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$

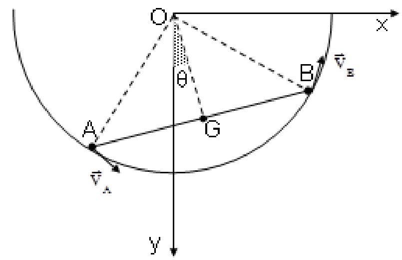
*Phương pháp năng lượng*

Chọn gốc thế năng hấp dẫn tại tâm O của nửa vòng tròn.

Vì bỏ qua ma sát ở nên cơ năng của thanh bảo toàn

Đường thẳng vuông góc với $\vec{v}_A, \vec{v}_B$ cắt nhau tại O nên O là tâm quay tức thời của thanh AB.

Cơ năng của thanh tại li độ góc θ:




$$W = I_O\frac{\omega^2}{2} - mg.OG\cos\theta = const(*)$$

Với: $I_G = \frac{m\ell^2}{12}$; $\omega = \theta'$

Lấy đạo hàm hai vế phương trình (*) ta được:

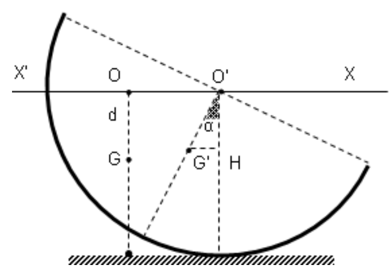
$$0 = \frac{1}{2}m\frac{R^2}{2}2\omega\theta'' + mg\frac{R}{2}\sin\theta.\theta' \Leftrightarrow \theta'' + \frac{g}{R}\theta = 0.$$

**Bài 15.**

Khi vòng xuyến dao động với biên độ nhỏ thì tâm O của nó di chuyển trên đường nằm ngang XX'. Chọn gốc thế năng tại đường thẳng XX'.

Cơ năng của vòng xuyến tại li độ góc α.

$$W = -mgd\cos\alpha + I_K\frac{\omega^2}{2} = const(*)$$




Với:

$$\begin{cases}\omega = \alpha' \Rightarrow \omega' = \alpha'' \\ I_O = I_G + mOG^2 \Rightarrow I_G - I_O = mR^2 - md^2 = m(R^2 - d^2)\end{cases}$$

$$\Rightarrow I_K = I_G + m(R-d)^2 = m2R(R-d)$$

Lấy đạo hàm hai vế của phương trình (*)

$$mgd\sin\alpha.\alpha' + I_K\frac{2\omega\alpha''}{2} =$$

$$mg\frac{2R}{\pi}\alpha + 2mR^2(1-\frac{2}{\pi})\alpha'' = 0 \Leftrightarrow \alpha'' + \frac{g}{R(\pi-2)}\alpha = 0$$

Vậy vòng xuyến dao động điều hòa với chu kì: $T = 2\pi\sqrt{\frac{R(\pi-2)}{g}}$

**Bài 16.**

Khi hệ dao động vì tổng ngoại lực tác dụng lên vật triệt tiêu nên khối tâm O của hệ không chuyển động.

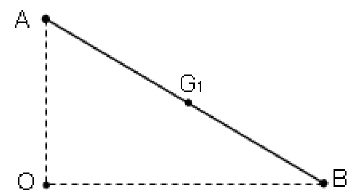
Vì mọi ma sát được bỏ qua nên cơ năng của hệ bảo toàn.

Động năng của mỗi thanh.

$$W_{đi} = \frac{1}{2}mV_{Gi}^2 + I\frac{\omega^2}{2} \text{ với } V_{Gi} = \omega OG = \frac{b}{2}\alpha'$$

Động năng của hệ:

$$W_đ = 4(\frac{1}{2}mV_{Gi}^2 + I\frac{\omega^2}{2}) = \frac{2}{3}mb^2(\alpha')^2$$




Thế năng của các lò xo:

OA và OC: $W_{t1} = \frac{1}{2}k(b\cos\alpha - b\cos\frac{\pi}{4})^2$

OC và OD: $W_{t2} = \frac{1}{2}k(b\sin\alpha - b\sin\frac{\pi}{4})^2$

Thế năng của hệ: $W_t = 2kb^2\left[1 - \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha + \sin\alpha)\right] = 2kb^2\left[1 - \cos(\alpha - \frac{\pi}{4})\right]$

Vậy cơ năng của hệ:

$$W = \frac{2}{3}mb^2(\alpha')^2 + 2kb^2\left[1 - \cos(\alpha - \frac{\pi}{4})\right] = 2kb^2\left[1 - \cos(\alpha_o - \frac{\pi}{4})\right] = const$$

2. Lấy đạo hàm hai vế phương trình trên ta được: $\alpha'' = \frac{3k}{2m}\sin(\alpha - \frac{\pi}{4})$

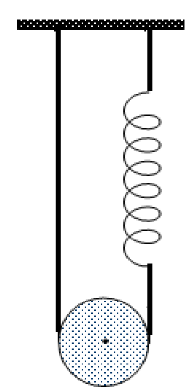
Nếu $\alpha \approx \frac{\pi}{4}$ ta có thể đặt $\alpha = \varepsilon + \frac{\pi}{4} \Rightarrow \varepsilon'' + \frac{3k}{2m} = 0$ tính đến các điều kiện đầu ta có nghiệm:

$$\varepsilon = \alpha - \frac{\pi}{4} = (\alpha_o - \frac{\pi}{4})\cos\sqrt{\frac{3k}{2m}}t$$

Chu kì dao động nhỏ của hệ: $T = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{3k}}$

**Bài 17.**

Chọn gốc thế năng hấp dẫn qua tâm O của đĩa khi đĩa ở vị trí cân bằng.



Khi ở vị trí cân bằng lò xo giãn đoạn: $\Delta\ell_o = \frac{mg}{2k}$

Tại li độ x so với vị trí cân bằng lò xo biến dạng đoạn $\Delta\ell_o + 2x$

Cơ năng của hệ dao động: $W = \frac{1}{2}k(\Delta\ell_o + 2x)^2 - mgx + I_K\frac{\omega^2}{2} = const(*)$

Với: $I_K = m\frac{R^2}{2} + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2$; $x = \alpha R \Rightarrow x' = \omega R$

Lấy đạo hàm hai vế phương trình (*) ta được:

$$W' = \frac{1}{2}k2(\Delta\ell_o + 2x)2x' - mgx' + \frac{3}{2}mR^2\frac{2\omega\omega'}{2} = 0$$

$$W' = 2k\Delta\ell_o - mg + 4kx + \frac{3}{2}mR\omega'' = 0 \Leftrightarrow 4kR\alpha + \frac{3}{2}mR\alpha'' = 0$$

Hay: $\alpha'' + \frac{8k}{3m}\alpha = 0$. Vậy vật dao động điều hòa với chu kì: $T = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{8k}}$

**Bài 18. 1**. Gọi G là khối tâm của hệ, khoảng cách OG = $l_0$. Khi khung dây lệch đi một góc nhỏ $\varphi$ thì biến thiên thế năng của hệ là

$$\Delta E_t = mgl_0\frac{\varphi^2}{2} = \Delta m.g.\Delta l = \frac{m}{2R + \pi R}\Delta l.g.\Delta l = \frac{mgR}{2+\pi}\varphi^2 \rightarrow l_0 = \frac{2R}{2+\pi} \quad (1)$$

**2.** Tính chu kì dao động nhỏ:

*a) Xét trường hợp trục quay nằm ngang đi qua $O_1$:*

+ Phương pháp năng lượng:

Một vật dao động điều hoà có li độ x thì năng lượng dao động của hệ có dạng $E = E_t + E_đ = \frac{Ax^2}{2} + \frac{Bx'^2}{2}$ và chu kì dao động có dạng $T = 2\pi\sqrt{\frac{B}{A}}$

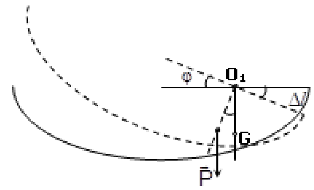
- Ta xét đại lượng $x = \varphi$. Từ công thức (1) $\rightarrow A = \frac{2mgR}{2+\pi}$

- Động năng của hệ bao gồm động năng của phần vòng cung chữ D và động năng của phần đường kính:

$$E_{đ1} = \frac{m_1v^2}{2} = \frac{1}{2}\frac{m\pi R}{2R+\pi R}(\varphi' R)^2 = \frac{\pi mR^2}{2+\pi}\frac{\varphi'^2}{2}$$

$$E_{đ2} = I\frac{\varphi'^2}{2} = \frac{m_2(2R)^2}{12}\frac{\varphi'^2}{2} = \frac{m2R}{2R+\pi R}\frac{R^2}{3}\frac{\varphi'^2}{2} = \frac{2mR^2}{3(2+\pi)}\frac{\varphi'^2}{2}$$

$\rightarrow E = E_{đ1} + E_{đ2} = \dfrac{(2+3\pi)mR^2}{3(2+\pi)}\dfrac{\varphi'^2}{2}$ (2). Từ (2) $\rightarrow B = \dfrac{(2+3\pi)mR^2}{3(2+\pi)}$




- Chu kì dao động $T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{B}{A}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{(2+3\pi)R}{6g}}$

+ *Phương pháp động lực học:*

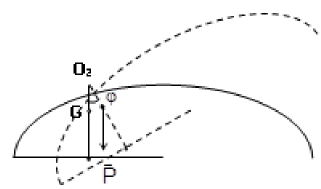
- Mô men quán tính của vòng dây đối với trục quay $O_1$ là $I_1$:

$$I_1 = m_1R^2 + \frac{1}{12}m_2(2R)^2 = \frac{m}{2R+\pi R}\pi R.R^2 + \frac{1}{12}\frac{m}{2R+\pi R}2R.4R^2 = mR^2\frac{3\pi+2}{3(\pi+2)}$$

- Phương trình chuyển động quay quanh trục $O_1$:

$I_1\varphi'' = -mg\dfrac{2R}{2+\pi}\sin\varphi = -mg\dfrac{2R}{2+\pi}\varphi \leftrightarrow mR^2\dfrac{3\pi+2}{3(\pi+2)}\varphi'' = -mg\dfrac{2R}{2+\pi}\varphi \rightarrow \varphi'' + \dfrac{6g}{(3\pi+2)R}\varphi = 0$ - Vòng dây dao động điều hoà với tần số góc $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{6g}{(3\pi+2)R}}$

Chu kì dao động $T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{(2+3\pi)R}{6g}}$




**b)** *Xét trường hợp trục quay nằm ngang đi qua $O_2$:*

- Ta có $O_2G = d = R - l_0 = R - \dfrac{2R}{2+\pi} = \dfrac{\pi R}{2+\pi}$

- Theo định lí Stai-nơ: $I_1 = I_G + ml_0^2$ ; $I_2 = I_G + md^2$

$$\rightarrow I_2 - I_1 = m(d^2 - l_0^2) = m\left[\left(\frac{\pi R}{2+\pi}\right)^2 - \left(\frac{2R}{2+\pi}\right)^2\right] = mR^2\frac{\pi-2}{\pi+2} \rightarrow I_2 = 2mR^2\frac{3\pi-2}{3(\pi+2)}$$

- Phương trình chuyển động quay quanh trục $O_2$:

$I_2\varphi'' = -mgd\sin\varphi = -mgd.\varphi \leftrightarrow 2mR^2\dfrac{3\pi-2}{3(\pi+2)}\varphi'' = -mg\dfrac{\pi R}{2+\pi}\varphi \rightarrow \varphi'' + \dfrac{3\pi g}{2(3\pi-2)R}\varphi = 0$ - Vòng dây dao động điều hoà với tần số góc $\omega_2 = \sqrt{\dfrac{3\pi g}{2(3\pi-2)R}}$

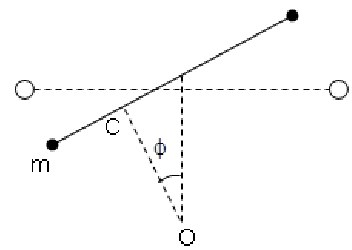
Chu kì dao động $T_2 = 2\pi\sqrt{\dfrac{2(3\pi-2)}{3\pi}\dfrac{R}{g}}$

**Bài 19.** Xét thời điểm tấm tạo một góc $\phi$, so với phương ngang Thế năng của khối tấm của hện là:

$$\omega_t = 2mg(R\cos\phi + R\phi\sin\phi)$$

Do $\phi$ nhỏ nên $\sin\phi \approx \phi$ và

$$\cos\phi \approx 1 - \frac{\phi^2}{2} \Rightarrow \omega_t = 2mgR(1 + \frac{\phi^2}{2})$$




Động năng chính là năng lương chuyển động quay của các vật khối lượng m đối với điểm cách tâm quay các khoảng (L-R$\phi$) và (L+ R$\phi$).

Do đó:

$$\omega_d = \frac{m\omega^2}{2}\left[(L - R\phi)^2 + (L + R\phi)^2\right] = m\omega^2(L^2 + R^2\phi^2)$$

Do $R^2\phi^2 << L^2 \Rightarrow \omega_d \approx m\omega^2 L^2$

Ta có $\omega_d + \omega_t = const \Rightarrow mL^2\phi'^2 + 2mgR(1 + \frac{\phi^2}{2)} = const$

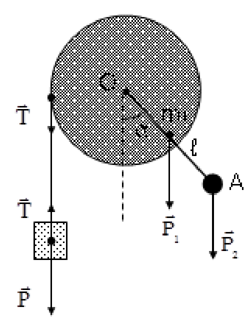
Đạo hàm theo thời gian đẳng thức này ta nhận thấy được:

$$\phi'' + \frac{Rg}{L^2}\phi = 0 \Rightarrow \text{chu kì dao động của hệ là: } T = \frac{2\pi L}{\sqrt{Rg}}$$

**Bài 20.** Khi cơ hệ ở trạng thái cân bằng tay quay hợp với phương thẳng đứng góc $\alpha_o$.

Khi đó tổng momen ngoại lực tác dụng lên hệ gồm trụ, cánh tay $m_1$ và tay cầm $m_2$ triệt tiêu.

$$\begin{cases} M(\vec{T}) + M(\vec{P}_1) + M(\vec{P}_2) = \vec{0} \\ T = P = mg \end{cases} \Leftrightarrow PR = (\frac{m_1 + 2m_2}{2})g\ell\sin\alpha(*)$$




Tại vị trí có góc lệch $\alpha + \alpha_o$ ta có phương trình động lực học.

$$\begin{cases} m: P - T = ma = m\gamma R \Rightarrow T = P - m\gamma R(1) \\ m_1, m_2, I_o: TR - (\frac{m_1 + 2m_2}{2})g\ell\sin\alpha \\ = \left[I_o + \frac{m_1\ell^2}{12} + m_1(\frac{\ell}{2})^2 + m_2\ell^2\right] = \left[I_o + \frac{m_1\ell^2}{3} + m_2\ell^2\right]\gamma(2) \end{cases}$$

Thay T từ (1) vào (2) ta được:

$$(P - m\gamma R)R - (\frac{m_1 + 2m_2}{2})g\ell\sin(\alpha + \alpha_o) = \left[I_o + \frac{m_1\ell^2}{3} + m_2\ell^2\right]\gamma$$

$$\Leftrightarrow PR - mR^2\gamma - (\frac{m_1 + 2m_2}{2})g\ell\sin\alpha\cos\alpha_o - (\frac{m_1 + 2m_2}{2})g\ell\cos\alpha\sin\alpha_o$$

Thay (*) vào phương trình trên lấy $\sin\alpha \approx \alpha$ ta được

$$\left[I_o + \frac{m_1\ell^2}{3} + m_2\ell^2 + mR^2\right]\gamma = -(\frac{m_1 + 2m_2}{2})g\ell\cos\alpha_o.\alpha$$

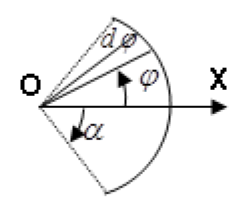
$$\Leftrightarrow \alpha'' + \frac{(m_1 + 2m_2)g\ell\cos\alpha_o}{2\left[I_o + \frac{m_1\ell^2}{3} + m_2\ell^2 + mR^2\right]}\alpha = 0$$

Vậy cơ hệ dao động điều hòa với chu kì: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{2(I_o + \frac{m_1\ell^2}{3} + m_2\ell^2 + mR^2)}{(m_1 + 2m_2)g\ell\cos\alpha_o}}$

**Bài 21.**

**1)-** Vị trí khối tâm**:**

- Do tính đối xứng, khối tâm nằm trên OX
- Chia quạt tròn thành vô hạn các quạt nhỏ có góc ở tâm là $d\varphi$



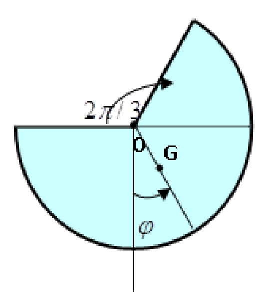

Xét hình quạt xác định bởi góc $\varphi$, có diện tích $ds = \frac{1}{2}R^2 d\varphi$, tọa độ trọng tâm là $\frac{2}{3}R\cos\varphi$ ( như tam giác).

- Tọa độ khối tâm của hình quạt: $x_G = \frac{1}{M}\int x dm = \frac{1}{S}\int_{-\alpha}^{\alpha} x ds = \frac{1}{\alpha R^2}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{2}{3}R\cos\varphi \times \frac{1}{2}R^2 d\varphi = \frac{2}{3}R\frac{\sin\alpha}{\alpha}$

Với $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ ta tìm được: $x_G = \frac{2}{3}R\frac{\sqrt{3}/2}{2\pi/3} = \frac{R\sqrt{3}}{2\pi}$

**2)**+ Tính được momen quán tính đối với trục O: $I = \frac{1}{2}mR^2$

+Khi hệ dịch khỏi vị trí cân bằng một góc nhỏ $\varphi$:



$$-mgOG\varphi - m_1 gx\varphi = \left(I + m_1 x^2\right)\varphi''$$

$$\Rightarrow \varphi'' + \frac{mgOG\varphi + m_1 gx\varphi}{I + m_1 x^2} = 0$$

Chu kì $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I + m_1 x^2}{(mOG + m_1 x)g}}$

Thay $OG = \dfrac{R\sqrt{3}}{2\pi}$, $I = \dfrac{1}{2}mR^2$, $m_1 = \dfrac{m}{2}$ tìm được:

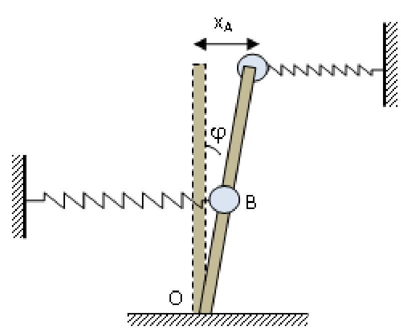
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(R^2 + x^2)\pi}{(R\sqrt{3} + \pi x)g}}$$

$$T_{\min} \Leftrightarrow y = \frac{R^2 + x^2}{R\sqrt{3} + \pi x} \min$$

Tính $y' = \dfrac{\pi x^2 + 2R\sqrt{3}x - \pi R^2}{\left(R\sqrt{3} + \pi x\right)^2} = 0$

Tìm được $x = \dfrac{\sqrt{3 + \pi^2} - \sqrt{3}}{\pi} R$

**Bài 22. Phương pháp năng lượng**




Xét tại thời điểm khi thanh lệch khỏi vị trí cân bằng một góc nhỏ φ

Lò xo gắn vật B giãn một đoạn $x_B$ = OB.φ = $\dfrac{L\varphi}{3}$

Lò xo gắn với vật A sẽ nén một đoạn $x_A$ = OA.φ = L. φ

Chọn góc thế năng ở O. Thế năng của hệ là:

$$W_t = m_A gl\cos\varphi + m_B g\frac{l}{3}\cos\varphi + \frac{1}{2}k.x_A^2 + \frac{1}{2}k.x_B^2$$

$$\Leftrightarrow W_t = mgl\cos\varphi + mg\frac{l}{3}\cos\varphi + \frac{1}{2}k.\left(l\varphi\right)^2 + \frac{1}{2}k.\left(\frac{l\varphi}{3}\right)^2$$

Theo khai triển Taylor ta có : $\cos(\varphi) = 1 - \dfrac{\varphi^2}{2!} + \dfrac{\varphi^4}{4!} - \dfrac{\varphi^6}{6!}...$

Vì góc φ nhỏ nên $\cos(\varphi) \approx 1 - \dfrac{\varphi^2}{2}$

Hàm thế năng của hệ lúc này trở thành:

$$W_t = mgl\left(1-\frac{\varphi^2}{2}\right) + mg\frac{l}{3}\left(1-\frac{\varphi^2}{2}\right) + \frac{1}{2}k.(l\varphi)^2 + \frac{1}{2}k.\left(\frac{l\varphi}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}mgl - \frac{2}{3}mgl\varphi^2 + \frac{5}{9}kl^2\varphi^2$$

Hàm động năng của hệ :

$$W_d = \frac{1}{2}m(l\varphi')^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{l}{3}\varphi'\right)^2 = \frac{5}{9}m(l\varphi')^2$$

Bỏ qua mọi ma sát và lực cản nên cơ năng của hệ vật lúc này là:

$$W = W_t + W_d = \frac{4}{3}mgl - \frac{2}{3}mgl\varphi^2 + \frac{5}{9}kl^2\varphi^2 + \frac{5}{9}m(l\varphi')^2 = \text{const}$$

Đạo hàm phương trình năng lượng trên ta được:

$$-\frac{4}{3}mgl\varphi\varphi' + \frac{10}{9}kl^2\varphi\varphi' + \frac{10}{9}ml^2\varphi'\varphi'' = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{5kl^2 - 6mgl}{5ml^2}\right)\varphi + \varphi'' = 0$$

Vậy hệ dao động điều hòa với chu kỳ : $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{5ml}{5kl-6mg}}$

**Phương pháp động lực học.**

Xét tại thời điểm khi thanh lệch khỏi phương thẳng đứng một góc φ. Các lực tác dụng lên hệ bao gồm trọng lực hai vật, lực đàn hồi $F_1$, $F_2$ và phản lực do mặt sàn tác dụng lên hệ.

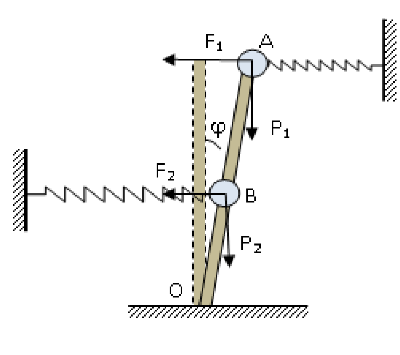
Xét chuyển động quay của thanh quanh O.

Lấy chiều dương trùng với chiều quay của kim đồng hồ ta có:

Mô men các lực:

$$M = P_2OB\sin\varphi + P_1OA\sin\varphi - F_1OA\cos\varphi - F_2OB\cos\varphi$$

$$\Rightarrow M = mg\frac{l}{3}\sin\varphi + mgl\sin\varphi - k(l\varphi)l\cos\varphi - k\frac{l\varphi}{3}\frac{l}{3}\cos\varphi$$



Áp dụng khai triển Taylor ta có:

$$\cos(\varphi) = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!}... \qquad \sin(\varphi) = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!}....$$

Vì góc φ nhỏ nên ta lấy gần đúng: $\cos(\varphi) \approx 1 \quad \sin(\varphi) \approx \varphi$

$$\Rightarrow M = mg\frac{l}{3}\varphi + mgl\varphi - k(l\varphi)l - k\frac{l\varphi}{3}\frac{l}{3}\left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right)$$

$$M \approx \frac{4}{3}mgl\varphi - \frac{10}{9}kl^2\varphi = -\left(\frac{10}{9}kl^2 - \frac{4}{3}mgl\right)\varphi$$

Phương trình chuyển động quay của thanh: M = Iφ’’

Với : $I = ml^2 + m\left(\frac{l}{3}\right)^2 = \frac{10}{9}ml^2$

$$\Rightarrow -\left(\frac{10}{9}kl^2 - \frac{4}{3}mgl\right)\varphi = \frac{10}{9}ml^2\varphi''$$

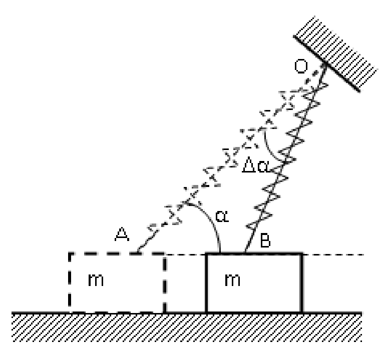
$$\Leftrightarrow \varphi'' + \left(\frac{5kl - 6mg}{5ml}\right)\varphi = 0$$

Vậy vật dao động điều hòa với chu kỳ: $T = 2\pi\sqrt{\frac{5ml}{5kl - 6mg}}$

**Nhận xét:** Ta dễ dàng nhận thấy trong phép khai triển Tay lor lấy gần đúng với hàm cosφ, trong phương pháp năng lượng ta lấy gần đúng với bậc hai của φ, trong khi đó với phương pháp động lực học ta chỉ lấy gần đúng bậc một của φ .

**Bài 23.**

**Phương pháp năng lượng.**




Xét tại tại thời điểm t khi trục của lò xo lệch ra khỏi phương ban đầu một góc Δα , vật dịch chuyển đoạn AB = x như hình vẽ.

Xét Δ OAB ta có:

$$\frac{OA}{\sin(180 - \alpha - \Delta\alpha)} = \frac{OB}{\sin\alpha}$$

$$\Rightarrow l = l_0 \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\Delta\alpha)} = l_0 \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha.\cos\Delta\alpha + \cos\alpha.\sin\Delta\alpha}$$

Áp dụng khai triển Taylor ta có:

$$\cos(\Delta\alpha) = 1 - \frac{\Delta\alpha^2}{2!} + \frac{\Delta\alpha^4}{4!} - \frac{\Delta\alpha^6}{6!}... \qquad \sin(\Delta\alpha) = \Delta\alpha - \frac{\Delta\alpha^3}{3!} + \frac{\Delta\alpha^5}{5!} - \frac{\Delta\alpha^7}{7!}....$$

Với Δα nhỏ lấy gần đúng ta được: $\cos(\Delta\alpha) \approx 1 - \frac{\Delta\alpha^2}{2}$ $\quad \sin(\Delta\alpha) \approx \Delta\alpha$

Chiều dài của loxo khi đó:

$$l \approx l_0 \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha.\left(1 - \frac{\Delta\alpha^2}{2}\right) + \cos\alpha.\Delta\alpha} \approx l_0 \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha.\Delta\alpha}$$

Độ nén của lò xo lúc này: $\Delta l = l_0 - l \approx l_0 \frac{\Delta\alpha.\cos\alpha}{\sin\alpha}$

Độ dịch chuyển của vật : $\frac{OA}{\sin(180 - \alpha - \Delta\alpha)} = \frac{AB}{\sin\Delta\alpha} \Rightarrow x = l_0.\frac{\sin\Delta\alpha}{\sin(\alpha+\Delta\alpha)} \approx l_0.\frac{\Delta\alpha}{\sin\alpha}$

Năng lượng của hệ lúc này là:

$$E = \frac{1}{2}k\Delta l^2 + \frac{1}{2}m(x')^2 = \frac{1}{2}k\left(l_0\frac{\Delta\alpha.\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(l_0.\frac{\Delta\alpha'}{\sin\alpha}\right)^2 = \text{const}$$

Lấy đạo hàm theo thời gian ta được:

$$k\left(l_0\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2 \Delta\alpha.\Delta\alpha' + m\left(l_0.\frac{1}{\sin\alpha}\right)^2 .\Delta\alpha'.\Delta\alpha'' = 0$$

$$\Rightarrow \Delta\alpha'' + \frac{k}{m}\cos^2\alpha.\Delta\alpha = 0$$

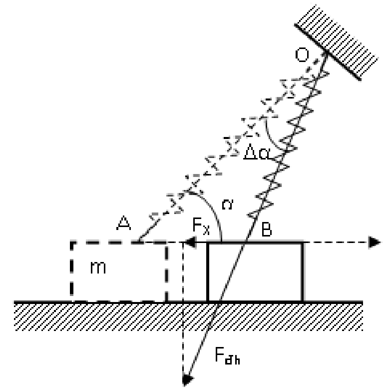
Vậy vật dao động điều hòa với chu kỳ: $T = 2\pi\frac{1}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{m}{k}}$

**Phương pháp động lực học.**

Chứng minh tương tự như phương pháp năng lượng ta rút ra được:

- Độ nén của loxo: $\Delta l = l_0 - l \approx l_0 \dfrac{\Delta\alpha.\cos\alpha}{\sin\alpha}$

- Độ dịch chuyển của vật: $x = l_0.\dfrac{\Delta\alpha}{\sin\alpha}$




Lực kéo về tác dụng lên vật:

$$F_x = -F_{dh}.\cos(\alpha+\Delta\alpha) \approx -\text{k}.l_0 \frac{\Delta\alpha.\cos^2\alpha}{\sin\alpha}$$

Theo định luật II Newtơn:

$$F_x = mx'' \Leftrightarrow -\text{k}.l_0 \frac{\Delta\alpha.\cos^2\alpha}{\sin\alpha} = l_0.\frac{m\Delta\alpha''}{\sin\alpha}$$

$$\Rightarrow \Delta\alpha'' + \frac{\text{k}}{m}.\cos^2\alpha.\Delta\alpha = 0$$

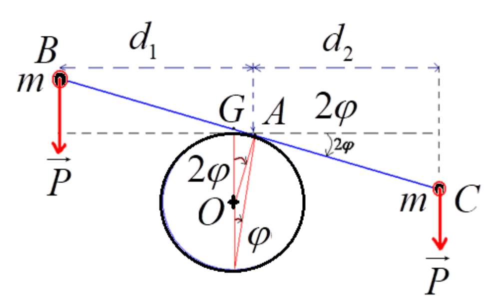
Vậy vật dao động điều hòa với chu kỳ: $T = 2\pi \dfrac{1}{\cos\alpha}\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

**Nhận xét:** Đây là bài toán điển hình phức tạp với phép khai triển Tay lor. Ta thấy trong phương pháp năng lượng khi tìm biểu thức Δl ta chỉ lấy gần đúng ở bậc nhất của Δα bởi vì ở hàm thế năng đàn hồi tỉ lệ bình phương với Δl nên kết quả hoàn toàn đúng như mong đợi. Ngoài ra khi lấy gần dúng Δl vì Δα rất nhỏ nên ta có thể lấy gần đúng

$$\Delta l = l_0 - l \approx l_0 \frac{\Delta\alpha.\cos\alpha}{\sin\alpha + \Delta\alpha.\cos\alpha} \approx l_0 \frac{\Delta\alpha.\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

**Bài 24.**

G là trung điểm thanh, A là trục quay tức thời. Ta có đoạn $AG = 2\varphi R$




Hình 2.68S

Tổng mô men lực tác dụng lên hệ 2 vật đối với trục quay A là

$$M_A = mg(d_2 - d_1)$$

$$M_A = mg\left[(l - 2\varphi R) - (l + 2\varphi R)\right] = -4mg\varphi R \quad (1)$$

Mặt khác mômen quán tính đối với trục quay A là $I_A = m(AC^2 + BA^2)$

$$I_A = m((l-2R\varphi)^2 + (l+2R\varphi)^2) = 2m(l^2 + 4R^2\varphi^2) \quad (2)$$

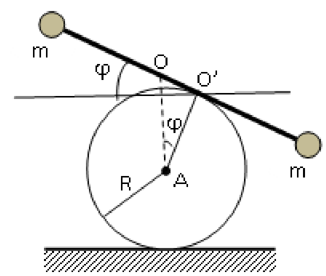
Theo định định lí momen động lượng $M_A = \frac{dL_A}{dt}$........$\Rightarrow \varphi'' + \frac{gR}{l^2}\varphi = 0$

Suy ra chu kì dao động $T = \frac{2\pi l}{\sqrt{gR}}$

**Phương pháp năng lượng.**

Vị trí khối tâm của hệ ở O.

Xét tại thời điểm t khi thanh lệch khỏi vị trí cân bằng một góc φ . Vì góc lệch nhỏ nên OO' ≈ Rφ . Chọn A làm mốc tính thế năng, thế năng của hệ lúc này:




$$W_t = 2mgOA = 2mg\left(R\cos\varphi + R\varphi\sin\varphi\right)$$

Với góc φ nhỏ thì: $cos\varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}$ ; $\sin\varphi \approx \varphi$ . Khi đó:

$$W_t = 2mg\left(R\left(1-\frac{\varphi^2}{2}\right) + R\varphi^2\right) = 2mgR + mgR\varphi^2$$

Khối tâm của hệ có xu hướng quay quanh tâm quay tức thời O' nên động năng của hệ:

$$W_d = \frac{1}{2}m\left(L+R\varphi\right)^2\left(\varphi'\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(L-R\varphi\right)^2\left(\varphi'\right)^2$$

Vì $R\varphi << L \Rightarrow W_d = \frac{1}{2}mL^2\left(\varphi'\right)^2 + \frac{1}{2}mL^2\left(\varphi'\right)^2 = mL^2\left(\varphi'\right)^2$

Cơ năng của hệ lúc này là: $E = W_t + W_d = 2mgR + mgR\varphi^2 + mL^2\left(\varphi'\right)^2$

Lấy đạo hàm ta được $\varphi'' + \frac{Rg}{L^2}\varphi = 0$

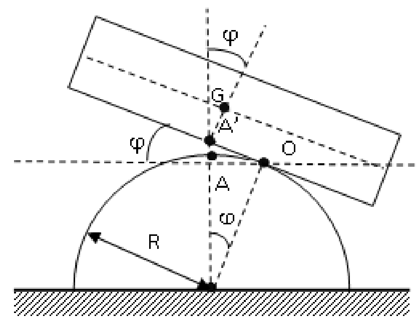
Vậy chu kỳ dao động của hệ lúc này là: $T = \frac{2\pi L}{\sqrt{Rg}}$

**Bài 25.**

Xét tại thời điểm khi thanh lệch khỏi phương ngang góc φ nhỏ như hình vẽ:

Từ hình vẽ ta có A’O = Rφ

Chọn mặt đất tính mốc thế năng, thế năng của thanh lúc này là:




$$W_t = mg\left(R\cos\varphi + OA'\sin\varphi + A'G.\cos\varphi\right)$$

$$\Rightarrow W_t = mg\left(R\cos\varphi + R\varphi\sin\varphi + \frac{h}{2}.\cos\varphi\right)$$

Vì góc φ nhỏ nên ta có: $\cos\varphi \approx 1-\frac{\varphi^2}{2}$ ; $\sin\varphi \approx \varphi$

$$\Rightarrow W_t = mg\left(R+\frac{h}{2}\right)+\frac{mg\varphi^2}{2}\left(R-\frac{h}{2}\right)$$

Động ngăng của thanh: $W_d = \frac{1}{2}I_O\left(\varphi'\right)^2$ với $I_O$ là mô men quán tính của thanh đối với tâm quay tức thời O.

Ta có: $I_O = I_G + mGO^2 = \frac{1}{12}m(L^2+h^2)+m\left(\frac{h^2}{4}+\left(R\varphi\right)^2\right) \approx \frac{1}{12}mL^2+\frac{1}{3}mh^2$

Vậy cơ năng của hệ là:

$$W = W_d + W_t = mg\left(R+\frac{h}{2}\right)+\frac{mg\varphi^2}{2}\left(R-\frac{h}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}mL^2+\frac{1}{3}mh^2\right)\left(\varphi'\right)^2$$

Đạo hàm hai vế ta được:

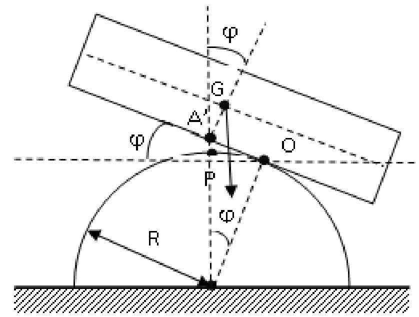
$$mg\varphi\left(R-\frac{h}{2}\right)+\left(\frac{1}{12}mL^2+\frac{1}{3}mh^2\right)\varphi'' = 0 \Leftrightarrow \frac{6g\left(2R-h\right)}{\left(L^2+4h^2\right)}\varphi+\varphi'' = 0$$

Vậy chu kỳ dao động của thanh là: $T = 2\pi\sqrt{\frac{\left(L^2+4h^2\right)}{6g\left(2R-h\right)}}$

**Phương pháp động lực học.**

Chon O làm tâm quay tức thời, chiều dương cùng chiều với tâm quay tức thời. Mô men ngoại lực tác dụng vào thanh so với tâm quay O là.

$$M = -P\left(OA'\cos\varphi - A'G\sin\varphi\right)$$




Với góc φ nhỏ ta có: $\cos\varphi \approx 1-\dfrac{\varphi^2}{2}$ ; $\sin\varphi \approx \varphi$

$$\Rightarrow M = -P\left(R\varphi\left(1-\frac{\varphi^2}{2}\right)-\frac{h}{2}\varphi\right) \approx -mg\varphi\left(R-\frac{h}{2}\right)$$

Phương trình động lực học của thanh quay quanh O.

$$M = I_O\varphi''$$

Với $I_O = I_G + mGO^2 = \dfrac{1}{12}m(L^2+h^2)+m\left(\dfrac{h^2}{4}+(R\varphi)^2\right) \approx \dfrac{1}{12}mL^2+\dfrac{1}{3}mh^2$

$$\Rightarrow -mg\varphi\left(R-\frac{h}{2}\right) = \left(\frac{1}{12}mL^2+\frac{1}{3}mh^2\right)\varphi''$$

$$\Leftrightarrow \varphi''+\frac{6g\left(2R-h\right)}{4L^2+h^2}\varphi = 0$$

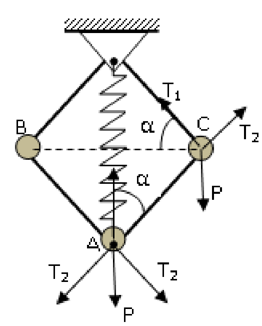
Vậy vật dao động điều hòa với chu kỳ $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\left(L^2+4h^2\right)}{6g\left(2R-h\right)}}$

**Biện luận**: Ta dễ dàng nhận thấy để dao động xảy ra thì h < 2R. Khi h > 2R thì thanh sẽ tự đổ khi dịch chuyển một góc nhỏ hay cân bằng ban đầu của thanh là cân bằng không đều.

**Bài 26.** Vì tính đối xứng các lực tác dụng lên quả cầu B và quả cầu C là như nhau. Các lực tác dụng lên hệ như hình vẽ.

Xét cân bằng quả cầu C:

$$\begin{cases} T_1\sin\alpha + T_2\sin\alpha = P \\ T_1\cos\alpha = T_2\cos\alpha \end{cases} \Rightarrow T_1 = T_2 = \frac{P}{2\sin\alpha}$$




Xét cân bằng quả cầu A

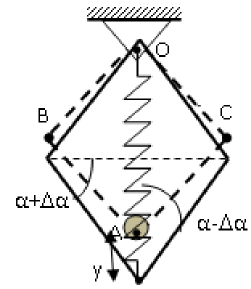
$$F_{dh} = P + 2T_2\cos\alpha = P + \frac{P}{\tan\alpha} = 2mg$$

Độ giãn của loxo lúc này là. $\Delta l = \dfrac{F_{dh}}{k} = \dfrac{2mg}{k}$

Vậy chiều dài tự nhiên của loxo là: $l_0 = l\sqrt{2} - \Delta l = l\sqrt{2} - \frac{2mg}{k}$

**Phương pháp năng lượng.**

Xét tại thời điểm t khi quả cầu A đi xuống một đoạn y, hai quả cầu B, C đi xuống một đoạn y/2 theo phương thẳng đứng. Ta có:




$$\cos(\alpha - \Delta\alpha) = \frac{\frac{y}{2} + \frac{l\sqrt{2}}{2}}{l} = \frac{y}{2l} + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Với góc Δα nhỏ, ta được.

$$\cos(\alpha - \Delta\alpha) = \cos\alpha.\cos\Delta\alpha + \sin\alpha.\sin\Delta\alpha \approx \cos\alpha + \sin\alpha\Delta\alpha$$

$$\Rightarrow \Delta\alpha = \frac{\cos(\alpha - \Delta\alpha) - \cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{y}{2l\sin\alpha}$$

Chọn O làm mốc tính thế năng. Thế năng của hệ lúc này là.

$$W_t = -2mg\left(\frac{l\sqrt{2}}{2} + \frac{y}{2}\right) - mg\left(l\sqrt{2} + y\right) + \frac{1}{2}k\left(y + \Delta l\right)^2$$

Vì khi hệ chuyển động quả cầu A chuyển động tịnh tiến theo phương thẳng đứng, quả cầu B, C chuyển động quay quanh tâm O. Nên ta có động năng của hệ.

$$W_d = 2\frac{1}{2}ml^2(\Delta\alpha')^2 + \frac{1}{2}m(y')^2 = \left(\frac{m}{(2\sin\alpha)^2} + \frac{1}{2}m\right)(y')^2$$

Hàm cơ năng của hệ lúc này là.

$$W = -2mg\left(\frac{l\sqrt{2}}{2} + \frac{y}{2}\right) - mg\left(l\sqrt{2} + y\right) + \frac{1}{2}k\left(y + \Delta l\right)^2 + \left(\frac{m}{(2\sin\alpha)^2} + \frac{1}{2}m\right)(y')^2$$

Đạo hàm hai vế ta được.

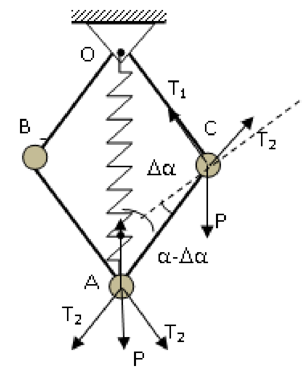
$$-mgy' - mgy' + k\left(y + \Delta l\right)y' + \left(\frac{2m}{(2\sin\alpha)^2} + m\right)(y')y'' = 0$$

$$\Rightarrow y'' + \frac{2k(\sin\alpha)^2}{m + 2m(\sin\alpha)^2}y = 0 \Leftrightarrow y'' + \frac{k}{2m}y = 0$$

Vậy hệ dao động với chu kỳ: $T=2\pi\sqrt{\dfrac{2m}{k}}$

**Phương pháp động lực học.**

Xét khi vật A được kéo xuống một đoạn y. Làm góc $CAO$ giảm đi một lượng nhỏ Δα.




Ta có:

$$\cos(\alpha-\Delta\alpha)=\frac{\frac{y}{2}+\frac{l\sqrt{2}}{2}}{l}=\frac{y}{2l}+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Với góc Δα nhỏ, ta được.

$$\cos(\alpha-\Delta\alpha)=\cos\alpha.\cos\Delta\alpha+\sin\alpha.\sin\Delta\alpha\approx\cos\alpha+\sin\alpha\Delta\alpha$$

$$\Rightarrow\Delta\alpha=\frac{\cos(\alpha-\Delta\alpha)-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{y}{2l\sin\alpha}\Rightarrow\Delta\alpha''=\frac{y''}{2l\sin\alpha}$$

Xét chuyển động quay của vật C quanh O. Chọn chiều dương cùng chiều với chiều quay kim đồng hồ

$$P\cos\alpha l\text{-}T_2\cos\Delta\alpha.l=ml^2\Delta\alpha''$$

$$P\cos\alpha l\text{-}T_2 l\approx ml^2\Delta\alpha''\Rightarrow T_2=mg\cos\alpha-\frac{m}{2\sin\alpha}y''$$

Xét chuyển động tịnh tiến của vật A. Lấy trục dương hướng xuống dưới

$$-F_{dh}+P+2T_2\cos(\alpha-\Delta\alpha)=my''$$
$$\Rightarrow -F_{dh}+P+2T_2\cos(\alpha)\approx my''$$
$$\Leftrightarrow mg-k(\Delta l+y)+2\left(mg\cos\alpha-\frac{m}{2\sin\alpha}y''\right)\frac{\sqrt{2}}{2}=my''$$
$$\Leftrightarrow -ky-my''=my''$$

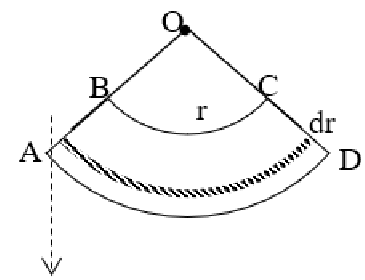
$$\Rightarrow y''+\frac{k}{2m}y=0$$

Vậy vật dao động điều hòa với chu kỳ: $T=2\pi\sqrt{\dfrac{2m}{k}}$

**Bài 27.**

a. Mô men quán tính I: Gọi khối lượng trên một đơn vị diện tích của vật là ρ. Xét một cung mỏng dr bán kính r, khối lượng của nó là dm = $\rho\alpha_0 r dr$ (hình 1.2).

Mô men quán tính của yếu tố dm đối với trục quay đi qua O là dI = $r^2dm = \rho\alpha_0 r^3 dr$. Mô men quán tính của cả vật đối với trục quay đi qua O và vuông góc với mặt phẳng vật là

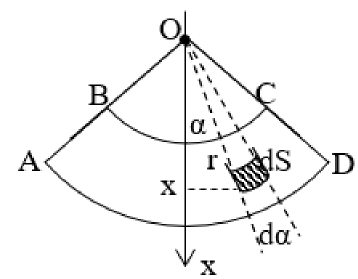



$$I = \int_{R_1}^{R_2} \rho\alpha_0 r^3 dr = \frac{1}{4}\rho\alpha_0 (R_2^4 - R_1^4)$$

b. Gọi trọng tâm của vật là G. Ta thấy vật có tính đối xứng nên trong tâm của vật nằm trên trục đối xứng Ox (hình 1.2). Đặt OG = d. Khối lượng của vật là M. Xét một yếu tố diện tích dS = rdrdα (chắn góc ở tâm là dα). Khối lượng của diện tích dS là dm = ρdS = ρrdrdα, toạ độ x = r.cosα. Áp dụng công thức tính khối tâm ta có

$$Md = \int_S x dm = \rho \int_{R_1}^{R_2} r^2 dr \int_{-\alpha_0/2}^{\alpha_0/2} \cos\alpha d\alpha$$

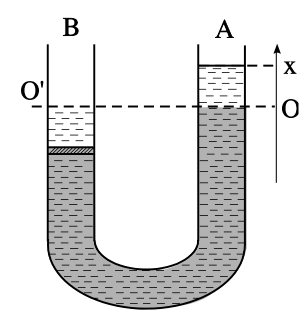
$$Md = \frac{2}{3}\rho (R_2^3 - R_1^3).\sin\frac{\alpha_0}{2}$$




Chu kì dao động với biên độ nhỏ của vật là

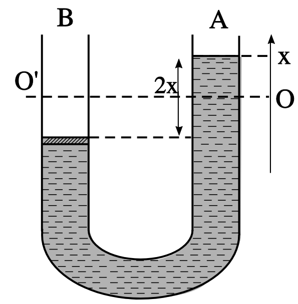
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}} = \pi\sqrt{\frac{3\alpha_0(R_2^4 - R_1^4)}{2g(R_2^3 - R_1^3).\sin\frac{\alpha_0}{2}}} \approx 3{,}4021\,(s)$$

Vậy chu kì dao động với biên độ nhỏ của vật là T = 3,4021 (s).




**Bài 28.** a) Gọi O, O' là mực chất lỏng ở hai nhánh khi chất lỏng đứng yên. Khi mực chất lỏng ở nhánh B tụt xuống dưới mức cân bằng một đoạn a, thì mực chất lỏng ở nhánh A dâng lên trên mức cân bằng một đoạn cũng bằng a. Sự chênh lệch mực chất lỏng ở hai nhánh làm xuất hiện một lực có tác dụng kéo toàn bộ khối chất lỏng chuyển động nhanh dần về VTCB.

Lực này có độ lớn bằng trọng lượng của phần chất lỏng chênh lệch. Khi chất lỏng về đến mức OO' thì lực này mất. Nhưng vì có quán tính nên khối chất lỏng tiếp tục chuyển động vượt qua mức cân bằng. Sự chênh lệch mực chất lỏng lần này làm xuất hiện một lực ngược chiều với trước làm khối chất lỏng chuyển động chậm dần rồi dừng lại. Một quá trình mới diễn ra giống như quá trình trước nhưng theo chiều ngược lại. Kết quả là khối chất lỏng dao động.

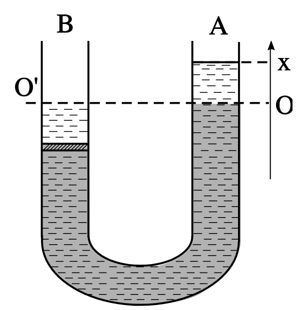



b) Ta hãy khảo sát sự chuyển động của mực chất lỏng ở nhánh A. Chọn trục x hướng thẳng đứng lên trên, gốc ở O. Giả sử sau t giây kể từ lúc buông tay, mực chất lỏng bên A có li độ x. Khi ấy lực gây ra dao động có độ lớn bằng P = $2\rho gS|x|$ và có hướng về VTCB O. Do đó biểu thức của lực này là:

$$F = -2\rho gSx$$

Vì biểu thức của lực có dạng F = -kx, ta suy ra khối chất lỏng DĐĐH với tần số góc $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2\rho gS}{\rho Sl}} = \sqrt{\frac{2g}{l}}$, hay với chu kì: $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}$.

c) $v_{max} = A\omega = a\omega = a\sqrt{\frac{2g}{l}}$.




*Chú ý:* Ta có thể giải câu b và c của bài toán bằng phương pháp năng lượng như sau:

Chọn mốc thế năng của khối chất lỏng khi mực chất lỏng của cả hai nhánh ở mực OO'. Khi mực chất lỏng ở nhánh A ở li độ x thì thế năng của khối chất lỏng tăng lên, vì ta có thể coi như cột chất lỏng có độ dài x ở nhánh bên trái được đưa lên cao một đoạn là x và được đặt lên đỉnh của cột chất lỏng ở bên phải (Hình 2.24). Thế năng của khối chất lỏng là: $W_t = \rho gSx^2$.

Vì biểu thức của thế năng có dạng $W_t = \frac{1}{2}kx^2$ với k = $2\rho gS$, ta suy ra khối chất lỏng DĐĐH với tần số góc là $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2g}{l}}$ hay với chu kì là $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}$.

$$W_{\text{®}max} = W_{t\,max} = \rho g S a^2$$

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2W_{\text{®}max}}{m}} = \sqrt{\frac{2\rho g S a^2}{\rho S l}} = a\sqrt{\frac{2g}{l}}.$$

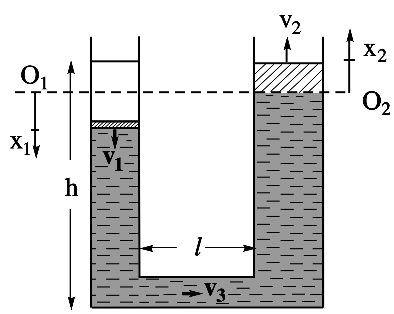
**Bài 29 .**

Phương trình liên tục: $S_1x_1 = S_2x_2$

$$S_1v_1 = S_2v_2 = S_3v_3$$

Chọn mốc thế năng tại mực chất lỏng khi đứng yên. Khi đó khối chất lỏng $\Delta m$ coi như được chuyển từ toạ độ $x_1$ ở dưới mực cân bằng đến toạ độ $x_2$ ở trên mực cân bằng:

$$W_t = \Delta m.g\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \rho g S_1 x_1\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \rho g \frac{x_1^2}{2}\frac{S_1}{S_2}(S_1 + S_2)$$




Gọi $m_1$, $m_2$, $m_3$ là khối lượng của chất lỏng trong mỗi nhánh, ta có:

$$m_1 = \rho S_1 h \;;\; m_2 = \rho S_2 h \;;\; m_3 \approx \rho S_3 l$$

$$W_{\text{®}} = \frac{1}{2}\left(m_1v_1^2 + m_2v_2^2 + m_3v_3^2\right) = \frac{1}{2}\rho\left[h\left(S_1v_1^2 + S_2v_2^2\right) + lS_3v_3^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\rho v_1^2\left[h\frac{S_1}{S_2}(S_1 + S_2) + l\frac{S_1^2}{S_3}\right]$$

$$W = W_t + W_đ = \text{const}$$

$$= \frac{1}{2}\rho g\frac{S_1}{S_2}(S_1 + S_2)x_1^2 + \frac{1}{2}\rho\left[h\frac{S_1}{S_2}(S_1 + S_2) + l\frac{S_1^2}{S_3}\right]v_1^2 = \text{const}$$

$$\frac{dW}{dt} = \rho g\frac{S_1}{S_2}(S_1 + S_2)x_1x_1' + \rho\left[h\frac{S_1}{S_2}(S_1 + S_2) + l\frac{S_1^2}{S_3}\right]v_1v_1' = 0$$

Thay $v_1 = x_1'$ và $v_1' = x_1''$ vào, ta được: $g(S_1 + S_2)x_1 + \left[h(S_1 + S_2) + l\dfrac{S_1S_2}{S_3}\right]x_1'' = 0$

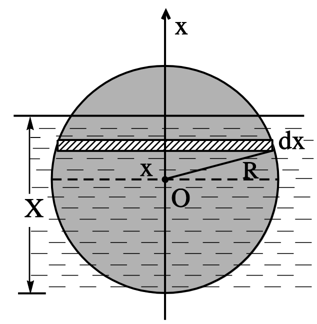
hay $$x_1'' + \dfrac{g(S_1 + S_2)}{h(S_1 + S_2) + l\dfrac{S_1S_2}{S_3}}x_1 = 0$$ Suy ra: $$\omega = \sqrt{\dfrac{g}{h + l\dfrac{S_1S_2}{(S_1 + S_2)S_3}}}$$

**Bài 30.**

a) Điều kiện để vật chìm hoàn toàn là: $\rho_0\left(\dfrac{4}{3}\pi R^3\right) \geq \rho_L\left(\dfrac{4}{3}\pi R^3\right) \Rightarrow \alpha = \dfrac{\rho_0}{\rho_L} \geq 1$

Điều kiện để vật chìm một nửa là: $\rho_0\left(\dfrac{4}{3}\pi R^3\right) = \rho_L\left(\dfrac{2}{3}\pi R^3\right) \Rightarrow \alpha = 0,5$

b) Gọi $V_c$ là thể tích phần chìm.




$dV = \pi(R^2 - x^2)dx$

$$V_c = \dfrac{2}{3}\pi R^3 + \int_0^{X-R}\pi(R^2 - x^2)dx \Rightarrow V_c = \pi X^2\left(R - \dfrac{X}{3}\right)$$

Điều kiện cân bằng là: $\rho_0\left(\dfrac{4}{3}\pi R^3\right) = \rho_L \pi X^2\left(R - \dfrac{X}{3}\right)$

$$\Rightarrow 3R - X = \dfrac{4\alpha R^3}{X^2} \Rightarrow b = 3R \text{ và } c = 4\alpha R^3$$

c) Khi ấn chìm nhẹ thì lực kéo về là: $F = -\rho_L \Delta V_c g$

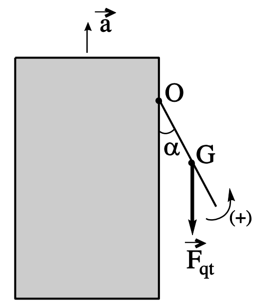
$$\Delta V_c = \Delta\left[\pi X^2\left(R - \dfrac{X}{3}\right)\right] = \pi(2RX - X^2)\Delta X = \pi X(2R - X)x$$ (đặt $\Delta X = x$ = li độ)

$F = -\rho_L g\pi X(2R - X)x$ nên: $mx'' = -\rho_L g\pi X(2R - X)x$

$$\rho_0\left(\dfrac{4}{3}\pi R^3\right)x'' = -\rho_L g\pi X(2R - X)x \Rightarrow x'' + \dfrac{3gX(2R - X)}{4\alpha R^3}x = 0$$

$\Rightarrow$ Vật dao động điều hoà với $\omega = \sqrt{\dfrac{3gX(2R - X)}{4\alpha R^3}}$.

**Bài 31.** Trong HQC gắn với xe, cánh cửa chịu thêm lực quán tính. Lực này gây ra một momen quay làm cánh cửa đóng lại (Hình 2.38).




$$M_{\vec{F},O} = I_O\gamma$$

$$-ma\frac{l}{2}\sin\alpha = \frac{1}{3}ml^2\alpha''$$

Vì cánh cửa hé mở, sinα ≈ α (rad) nên ta có:

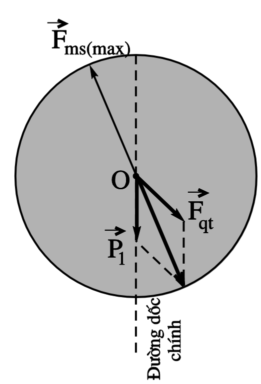
$$-ma\frac{l}{2}\alpha = \frac{1}{3}ml^2\alpha''$$

hay $$\alpha'' + \frac{3a}{2l}\alpha = 0 \qquad (1)$$

Phương trình (1) cho thấy thời gian chuyển động của cánh cửa là thời gian con lắc vật lí khi đi từ vị trí biên về vị trí cân bằng. Với tần số góc là $\omega = \sqrt{\dfrac{3a}{2l}}$ thì thời gian này là $\tau = \dfrac{1}{4}T = \dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{2l}{3a}}$.

Trong thời gian này xe khách đi được một đoạn đường là:

$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}a\frac{\pi^2}{4}.\frac{2l}{3a} = \frac{\pi^2 l}{12}$$




**Bài 32.** Chọn HQC gắn với mặt phẳng nghiêng. Khi ấy vật chịu 4 lực là $\vec{P}$, $\vec{N}$, $\vec{F}_{ms}$, $\vec{F}_{qt}$. Chỉ xét các lực (hoặc thành phần lực) nằm trên mặt phẳng nghiêng thì có:

- Lực thành phần $\vec{P}_1$ hướng theo đường dốc chính và có độ lớn $P_1$ =

mgsinα.

- Lực quán tính hướng ra xa VTCB và có độ lớn $F_{qt} = m\omega^2|x|$.

- Lực ma sát nghỉ cân bằng với hai lực trên và có độ lớn: $F_{ms} \le \mu mg\cos\alpha$.

Điều kiện để vật bắt đầu trượt là:

$\vec{P}_1 + \vec{F}_{qt} + \vec{F}_{ms(max)} = \vec{0}$

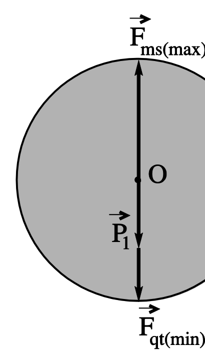
Vì $F_{ms(max)} = \mu mg\cos\alpha$ = const, nên $F_{qt(min)}$ khi phương dao động trùng với đường dốc chính. Khi ấy ta có:

$mg\sin\alpha + F_{qt(min)} = \mu mg\cos\alpha$

$\Rightarrow m\omega^2|x| = mg(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)$

$= mg(\mu - \alpha)$

$\omega^2_{(min)} = \frac{g}{A}(\mu - \alpha)$ ; $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g(\mu - \alpha)}{A}}$



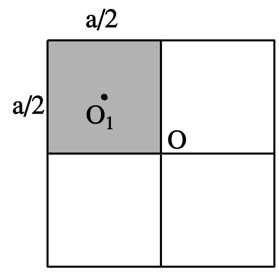

**Bài 33.**

a) Gọi $I_1$ là momen quán tính của $\frac{1}{4}$ khối lập phương.

Theo tính chất cộng momen quán tính ta có: $I_{1/O} = \frac{1}{4}I_O$ (1)

Dựa vào công thức $I = \Sigma m_i r_1^2$ và theo tỉ xích ta có: $I_{1/O} = \frac{1}{16}I_O$ (2)

Theo định lí Stê-nơ - Huy-ghen, ta có: $I_{1/O} = I_{1/O_1} + \frac{m}{4}\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2$ (3)




Từ (1), (2) và (3) suy ra: $I_O = \frac{1}{6}ma^2$.

Cuối cùng ta được: $I_C = I_O + m\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{2}{3}ma^2$.

b) $M_C = I_C\gamma \Rightarrow -mg\frac{a}{\sqrt{2}}\sin\theta = I\theta''$

Đối với dao động nhỏ: $-mg\frac{a}{\sqrt{2}}\theta = \frac{2}{3}ma^2\theta''$

hay $\theta'' + \frac{3g}{2\sqrt{2}a}\theta = 0$

Suy ra: $\omega = \sqrt{\frac{3g}{2\sqrt{2}a}}$ và $T = 2\pi\sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{a}{g}}$

c) $T = 2\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{a}{g}}$

Suy ra: $l = \frac{2\sqrt{2}}{3}a$.

**Bài 34.**

a) $I_O = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{2}\frac{m}{4}\left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{17}{32}mr^2 = 1{,}065.10^{-3}\ kg.m^2$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_O}{K}} \Rightarrow K = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 I_O \approx 0{,}993.10^{-3}\ N.m$

b) $\theta(t) = \theta_m\cos(\omega t + \varphi)$

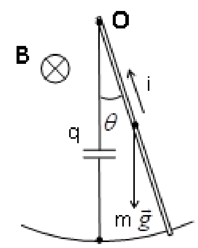
$\theta'(t) = -\omega\theta_m\sin(\omega t + \varphi)$

$\theta'(t)_{cùc®\,i} = \omega\theta_m = \sqrt{\frac{K}{I_O}}\theta_m = 1{,}257 \approx 1{,}26\ rad/s$

c) $W_{®} = \frac{1}{2} I_O \theta'^2 = 0,839.10^{-3} \approx 0,84.10^{-3}$ J

**Bài 35.**

1) Xét thanh đang quay và tại thời điểm t thanh hợp với phương thẳng đứng một góc nhỏ $\theta$ (hình vẽ). Trong thanh khi đó có dòng điện i, còn tụ điện có điện tích q. Như vậy ngoài trọng lực mg, thanh còn chịu tác dụng của lực từ và gây ra mô men quay. Phương trình chuyển động quay của thanh được viết như sau:




$$I\theta" = -mg\frac{b}{2}\theta - M_m, \qquad (1)$$

trong đó $I = \frac{1}{3}mb^2$, còn $M_m$ là mô men lực từ xác định bởi:

$$M_m = \int_0^b iBrdr = \frac{1}{2}iBb^2,$$

với: $i = \frac{dq}{dt} = \frac{Cd\varepsilon}{dt}$. Suất điện động cảm ứng $\varepsilon$ lại đựoc xác định theo phương trình:

$$\varepsilon = \frac{BdS}{dt} = B\frac{b^2}{2}\frac{d\theta}{dt} \qquad (2)$$

Do đó: $i = \frac{CBb^2}{2}\theta"$, nên: $M_m = \frac{1}{2}iBb^2 = \frac{CB^2b^4}{4}\theta"$

Thay vào phương trình chuyển động quay ta viết được:

$$\left(\frac{1}{3}mb^2 + \frac{CB^2b^4}{4}\right)\theta" = -mg\frac{b}{2}\theta$$

Đặt $\omega^2 = \dfrac{2g}{\frac{4}{3}b + \frac{CB^2b^3}{m}}$, thì phương trình trên trở thành: $\theta" + \omega^2\theta = 0$.

Nghĩa là thanh dao động điều hòa với phương trình: $\theta(t) = \alpha_0\cos(\omega t)$.

2.Khi thay tụ điện bởi điện trở thì phương trình (1) vẫn có dạng như cũ, nhưng cường độ dòng điện qua thanh được tính như sau:

$$i = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{Bb^2}{2R}\frac{d\theta}{dt}$$

Vì thế mômen của lực từ bằng: $M_m = \frac{1}{2}iBb^2 = \frac{B^2b^4}{4R}\theta'$. Vậy phương trình (1) có dạng:

$$\frac{1}{3}mb^2\theta'' = -mg\frac{b}{2}\theta - \frac{B^2b^4}{4R}\theta'$$

Đặt $2\beta = \frac{3B^2b^2}{4mR}$ và $\omega_0^2 = \frac{3g}{2b}$ thì được: $\theta'' + 2\beta\theta' + \omega_0^2\theta = 0$. Đến đây xảy ra các khả năng sau:

+ Nếu $\beta < \omega_0$ thì phương trình trên có nghiệm: $\theta(t) = \theta_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi)$, với

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \sqrt{\left(\frac{3g}{2b}\right)^2 - \left(\frac{3B^2b^2}{8mR}\right)^2}$$

Còn $\theta_0$ và $\varphi$ được xác định từ điều kiện ban đầu, tại t = 0 vật có:

$$\begin{cases} \theta(0) = \theta_0\cos\varphi = \alpha_0 \\ \theta'(0) = \theta_0\beta\cos\varphi + \theta_0\omega\sin\varphi \end{cases} = 0$$

Do đó: $\theta_0 = \frac{\alpha_0}{\cos\varphi} = \alpha_0\frac{\omega_0}{\omega}$, còn $\varphi = \arctan\left(-\frac{\beta}{\omega}\right)$.

+ Nếu $\beta \geq \omega_0$: con lắc chuyển động không tuần hoàn về vị trí cân bằng.

**Bài 36**.

1) Đĩa và thanh tạo thành 1 vật rắn có mômen quán tính đối với trục quay Oz tính

Theo định lý Huygens:

$$I_0 = (mR^2 + \frac{1}{3}mR^2) + \left\{ m(2R)^2 + \frac{1}{2}mR^2 \right\} = \frac{35}{6}mR^2$$

- Áp dụng định lý mômen động lượng (định luật II Newton cho chuyển động quay)

$$\varphi'' = \frac{-mgR\sin\varphi - 2mgR\sin\varphi}{I_0} = -3mgR\varphi \qquad (\varphi <<)$$

$$\Rightarrow \; T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{35R}{18g}}$$

2) Đối với đĩa: Phản lực thanh OA và trọng lực qua trục quay A nên vận tốc góc của đĩa đối với trục quay qua A là không đổi và có giá trị $\omega_0 = const$ nào đó

- Mômen động lượng của đĩa và thanh đối với trục Oz là:

$L_{Oz} = (L_{Oz})_{thanh} + (L_{Oz})_{đĩa}$

+ Thanh: $(L_{Oz})_{thanh} = (mR^2 + \frac{1}{3}mR^2)\varphi' = \frac{4}{3}mR^2\varphi'$

+ Đĩa: $(L_{Oz})_{đĩa} = m(2R)^2\varphi' + I_1\omega_0 = 4mR^2\varphi' + \frac{1}{2}mR^2\omega_0$

Suy ra $L_{Oz} = \frac{4}{3}mR^2\varphi' + 4mR^2\varphi' + \frac{1}{2}mR^2\omega_0$ (1)

- Áp dụng định lý mômen động lượng:

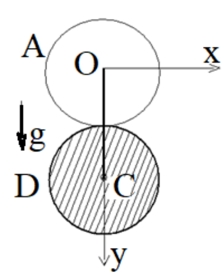
$$\frac{dL_{Oz}}{dt} = (-mgR\sin\varphi - 2mgR\sin\varphi) = -3mgR\varphi \qquad (\varphi <<)$$

$$\Leftrightarrow \frac{16}{3}mR^2\varphi'' = -3mgR\varphi \quad \Rightarrow \varphi'' + \frac{9}{16}\frac{g\varphi}{R} = 0$$

Đặt $\Omega^2 = \frac{9}{16}\frac{g}{R}$ nên $\varphi'' + \Omega^2\varphi = 0$

Vậy vật dao động điều hòa với chu kì $T_2 = \frac{8}{3}\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$

**Bài 37**



Hình 2.70P

- Vì OC quay không ma sát quanh trục Oz và đồng thời D lăn không trượt trên A, suy ra trong quá trình chuyển động chỉ có trọng lực sinh công lên hệ, do vậy cơ năng hệ bảo toàn.

- Ở đây $F_{ms}$ nghỉ giữa trụ A tác dụng lên D biến động năng chuyển động tịnh tiến của D quanh O thành động năng chuyển động quay của đĩa D quanh C. Điều này giống như khi bánh xe trước lăn thì lực ma sát nghỉ biến năng lượng tịnh tiến của khung xe thành năng lượng quay bánh trước vậy.

- Chọn gốc thế năng của hệ tại vị trí cân bằng. Thì tại góc lệch $\varphi$ thế năng hệ là:

$$(W_t)_{hê} = mgR(1-\cos\varphi) + 2mgR(1-\cos\varphi) = 3mgR(1-\cos\varphi)$$

- Động năng của hệ là:

$$(W_đ)_{hê} = W_đ(thanh) + W_đ(đia) = \frac{1}{2}(\frac{4}{3}mR^2)(\varphi'^2) + (\frac{1}{2}mv_C{}^2 + \frac{1}{2}I_2\omega^2)$$

Trong đó: $v_C = 2R\varphi'$, Thanh OC quay một góc $\varphi$, thì D lăn không trượt 1 góc $2\varphi$

$$\Rightarrow \omega = 2\varphi'$$

Nên $\Rightarrow (W_đ)_{hê} = \frac{11}{3}mR^2\varphi'^2$

- Cơ năng hệ: $E = (W_đ)_{hê} + (W_t)_{hê} = \frac{11}{3}mR^2\varphi'^2 + 3gmR(1-\cos\varphi)$

$$\Rightarrow E = \frac{11}{3}mR^2\varphi'^2 + 3mgR\left[\frac{\varphi^2}{2}\right] \Leftrightarrow \frac{11}{3}R\varphi'^2 + 3g\frac{\varphi^2}{2} = const \qquad (*)$$

Từ (*) đạo hàm hai vế theo thời gian, ta được:

$$\Leftrightarrow \frac{22}{3}R^2\varphi'\varphi'' + 3gR\varphi\varphi' = 0$$

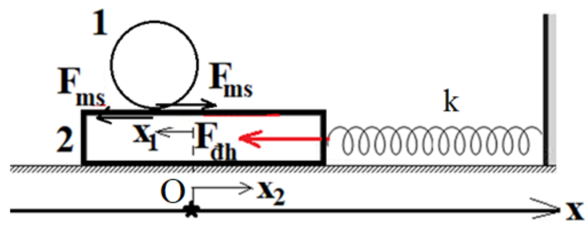
$$\Rightarrow \varphi'' + \frac{9g}{22R}\varphi = 0$$

Đặt $\Omega^2 = \frac{9g}{22R}$ $\Rightarrow \varphi'' + \Omega^2\varphi = 0$

Vậy thanh dao động điều hòa với chu kì $T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{22R}{9g}} = \frac{2}{3}\pi\sqrt{\frac{22R}{g}}$

.

**Bài 38**.. Vật 1: $a_1 = \dfrac{F_{ms}}{m_1} = \dfrac{F_{ms}}{m}$ (1)




Hình 2.83S

$\gamma_1 = \dfrac{-F_{ms}R}{I} = \dfrac{-F_{ms}R}{\frac{1}{2}mR^2} = \dfrac{-2F_{ms}}{mR}$ (2)

Vật 2: $a_2 = \dfrac{-kx_2 - F_{ms}}{m_2} = \dfrac{-kx_2 - F_{ms}}{m}$ (3)

Vì vật 1 lăn không trượt trên vật 2 nên vậ tốc khối tâm vật 1 có thể tính :

$v_1 = v_{1/I} + v_{I/\text{dat}} \rightarrow v_1 = R\varphi_1' + v_2 \rightarrow a_1 = R\gamma_1 + a_2$ (4)

Thay (1), (2), (3) vào (4) ta được:

$\dfrac{F_{ms}}{m} = \dfrac{-2F_{ms}}{mR}R + \dfrac{-kx_2 - F_{ms}}{m} \rightarrow -F_{ms} = -2F_{ms} + -kx_2 - F_{ms}$

$F_{ms} = \dfrac{-kx_2}{4}$ (5)

Thay (5) vào (3) ta được $a_2 = \dfrac{-kx_2 + \dfrac{-kx_2}{4}}{m} = -\dfrac{5}{4}kx_2 \rightarrow x_2'' + \dfrac{5k}{4m}x_2 = 0$ (6)

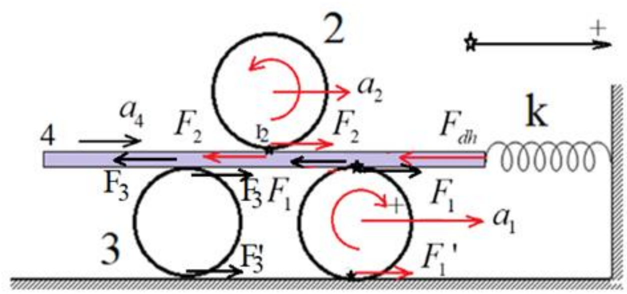
Ta thấy ván dao động điều hòa với tần số góc $\omega = \sqrt{\dfrac{5k}{4m}}$, chu kì $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{4m}{5k}}$

**Bài 39.** Gọi x là độ dời của ván 4, gia tốc ván 4 là $a_4 = x''$

Khi đó $a_1 = \dfrac{1}{2}a_4 = \dfrac{1}{2}x''$

**-Xét trụ 1.**

$\gamma_1 = \dfrac{+F_1.2R}{\frac{1}{2}mR^2 + mR^2} = \dfrac{4}{3}\dfrac{F_1}{mR}$ **(1)**



Hình 2.84S

$a_1 = \gamma_1 R = \dfrac{4}{3}\dfrac{F_1}{m} = \dfrac{1}{2}x" \to F_1 = \dfrac{3}{8}mx"$ (2)

**-Xét Trụ 2**. $a_2 = \dfrac{F_2}{m}$ (3)

Và $\gamma_2 = \dfrac{-F_2R}{\frac{1}{2}mR^2} = \dfrac{-2F_2}{mR} = \dfrac{-2a_2}{R}$ (4)

Mặt khác ta có phương trình liên kết $a_2 = a_{2/I_2} + a_{I_2} = \gamma_2 R + a_4 = -2a_2 + x"$

$a_2 = \dfrac{1}{3}x" \to \dfrac{F_2}{m} = \dfrac{1}{3}x" \to F_2 = \dfrac{1}{3}mx"$ (5)

**Đối với ván 4**. Ta có $m_4a_4 = F_{dh} - F_1 - F_3 - F_2 = -kx - 2F_1 - F_2$

Thay (2), (5) vào ta được

$m_4x" = -kx - 2\dfrac{3}{8}mx" - \dfrac{1}{3}mx" \to m_4x" = -kx - \dfrac{13}{12}mx"$ (6)

**a. Ván 4 có khối lượng không đáng kể.**

Thay $m_4$=0 vào (6) ta được $0 = -kx - \dfrac{13}{12}mx"$

$\Leftrightarrow x" + \dfrac{12}{13}\dfrac{k}{m}x = 0$ (7)

Ta đặt $\omega^2 = \dfrac{13}{12}\dfrac{k}{m}$ thay vào (7) ta được $x" + \omega^2 x = 0$

Vậy hệ dao động điều hòa với chu kì $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{13m}{12k}}$

**b. Ván 4 có khối lượng m.** Ta gọi x là độ dời ván 4

Thay $m_4$=0 vào (6) ta được $mx'' = -kx - \frac{13}{12}mx''$

$$\frac{25}{12}mx'' + kx = 0 \rightarrow x'' + \frac{12}{25}\frac{k}{m}x = 0 \qquad (8)$$

Ta đặt $\omega^2 = \frac{12}{25}\frac{k}{m}$ thay vào (10) ta được $x'' + \omega^2 x = 0$

Vậy hệ dao động điều hòa với chu kì $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{25m}{12k}} = \frac{5}{\sqrt{3}}\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

CÁCH 2. DÙNG PHƯƠNG PHÁP NĂNG LƯỢNG.

$$\frac{1}{2}kx^2 + 2\left(\frac{1}{2}\mathrm{I}_{G1}\omega_1^2 + \frac{1}{2}\mathrm{m}v_1^2\right) + \left(\frac{1}{2}\mathrm{I}_{G2}\omega_2^2 + \frac{1}{2}\mathrm{m}v_2^2\right) + \frac{1}{2}m_4 v_4^2 = const \qquad (1)$$

Trong đó đối với trụ 1 và 3 có vận tốc liên hệ với ván 4

$$\begin{cases} v_4 = x' \\ v_1 = \frac{v_4}{2} = \frac{1}{2}x' \\ \omega_1 = \frac{v_1}{R} = \frac{1}{2}\frac{x'}{R} \end{cases} \qquad (2)$$

Mặt khác khi x**ét trụ 2**. $\begin{cases} a_2 = \frac{F_2}{m} \\ \gamma_2 = \frac{-F_2 R}{\frac{1}{2}mR^2} = \frac{-2F_2}{mR} = \frac{-2a_2}{R} \\ a_2 = a_{2/I_2} + a_{I_2} = \gamma_2 R + a_4 = -2a_2 + x'' \end{cases}$

$$\rightarrow \begin{cases} a_2 = \frac{x''}{3} \\ \gamma_2 = -\frac{2}{3}.\frac{x''}{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_2 = \frac{x'}{3} \\ \omega_2 = -\frac{2}{3}.\frac{x'}{R} \end{cases} \qquad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1) ta được:

$$\frac{1}{2}kx^2 + \mathrm{I}_{G1}\omega_1^2 + \mathrm{mv}_1^2 + (\frac{1}{2}\mathrm{I}_{G2}\omega_2^2 + \frac{1}{2}\mathrm{mv}_2^2) + \frac{1}{2}m_4v_4^2 = const$$

$$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mR^2(\frac{1}{2R}\mathrm{x'})^2 + \mathrm{m}(\frac{x'}{2})^2 + (\frac{1}{2}\frac{1}{2}mR^2(-\frac{2}{3}.\frac{x'}{R})^2 + \frac{1}{2}\mathrm{m}(\frac{1}{3}\mathrm{x'})^2 + \frac{1}{2}m_4v_4^2 = const$$

$$\frac{1}{2}kx^2 + (\frac{3}{8} + \frac{1}{6})(\mathrm{x'})^2 + \frac{1}{2}m_4v_4^2 = const$$

$$kx^2 + \frac{13}{12}(\mathrm{x'})^2 + m_4v_4^2 = const$$

a.Với $m_4$=0, thì (4) viết lại

$$\frac{k}{m}x^2 + \frac{13}{12}(\mathrm{x'})^2 = \frac{const}{m} \rightarrow x'' + \frac{12}{13}\frac{k}{m}x = 0$$

Vậy hệ dao động điều hòa với chu kì $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{13m}{12k}}$

b.Với $m_4$=m, thì (4) viết lại

$$\frac{k}{m}x^2 + \frac{25}{12}(\mathrm{x'})^2 = \frac{const}{m} \rightarrow x'' + \frac{12}{25}\frac{k}{m}x = 0$$

Vậy hệ dao động điều hòa với chu kì $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{25m}{12k}}$

**Bài 41.** Mômen men quán tính đĩa 1 đối với trục quay A: $I_1 = \frac{1}{2}m(2R)^2 = 2mR^2$

Môn men quán tính đĩa 2 đối với trục quay B và A $I_{2B} = \frac{1}{2}mR^2;\ I_{2A} = I_{2B} + m(3R)^2 = 9{,}5mR^2$.

1.**a**. Đĩa 1 giữ cố định: chuyển động đĩa 2 không liên qua đến đĩa 1. Khi đó mô men lực tác dụng lên đĩa 2 đối với B bằng không, nên đĩa 2 không quay quanh B mà chỉ chuyển động tịnh tiến

- Khi va chạm khối tâm đĩa 2 nhận một động lượng: áp dụng định luật bảo toàn động lượng

$$\mathrm{mv_0 = X} \Rightarrow v_0 = \frac{X}{m} \qquad (1)$$

*(lưu ý không áp dụng định luật bảo toàn mô men động lượng của đĩa 2 đối với trục quay A $X.3R \neq I_{2A}.\omega$ là vì ở thời điểm đó các điểm trên đĩa 2 không quay quanh A cùng một tốc độ góc $\omega$ mà chỉ có thể áp dụng X.3R=mv$_0$.3R)*

- Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng cho chuyển động của đĩa 2 khi đi từ điểm thấp nhất qua điểm cao nhất:

$\frac{1}{2}mv_0^2 = mg.6R + \frac{1}{2}mv_1^2$; $v_1$ là vận tốc của trục B qua điểm cao nhất quỹ đạo. Để B đi được 1 vòng trong mặt phẳng thẳng đứng thì $v_1 \geq 0 \rightarrow X \geq 2m\sqrt{3gR}$ (2)

**1b**. Đĩa 1 gắn chặt với thanh AB: Khi va chạm ta coi đĩa 2 là chất điểm có vận tốc $v_0$ ( vì các điểm trên đĩa 2 đều chuyể động tịnh tiến có cùng vận tốc $v_0$). Áp dụng định luật bảo toàn momen động lượng:

$$X.3R = mv_0.3R + I_1\omega = \frac{11}{3}mv_0R \Rightarrow v_0 = \frac{9X}{11m} \qquad (3)$$

Tương tự như câu 1 a khi B đến điểm cao nhất có vận tốc $v_1$.

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}I_1\omega_0^2 = 6mgR + \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}I_1\omega_1^2$$

Để đi hết một vòng thì $v_1 \geq 0$

hay $\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}I_1\omega_0^2 \geq 6mgR \rightarrow \frac{11}{18}mv_0^2 \geq 6mgR \Rightarrow X \geq 2m\sqrt{\frac{11}{3}gR}$ (4)

2 a. Đĩa 1 gắn chặt với thanh AB: Lúc này đĩa 2 cũng chỉ chuyển động tịnh tiến chứ không quay quanh B. Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng cho hệ ở vị trí bất kì:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_1\omega^2 + mgh = const \qquad (h=3R(1-\cos\varphi) \approx 3R\frac{\varphi^2}{2})$$

$$11mR^2\omega^2 + 3mgR\varphi^2 = const \qquad \rightarrow \varphi'' + \frac{3g}{11R}\varphi = 0$$

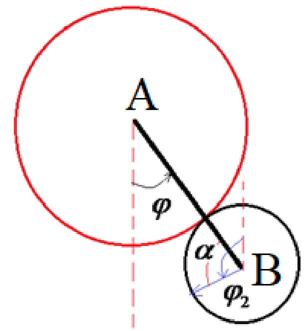
Vậy Thanh AB dao động điều hòa với $\Omega = \sqrt{\frac{3g}{11R}}$; $T = 2\pi\sqrt{\frac{11R}{3g}}$ (5)

-<u>Biên độ đầu B</u>: ta có $X.3R = mv_0 3R + I_1\omega_{1\max} = mv_0 3R + 2mR^2\frac{v_0}{3R} = \frac{11}{3}mRv_0 \Rightarrow v_0 = \frac{9}{11}\frac{X}{m}$

$$A=\frac{v_0}{\Omega}=3\frac{X}{m}\sqrt{\frac{3R}{11g}}$$

**2b**. Đĩa 1 cố định và đĩa 2 lăn không trượt trên vành đĩa 1:

Gọi $\varphi,\varphi_2$ là góc quay của Thanh cứng quanh A và đĩa B quanh B:



Hình 2.59S

Ta có $\begin{cases}\varphi_2=\alpha+\varphi\\ \alpha R=2R.\varphi\end{cases}\Rightarrow\varphi_2=3\varphi$

Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng: $\frac{1}{2}I_{2B}\varphi'^2_2+\frac{1}{2}mv_B^2+mgh_B=\text{const}$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)(9\varphi'^2)+\frac{1}{2}m(\varphi'3R)^2+mg3R\frac{\varphi^2}{2}=\text{const}$$

$$\Rightarrow\varphi''+\frac{2}{9}\frac{g}{R}\varphi=0\rightarrow\Omega=\sqrt{\frac{2}{9}\frac{g}{R}}\Rightarrow T=2\pi\sqrt{\frac{9R}{2g}}=6\pi\sqrt{\frac{R}{2g}}$$

**Tính biên độ dao động đầu B.**

Biên độ dao động đầu B.

Khi va chạm, áp dụng định lý momen động lượng đối cực K( điểm tiếp xúc 2 đĩa)

$$\begin{cases}I_2\omega_0+mv_0KB=XR\\ I_2=\frac{1}{2}mR^2;\ \omega_0=\frac{v_0}{R}\end{cases}\Rightarrow v_0=\frac{2X}{3m}$$

Do đó đầu B sẽ dao động với biên độ là A: $A=\frac{v_0}{\Omega}=\frac{X}{m}\sqrt{\frac{2R}{g}}$

**Bài 42.**

Mô men quán tính hai thanh đối với trục quay A là:

$I_A=2\left(\frac{1}{12}m(2l)^2+ml^2\right)=\frac{8}{3}ml^2$, khi đó hệ trở thành một con lắc vật lI bình thường và giải bình thường bằng cách áp dụng định luật bảo toàn mômen động lượng và bảo toàn động năng trong va chạm đàn hồi, ta suy ra được

a. Mô men quán tính của hệ thanh chữ thập đối với cực A:

$$I_A = I_1 + I_2 = \frac{1}{12}m(2l)^2.2 = \frac{8ml^2}{3} \text{ (1)}$$

-Gọi $\omega_0$ là vận tốc góc hệ hai thanh và $v_1$ là vận tốc vật sau va chạm. Áp dụng định luật bảo toàn momen động lượng:

$$I_A\omega_0 + mv_1l = mvl \rightarrow \frac{8}{3}\omega_0 l + v_1 = v \qquad (2)$$

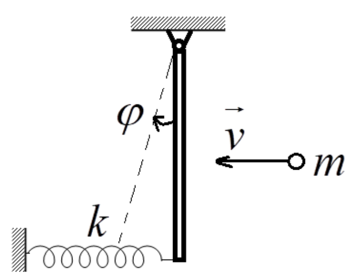
-Vì va chạm đàn hồi nên động năng bảo toàn

$$\frac{1}{2}I_A\omega_0^2 + \frac{1}{2}mv_1^2l = \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow \frac{8}{3}\omega_0^2 l^2 + v_1^2 = v^2 \qquad (3)$$

Thay (2) vào (3) ta suy ra được $\begin{cases} \omega_0 = \dfrac{6}{11}\dfrac{v}{l} \\ v_1 = -\dfrac{15}{33}v \end{cases}$

Vậy vật m bật ngược lại.

Áp dụng định luật II Newton cho chuyển động quay của hệ hai thanh trong điều kiện dao động bé: $\varphi" = \frac{F_{dh}}{I_A}.2l = \frac{-kx.2l}{\frac{8}{3}ml^2}$; với $\varphi \approx \frac{x}{2l}$



Hình 2.60S

Nên $\varphi" + \frac{3}{2}\frac{k}{m}\varphi = 0$

Vậy hệ hai thanh dao động điều hòa với chu kì

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{3k}} \qquad (4)$$

Góc lệc cực đại của hệ hai thanh $\varphi_0 = \dfrac{A}{2l} = \dfrac{\dfrac{\omega_0.2l}{2\pi/T}}{2l} = \dfrac{2v}{11l}\sqrt{\dfrac{6m}{k}}$ (5)

Điều kiện để có dao động bé và điều hòa: $\varphi < 10^0 \, hay \, \varphi < \dfrac{\pi}{18} \Rightarrow v < \dfrac{11\pi}{36} l \sqrt{\dfrac{k}{6m}}$

**b. Khi hệ dao động trên phương thẳng đứng.**

$$\varphi_0 = \frac{\frac{6}{11}\frac{v}{l}}{\sqrt{\frac{3}{4}(\frac{g}{l}+\frac{2k}{m})}};\ T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{3}{4}(\frac{g}{l}+\frac{2k}{m})}}$$

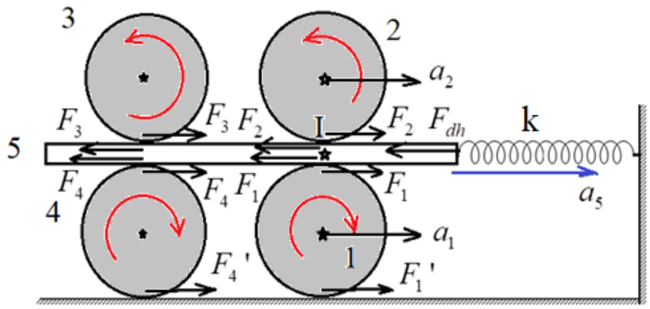
**Bài 43.** Gọi $F_1$, $F_2$, $F_3$, $F_4$ lần lượt lực ma sát giữa trụ 1, 2, 3, 4 và ván. Gọi $F_{dh}$ là lực đàn hồi tác dụng lên ván. Gia tốc ván là $a_5 = x''$, với là độ dời của ván và cũng chính là độ biến dạng lò xo.

-Trụ 1: $\begin{cases} \gamma_1 = \dfrac{a_1}{R} \\ \gamma_1 = \dfrac{F_1.2R}{\dfrac{1}{2}mR^2 + mR^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_1 = \gamma_1 R = \dfrac{4F_1}{3m} \\ \gamma_1 = \dfrac{4F_1}{3mR} \end{cases}$ (1)

Và $a_1 = \dfrac{1}{2}a_I = \dfrac{1}{2}a_5 = \dfrac{1}{2}x''$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $\rightarrow \dfrac{4F_1}{3m} = \dfrac{1}{2}x'' \Rightarrow F_1 = \dfrac{3}{8}mx''$ (3)

-Trụ 2: $\begin{cases} a_2 = \dfrac{F_2}{m} \\ \gamma_2 = \dfrac{-F_2.R}{\dfrac{1}{2}mR^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_2 = \dfrac{F_2}{m} \\ \gamma_2 = \dfrac{-2F_2}{mR} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_2 = \dfrac{F_2}{m} \\ \gamma_2 = \dfrac{-2F_2}{mR} = \dfrac{-2a_2}{R} \end{cases}$ (4)




Hình 2.85S

Và ta có $a_2 = a_{2/I} + a_I = \gamma_2 R + a_5 = -2a_2 + x" \to a_2 = \dfrac{x"}{3}$ (5)

Từ (4) và (5): $a_2 = \dfrac{F_2}{m} = \dfrac{1}{3}x" \to F_2 = \dfrac{mx"}{3}$ (6)

-Đối với ván: $m_5 a_5 = F_{dh} - F_1 - F_2 - F_3 - F_4 = -kx - 2(F_1 + F_2)$ (7)

Kết hợp (3), (6)và (7) ta được

$m_5 x" + 2(\dfrac{3}{8}mx" + \dfrac{mx"}{3}) + kx = 0$ (*)

a. Khi $m_5$=0, thay vào (*) ta được $0 + 2(\dfrac{3}{8}mx" + \dfrac{mx"}{3}) + kx = 0$

$x" + \dfrac{12k}{17m}x = 0$

Vậy hệ dao động điều hòa với chu kì $T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{17m}{12k}}$

b. Khi $m_5$=m, thay vào (*) ta được $mx" + 2(\dfrac{3}{8}mx" + \dfrac{mx"}{3}) + kx = 0$

$x" + \dfrac{12k}{29m}x = 0$

Vậy hệ dao động điều hòa với chu kì $T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{29m}{12k}}$

**Cách 2**. Dùng phương pháp năng lượng.

Ta có

$$\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}m_5v_5^2+2(\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}\frac{1}{2}\mathrm{mR}^2\omega_1^2)+2(\frac{1}{2}m_2v_2^2+\frac{1}{2}\frac{1}{2}\mathrm{mR}^2\omega_2^2)=\mathrm{const}\ \ \text{(a)}$$

Với lưu ý

$$v_5=x';v_1=\frac{1}{2}v_5=\frac{1}{2}x';\ \omega_1=v_1R=\frac{1}{2}x' \qquad \text{(b)}$$

Chứng minh giống (4) và (5) ta được $\rightarrow v_2=\frac{x"}{3};\omega_2=\frac{-2v_2}{R}=\frac{-2x"}{3R}$ (c)

Thay (b), (c) vào (a) và tiến hành đạo hàm hai vế theo thời gian, ta được kết quả:

a. Khi $m_5$=0, thay vào (*) ta được $x"+\frac{12k}{17m}x=0$

Vậy hệ dao động điều hòa với chu kì $T_1=2\pi\sqrt{\frac{17m}{12k}}$

b. Khi $m_5$=m, thay vào (*) ta được $x"+\frac{12k}{29m}x=0$

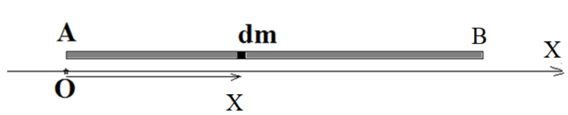
Vậy hệ dao động điều hòa với chu kì $T_1=2\pi\sqrt{\frac{29m}{12k}}$

**Bài 44.**

1a.Theo đề bài, ta có mật độ khối lượng dài

$$\lambda(X)=\lambda_0+\frac{X(\lambda_0-\frac{\lambda_0}{2})}{l}=\frac{\lambda_0}{2}(1+\frac{X}{l}) \qquad (1.1)$$

Nên $dm=\lambda(X)dX=\frac{\lambda_0}{2}(1+\frac{X}{l})\mathrm{d}X$ (1.2)



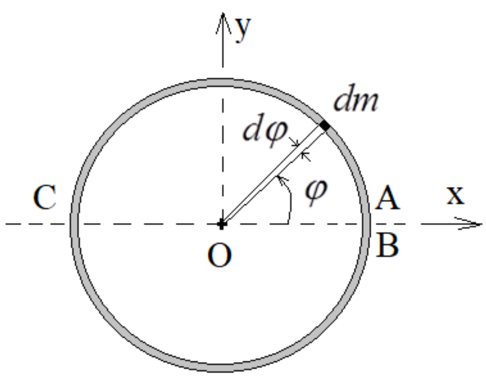

$$m=\int_0^l\frac{\lambda_0}{2}(1+\frac{X}{l})\mathrm{d}X=\frac{\lambda_0}{2}(l+\frac{l}{2})=\frac{3}{4}l\lambda_0$$

Hay $\lambda_0 = \dfrac{4m}{3l}$ (1.3)

1b. Tọa độ khối tâm G $X_G = \dfrac{\int_0^l Xdm}{m} = \dfrac{\int_0^l X\dfrac{\lambda_0}{2}(1+\dfrac{X}{l})\mathrm{d}X}{m} = \dfrac{\dfrac{\lambda_0}{2}(\dfrac{l^2}{2}+\dfrac{l^2}{3})}{m} = \dfrac{5}{12}\dfrac{\lambda_0 l^2}{m} = \dfrac{5}{12}\dfrac{4}{3}l$

$X_G = \dfrac{5}{9}l$ (1.4)

2a. Trong trường hợp này ta tính lại $\lambda = \dfrac{\lambda_0}{2} + \dfrac{\varphi}{2\pi}\dfrac{\lambda_0}{2} = \dfrac{\lambda_0}{2}(1+\dfrac{\varphi}{2\pi})$ (2.1)




Từ (6) suy ra $dm = \lambda ds = \lambda R d\varphi = \dfrac{\lambda_0}{2}\mathrm{R}(1+\dfrac{\varphi}{2\pi})\mathrm{d}\varphi$

$m = \dfrac{\lambda_0}{2}\mathrm{R}(2\pi + \dfrac{(2\pi)^2}{2.2\pi})$

Suy ra $m = \dfrac{\lambda_0}{2}\mathrm{R}(2\pi + \pi) = \dfrac{3}{2}\pi\lambda_0\mathrm{R}$ (2.2)

Ta có $x = R\cos\varphi; y = R\sin\varphi$

Và $x_G = \dfrac{\oint xdm}{m} = \dfrac{\oint R\cos\varphi(\lambda R d\varphi)}{m}$ (2.3)

$$x_G = \frac{\oint R\cos\varphi \frac{\lambda_0}{2}(1+\frac{\varphi}{2\pi})Rd\varphi}{m} = \frac{\frac{\lambda_0}{2}R^2\int_0^{2\pi} cos\varphi(1+\frac{\varphi}{2\pi})d\varphi}{3\pi\frac{\lambda_0}{2}\mathrm{R}}$$

$$x_G = \frac{R}{3\pi}\left(\int_0^{2\pi} cos\varphi d\varphi + \int_0^{2\pi} \cos\varphi\frac{\varphi}{2\pi}d\varphi\right)$$

$$x_G = \frac{R}{3\pi}\left(0+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi d\sin\varphi\right) = \frac{R}{6\pi^2}\left(\varphi\sin\varphi\Big|_0^{2\pi} - (\int_0^{2\pi}\sin\varphi d\varphi)\right)$$

$$x_G = \frac{R}{6\pi^2}\left(0-(\int_0^{2\pi} -d\cos\varphi)\right) = \frac{R}{6\pi^2}\int_0^{2\pi} d\cos\varphi$$

$$x_G = 0 \qquad (2.4)$$

Và $y_G = \dfrac{\oint ydm}{m} = \dfrac{\oint R\sin\varphi(\frac{\lambda_0}{2}(1+\frac{\varphi}{2\pi})Rd\varphi)}{m} = \dfrac{\frac{\lambda_0}{2}R^2\int_0^{2\pi}\sin\varphi(1+\frac{\varphi}{2\pi})d\varphi}{3\pi\frac{\lambda_0}{2}\mathrm{R}}$

$$y_G = \frac{R}{3\pi}\int_0^{2\pi}\sin\varphi(1+\frac{\varphi}{2\pi})d\varphi = \frac{R}{3\pi}\left[\int_0^{2\pi}\sin\varphi d\varphi + \int_0^{2\pi}\sin\varphi\frac{\varphi}{2\pi})d\varphi\right]$$

$$= \frac{R}{3\pi}\left[0+\int_0^{2\pi}\sin\varphi\frac{\varphi}{2\pi}d\varphi\right]$$

$$y_G = -\frac{R}{6\pi^2}\int_0^{2\pi}\varphi d cos\varphi = -\frac{R}{6\pi^2}(\varphi cos\varphi\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} cos\varphi d\varphi)$$

$$y_G = -\frac{R}{6\pi^2}(2\pi - 0) = -\frac{R}{3\pi} = -\frac{l}{6\pi^2} \qquad (2.5)$$

2b. Momen quán tính đối với trục quay đi qua O và vuông góc mặt vành:

$$I_O = \oint R^2dm = R^2m = (\frac{l}{2\pi})^2 m = \frac{ml^2}{4\pi^2} \qquad (2.6)$$

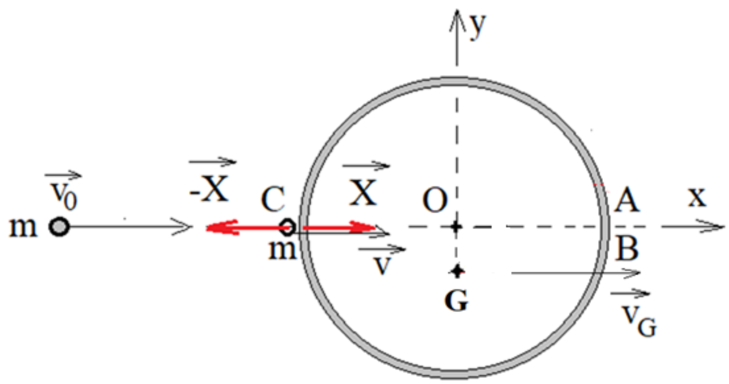
3a. Va chạm đàn hồi giữa vật m và vòng dây. Gọi $\vec{v}, \vec{v}_G$ lần lượt là vận tốc của bi và khối tâm G của vành sau vừa va chạm xong.

-Bảo toàn động lượng: $mv_0 = mv + mv_G \rightarrow v_0 = v + v_G$ (3.1)

-Bảo toàn momen động lượng đối với cực cố định trên sàn tại G( khi va chạm)

$$mv_0|y_G| = mv|y_G| + I_G\omega_G \rightarrow mv_0|y_G| = mv|y_G| + \left[I_O - m(|y_G|)^2\right]\omega_G$$

Thay $I_0$ và $y_G$ vào ta được




$$mv_0\frac{l}{6\pi^2} = mv\frac{l}{6\pi^2} + \left[\frac{ml^2}{4\pi^2} - m(\frac{l}{6\pi^2})^2\right]\omega_G \rightarrow \frac{v_0}{6} = \frac{v}{6} + \left[\frac{l}{4} - \frac{l}{36\pi^2}\right]\omega_G$$

$$\rightarrow v_0 = v + \left[\frac{3l}{2} - \frac{l}{6\pi^2}\right]\omega_G \quad (3.2)$$

Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng $\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_G\omega_G^2 + \frac{1}{2}mv_G^2$

$$mv_0^2 = mv^2 + \left[I_O - m(|y_G|)^2\right]\omega_G^2 + mv_G^2$$

$$mv_0^2 = mv^2 + \left[\frac{ml^2}{4\pi^2} - m(\frac{l}{6\pi^2})^2\right]\omega_G^2 + mv_G^2$$

$$\rightarrow v_0^2 = v^2 + \frac{l^2}{\pi^2}\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{36\pi^2}\right]\omega_G^2 + v_G^2$$

$$\rightarrow v_0^2 = v^2 + \frac{l^2}{6\pi^2}\left[\frac{3}{2} - \frac{1}{6\pi^2}\right]\omega_G^2 + v_G^2 \quad (3.3)$$

Từ (3.1) thay vào (3.2) ta được: $v_G = \left[\frac{3l}{2} - \frac{l}{6\pi^2}\right]\omega_G$ (3.4)

Thay (3.1) và (3.4) vào (3.3) ta được

$$\rightarrow v_0^2 = (v_0 - \left[\frac{3l}{2} - \frac{l}{6\pi^2}\right]\omega_G)^2 + \frac{l^2}{6\pi^2}\left[\frac{3}{2} - \frac{1}{6\pi^2}\right]\omega_G^2 + (\left[\frac{3l}{2} - \frac{l}{6\pi^2}\right]\omega_G)^2$$

Đặt $\rightarrow A = \left[\frac{3l}{2} - \frac{l}{6\pi^2}\right]$, nên

$$\rightarrow v_0^2 = (v_0 - A\omega_G)^2 + \frac{l}{6\pi^2}A\omega_G^2 + (A\omega_G)^2$$

$$\rightarrow 0 = -2A\omega_G v_0 + (A\omega_G)^2 + \frac{l}{6\pi^2}A\omega_G^2 + (A\omega_G)^2$$

$$\rightarrow 0 = -2v_0 + A\omega_G + \frac{l}{6\pi^2}\omega_G + A\omega_G$$

$$\rightarrow \omega_G = \frac{2v_0}{2\text{A} + \frac{l}{6\pi^2}} = \frac{2v_0}{2\left[\frac{3l}{2} - \frac{l}{6\pi^2}\right] + \frac{l}{6\pi^2}} = \frac{2v_0}{\left[3 - \frac{1}{6\pi^2}\right]l}$$

$$v_G = \left[\frac{3l}{2} - \frac{l}{6\pi^2}\right]\omega_G = \left[\frac{3l}{2} - \frac{l}{6\pi^2}\right]\frac{2v_0}{\left[3 - \frac{1}{6\pi^2}\right]l}$$

$$v_G = \frac{\left[\frac{3}{2} - \frac{1}{6\pi^2}\right]}{\left[3 - \frac{1}{6\pi^2}\right]}2v_0 = \frac{18\pi^2 - 2}{18\pi^2 - 1}v_0$$

Từ (3.1) $v = v_0 - v_G = v_0 - \frac{18\pi^2 - 2}{18\pi^2 - 1}v_0 = \frac{v_0}{18\pi^2 - 1}$

**3b. Va chạm mềm.** Va chạm đàn hồi giữa vật m và vòng dây. Gọi $\vec{v}, \vec{v}_G$ lần lượt là vận tốc của bi và khối tâm G của vành sau vừa va chạm xong. Gọi $G_h$ là vị trí khối tâm hệ bi-vành, khi đó tọa độ của $G_h$ sẽ là $x_{Gh} = \frac{-R}{2} = -\frac{l/2\pi}{2} = -\frac{l}{4\pi}$ $y_{Gh} = \frac{y_G}{2} = -\frac{l}{12\pi^2}$ .

-Bảo toàn động lượng $m\overrightarrow{v_0} = m\vec{v} + m\overrightarrow{v_G} = 2m\overrightarrow{v_{Gh}} \to v_0 = 2v_{Gh}$

$\to v_{Gh} = \frac{v_0}{2}$ (3.5)

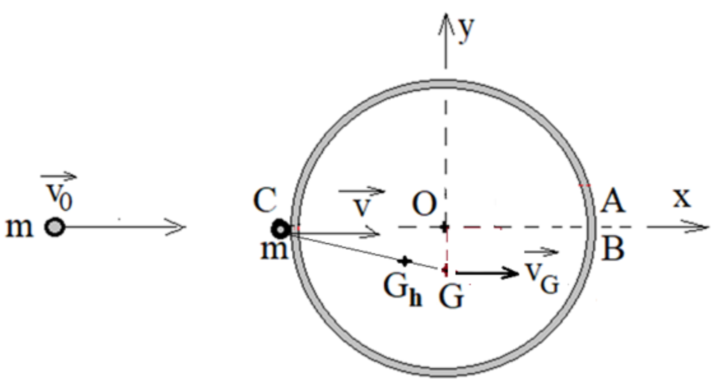
-Bảo toàn momen động lượng đối với cực cố định trên sàn tại $G_h$ ( khi va chạm)

$$mv_0 \frac{|y_{Gh}|}{2} = I_{Gh}\omega_{Gh} = (I_{vat} + I_{vanh})\omega_{Gh}$$

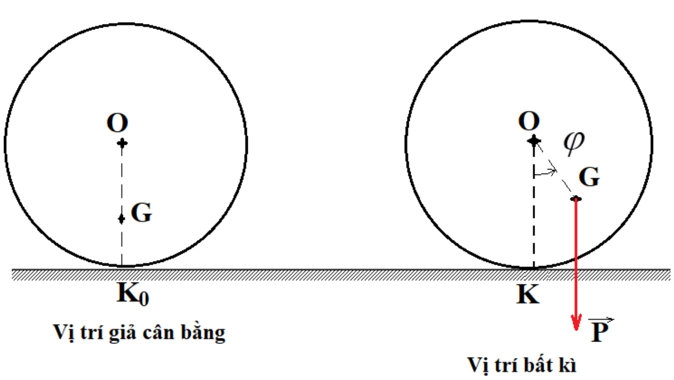
$$\Leftrightarrow mv_0 \frac{l}{12\pi^2} = \left[ m\left( (\frac{y_G}{2})^2 + (\frac{R}{2})^2 \right) + \left( I_G + m(\frac{y_G}{2})^2 + m(\frac{R}{2})^2 \right) \right]\omega_{Gh}$$

$$\Leftrightarrow mv_0 \frac{l}{12\pi^2} = \left[ m\left( \frac{y_G^2}{2} + \frac{R^2}{2} \right) + I_G \right]\omega_{Gh} = \left[ m\left( \frac{(\frac{l}{6\pi^2})^2}{2} + \frac{(\frac{l}{2\pi})^2}{2} \right) + \left( \frac{ml^2}{4\pi^2} + m(\frac{y_G}{2})^2 + m(\frac{R}{2})^2 \right) \right]\omega_{Gh}$$

$$\Rightarrow \omega_{Gh} = \frac{6\pi^2}{\left[ (27\pi^2 - 2) \right]} \frac{v_0}{l} \quad (3.6)$$




4. Chứng minh dao động điều hòa. Tìm chu kì.



$$\varphi" = \gamma_O = \gamma_K = \frac{-P.OG.\sin\varphi}{I_K} = \frac{-mg.|y_G|}{I_G + mGK^2}\varphi$$

$$\Leftrightarrow \varphi" = \frac{-mg.|y_G|}{(I_O - m.OG^2) + mGK^2}\varphi$$

$$\varphi" = \frac{-mg.|y_G|}{mR^2 - m.OG^2 + m(OG^2 + R^2 - 2.OG.R\cos\varphi)}\varphi$$

$$\varphi" = \frac{-g.|y_G|}{2R^2 - 2.OG.R)}\varphi\ (\cos\varphi \approx 1)$$

$$\varphi" = \frac{-g.|y_G|}{2R^2 - 2.|y_G|.R)}\varphi = \frac{g}{2}\frac{-\frac{l}{6\pi^2}}{(\frac{l}{2\pi})^2 - \frac{l}{6\pi^2}(\frac{l}{2\pi})}\varphi;\ (\ y_G = -\frac{l}{6\pi^2})$$

$$\varphi" = -\frac{g}{l}(\frac{\pi}{3\pi - 1})\varphi$$

Đặt $\omega^2 = \frac{g}{l}(\frac{\pi}{3\pi - 1}) \rightarrow \varphi" + \omega^2\varphi = 0$

Vậy vành dao động điều hòa với chu kì

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\frac{(3\pi - 1)}{\pi}}$$

**Câu 1.4. PHƯƠNG PHÁP NĂNG LƯỢNG**

$$\overrightarrow{v_G} = \overrightarrow{v_{G/O}} + \overrightarrow{v_O} \rightarrow v_G^2 = v_O^2 + (\omega.OG)^2 - 2v_O.(\omega.OG)\cos\varphi$$

$$v_G^2 = v_O^2 + (\omega.OG)^2 - 2v_O.(\omega.OG)\cos\varphi$$

Vì $\varphi << \rightarrow v_G^2 = v_O^2 + (\omega.OG)^2 - 2v_O.(\omega.OG) = (\omega R)^2 + (\omega\frac{l}{6\pi^2})^2 - 2\omega R.(\omega\frac{l}{6\pi^2})$

$$\rightarrow v_G^2 = v_O^2 + (\omega.OG)^2 - 2v_O.(\omega.OG) = (\omega R)^2 + (\omega\frac{l}{6\pi^2})^2 - 2\omega R.(\omega\frac{l}{6\pi^2})$$

$$\rightarrow v_G^2 = (\omega\frac{l}{2\pi})^2 + (\omega\frac{l}{6\pi^2})^2 - 2\omega\frac{l}{2\pi}.(\omega\frac{l}{6\pi^2})$$

$$\rightarrow v_G^2 = (\omega\frac{l}{2\pi})^2\left[1+\frac{1}{9\pi^2}-\frac{2}{3\pi}\right] = (\omega\frac{l}{2\pi})^2\left[\frac{9\pi^2-6\pi+1}{9\pi^2}\right] = (\omega\frac{l}{2\pi})^2\left[\frac{(3\pi-1)}{3\pi}\right]^2$$

$$\rightarrow v_G^2 = (\frac{\omega l}{\pi})^2\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{36\pi^2}-(\frac{1}{6\pi})\right] = (\frac{\omega l}{\pi})^2\left[\frac{9\pi^2+1-6\pi}{36\pi^2}\right] = (\frac{\omega l}{\pi})^2\left[\frac{(3\pi-1)^2}{36\pi^2}\right]$$

Momen quán tính:

$$I_O = I_G + mOG^2 \rightarrow I_G = \left(I_O - mOG^2\right) = m\mathrm{R}^2 - m(\frac{R}{3\pi})^2 = m\mathrm{R}^2(\frac{9\pi^2-1}{9\pi^2})$$

$$I_G = m(\frac{l}{2\pi})^2(\frac{9\pi^2-1}{9\pi^2}) = ml^2(\frac{9\pi^2-1}{36\pi^4})$$

Và: $I_K = I_G + mKG^2 \Rightarrow I_K = \left(I_O - mOG^2\right) + mKG^2$

$$I_K \approx \left(I_O - mOG^2\right) + \left(mR^2 + mOG^2 - 2m\mathrm{R}.OG\right)$$

$$I_K = \left(2mR^2 - 2m\mathrm{R}.OG\right) = 2m\mathrm{R}\left(R - OG\right) = 2m\frac{l}{2\pi}(\frac{l}{2\pi}-\frac{l}{6\pi^2})$$

$$I_K = m\frac{l^2}{2\pi^2}(1-\frac{l}{3\pi}) = m\frac{l^2}{6\pi^3}(3\pi-1)$$

$$\frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G(\omega_G)^2 + mgOG(1-\cos\varphi) = const \quad (\omega_G = \omega_O = \varphi')$$

$$\frac{1}{2}m(\omega\frac{l}{2\pi})^2\left[\frac{(3\pi-1)}{3\pi}\right]^2 + \frac{1}{2}m\mathrm{R}^2(\frac{9\pi^2-1}{9\pi^2})(\omega)^2 + mgOG\frac{\varphi^2}{2} = const$$

$$\frac{1}{2}m(\omega\frac{l}{2\pi})^2\left[\frac{(3\pi-1)}{3\pi}\right]^2 + \frac{1}{2}m(\frac{l}{2\pi})^2(\frac{9\pi^2-1}{9\pi^2})(\omega)^2 + mg\frac{l}{6\pi^2}\frac{\varphi^2}{2} = const$$

$$\left[\frac{(3\pi-1)^2}{9\pi^2} + (\frac{9\pi^2-1}{9\pi^2})\right](\frac{1}{2\pi})^2\omega^2 l + g\frac{1}{6\pi^2}\varphi^2 = \mathrm{co}n\mathrm{st}$$

$$\frac{(3\pi-1)}{6\pi}\omega^2 l + g\frac{1}{6}\varphi^2 = const$$

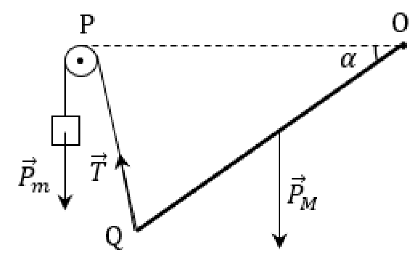
$$\to \varphi'' + \frac{\pi g}{l(3\pi-1)}\varphi = 0 \to \varphi'' + \frac{\pi}{(3\pi-1)}\frac{g}{l}\varphi$$

Đặt $\Omega^2 = \dfrac{\pi}{(3\pi-1)}\dfrac{g}{l} \to \varphi'' + \Omega^2\varphi = 0$

**Vật dao động điều hòa với chu kì** $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l(3\pi-1)}{g\pi}}$

**Bài 45. 1.**

Áp dụng quy tắc momen cho thanh cứng $M$ ta có




$$P_M\frac{\ell}{2}\cos\alpha - T\ell\cos\frac{\alpha}{2} = 0 \Leftrightarrow Mg\cos\alpha - 2T\cos\frac{\alpha}{2} = 0$$

Áp dụng quy tắc ròng rọc cố định ta có $T = P_m = mg \Rightarrow$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} - \frac{m}{M}\cos\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

Giải phương trình trên ta được

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{m}{2M} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{m}{M}\right)^2 + 2}$$

Dễ thấy $\alpha < \pi/2$, nên

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{m}{2M} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{m}{M}\right)^2 + 2} \Rightarrow \alpha = 2\arccos\left(\frac{m}{2M} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{m}{M}\right)^2 + 2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

2.Nếu thanh quay một góc $\varepsilon$ đủ nhỏ ngược chiều kim đồng hồ thì vật $m$ được nâng lên một đoạn

$$h_m = 2\ell\sin\frac{\pi/3+\varepsilon}{2} - 2\ell\sin\frac{\pi}{6} = \ell\frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon - \frac{\ell}{8}\varepsilon^2$$

còn $M$ hạ xuống một đoạn

$$h_M = \frac{\ell}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}+\varepsilon\right) - \frac{\ell}{2}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\ell}{4}\varepsilon - \frac{\ell\sqrt{3}}{8}\varepsilon^2$$

Do đó thế năng của hệ khi thanh ở li độ $\varepsilon$

$$W_t = mgh_m - Mgh_M = \frac{g\ell}{4}\left(M\sin\frac{\pi}{3} - m\sin\frac{\pi}{6}\right)\varepsilon^2 = \frac{Mg\ell}{4}\left(2\cos\frac{\pi}{6} - \frac{m}{M}\right)\varepsilon^2 \Rightarrow$$

$$W_t = \frac{5Mg\ell}{16\sqrt{3}}\varepsilon^2$$

Ta lại có

$$v_m = \omega_{m_0} r_0 = \ell\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)\dot{\varepsilon} = \frac{\ell\sqrt{3}\dot{\varepsilon}}{2}$$

Do đó động năng của hệ khi $M$ ở li độ $\varepsilon$ là

$$W_đ = \frac{1}{2}\left(\left(m + \frac{m_0}{2}\right)\frac{3}{4} + \frac{M}{3}\right)\ell^2\dot{\varepsilon}^2 = \frac{9\sqrt{3}+16}{96}M\ell^2\dot{\varepsilon}^2$$

Theo định luật bảo toàn cơ năng ta có

$$\frac{9\sqrt{3}+16}{96}M\ell^2\dot{\varepsilon}^2 + \frac{5Mg\ell}{16\sqrt{3}}\varepsilon^2 = const$$

Đạo hàm hai vế theo thời gian ta được

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{30}{27+16\sqrt{3}}\frac{g}{\ell}\varepsilon = 0$$

Từ đó ta có hệ dao động điều hòa với tần số góc

$$\omega = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{27+16\sqrt{3}}}\sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

Do đó vận tốc cực đại của vật nặng $m$ là

$$v_{m\max} = \omega A = \ell\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)\dot{\varepsilon}_{\max} = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}\dot{\varepsilon}_{\max}$$

Hay vận tốc góc cực đại của thanh cứng là

$$\dot{\varepsilon}_{\max} = \frac{2\omega A}{\ell\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{30}}{\sqrt{81+48\sqrt{3}}}\frac{A}{\ell}\sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

**Bài 46**

**1.1 a)** Phương trình dao động của thanh:

$\frac{1}{3}ML^2.\ddot{\varphi} = -Mg\varphi\frac{L}{2}$ Vậy tần số góc là $\omega = \sqrt{\frac{3g}{2L}}$

**b)** Độ dời *A* ứng với cả chu kỳ, tức là vận tốc đi bộ $v = \frac{A}{T} = \frac{A\omega}{2\pi} = \frac{A\omega}{2\pi}\sqrt{\frac{3g}{2L}} \approx 1.2m/s \approx 5km/h$ ……0,5đ

2.a) Khi con bọ bò được khoảng cách a, mômen quán tính của thanh và con bọ quanh chốt là:

$$I = \frac{1}{3}ML^2 + \frac{1}{3}Ma^2 = \frac{1}{3}M\left(L^2 + a^2\right)$$

Phương trình chuyển động của con lắc là:

$$\frac{1}{3}M\left(L^2 + a^2\right)\theta'' + \frac{2}{3}Maa'\theta' = -Mg\sin\theta\left(\frac{L}{2} + \frac{a}{3}\right)$$

Với biên độ góc nhỏ, phương trình trên trở thành:

$$\theta'' + \frac{2aa'\theta'}{L^2 + a^2} + \frac{g\left(a + \frac{3L}{2}\right)\theta}{L^2 + a^2} = 0$$

Nếu con bọ bò quá chậm thì sự thay đổi a trong một chu kì của dao động là không đáng kể, nghĩa là $a' = V << a\omega$, chúng ta có thể bỏ qua một số hạng thứ hai của phương trình trên nên

$$\theta'' + \frac{g\left(2a + 3L\right)}{2\left(L^2 + a^2\right)}\theta = 0$$

Vậy tần số góc của dao động điều hòa của con lắc $\omega = \sqrt{\frac{g\left(2a + 3L\right)}{2\left(L^2 + a^2\right)}}$

**2.** Xét chuyển động của con rệp dọc theo thanh

$$\frac{M}{3}\left(a'' - a\theta'^2\right) = \frac{Mg\cos\theta}{3} - F$$

Trong đó F là lực của thanh tác động lên con bọ. Khi con bọ bò với tốc độ không đổi thì a" = 0. Ngoài ra đối với các dao động với biên độ nhỏ, $\cos\theta \approx 1-\frac{\theta^2}{2}$. Khi đó phương trình trên trở thành.

$$F=\frac{Mg}{3}-\frac{Mg}{6}\theta^2+\frac{Ma\theta'^2}{3}$$

Công thực hiện bởi F khi con bọ bò được một khoảng vô cùng bé là

$$dW=-Fda=-\frac{Mg}{3}da+\frac{M}{3}\left(\frac{g\theta^2}{2}-a\theta'^2\right)da$$

Công thức này được trữ lại như năng lượng của hệ thống. Số hạng đầu của vế phải là độ biến thiên thế năng của con bọ, số hạng thứ hai là độ biến thiên năng lượng dao động E của hệ thống

$$dE=\frac{M}{3}\left(\frac{g\theta^2}{2}-a\theta'^2\right)da$$

Do điều kiện $a' << a\omega$, a hầu như không thay đổi trong mỗi chu kì dao động nên có thể xem như là hằng số. Đối với mỗi a, khi xét một chu kì đầy đủ, các đại lượng trong phương trình trên có thể thay thế bằng cách giá trị trung bình.

$$dE=\frac{M}{3}\left(\frac{g\overline{\theta^2}}{2}-a\overline{\theta'^2}\right)da$$

Trong dao động điều hòa ta có thế năng và động năng trung bình trong mỗi chu kì là bằng nhau

$$\begin{cases}\overline{T}=\frac{1}{2}\frac{M}{3}\left(L^2+a^2\right)\overline{\theta'^2}=\frac{F}{2}\\ \overline{V}=\frac{Mg}{2}\left(\frac{L}{2}+\frac{a}{3}\right)\overline{\theta'^2}=\frac{E}{2}\end{cases}$$

Từ các phương trình trên suy ra $\overline{\theta'^2}$ và $\overline{\theta^2}$, rồi thế vào phương trình năng lượng và tích phân lên ta được

$$\ln E=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3L+2a}{L^2+a^2}\right)+C$$

Trong đó C là hằng số tích phân được xác định từ điều kiện ban đầu: a = 0, $E=E_0$ suy ra

$$C = \ln E_0 - \frac{1}{2}\ln\frac{3}{L}$$

Vậy
$$\ln\frac{E}{E_0} = \frac{1}{2}\ln\frac{L(3L+2a)}{3(L^2+a^2)}$$

Khi a = L, thì $\ln\frac{E}{E_0} = \frac{1}{2}\ln\frac{5}{6} \Rightarrow E = \sqrt{\frac{5}{6}}E_0$

Khi con lắc ở vị trí biên thì động năng của nó triệt tiêu còn thế năng của nó lớn nhất và bằng cơ năng của con lắc. Vậy

Khi a = L, thì biên độ góc là $\theta_{max} \Rightarrow E = \frac{1}{2}Mg\left(\frac{L}{2}+\frac{L}{3}\right)\theta_{max}^2$

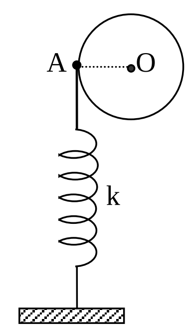
Khi a = 0, thì biên độ góc là $\theta_0 \Rightarrow E_0 = \frac{1}{2}Mg\frac{L}{2}\theta_0^2$, nên $\theta_{max} = \left(\frac{3}{10}\right)^{\frac{1}{4}}\theta_0$

**Bài 47.**

+ Quay đĩa một góc nhỏ α, A dịch chuyển đoạn Rα. A chịu tác dụng lực đàn hồi kx = kRα do lò xo bị biến dạng.

* Đĩa chịu tác dụng của mômen lực $M = -kR^2\alpha$ (dấu – vì M ngược chiều α)

* Đĩa tròn đồng chất, bán kính R có mômen quán tính $I = \frac{mR^2}{2}$.




* Phương trình chuyển động của vật rắn quay quanh một trục:

$$M = I\gamma \leftrightarrow -kR^2\alpha = \frac{mR^2}{2}\gamma$$

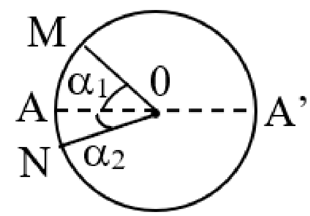
Với gia tốc góc $\gamma = \frac{d^2\alpha}{dt^2} = \alpha''$.

Vậy:
$$\frac{1}{2}m\alpha'' + k\alpha = 0,\ \alpha'' + \frac{2k}{m}\alpha = 0,$$

Tần số góc: $\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$, Chu kì: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$

b. Xét một lần đoạn OA đi qua vị trí nằm ngang. Gọi $\alpha_1, \alpha_2$ là biên độ góc về hai phía so với đường nằm ngang. Biến thiên cơ năng của hệ là

$\Delta W = \frac{1}{2}kR^2(\alpha_2^2 - \alpha_1^2)$




Công của mômen cản

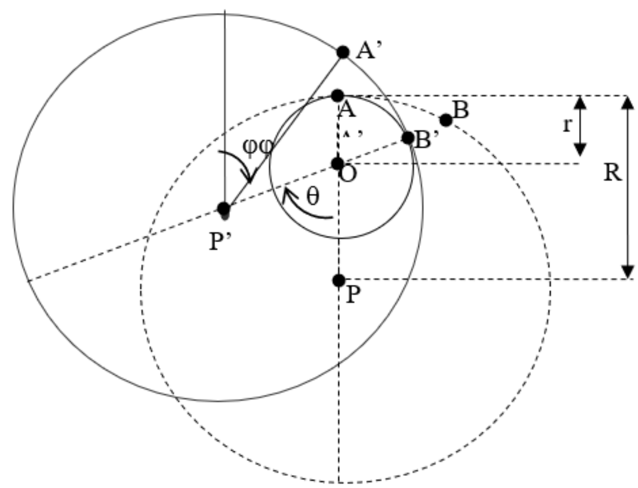
$$A_C = -M_C(\alpha_1 + \alpha_2) = -\frac{kR^2}{200}(\alpha_1 + \alpha_2)$$

Theo định lý biến thiên cơ năng: $\Delta W = A_C \rightarrow \alpha_1 - \alpha_2 = \frac{1}{100} \rightarrow$

Số dao động: $n = \frac{\alpha_0}{2(\alpha_1 - \alpha_2)} = 5$

**Bài 48.**

1.( 1 điểm) Vòng nhỏ cố định, r=0. Tính chu kì dao động của vòng lớn.




+ Mô men quán tính của vòng lớn đối với trục quay tại A là

I= $2MR^2$ (1)

+ Phương trình động lực học :

$$-MgR\sin\theta = 2MR^2\theta'' \quad (2)$$

+ Dao động với góc nhỏ $\sin\theta \approx \theta$ thay vào (2) :

$$\theta'' + \frac{g}{2R}\theta = 0 \qquad (3)$$

+ Đây là phương trình dao động điều hoà với chu kì :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}} \qquad (4)$$

2.( 1,5 điểm) Vòng nhỏ cố định, $r \neq 0$. Tính chu kì dao động của vòng lớn

+Theo hình vẽ, điểm tiếp xúc từ A đến A’ nên cung AB bằng cung A’B’ bằng $r\theta$

Toạ độ góc của vòng lớn đối với tâm vòng nhỏ là $\theta$

Gọi toạ độ góc của vòng lớn quanh tâm của nó là $\varphi$

+ Góc quay của tâm vòng tròn lớn đối với điểm tiếp xúc A $\varphi = \theta - \dfrac{A'B'}{R} = \theta(1-\dfrac{r}{R}) \Rightarrow$

$\varphi'' = \theta''(1-\dfrac{r}{R})$ (5)

+Chuyển động quay quanh tâm vòng tròn lớn: $-fR = MR^2\varphi''$ (6)

+ Phương trình động lực học của vòng lớn đối với tâm O(Vòng lớn dao động quanh O)

$$-MgSin\theta + f = M(R-r)\theta'' \quad (7).$$

+ Thay (5) và (6) vào (7) với dao động nhỏ $\sin\theta \approx \theta$ ta được :

$$\theta'' + \frac{g}{2(R-r)}\theta = 0$$

+ Đây là phương trình dao động điều hoà với chu kì :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2(R-r)}{g}} \quad (8).$$

3. (1,5 điểm) Vòng nhỏ quay quanh trục O. Tính chu kì dao động của hệ.

+Gọi toạ độ góc của vòng lớn quanh tâm là $\varphi$

Toạ độ góc của vòng nhỏ quanh tâm của nó là $\beta$

Toạ độ góc của vòng lớn đối với tâm vòng nhỏ là $\theta$

$$\varphi = \theta(1-\frac{r}{R}) + \beta\frac{r}{R} \quad (9).$$

+ Phương trình động lực học $-Mg\sin\theta + f = M(R-r)\theta''$ (10)

+ $$-fR = MR^2\varphi'' \quad (11)$$

+ $$fr = mr^2\beta'' \quad (12)$$

+ Từ (11) và (12) ta được : $f=-\dfrac{mM}{m+M}(R-r)\theta"$ (13)

+ Thay (13) vào (10)

$$-Mg\sin\theta-\frac{mM}{m+M}(R-r)\theta"=M(R-r)\theta" \quad (14).$$

+ Với dao động nhỏ $\sin\theta\approx\theta$ ta được phương trình :

$$\theta"+\frac{g}{R-r}\frac{m+M}{2m+M}\theta=0 \qquad (15).$$

+ Đây là phương trình dao động điều hoà với chu kì :

$$T=2\pi\sqrt{\frac{(R-r)}{g}(\frac{2m+M}{m+M})} \quad (16)$$

**Bài 49.** a. Tần số dao động

Khối lượng của phần dây chưa nằm trên sàn: $\sigma$ L.

Chọn gốc tọa độ tại vị trí cân bằng trục Ox thẳng đứng hướng lên.

Khi nâng dây lên với điểm treo dây có li độ x thì lực hồi phục là: -*kx*- $\sigma$ *gx*.

Phương trình động lực học: -*(k +* $\sigma$ *g)x = (*$\sigma$ *L)x''* (1)

Tần số dao động: $\omega=\sqrt{\dfrac{k+\sigma g}{\sigma L}}=\sqrt{\dfrac{k}{M}+\dfrac{g}{L}}$ (2)

b. Năng lượng mất mát trong một dao động:

Li độ của dây đối với vị trí cân bằng: $x(t)=A(t)\cos(\omega t)$ (*)

Khi một khối lượng dm va chạm vào sàn, động năng bị mất đi một lượng $\dfrac{1}{2}dmv^2$

Trong thời gian ngắn dt ta có dm= $\sigma$ vdt. Vì vậy năng lượng tiêu hao là $|\dfrac{1}{2}\sigma v^3dt|$

Từ (*) ta có: $v(t)=-\omega A(t)\sin(\omega t)$

Độ biến thiên năng lượng (năng lượng mất mát) trong một nửa chu kỳ khi dây xuống là:

$$\Delta E_x = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \sigma\omega^3 A^3 \sin^3(\omega t)\,dt \qquad (3)$$

Ta chỉ xét trong một chu kỳ nên trong thời gian này ta có thể xem A biến đổi không đáng kể và xem là không thay đổi.

Đặt $\theta = \omega t$, ta có:

$$\int_0^{\pi} \sin^3\theta d\theta = \int_0^{\pi}\left(1-\cos^2\theta\right)\sin\theta d\theta = \left(-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3}\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{4}{3} \qquad (4)$$

Do đó: $$\Delta E_x = -\frac{2}{3}\sigma\omega^2 A^3 \qquad (5)$$

Khi dây đang nâng lên, thì khối lượng dm nhập vào sợi dây đang đi lên với vận tốc v sẽ nhận được động năng $\frac{1}{2}(dm)v^2$, từ đó thu được động lượng dp = (dm)v

Công của lò xo để nâng dây lên (ứng với khối lượng dm)

$$\mathrm{W} = \int F dx = \int F v dt$$

Trong thời gian rất ngắn xem v không đổi

$$\mathrm{W} = v\int F dt = v(dp) = (dm)v^2 \qquad (6)$$

Một nửa công này chuyển thành động năng $\frac{1}{2}(dm)v^2$, vì vậy nửa còn lại chuyển thành nhiệt năng.

Năng lượng mất mát khi dây đi lên: $\Delta E_L = \frac{1}{2}(dm)v^2 = \frac{1}{2}|\sigma v dt|v^2 = |\frac{1}{2}\sigma v^3 dt|$

Tổng năng lượng mất mát trọng một chu kỳ dao động:

$$\Delta E = \Delta E_x + \Delta E_L = -\frac{4}{3}\sigma\omega^2 A^3 \qquad (7)$$

c. Ta biết năng lượng của dây khi dao động với biên độ A là: $E = \dfrac{M\omega^2 A^2}{2}$

Vì vậy: $dE = M\omega^2 A dA$

Số dao động trong thời gian dt: $dn = \frac{\omega dt}{2\pi}$

Từ phương trình (7) ($M \approx \sigma L$), ta có: $(\sigma L)\omega^2 AdA = -\left(\frac{\omega dt}{2\pi}\right)\left(\frac{4}{3}\sigma\omega^2 A^3\right)$

$$\frac{dA}{A^2} = -\left(\frac{2\omega}{3\pi L}\right)dt \qquad (8)$$

Lấy tích phân theo t và xét điều kiện ban đầu $A(0) \equiv b$ ; $A(t) = \frac{1}{\frac{1}{b} + \frac{2\omega t}{3\pi L}}$ (9)

Chú ý sau khoảng thời gian lớn, b nhỏ nên ta có thể viết: $A(t) \approx \frac{3\pi L}{2\omega t}$

**Bài** 50.

\+ Tìm được: $I = \frac{36h(R_2^5 - R_1^5)}{25(R_1^4 + R_2^4)}$

\+ Tìm được: $m = \frac{12h(R_2^3 - R_1^3)}{5(R_1^4 + R_2^4)}$

\+ Xét tại thời điểm t, hình trụ nhỏ có vị trí xác định bởi góc $\varphi$, Khối tâm của nó có vận tốc $\omega$* đối với tâm O của trụ lớn

$\Rightarrow$ vận tốc khối tâm C của trụ nhỏ: $v_C = \omega^*(R-R_2) = (R-R_2).\varphi'$ (1)

\+ Theo bảo toàn cơ năng: $mg(R-R_2)(1-\cos\varphi) + \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}I\frac{v_C^2}{R_2^2} = \text{const}$ (2)

\+ Thay (1) vào (2) rồi đạo hàm hai vế $\Rightarrow$ $T = 2\pi.\sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}.\frac{(R_2^5 - R_1^5)}{(R_2^3 - R_1^5)R_2^2}}{g(R-R_2)}}$ (1đ)

**Bài 51**

Xét một phần tử cách đầu A một khoảng x

có khối lượng Với $m = \int dm = \frac{3}{2}\rho_0 l$ , $AG = x_G = \frac{5}{9}l$ , $\gamma = \alpha''$ , $\sin\alpha \approx \alpha$ ($\alpha$ nhỏ)

Tọa độ khối tâm G của thanh:động quay của thanh quanh trục quay: $mgAG\sin\alpha = I\gamma = \frac{7}{2}\rho_0 l^3\gamma$

$\rightarrow \alpha'' + \frac{10g}{7l}\alpha = 0$. Đặt $\omega_1^2 = \frac{10g}{7l} \rightarrow \alpha'' + \omega_1^2\alpha = 0$.

Chứng tỏ thanh dao động điều hòa với chu kỳ $T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{7l}{10g}}$

2) Theo định lý O - G cường độ điện trường do một dây dẫn dài vô hạn gây ra trong không gian là: $E_r = \dfrac{\lambda_2}{2\Pi\varepsilon_0 .r}$

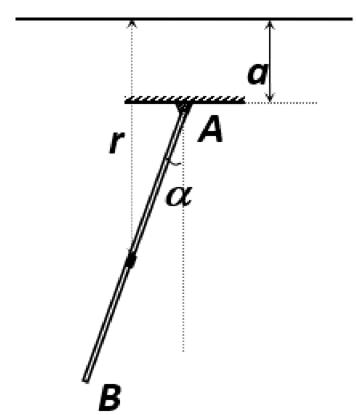
* Điện tích của phần tử $dq = \lambda_1 dx$

* Khoảng cách từ phần tử đến dây là $r = a + x\cos\alpha$

* Lực điện trường tác dụng lên dq: $dF = E_r .dq = \dfrac{\lambda_1\lambda_2 dx}{2\Pi\varepsilon_0(a + x\cos\alpha)}$

* Momen của lực dF đối với trục quay là:

$$dM = -dF.x.\sin\alpha = -\frac{\lambda_1\lambda_2\sin\alpha x dx}{2\Pi\varepsilon_0(a + x\cos\alpha)} = -K\frac{xdx}{1 + Ax}$$




Với $K = \dfrac{\lambda_1\lambda_2\sin\alpha}{2\Pi\varepsilon_0 a}$ , $A = \dfrac{\cos\alpha}{a}$

-> Momen lực điện trường tác dụng lên thanh là:

$$M_D = \int dM = -\int_0^l K\frac{xdx}{1 + Ax} = -K\left[\int_0^l \frac{dx}{A} - \int_0^l \frac{dx}{A(1 + Ax)}\right]$$

$$= -K\left[\frac{x}{A} - \frac{\ln(1 + Ax)}{A^2}\right]\Bigg|_0^l = -K\left[\frac{l}{A} - \frac{\ln(1 + Al)}{A^2}\right] = -K\left[\frac{la}{\cos\alpha} - \frac{a^2\ln(1 + \dfrac{l\cos\alpha}{a})}{\cos^2\alpha}\right]$$

$$\alpha \text{ nhỏ } \cos\alpha \approx 1 \to M_D = -\frac{\lambda_1\lambda_2\sin\alpha}{2\Pi\varepsilon_0 a}\left[la - a^2\ln(1 + \frac{l}{a})\right] = -\frac{\lambda_1\lambda_2\sin\alpha}{2\Pi\varepsilon_0}\left[l - a\ln(1 + \frac{l}{a})\right]$$

* áp dụng phương trình chuyển động quay cho thanh đối với trục quay

$$M_P + M_D = I\gamma = \frac{7}{12}\rho_0 l^3\alpha'' \to \frac{7}{12}\rho_0 l^3\alpha'' + \left[\frac{5}{6}\rho_0 g l^2 + \frac{\lambda_1\lambda_2}{2\Pi\varepsilon_0}\left(l - a\ln(1+\frac{l}{a})\right)\right]\alpha = 0$$

$$\to \alpha'' + \omega_2^2\alpha = 0 \text{ với } \omega_2^2 \frac{10g}{7l} + \frac{6\lambda_1\lambda_2}{7\Pi\varepsilon_0\rho_0 l^3}\left[l - a\ln(1+\frac{l}{a})\right]$$

Chứng tỏ thanh dao động nhỏ quanh vị trí cân bằng với chu kỳ:

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{10g}{7l} + \frac{6\lambda_1\lambda_2}{7\pi\varepsilon_0\rho_0 l^3}\left[l - a\ln(1+\frac{l}{a})\right]}}.$$

**Bài 52.**

a) Momen quán tính của con lắc $I = \frac{ml^2}{3} + Ml^2 = l^2(M + \frac{m}{3})$

Momen lực $M = mg\frac{l}{2}\sin\theta + Mgl\sin\theta - c\theta \approx \theta\left[gl(M+\frac{m}{2}) - c\right]$

Phương trình $J\ddot{\theta} = M$

$$l^2(M + \frac{m}{3})\ddot{\theta} = \theta\left[gl(M + \frac{m}{2}) - c\right] \quad \text{hay} \quad \ddot{\theta} + \frac{c - gl(M+\frac{m}{2})}{l^2(M+\frac{m}{3})}\theta = 0$$

Giả thiết $c > gl(M + \frac{m}{2})$, con lắc dao động nhỏ với chu kì:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l^2(M+\frac{m}{3})}{c - gl(M+\frac{m}{2})}} \quad (1)$$

b) Điều kiện $c > gl(M + \frac{m}{2})$, với $g_{max} = 9{,}9 m/s^2$ cho $c > 9{,}9.0{,}2.0{,}105$ hay $c > 0{,}2079$.

c) Đặt $a = l^2(M + \frac{m}{3}) = 0{,}004132,\quad b = l(M + \frac{m}{2}) = 0{,}021$ (đơn vị SI).

(1) $\to T = 2\pi\sqrt{\frac{a}{c-bg}}$ (2), hay $\frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{a}{c-bg}$, với T = 10 s tính được $g = 9{,}83 m/s^2$.

d) Lấy ln hai vế của (2) $\ln T = \ln 2\pi + \frac{1}{2}\ln a - \frac{1}{2}\ln(c-bg)$

Lấy đạo hàm đối với $g$, với $T$ là hàm của $g$ :

$\frac{1}{T}\frac{dT}{dg} = \frac{b}{2(c-bg)}$ $\to$ độ nhạy $\frac{dT}{dg} = \frac{bT}{2(c-bg)}$ (3)

Với $b = 0{,}021$, $c = 0{,}208$ thì với $g \approx g = 9{,}8\ m/s^2$ và $T \approx 10s$, ta có $\frac{dT}{dg} \approx 48$.

$g$ tăng $0{,}01 m/s^2$ thì $T$ tăng $0{,}48s$, dễ dàng đo được.

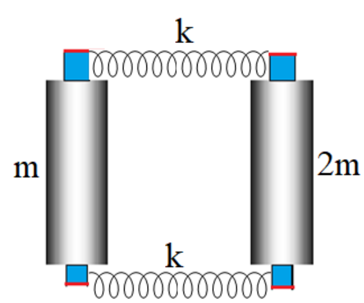
***Chú ý:*** Nếu tính trực tiếp $\frac{dT}{dg}$ từ (2), không qua ln thì phức tạp. Cũng không cần thay $T$ trong (3) bằng (2), vì ta đã biết với $g \approx g_0$ thì $T \approx 10s$.

e) Với con lắc đơn $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$, làm tương tự: $\ln T = \ln 2\pi + \frac{1}{2}\ln L - \frac{1}{2}\ln g$. Lấy đạo hàm đối với $g$ $\frac{1}{T}\frac{dT}{dg} = -\frac{1}{2g}$ $\to$ $\frac{dT}{dg} = -\frac{T}{2g}$.

Con lắc đơn có $L = 1m$ thì $T \approx 2s$. Với $g \approx 9{,}8 m/s^2$ thì $\frac{dT}{dg} \approx -0{,}1$; $g$ tăng $0{,}01 m/s^2$ thì $T$ giảm $0{,}001s$, không đo được. Vậy con lắc rung nhạy hơn con lắc đơn là:

$\theta = \frac{3mv_0}{(M+3m)\omega l}\sin(\omega t)$ với $\omega = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{g(M+2m)}{l(M+3m)}}$, tần số $T = \frac{2\pi}{\omega}$

và góc lệch cực đại $\theta_{max} = \theta_0 = \frac{3mv_0}{(M+3m)\omega l}$

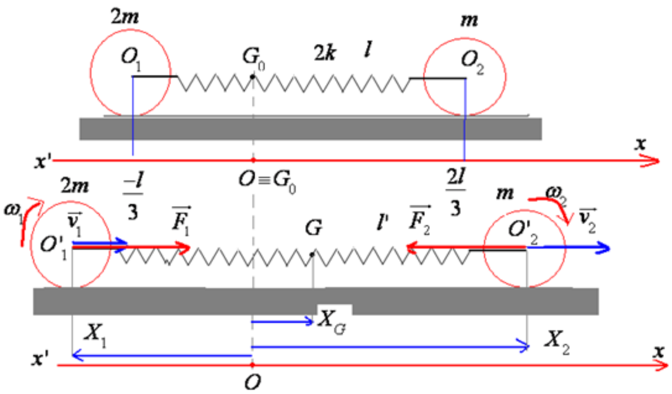


Hình 2.61P

**Bài 53**.

Ta coi hệ 2 lò xo có độ cứng 2k.

Gọi $G_0$ là khối tâm hệ, $l_0$ là chiều dài tự nhiên của lò xo hệ. Chọn trục x'Ox có gốc O trùng $G_0$(HV). Tọa độ trục hai trụ khi lò xo chưa biến dạng $O_1$, $O_2$ lần lượt là $\frac{-l}{3},\frac{2l}{3}$




Hình 2.61S

Ta có

$$X_G=\frac{X_2+2X_1}{3};\quad l'=(X_2-X_1)\qquad (1)$$

$$F_1=-F_2=2k(l'-l_0)=2k(X_2-X_1-l_0)\qquad (2)$$

$$\begin{cases}\gamma_1=\dfrac{F_1R}{I_1+2mR^2}=\dfrac{4k(X_2-X_1-l_0)}{5mR}=\dfrac{X_1''}{R}\\ \gamma_2=\dfrac{F_2R}{I_2+mR^2}=\dfrac{-4k(X_2-X_1-l_0)}{3mR}=\dfrac{X_2''}{R}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}X_1''-\dfrac{4k(X_2-X_1-l_0)}{5m}=0 & (a)\\ X_2''+\dfrac{4k(X_2-X_1-l_0)}{3m}=0 & (b)\end{cases}$$

Lấy (b) trừ (a) vế theo vế ta được

$$\Rightarrow\begin{cases}X_1''-\dfrac{4k(X_2-X_1-l_0)}{5m}=0 & (a)\\ (X_2-X_1+l_0)''+\dfrac{32k(X_2-X_1+l_0)}{15m}=0 & (c)\end{cases}$$

$$\begin{cases}X_1''+\dfrac{4kA\cos\left(\sqrt{\dfrac{32k}{15m}}t+\varphi\right)}{5m}=0\quad (5)\\ (c)\Rightarrow (X_1-X_2+l_0)=A\cos\left(\sqrt{\dfrac{32k}{15m}}t+\varphi\right)\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_1 = B\cos\left(\sqrt{\dfrac{32k}{15m}}t+\varphi\right)+C;\ \ X_1' = -B\sqrt{\dfrac{32k}{15m}}\sin\left(\sqrt{\dfrac{32k}{15m}}t+\varphi\right); \\ X_1'' = -B\dfrac{32k}{15m}\cos\left(\sqrt{\dfrac{32k}{15m}}t+\varphi\right) \qquad\qquad (6) \end{cases}$$

Thay (6) vào (5) ta được $B=\dfrac{3A}{8}$

Lúc t= 0 thì $X_1''>0$; $X_1'=0$ $\Rightarrow \varphi=\pi$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_1 = \dfrac{3A}{8}\cos\left(\sqrt{\dfrac{32k}{15m}}t+\pi\right)+C \\ X_2 = -\dfrac{5A}{8}\cos\left(\sqrt{\dfrac{32k}{15m}}t+\pi\right)+C+l_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_G = \dfrac{A}{24}\cos\left(\sqrt{\dfrac{32k}{15m}}t+\pi\right)+C+\dfrac{2}{3}l_0 \\ X_2-X_1 = -A\cos\left(\sqrt{\dfrac{32k}{15m}}t+\pi\right)+l_0 \end{cases}$$

MÀ t = 0 thì $X_G = 0$; $X_2 - X_1 = l$ suy ra $A = l - l_0$

Nên
$$\begin{cases} X_G = \dfrac{l-l_0}{24}\cos\left(\sqrt{\dfrac{32k}{15m}}t+\pi\right)+\dfrac{l-l_0}{24} \\ T = 2\pi\sqrt{\dfrac{15m}{32k}} \end{cases}$$

**Bài 54.** a. Xác định khối tâm G của hệ:

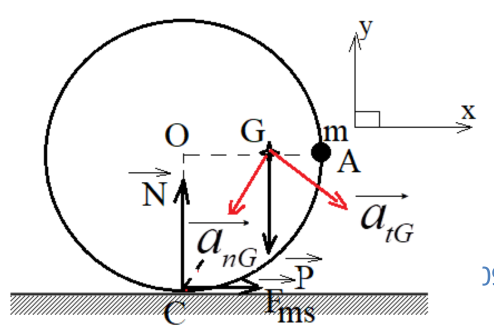
$$\begin{cases} OG.Mg = GAm \\ OG+OA=R \end{cases} \Rightarrow OG=\frac{m}{M+m}R \qquad (1)$$

-Ban đầu, G chưa có vận tốc nên $\overrightarrow{a_G}=\overrightarrow{a_{G/O}}+\overrightarrow{a_O}=\overrightarrow{a_{nG/O}}+\overrightarrow{a_{tG/O}}+\overrightarrow{a_O}=0+\overrightarrow{a_{tG/O}}+\overrightarrow{a_O}=\dfrac{\vec P+\vec N+\vec F_{ms}}{M+m}$

Chiếu lên phương Ox: $\overrightarrow{a_{Gx}}=0+\vec 0+\overrightarrow{a_O}$

-Mặt khác $\overrightarrow{a_G}=\dfrac{\vec P+\vec N+\vec F_{ms}}{M+m}$ (2)

Mặt khác
$$\begin{cases} a_O = a_{Gx} = \dfrac{F_{ms}}{M+m} \quad (3) \\ a_{Gy} = \dfrac{N-P}{M+m} \quad (4) \end{cases}$$



Hình 2.62S1

Theo định luật II Newton trong chuyển động quay

$$\gamma_C = \frac{P.OG}{I_C} = \frac{(M+m)g.\frac{m}{M+m}R}{(MR^2 + MR^2 + m(R\sqrt{2})^2}$$

$$\Leftrightarrow \gamma_C = \frac{mg}{2(M+m)R} \qquad (5)$$

Vì lăn không trượt nên $\gamma_C = \frac{a_O}{R} = \frac{a_{Gx}}{R}$ (6)

Từ (3) và (6) ta suy ra $F_{ms} = \frac{mg}{2}$ (7)

Mặt khác $\begin{cases} \gamma_G = \gamma_C \\ \gamma_G = \frac{N.OG - F_{ms}R}{I_G} \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{N.\frac{m}{M+m}R - \frac{mg}{2}R}{MR^2 + M(\frac{m}{M+m}\mathrm{R})^2 + m(\frac{M}{M+m}\mathrm{R})^2} = \frac{mg}{2(M+m)R}$$

$$\rightarrow N = \frac{2M^2 + 4Mm + m^2}{M+m}.\frac{g}{2} \qquad (8)$$

Từ (7), (8) và kết hợp điều kiện

$$F_{ms} \le kN \Rightarrow k \ge \frac{m(M+m)}{2M^2 + 4Mm + m^2} \qquad (9)$$

Với $m = \frac{M}{3}$ thì $k \ge \frac{4}{31}$

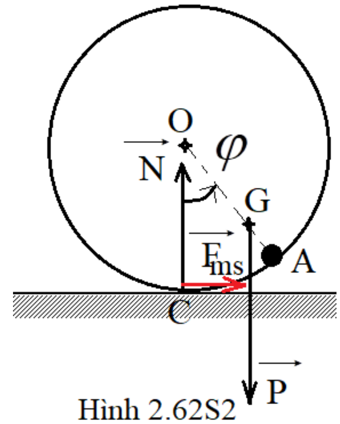
b. Ta có $\gamma_C = \frac{M_{\vec{P}/C}}{I_C} = \frac{-Pd_{\vec{P}/C}}{I_G + (M+m).CG^2}$ (10)

Vì dao động bé nên $\sin\varphi \approx \varphi; cos\varphi \approx 1$

Do đó (10) viết lại

$$\gamma_C = \varphi'' = \frac{-(M+m)g\dfrac{m}{M+m}R\sin\varphi}{\left(MR^2 M.OG^2 + m.GA^2\right) + (M+m)(OC^2 + OG^2 - 2OC.OG.co\varphi}$$

$$\Rightarrow \varphi'' + \frac{g}{6R}\varphi = 0$$



Hình 2.62S2

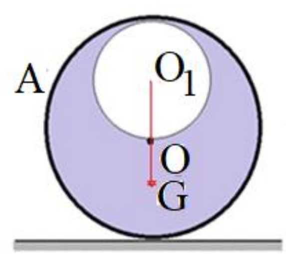
Vậy hệ dao động điều hòa với chu kì

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{g}{6R}}} = \pi\sqrt{\frac{24R}{g}}$$

Lưu ý, nếu $m \neq \dfrac{M}{3}$ thì biểu thức chu kì là $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{2RM}{mg}}$

**Bài 55. 1.a**. Khối lượng trụ A là $m_A$: $\dfrac{m_A}{m} = \dfrac{\pi R^2 - \pi(\frac{R}{2})^2}{\pi R^2} = \dfrac{3}{4}$

$$\Rightarrow m_A = \frac{3}{4}m \qquad (1)$$



Hình 2.74S1

**1.b**. Lúc này trọng tâm và khối tâm trụ A nằm tại G

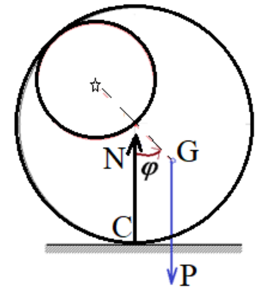
Ta có $m_A.OG = (m - \frac{3}{4}m).OO_1$ $\qquad \Rightarrow OG = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}\dfrac{R}{2} = \dfrac{R}{6}$ (2)

**1c**. Gọi $I_G$ là momen quán tính của trụ A đối với trục quay song song đường sinh mặt trụ và đi qua G của nó. Dùng tính chất tương đương và định lí stenơ ta có :

$$(I_G + m_A.OG^2) + \left[\frac{1}{2}\frac{m}{4}(\frac{R}{2})^2 + \frac{m}{4}OO_1^2\right] = \frac{1}{2}mR^2$$

$$I_G = \frac{1}{2}mR^2 - \left[m_A.OG^2) + \frac{1}{2}\frac{m}{4}(\frac{R}{2})^2 + \frac{m}{4}OO_1^2\right] \quad \to I_G = \frac{37}{96}mR^2; \to I_O = \frac{13}{32}mR^2$$

**1d. Góc quay của trụ A chính là góc quay của thanh OG tức là $\varphi$**



Hình 2.74S2

$$\varphi" = \gamma_{A/O} = \gamma_{A/C} = \frac{-POG\sin\varphi}{I_C} \approx \frac{-POG\varphi}{I_G + m_A CG^2}$$

$$\Leftrightarrow \varphi" = \frac{-m_A g \frac{R}{6}\varphi}{\frac{37}{96}mR^2 + m_A\left[R^2 + (\frac{R}{6})^2 - 2R\frac{R}{6}\cos\varphi\right]}$$

(Ở đây ta lấy $\sin\varphi \approx \varphi; \cos\varphi \approx 1$)

Khi đó $\varphi" = \frac{-m_A g \frac{R}{6}\varphi}{\frac{37}{96}mR^2 + m_A\left[R^2 + (\frac{R}{6})^2 - 2R\frac{R}{6}\cos\varphi\right]} = -\frac{4g}{29R}\varphi$

$$\Rightarrow \varphi" + \frac{4g}{29R}\varphi = 0 \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{29R}{4g}} = \pi\sqrt{\frac{29R}{g}}$$

**2.** Tính chu kì dao động bé của trụ A trên máng trụ C:

Lúc này trụ A quay một góc $\alpha$ (góc quay đoạn OG)

-Đối với trục quay tức thời I ta có :

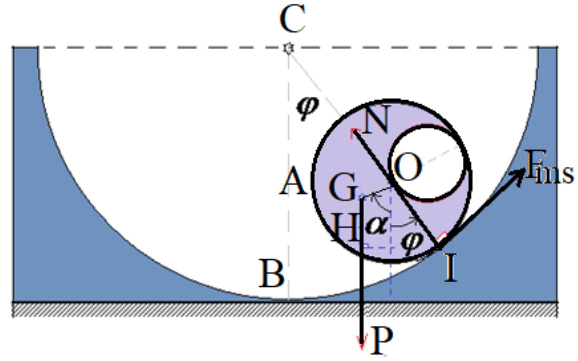
$$\alpha" = \gamma_{A/I} = \frac{M_{P/I}}{I_I} = \frac{-P.HI}{I_G + m_A GI^2}$$

$$\Leftrightarrow \alpha" = \frac{-m_A g(GO\sin\alpha + \mathrm{OI}\sin\varphi)}{\frac{37}{96}mR^2 + m_A\left[R^2 + (\frac{R}{6})^2 - 2R.\frac{R}{6}\cos(\alpha+\varphi)\right]}$$

Ta biết độ dài cung AI bằng độ dài cung BI nên: $(\alpha+\varphi)\mathrm{R} = \varphi 3\mathrm{R} \Rightarrow \varphi = \alpha/2$

Vì dao động bé nên ta có thể lấy $\cos(\alpha+\varphi) \approx 1$ và $\sin\alpha \approx \alpha$ ; $\sin\varphi \approx \varphi$

Do vậy



Hình 2.74S3

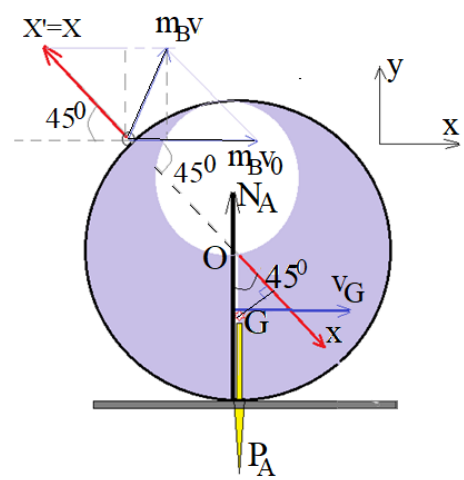
$$\alpha'' = \frac{-\frac{3m}{4}g\left(\frac{R}{6}\alpha + R.\frac{\alpha}{2}\right)}{\frac{37}{96}mR^2 + \frac{3m}{4}\left[R^2 + \left(\frac{R}{6}\right)^2 - .\frac{R^2}{3}\right]} = \frac{-16}{29}\frac{g}{R}\alpha$$

$$\rightarrow \alpha'' + \frac{16}{29}\frac{g}{R}\alpha = 0$$

Vậy chu kì dao động bé là $T = 2\pi\sqrt{\frac{29R}{16g}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{29R}{g}}$

**3.** Sau khi va chạm xong, gọi $\vec{v}$ là vận tốc B, gọi $\vec{v}_G$ là vận tốc khối tâm G của trụ A. Goi $\overrightarrow{X}$ là xung lực khi va chạm xuất hiện tại bề mặt tiếp xúc giữa hai vật, $\overrightarrow{X}$ vuông góc với bề mặt cầu.

-Đối với trụ A, do $\overrightarrow{X}$ không đi qua G nên A vừa chuyển động tịnh tiến vừa quay:



Hình 2.74S4

$$\begin{cases} m_A v_G = X\frac{\sqrt{2}}{2} \\ I_G\omega = X.OG.\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_A v_G = \frac{I_G\omega}{OG} \\ \frac{I_G\omega}{OG} = X.\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_G = \frac{37}{12}\omega R \\ X.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{37}{16}m\omega R \end{cases} \qquad (1)$$

- Đối với vật B: $m_B\vec{v} - m_B\vec{v}_0 = \overrightarrow{X'}$; chiếu lên hai phương ta được:

$$\Rightarrow \begin{cases} m_B v_x - m_B v_0 = -X'\cos 45^0 \\ m_B v_y = X'\sin 45^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = v_0 - \frac{37}{4}\omega R \\ v_y = \frac{37}{4}\omega R \end{cases} \qquad (2)$$

-Vì va chạm đàn hồi nên động năng hệ bảo toàn

$$\frac{1}{2}m_B(v_x^2 + v_y^2) + \frac{1}{2}m_A v_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2 = \frac{1}{2}m_B v_0^2$$

$$\Rightarrow \frac{m}{4}\left[\left(v_0 - \frac{37}{4}\omega R\right)^2 + \left(\frac{37}{4}\omega R\right)^2\right] + \frac{3}{4}m\left(\frac{37}{12}\omega R\right)^2 + \frac{37}{96}mR^2\omega^2 = \frac{m}{4}v_0^2$$

$$\omega = \frac{24}{261}\frac{v_0}{R} = \frac{8}{87}\frac{v_0}{R} \qquad (3)$$

Thay (3) vào (1), (2) ta được:

$$v_G = \frac{37}{12}(\frac{24}{261})v_0 = \frac{74}{261}v_0$$

$$\begin{cases} v_x = v_0 - \frac{37}{4}(\frac{24}{261}v_0) = \frac{39}{261}v_0 \\ v_y = \frac{37}{4}(\frac{24}{261}v_0) = \frac{222}{261}v_0 \end{cases} \Rightarrow v = \frac{225,4}{261}v_0$$

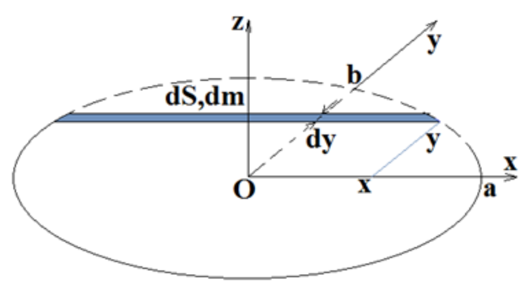
4. Mở rộng ý (3) va chạm mềm.

**Bài 56.**

1.Bước 1. Ta xác định: hình chiếu của một đường tròn lên một mặt phẳng nghiêng là một Elip

Trong bài toán này hình chiếu mỗi nửa đĩa lên mặt phẳng thẳng đứng đi qua khối tâm C hệ và vuông góc đường thẳng $C_1C_2$ là một nửa Elip, có bán kính trục lớn a=R và bán trục bé

b= $R\cos\frac{\alpha}{2}$



Hình 2.80S1

-Hệ dao động thì chẳng qua nửa elips (khối lượng m, bán kính a, b) dao động.

2.Bước 2: Tính momen quán tính đi qua tâm đối xứng O của nửa elips.

Ta có momen quá tính đối với trục Oz

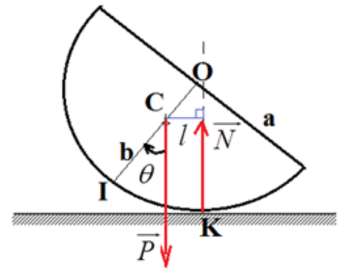
$$dI_{Oz} = \frac{1}{12}dm(2x)^2 + y^2dm = \frac{1}{3}x^2\sigma ds + y^2\sigma ds = \frac{1}{3}x^2\sigma(2xdy) + y^2\sigma(2xdy)$$

$$dI_{Oz} = \frac{1}{3}x^2\sigma(2xdy) + y^2\sigma(2xdy) = 2\sigma(\frac{1}{3}x^3dy + y^2xdy) \qquad (1)$$

Mặt khác $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \begin{cases} x = \pm a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}} \quad (2) \\ x^2 = a^2(1-\frac{y^2}{b^2}) \quad (3) \end{cases}$

Thay (2) và (3) vào (1)

$$dI_{Oz} = 2\sigma\left[\frac{1}{3}a^2(1-\frac{y^2}{b^2})a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}dy + y^2a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}dy\right]$$




Hình 2.80S2

Vì chúng ta chỉ xét nửa elips nên y chỉ biến thiên từ 0 đến b

$$I_{Oz} = 2\sigma\int_0^b\left[\frac{1}{3}a^3(1-\frac{y^2}{b^2})\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}dy + y^2a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}dy\right]$$

$$I_{Oz} = 2\sigma\int_0^b\left[\frac{1}{3}a^3(1-\frac{y^2}{b^2})^{\frac{3}{2}}\right]dy + 2\sigma\int_0^b\left[y^2a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\right]dy = 2\sigma(I_1+I_2) \qquad (4)$$

+Tính $I_1 = \int_0^b\left[\frac{1}{3}a^3(1-\frac{y^2}{b^2})^{\frac{3}{2}}\right]dy$

Đặt $\sin\varphi = \frac{y}{b} \Rightarrow dy = bcos\varphi d\varphi$

Nên $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{3}a^3(1-\frac{y^2}{b^2})^{\frac{3}{2}}\right]bcos\varphi d\varphi = \frac{b}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[(1-\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}\right]cos\varphi d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{3}a^3(1-\frac{y^2}{b^2})^{\frac{3}{2}}\right]bcos\varphi d\varphi$

$$I_1 = \frac{b}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[(1-\sin^2\varphi)\sqrt{1-\sin^2\varphi}\right]cos\varphi d\varphi = \frac{b}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[(1-\sin^2\varphi)\cos\varphi\right]cos\varphi d\varphi = \frac{b}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[cos^2\varphi\cos\varphi\right]cos\varphi d\varphi$$

$$I_1 = \frac{b}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}cos^4\varphi d\varphi = \frac{b}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+cos2\varphi}{2}\frac{1+cos2\varphi}{2}d\varphi = \frac{b}{12}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+2cos2\varphi+cos^2 2\varphi)d\varphi$$

$$I_1 = \frac{b}{12}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+2cos2\varphi+\frac{1+cos4\varphi}{2})d\varphi = \frac{b}{12}a^3(\frac{\pi}{2}+\sin 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{\sin 4\varphi}{8}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}})$$

$$I_1 = \frac{b}{12}a^3(\frac{\pi}{2}+0+\frac{\pi}{4}+0) = \pi\frac{ba^3}{16} \qquad (5)$$

+Tính $I_2 = \int_0^b\left[y^2a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\right]dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[b^2a\sin^2\varphi\sqrt{1-\sin^2\varphi}\right]bcos\varphi d\varphi$

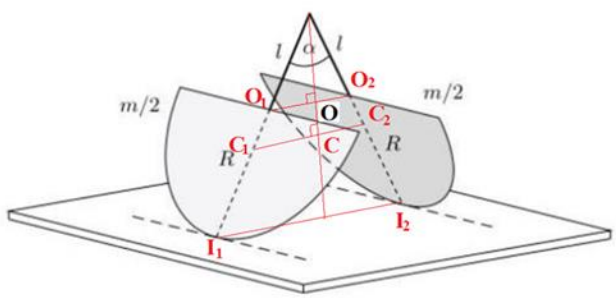
$$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[b^3a\sin^2\varphi cos\varphi\right]cos\varphi d\varphi=b^3a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi cos^2\varphi d\varphi=\frac{b^3a}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-cos2\varphi)1+cos2\varphi)d\varphi=\frac{b^3a}{16}\quad(6)$$

Thay (5), (6) vào (4) ta được

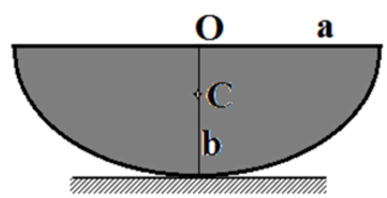
$$I_{Oz}=2\sigma(\pi\frac{ba^3}{16}+\frac{b^3a}{16})=\frac{\sigma ab}{8}(a^2+b^2)\quad(7)$$

Vì nửa elips có khối lượng m nên $\sigma=\frac{m}{\frac{\pi ab}{2}}=\frac{2m}{\pi ab}$ (8)

Do vậy $I_{Oz}=\frac{m}{4}(a^2+b^2)=\frac{mR^2}{4}(1+\cos^2\frac{\alpha}{2})$ (9)




Hình 2.80S3




Hình 2.80S4

2.Tìm momen quán tính đối với trục $C_1CC_2$.

Vị trí khối tâm của bán nguyệt $C_1$, $C_2$: $O_1C_1=O_2C_2=\frac{4R}{3\pi}$

Khi đó C cách đường thẳng $O_1O_2$ một đoạn d=OC=$\frac{4R}{3\pi}cos\frac{\alpha}{2}$ (10)

Mặt khác $I_{Oz}=I_C+md^2\Leftrightarrow\frac{mR^2}{4}(1+\cos^2\frac{\alpha}{2})=\mathrm{I}_C+m(\frac{4R}{3\pi}cos\frac{\alpha}{2})^2$

$$\mathrm{I}_C=\frac{mR^2}{4}(1+\cos^2\frac{\alpha}{2})-m(\frac{4R}{3\pi}cos\frac{\alpha}{2})^2=mR^2(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cos^2\frac{\alpha}{2}-\frac{16}{9\pi^2}\cos^2\frac{\alpha}{2})\quad(11)$$

3.Chứng minh dao động điều hòa.

$$\theta" = \frac{M_{\vec{P}/K}}{I_K} = \frac{-mgl}{I_C + mCK^2} \qquad (12)$$

Vì dao động bé nên ta có thể lân cận I ( $K \cong I$ )là một mặt cầu tâm O bán kính b, nên coi $\overrightarrow{N}$ có giá qua O

$$CK^2 \approx CO^2 + OK^2 - 2CO.OK\cos\theta$$

$$CK^2 \approx CO^2 + OK^2 - 2CO.OK \Rightarrow CK^2 \approx (\mathrm{OK}-\mathrm{CO})^2 \Rightarrow CK = OK - CO$$

$$CK = b - d = R\cos\frac{\alpha}{2} - \frac{4R}{3\pi}\cos\frac{\alpha}{2} \qquad (13)$$

Và tay đòn $l \approx CO\sin\theta = \frac{4R}{3\pi}\cos\frac{\alpha}{2}\theta$ (14)

Thay (11), (13), (14) vào (12) ta được

$$\theta" = \frac{-mgl}{I_C + mCK^2} = \frac{-mg\frac{4R}{3\pi}\cos\frac{\alpha}{2}\theta}{mR^2(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cos^2\frac{\alpha}{2} - \frac{16}{9\pi^2}\cos^2\frac{\alpha}{2}) + m(R\cos\frac{\alpha}{2} - \frac{4R}{3\pi}\cos\frac{\alpha}{2})^2}$$

$$\theta" = \frac{-\frac{4}{3\pi}\cos\frac{\alpha}{2}\theta}{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cos^2\frac{\alpha}{2} - \frac{16}{9\pi^2}\cos^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2} - \frac{8}{3\pi}\cos^2\frac{\alpha}{2} + \frac{16}{9\pi^2}\cos^2\frac{\alpha}{2}}\frac{g}{R}$$

$$\theta" = -\left(\frac{\frac{4}{3\pi}\cos\frac{\alpha}{2}}{\frac{1}{4} + (\frac{5}{4} - \frac{8}{3\pi})\cos^2\frac{\alpha}{2}}\frac{g}{R}\right)\theta$$

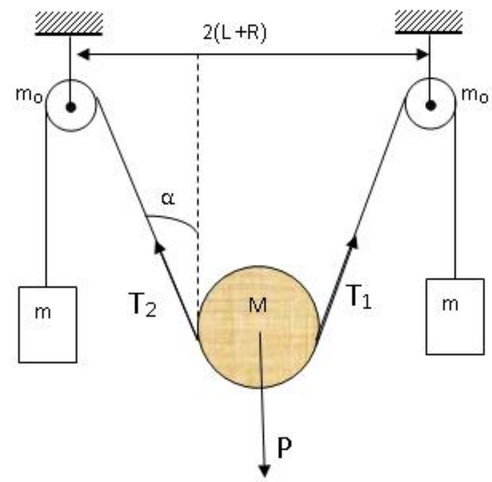
Vậy hệ dao động điều hòa với tần số góc

$$\omega = \sqrt{\left(\frac{\frac{4}{3\pi}\cos\frac{\alpha}{2}}{\frac{1}{4} + (\frac{5}{4} - \frac{8}{3\pi})\cos^2\frac{\alpha}{2}}\frac{g}{R}\right)}$$ hay chu kì $$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\frac{4}{3\pi}\cos\frac{\alpha}{2}}{\frac{1}{4} + (\frac{5}{4} - \frac{8}{3\pi})\cos^2\frac{\alpha}{2}}\frac{g}{R}}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{4}+(\frac{5}{4}-\frac{8}{3\pi})\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\frac{4}{3\pi}\cos\frac{\alpha}{2}}}\sqrt{\frac{R}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{3\pi+(15\pi-32)\cos^2\frac{\alpha}{2}}{16\cos\frac{\alpha}{2}}}\sqrt{\frac{R}{g}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3\pi+(15\pi-32)\cos^2\frac{\alpha}{2}}{16\cos\frac{\alpha}{2}}}\sqrt{\frac{R}{g}}$$

**Bài 57.**Xét tại thời điểm cân bằng




Phân tích các lực tá dụng lên quả cầu ta có $T_1 = T_2 = T = mg$

Điều kiện cần bằng quả cầu theo phương thẳng đứng ta có:

$$2T\cos\alpha = Mg \Rightarrow \cos\alpha = \frac{M}{2m}$$

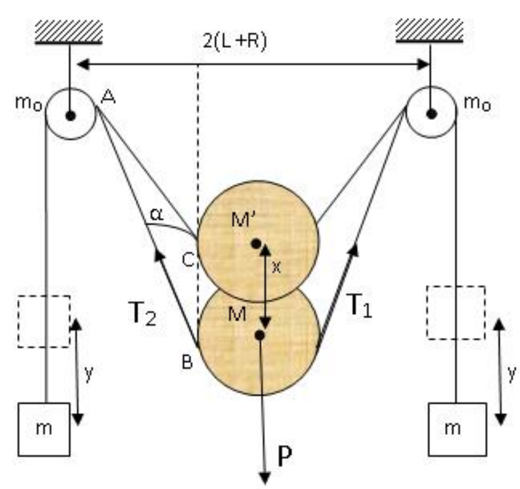
Điều kiện để hệ có cân bằng: $\cos\alpha < 1 \Rightarrow M < 2m$

$$\tan\alpha = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}-1} = \frac{\sqrt{4m^2-M^2}}{M}$$

Khoảng cách từ tâm hình cầu đến mặt phẳng chứa hai trục ròng rọc là: $H = \frac{L}{\tan\alpha} = \frac{LM}{\sqrt{4m^2-M^2}}$

(I)

## a. Phương pháp năng lượng




Xét tại thời điểm t, khi quả cầu cách vị trí cân bằng một đoạn x nhỏ.

Khi đó hai vật m đi xuống đoạn y như hình vẽ

Ta có: $AC = \sqrt{L^2+(H-x)^2}$ ; $AB = \sqrt{L^2+H^2}$

$$y = AB - AC = \sqrt{L^2+H^2} - \sqrt{L^2+(H-x)^2}$$

$$\Rightarrow y=\sqrt{L^2+H^2}\left(1-\sqrt{\frac{L^2+(H-x)^2}{L^2+H^2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow y=\sqrt{L^2+H^2}\left(1-\sqrt{1+\frac{-2Hx+x^2}{L^2+H^2}}\right)$$

Với x nhỏ lấy gần đúng $\sqrt{1+z}\approx 1+\frac{1}{2}z-\frac{1}{8}z^2$

$$\Rightarrow y\approx\sqrt{L^2+H^2}\left(1-1+\frac{H}{L^2+H^2}x-\frac{x^2}{2\left(L^2+H^2\right)}+\frac{1}{8}\left(\frac{x^2-2Hx}{L^2+H^2}\right)^2\right)\approx\frac{H}{\sqrt{L^2+H^2}}x-\frac{x^2}{2\sqrt{L^2+H^2}}+\frac{H^2x^2}{2\left(L^2+H^2\right)\sqrt{L^2+H^2}}$$

$$\Rightarrow y\approx\frac{H}{\sqrt{L^2+H^2}}x-\frac{L^2x^2}{2\left(L^2+H^2\right)\sqrt{L^2+H^2}}$$

Chọn vị trí ban đầu của các quả cầu làm mốc tính thế năng, coi ban đầu các vật ở cùng độ cao, hàm thế năng của hệ là:

$$W_t=-2mgy+Mgx=Mgx-2mg\frac{H}{\sqrt{L^2+H^2}}x+2mg\frac{L^2x^2}{2\left(L^2+H^2\right)\sqrt{L^2+H^2}}=\left(M-\frac{2mH}{\sqrt{L^2+H^2}}\right)gx+\frac{mgL^2x^2}{\left(L^2+H^2\right)\sqrt{L^2+H^2}}$$ Động

năng của hệ vật:

$$W_d=\frac{1}{2}M\left(x'\right)^2+2\frac{1}{2}m\left(y'\right)^2+2\frac{1}{2}I_0\omega^2$$

Với $I_0=\frac{1}{2}m_0r^2$; y’ = r.ω ; $y'=\left(\frac{H}{\sqrt{L^2+H^2}}-\frac{x}{\sqrt{L^2+H^2}}\right)x'$

$$W_d=\frac{1}{2}M\left(x'\right)^2+2\frac{1}{2}m\left(\frac{H}{\sqrt{L^2+H^2}}-\frac{x}{\sqrt{L^2+H^2}}\right)^2\left(x'\right)^2+2\frac{1}{2}\frac{1}{2}m_0\left(\frac{H}{\sqrt{L^2+H^2}}-\frac{x}{\sqrt{L^2+H^2}}\right)^2\left(x'\right)^2$$

$$\Rightarrow W_d\approx\frac{1}{2}M\left(x'\right)^2+\frac{1}{2}\left(2m+m_0\right)\frac{H^2}{L^2+H^2}\left(x'\right)^2$$

Vậy hàm năng lượng của vật lúc này là.

$$W=\frac{1}{2}M\left(x'\right)^2+\frac{1}{2}\left(2m+m_0\right)\frac{H^2}{L^2+H^2}\left(x'\right)^2+\left(M-\frac{2mH}{\sqrt{L^2+H^2}}\right)gx+\frac{mgL^2x^2}{\left(L^2+H^2\right)\sqrt{L^2+H^2}}$$

Lấy đạo hàm hai vế ta được.

$$\left(M+(2m+m_0)\frac{H^2}{L^2+H^2}\right)x'x''+\left(M-\frac{2mH}{\sqrt{L^2+H^2}}\right)g+\frac{2mgL^2xx'}{\left(L^2+H^2\right)\sqrt{L^2+H^2}}=0$$

$$\Rightarrow x''+\frac{2mgL^2}{\left(M\left(L^2+H^2\right)+2mH^2+m_0H^2\right)\sqrt{L^2+H^2}}x+\frac{\left(M\sqrt{L^2+H^2}-2mH\right)g\sqrt{L^2+H^2}}{M\left(L^2+H^2\right)+2mH^2+m_0H^2}=0$$

Thay (I) vào ta được.

$$\Rightarrow x''+\frac{2mgL^2}{\left(ML^2+(2m+m_0+M)\left(\frac{LM}{\sqrt{4m^2-M^2}}\right)^2\right)\sqrt{L^2+\left(\frac{LM}{\sqrt{4m^2-M^2}}\right)^2}}x=0$$

$$\Leftrightarrow x''+\frac{2mgL^2\left(4m^2-M^2\right)^{3/2}}{\left(\left(4m^2-M^2\right)ML^2+(2m+m_0+M)L^2M^2\right)2mL}x=0$$

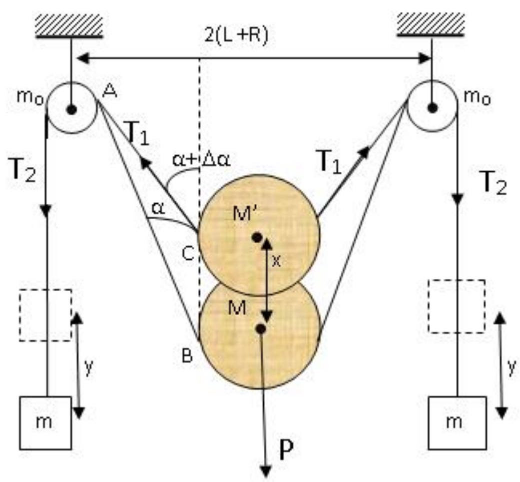
$$\Leftrightarrow x''+\frac{g}{L}\frac{\left(4m^2-M^2\right)^{3/2}}{\left(4m^2M+2mM^2+m_0M^2\right)}x=0$$

Vậy vật dao động điều hòa với chu kỳ: $T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\sqrt{\frac{4Mm^2+2M^2m+m_0M^2}{\left(4m^2-M^2\right)^{3/2}}}$

**Phương pháp động lực học.**

Xét tại thời điểm khi quả cầu đi lên đoạn được đoạn x.

Hai vật m đi được đoạn y. Theo cách giải trên ta được:




$$y\approx\frac{H}{\sqrt{L^2+H^2}}x-\frac{x^2}{2\sqrt{L^2+H^2}}$$

$$\Rightarrow y''\approx\frac{H}{\sqrt{L^2+H^2}}x''\quad(*)$$

Xét phương trình chuyển động cho các vật.

Vật m: $mg-T_2=my''$ (1)

Ròng rọc: $(T_2-T_1)r=I_0.\frac{y''}{r}\Leftrightarrow T_2-T_1=\frac{1}{2}m_0y''$ (2)

Quả cầu: $2T_1\cos(\alpha+\Delta\alpha)-Mg=Mx''$ (3)

Với $\cos(\alpha+\Delta\alpha)=\dfrac{H-x}{\sqrt{L^2+(H-x)^2}}=\dfrac{H-x}{\sqrt{L^2+H^2}}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{x^2-2Hx}{L^2+H^2}}}\approx\dfrac{H-x}{\sqrt{L^2+H^2}}\left(1-\dfrac{x^2-2Hx}{2\left(L^2+H^2\right)}\right)$

$$\Leftrightarrow \cos(\alpha+\Delta\alpha)=\frac{H-x}{\sqrt{L^2+H^2}}\left(1-\frac{x^2-2Hx}{2\left(L^2+H^2\right)}\right)\approx\frac{H}{\sqrt{L^2+H^2}}-\frac{x}{\sqrt{L^2+H^2}}+\frac{x}{\sqrt{L^2+H^2}}\frac{H^2}{L^2+H^2}$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha+\Delta\alpha)\approx\frac{H}{\sqrt{L^2+H^2}}-\frac{x}{\sqrt{L^2+H^2}}\frac{L^2}{L^2+H^2}\quad (**)$$

Từ (1) và (2) ta có: $mg-T_1=\left(m+\dfrac{1}{2}m_0\right)y''\Rightarrow T_1=mg-\left(m+\dfrac{1}{2}m_0\right)y''$

Thay vào (3) kết hợp với (**) ta được.

$$2\left(mg-\left(m+\frac{1}{2}m_0\right)y''\right)\left(\frac{H}{\sqrt{L^2+H^2}}-\frac{x}{\sqrt{L^2+H^2}}\frac{L^2}{L^2+H^2}\right)-Mg=Mx''$$

$$\Leftrightarrow \frac{2mgH}{\sqrt{L^2+H^2}}-\frac{2mgx}{\sqrt{L^2+H^2}}\frac{L^2}{L^2+H^2}-Mg=Mx''+\frac{H}{\sqrt{L^2+H^2}}(2m+m_0)y''$$

Kết hợp (*) ta được.

$$\Leftrightarrow \frac{2mgH}{\sqrt{L^2+H^2}}-\frac{2mgx}{\sqrt{L^2+H^2}}\frac{L^2}{L^2+H^2}-Mg=Mx''+\frac{H^2}{L^2+H^2}(2m+m_0)x''$$

$$\Rightarrow x''\left(M+\frac{H^2}{L^2+H^2}(2m+m_0)\right)+\frac{2mgx}{\sqrt{L^2+H^2}}\frac{L^2}{L^2+H^2}+Mg-\frac{2mgH}{\sqrt{L^2+H^2}}=0$$

$$\Rightarrow x''+\frac{2mgL^2}{\left(M\left(L^2+H^2\right)+H^2(2m+m_0)\right)\sqrt{L^2+H^2}}x+\frac{Mg\left(L^2+H^2\right)-2mgH\sqrt{L^2+H^2}}{\left(M\left(L^2+H^2\right)+H^2(2m+m_0)\right)}=0$$

Thay biểu thức (I) vào ta được.

$$\Rightarrow x''+\frac{2mgL^2}{\left(ML^2+(2m+m_0+M)\left(\dfrac{LM}{\sqrt{4m^2-M^2}}\right)^2\right)\sqrt{L^2+\left(\dfrac{LM}{\sqrt{4m^2-M^2}}\right)^2}}x=0$$

$$\Leftrightarrow x''+\frac{2mgL^2\left(4m^2-M^2\right)^{3/2}}{\left(\left(4m^2-M^2\right)ML^2+(2m+m_0+M)L^2M^2\right)2mL}x=0$$

$$\Leftrightarrow x'' + \frac{g}{L}\frac{\left(4m^2 - M^2\right)^{3/2}}{\left(4m^2M + 2mM^2 + m_0M^2\right)}x = 0$$

Vậy vật dao động điều hòa với chu kỳ: $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\sqrt{\frac{4Mm^2 + 2M^2m + m_0M^2}{\left(4m^2 - M^2\right)^{3/2}}}$

**Nhận xét:** Đây là bài toán dễ gây nhầm lẫn cho học sinh, đòi hỏi học sinh phải nắm vững phép khai triển Taylor thành thạo thì mới đưa ra được kết quả chính xác. Ví dụ như khi khai triển $\cos\left(\alpha + \Delta\alpha\right) = \frac{H - x}{\sqrt{L^2 + \left(H - x\right)^2}}$ nhiều học sinh sẽ mắc sai lầm khi khai triển như sau:

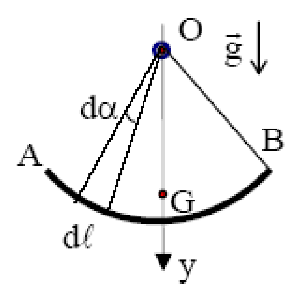
$$\cos\left(\alpha + \Delta\alpha\right) = \frac{H - x}{\sqrt{L^2 + \left(H - x\right)^2}} = \frac{H - x}{L}\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\left(H - x\right)^2}{L^2}}} \approx \frac{H - x}{L}\left(1 - \frac{\left(H - x\right)^2}{2L^2} + \frac{3}{8}\frac{\left(H - x\right)^4}{L^4}\right)$$

Đây là phép biến đổi không chính xác vì:

- $\frac{\left(H - x\right)^2}{L^2}$ rất lớn nên khi lấy gần đúng là không chính xác.
- Việc lấy gần đúng đến bậc hai của biến x trong trường hợp này không hoàn toàn tối ưu, vì ta biết $\left(H - x\right)^n$ sẽ luôn còn biến x và $x^2$ với mọi giá trị n.

Phép khai triển hợp lý nhất tác giả đã trình bày trong bài làm ở trên.

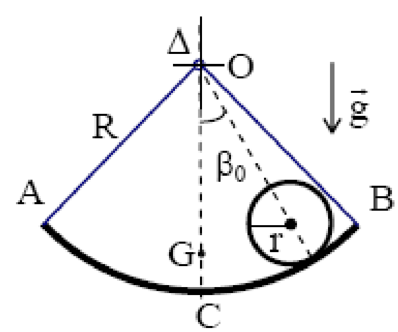
**Bài 58.**




1. Do tính đối xứng, ta thấy ngay G nằm trên đường thẳng đứng Oy nên chỉ cần tính tọa độ $y_G$ = OG của vật.

Xét phần tử dài dl, có khối lượng $dm = \frac{2m}{\pi R}dl = \frac{2m}{\pi}d\alpha$.

Theo công thức tính tọa độ khối tâm ta có:



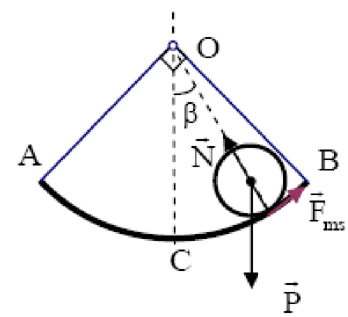

$$y_G = \frac{1}{m}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} R\cos\alpha\frac{2m}{\pi}d\alpha = \frac{2\sqrt{2}R}{\pi}.$$

2. . Xét vật 2 ở vị trí ứng với góc lệch β. Gọi $\varphi$ là góc mà vật 2 tự quay quanh mình nó. Chọn chiều dương tất cả các chuyển động ngược chiều kim đồng hồ. Lực tác dụng lên vật 2 gồm: trọng lực, phản lực, lực ma sát nghỉ.

Phương trình chuyển động của khối tâm vật 2 xét theo phương tiếp tuyến với quỹ đạo: $m_2a = F_{ms} - m_2g\sin\beta$

Vì β nhỏ $\sin\beta \approx \beta(rad) \Rightarrow m_2(R-r)\beta'' = F_{ms} - m_2g\beta$ (1)

Phương trình chuyển động quay của khối trụ nhỏquanh khối tâm:




$m_2r^2\varphi'' = F_{ms}r$ (2).

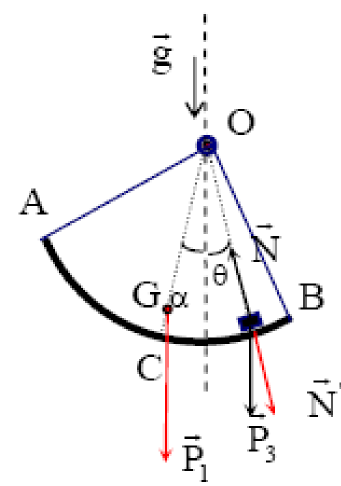
Điều kiện lăn không trượt: $(R-r)\beta'' = -r\varphi''$ (3)

Thay (2) và (3) vào (1) ta được:

$$\beta'' + \frac{g}{2(R-r)}\beta = 0 \ (4).$$

Nghiệm (4) có dạng dao động điều hòa với chu kì $T = 2\pi\sqrt{\frac{2(R-r)}{g}}$.

Từ (2) ta có $F_{ms} = m_2r\varphi'' = -m_2(R-r)\beta'' = \frac{1}{2}m_2g\beta$ (5)




Phản lực: $N = m_2g\cos\beta = m_2g\left(1-\frac{\beta_2}{2}\right)$ (6)

Điều kiện lăn không trượt $F_{ms} \le \mu N$.

Từ đó $\frac{\beta}{2-\beta^2} \le \mu$ với $\forall\beta \in (0,\beta_0)$.

Hay $\beta_0 \le \frac{1}{2}\left(\sqrt{8+\frac{1}{\mu^2}} - \frac{1}{\mu}\right)$.

3. Xét tại thời điểm khối tâm vật 1 và vật 3 có li độ góc tương ứng là $\alpha, \theta$. Phương trình chuyển động của vật 3 theo phương tiếp tuyến với hình trụ

$m_3R\theta'' = -m_3g\theta$ (1)

Nghiệm của (1) là $\theta = \theta_0\cos\omega_0 t$ với $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R}}$.

Phương trình chuyển động của G quanh O

$m_1R^2\alpha'' = -m_1gR\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\alpha$ (2)

Nghiệm của (2) là $\alpha = \alpha_0\cos\omega_1 t$ với $\omega_1 = \sqrt{\frac{2\sqrt{2}g}{\pi R}}$

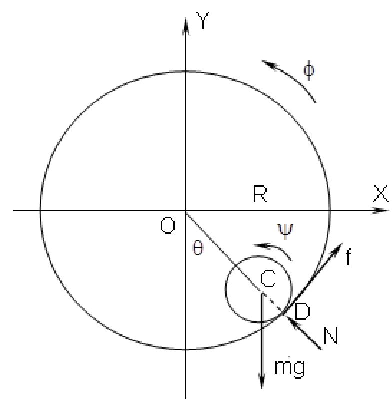
Góc lệch của vật 3 so với phương OG là

$\gamma = \alpha - \theta = 2\alpha_0\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_1}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_1}{2}t\right)$

Khi vật 3 tới C thì $\gamma = 0$. Từ đó: $t_{min} = \frac{\pi}{\omega_1 + \omega_1}$.

**Bài 59.** a. Xét tại thời điểm t bất kì, giả sử hình trụ M quay được góc $\phi$ quanh trục OZ, hình trụ m quay được góc $\psi$ quanh trục của nó, tâm C của hình trụ m quay được góc $\theta$ quanh trục OZ

Vì hình trụ m lăn không trượt, ta có liên hệ




$$\phi R = \psi r + (R-r)\theta \Rightarrow \psi = \frac{R}{r}\phi - \frac{R-r}{r}\theta \quad (1)$$

- Phương trình chuyển động quay của hình trụ m quanh trục (đi qua tâm quay tưc thời D vuông góc với mặt phẳng giấy)

$$I_D\psi'' = mg.r\sin\theta \quad (2)$$

Từ (1), ta có

$$\psi'' = \frac{R}{r}\phi'' - \frac{R-r}{r}\theta''$$

Vì hình trụ M quay với tốc độ góc không đổi nên $\phi' = 0 \Rightarrow \phi'' = 0 \Rightarrow \psi'' = \frac{-(R-r)}{r}\theta''$

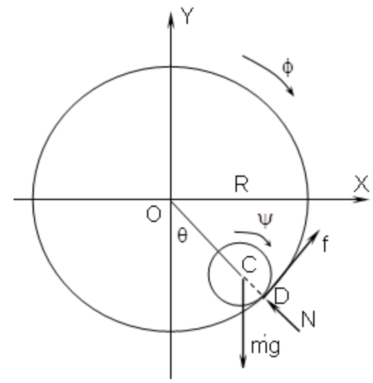
Với góc $\theta$ nhỏ, $I_D = \frac{1}{2}mr^2 + mr^2 = \frac{3}{2}mr^2$, thay vào (2)

$$\frac{3}{2}\left[\frac{-(R-r)}{r}\right]\theta'' = mg.r\theta \Leftrightarrow \theta'' = \frac{-2g}{3(R-r)}\theta$$

Vậy hình trụ m dao động điều hòa

với tần số góc $\omega = \sqrt{\dfrac{2g}{3(R-r)}}$, chu kì $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{3(R-r)}{2g}}$

**b**. a. Xét tại thời điểm t bất kì, giả sử hình trụ M quay được góc $\phi$ quanh trục OZ, hình trụ m quay được góc $\psi$ quanh trục của nó, tâm C của hình trụ m quay được góc $\theta$ quanh trục OZ




Vì hình trụ m lăn không trượt, ta có liên hệ

$$\phi R = \psi r - (R-r)\theta \;\Rightarrow \psi = \frac{R}{r}\phi + \frac{R-r}{r}\theta \qquad (1)$$

- Áp dụng định luật II Niuton cho hình trụ m

$$mg\sin\theta - f = m(R-r)\theta'' \qquad (2)$$

- Áp dụng phương trình chuyển động quay cho hình trụ m (trục quay qua C vuông góc với mặt phẳng giấy)

$$\frac{1}{2}mr^2\psi'' = -fr \qquad (3)$$

- Áp dụng phương trình chuyển động quay cho hình trụ M (trục quay qua O vuông góc với mặt phẳng giấy)

$$I_O\phi'' = fR \Leftrightarrow MR^2\phi'' = fR \Leftrightarrow f = MR\phi'' \qquad (4)$$

Từ (1), ta có

$$\psi'' = \frac{R}{r}\phi'' + \frac{R-r}{r}\theta'' \qquad (5)$$

Thay (5), (4) vào (3), ta được

$$\frac{1}{2}mr^2\left[\frac{R}{r}\phi"+\frac{R-r}{r}\theta"\right]=-MR\phi"$$

$$\Rightarrow \phi"=\frac{-m}{2M+m}(\frac{R-r}{r})\theta"$$

Thay vào (2)

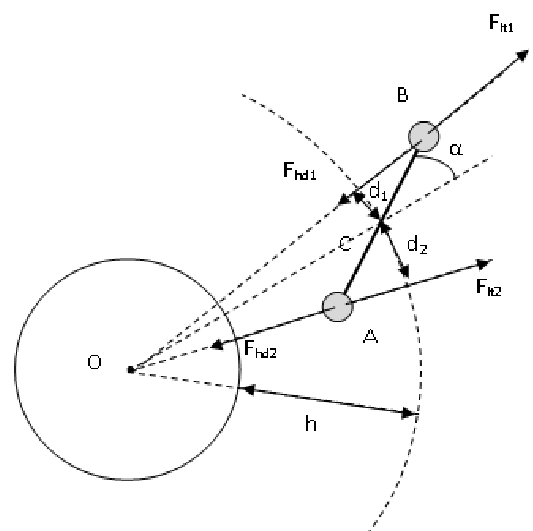
$$mg\theta=\frac{-mM}{2M+m}(R-r)\theta"-m(R-r)\theta"$$

$$\Leftrightarrow \theta"=\frac{-g}{(R-r)}.\frac{(2M+m)}{(3M+m)}\theta$$

Vậy hình trụ m dao động điều hòa với tần số góc $\omega^2=\frac{g}{(R-r)}.\frac{(2M+m)}{(3M+m)}\theta$

, chu kì $T=2\pi\sqrt{\frac{(R-r)}{g}.\frac{(3M+m)}{(2M+m)}}$

**Bài 60. Phương pháp động lực học**




**a.** Khối tâm của vệ tinh bay ở độ cao h theo quỹ đạo tròn. Gọi $v_0$ là vận tốc của vệ tinh lúc này, ta có.

$$G\frac{M.2m}{(R+h)^2}=2m\frac{v_0^2}{R+h}\Rightarrow v_0^2=G\frac{M}{R+h}$$

Xét trong hệ quy chiếu gắn với từng vật. Các lực tác dụng lên vật A gồm $F_{hd2}$ và lực quán tính li tâm $F_{lt2}$. Tác dụng lên quả cầu B bao gồm $F_{hd1}$ và lực quán tính li tâm $F_{lt1}$. Vì l << h+R nên ta có.

$$F_{hd1}=G\frac{mM}{(OB)^2}\ ;\ F_{lt1}=m\omega^2 OB$$

Với $OB^2=l^2+(R+h)^2+2l(R+h)\cos\alpha\approx(R+h)^2+2l(R+h)\cos\alpha$ ; $\omega=\frac{v_0}{R+h}$

$$\Rightarrow F_{hd1}=G\frac{mM}{(R+h)^2+2l(R+h)\cos\alpha}\approx G\frac{mM}{(R+h)^2}\left(1-\frac{2l\cos\alpha}{R+h}\right)$$

$$F_{lt1} = G\frac{mM}{(R+h)^3}\sqrt{(R+h)^2 + 2l(R+h)\cos\alpha} \approx G\frac{mM}{(R+h)}\left(1+\frac{l\cos\alpha}{R+h}\right)$$

$$F_{hd2} = G\frac{mM}{(OA)^2}\ ;\quad F_{lt2} = m\omega^2 OA$$

$$OA^2 = l^2 + (R+h)^2 - 2l(R+h)\cos\alpha \approx (R+h)^2 - 2l(R+h)\cos\alpha$$

$$\Rightarrow F_{hd2} = G\frac{mM}{(R+h)^2 - 2l(R+h)\cos\alpha} \approx G\frac{mM}{(R+h)^2}\left(1+\frac{2l\cos\alpha}{R+h}\right)$$

$$F_{lt2} = G\frac{mM}{(R+h)^3}\sqrt{(R+h)^2 - 2l(R+h)\cos\alpha} \approx G\frac{mM}{(R+h)}\left(1-\frac{l\cos\alpha}{R+h}\right)$$

Xét điều kiện cân băng của hai vật A, B quanh C ta có. Với điều kiện l << R + h

$$F_{hd1}d_1 + F_{lt2}.d_1 = F_{hd2}d_2 + F_{lt1}.d_2 \quad (1)$$

$$\frac{OA}{OC} = \frac{l\sin\alpha}{d_2} \Leftrightarrow d_2 = \frac{(R+h)l\sin\alpha}{\sqrt{(R+h)^2 - 2l(R+h)\cos\alpha}} \approx l\sin\alpha\left(1+\frac{l\cos\alpha}{R+h}\right)$$

$$\frac{OB}{OC} = \frac{l\sin\alpha}{d_1} \Leftrightarrow d_1 = \frac{(R+h)l\sin\alpha}{\sqrt{(R+h)^2 + 2l(R+h)\cos\alpha}} \approx l\sin\alpha\left(1-\frac{l\cos\alpha}{R+h}\right)$$

Thay tất cả vào (1) ta được.

$$G\frac{mM}{(R+h)^2}\left(1-\frac{2l\cos\alpha}{R+h}\right)l\sin\alpha\left(1-\frac{l\cos\alpha}{R+h}\right) + F_{lt1}d_1 = G\frac{mM}{(R+h)^2}\left(1+\frac{2l\cos\alpha}{R+h}\right)l\sin\alpha\left(1+\frac{l\cos\alpha}{R+h}\right) + F_{lt2}.d_2$$

$$\Leftrightarrow G\frac{mM}{(R+h)^2}\left(-\frac{3l\cos\alpha}{R+h}\right)l\sin\alpha = G\frac{mM}{(R+h)^2}\left(\frac{3l\cos\alpha}{R+h}\right)l\sin\alpha \qquad (2)$$

Ta tìm được các nghiệm của α .

- sin α = 0 ⇒ α = 0.

  Khi α khác không một lượng nhỏ. Xét tổng mô men tác dụng vào thanh AB lúc này.

  $$M_F = F_{hd1}l\sin\alpha + F_{lt2}.l\sin\alpha - F_{hd2}l\sin\alpha - F_{lt1}.l\sin\alpha = G\frac{mM}{(R+h)^2}\left(-\frac{6l\cos\alpha}{R+h}\right)l\sin\alpha < 0$$

  Tổng mô men lực có su hướng kéo vật về vị trí cân bằng. Vậy α = 0 là vị trí cân bằng bền của hệ.

- $\cos\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 90^0$.

  Khi α khác không một lượng nhỏ. Chứng minh tương tự trên ta thấy tổng các mô men tác dụng vào thanh làm thanh quay về vị trí α = 0. Vậy $\alpha = 90^0$ là cân bằng không bền của hệ.

**b.** Xét khi thanh lệch ra vị trí cân bằng một góc nhỏ α . Từ câu a ta tìm được tổng mô men tác dụng vào thanh lúc này là.

$$M_F = G\frac{mM}{(R+h)^2}\left(-\frac{6l\cos\alpha}{R+h}\right)l\sin\alpha$$

Vì góc α nhỏ nên $\sin\alpha \approx \alpha; \cos\alpha \approx 1-\frac{\alpha^2}{2}$

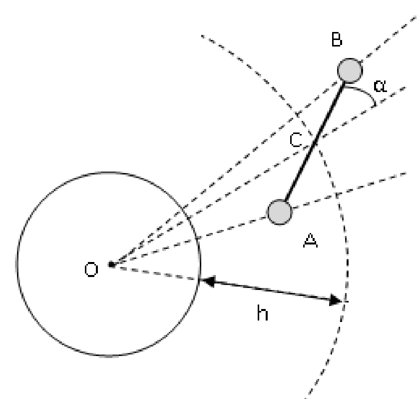
$$\Rightarrow M_F = -G\frac{6l^2mM}{(R+h)^3}\left(1-\frac{\alpha^2}{2}\right)\alpha \approx -G\frac{6l^2mM}{(R+h)^3}\alpha$$

Phương trình động lực học cho thanh quay quanh C .

$$\Rightarrow M_F = I\alpha'' \Leftrightarrow -G\frac{6l^2mM}{(R+h)^3}\alpha = 2ml^2\alpha''$$

$$\Rightarrow a'' + \frac{3GM}{(R+h)^3}\alpha = 0$$

Vậy thanh dao động với chu kỳ: $T = 2\pi\sqrt{\frac{(R+h)^3}{3GM}}$




**Phương pháp năng lượng.**

**a.** Xét tại thời điểm khi AB hợp phương bán kính một góc α . Ta có:

$$OB^2 = l^2 + (R+h)^2 + 2l(R+h)\cos\alpha \approx (R+h)^2 + 2l(R+h)\cos\alpha$$
$$OA^2 = l^2 + (R+h)^2 - 2l(R+h)\cos\alpha \approx (R+h)^2 - 2l(R+h)\cos\alpha$$

Thế năng của hệ:

$$W_t = -G\frac{Mm}{OA} - -G\frac{Mm}{OB} = -GMm\left(\frac{1}{\sqrt{(R+h)^2 - 2l(R+h)\cos\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{(R+h)^2 + 2l(R+h)\cos\alpha}}\right)$$

Vì $\frac{2l\cos\alpha}{R+h} \ll 1$ , áp dụng khai triển $(1+x)^{-\frac{1}{2}} \approx 1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}\frac{x^2}{2}+..$ nên ta được.

$$W_t \approx -GMm\left(\frac{1}{R+h}\left(1+\frac{l\cos\alpha}{R+h}+\frac{3}{8}\left(\frac{2l\cos\alpha}{R+h}\right)^2\right)+\frac{1}{R+h}\left(1-\frac{l\cos\alpha}{R+h}+\frac{3}{8}\left(\frac{2l\cos\alpha}{R+h}\right)^2\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow W_t = \frac{-2GMm}{R+h}-\frac{3GMm}{(R+h)}\left(\frac{l\cos\alpha}{R+h}\right)^2$$

Khi vật hệ cân bằng thì thế năng của hệ đạt cực trị. Nên ta có:

$$\Leftrightarrow W_t = \frac{-2GMm}{R+h}-\frac{3GMm}{(R+h)}\left(\frac{l\cos\alpha}{R+h}\right)^2$$

$$W_t' = \frac{6GMm}{(R+h)}\left(\frac{l}{R+h}\right)^2 \sin\alpha.cos\alpha=0$$

Các nghiệm của α lúc này là.

- Sin α = 0 ⇒ α = 0

  Vì giá trị đạo hàm của hàm thế năng đổi dấu từ âm sang dương khi giá trị α tăng qua giá trị 0. Tức tại α = 0 thế năng hệ đạt cực tiểu. Hay cân bằng của hệ ứng với α = 0 là cân bằng bền.

- Cos α = 0 ⇒ α = $90^0$

  Vì giá trị đạo hàm của hàm thế năng đổi dấu từ dương sang âm khi giá trị α tăng qua giá trị $90^0$. Tức tại α = $90^0$ thế năng đạt cực đại. Hay cân bằng của hệ ứng với α = $90^0$ là cân bằng không bền.

**b.** Xét khi thanh quay ra khỏi vịt rí cân bằng bền góc nhỏ α .

Động năng quay quanh khối tâm của hệ.

$$W_d = 2\frac{1}{2}ml^2(\alpha')^2$$

Cơ năng của hệ lúc này là.

$$W=\frac{-2GMm}{R+h}-\frac{3GMm}{(R+h)}\left(\frac{l\cos\alpha}{R+h}\right)^2+2\frac{1}{2}ml^2(\alpha')^2$$

Với góc α nhỏ ta có . $(\cos\alpha)^2 \approx \left(1-\frac{\alpha^2}{2}\right)^2 \approx 1-\alpha^2$

$$\Rightarrow W = \frac{-2GMm}{R+h} - \frac{3GMm}{(R+h)}\left(\frac{l}{R+h}\right)^2(1-\alpha^2) + 2\frac{1}{2}ml^2(\alpha')^2$$

Đạo hàm hai vế ta được:

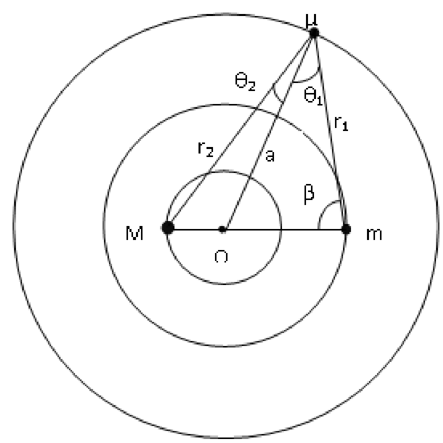
$$\Rightarrow \frac{6GMm}{(R+h)}\left(\frac{l}{R+h}\right)^2\alpha\alpha' + 2ml^2\alpha'\alpha'' = 0$$

$$\Rightarrow \alpha'' + \frac{3GM}{(R+h)^3}\alpha = 0$$

Vậy hệ dao động điều hòa với chu kỳ. $T = 2\pi\sqrt{\frac{(R+h)^3}{3GM}}$

**Bài 61 .** Lực gây chuyển động trong của các vật m và M là lực hấp dẫ giữa chúng. Ta có:

Vị trí khối tâm của hệ: $MR = mr \Rightarrow \frac{m}{R} = \frac{M}{r} = \frac{m+M}{R+r}$




Xét vật m. $G\frac{Mm}{(r+R)^2} = m\omega_0^2 r$ (1)

Xét vật M: $G\frac{Mm}{(r+R)^2} = M\omega_0^2 R$ (2)

Từ (1) ta được. $\omega_0^2 = G\frac{Mm}{(r+R)^2 mr} = \frac{G(M+m)}{(r+R)^3}$

1. Vì μ cách đều M và m trong suốt quá trình chuyển động. Nên vận tốc quay của μ quanh khối tâm O phải bằng $\omega_0$.

Đặt các góc và các khoảng cách như hình vẽ. Ta có:

$$\frac{GM\mu}{r_2^2}\cos\theta_2 + \frac{Gm\mu}{r_1^2}\cos\theta_1 = \mu\omega_0^2 a = \mu\frac{G(M+m)}{(r+R)^3}a$$

$$\Rightarrow \frac{M}{r_2^2}\cos\theta_2 + \frac{m}{r_1^2}\cos\theta_1 = \mu\omega_0^2 a = \frac{(M+m)}{(r+R)^3}a \quad (3)$$

$$\frac{GM\mu}{r_2^2}\sin\theta_2 = \frac{Gm\mu}{r_1^2}\sin\theta_1 \Leftrightarrow \frac{r}{r_2^2}\sin\theta_2 = \frac{R}{r_1^2}\sin\theta_1 \;(4)$$

Theo tính chất khối tâm của hệ ta được

$$(m+M)a = mr_1\cos\theta_1 + Mr_2\cos\theta_2 \;(5)$$

$$mr_1\sin\theta_1 = Mr_2\sin\theta_2 \,(6)$$

Từ (4) và (6) ta được: $\frac{mr}{r_2^3} = \frac{MR}{r_1^3} \Rightarrow r_2 = r_1 = \rho$

Từ (3) và (5) ta có: $\Rightarrow \frac{M}{\rho^2}\cos\theta_2 + \frac{m}{\rho^2}\cos\theta_1 = \mu\omega_0^2 a = \frac{m\rho\cos\theta_1 + M\rho\cos\theta_2}{(r+R)^3}$

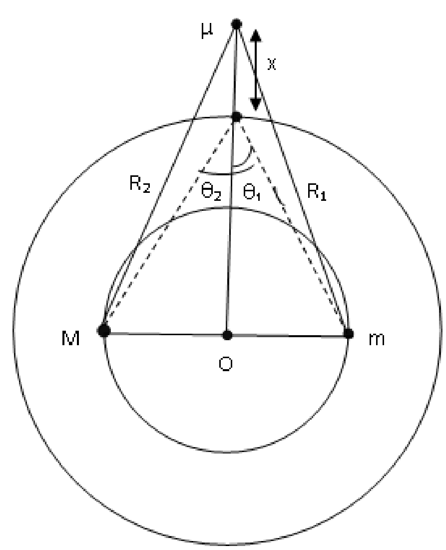
$$\Rightarrow r_2 = r_1 = \rho = r+R$$

Khi đó tam giác nối μ , m, M là tam giác đều. ⇒ β =$60^0$

$$\Rightarrow a = \sqrt{r_1^2 + r^2 - 2r_1r.\cos\beta} = \sqrt{(r+R)^2 + r^2 - (R+r)r} = \sqrt{(r+R)^2 - Rr}$$

**2. Phương pháp năng lượng.**

xét khi μ dịch chuyển ra theo phương Oμ một đoạn nhỏ x.




Khi m = M thì $\theta_1 = \theta_2 = 30^0$. R = r và Oμ ⊥ Mm

$$\omega_0^2 = \frac{1}{4}\frac{Gm}{r^3} \;;\; a = \sqrt{3}r$$

Ta có:

$$R_1 = R_2 = \sqrt{r^2 + (a+x)^2}$$

Hàm thế năng của vật μ :

$$W_t = -2\frac{Gm\mu}{R_1} = -2\frac{Gm\mu}{\sqrt{r^2+(a+x)^2}} = -2\frac{Gm\mu}{\sqrt{r^2+a^2+2ax+x^2}}$$

Khi y << 1 thì $\frac{1}{\sqrt{1+y}} \approx 1 - \frac{1}{2}y + \frac{3}{8}y^2$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{r^2+a^2+2ax+x^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{r^2+a^2}\sqrt{1+\frac{2ax+x^2}{r^2+a^2}}} = \frac{1}{\sqrt{r^2+a^2}}\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{2ax+x^2}{r^2+a^2}\right)+\frac{3}{8}\left(\frac{2ax+x^2}{r^2+a^2}\right)^2\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{r^2+a^2+2ax+x^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{r^2+a^2}}\left(1-\frac{\mathrm{ax}}{r^2+a^2}-\frac{\mathrm{x}^2}{2\left(r^2+a^2\right)}+\frac{3\mathrm{a}^2\mathrm{x}^2}{2\left(r^2+a^2\right)^2}\right)$$

$$\Rightarrow \mathrm{W}_t \approx -\frac{2Gm\mu}{\sqrt{r^2+a^2}}\left(1-\frac{\mathrm{ax}}{r^2+a^2}-\frac{\mathrm{x}^2}{2\left(r^2+a^2\right)}+\frac{3\mathrm{a}^2\mathrm{x}^2}{2\left(r^2+a^2\right)^2}\right)$$

Hàm động năng của μ .

$$\mathrm{W}_d = \frac{1}{2}\mu\left(\left(x'\right)^2+\left(v_\varphi\right)^2\right)$$

Vì mô men động lượng của μ được bảo toàn nên ta có: $(a+x)v_\varphi = \omega_0 a^2 \Rightarrow v_\varphi = \frac{\omega_0 a^2}{a+x}$

$$\Rightarrow \mathrm{W}_d = \frac{1}{2}\mu\left(x'\right)^2+\frac{1}{2}\mu\left(\frac{\omega_0 a^2}{a+x}\right)^2 \approx \frac{1}{2}\mu\left(x'\right)^2+\frac{1}{2}\mu\omega^2{}_0 a^2\left(1-\frac{2x}{a}+3\frac{x^2}{a^2}\right)$$

Hàm cơ năng của μ khi này là:

$$\mathrm{W} = -\frac{2Gm\mu}{\sqrt{r^2+a^2}}\left(1-\frac{\mathrm{ax}}{r^2+a^2}-\frac{\mathrm{x}^2}{2\left(r^2+a^2\right)}+\frac{3\mathrm{a}^2\mathrm{x}^2}{2\left(r^2+a^2\right)^2}\right)+\frac{1}{2}\mu\left(x'\right)^2+\frac{1}{2}\mu\omega^2{}_0 a^2\left(1-\frac{2x}{a}+3\frac{x^2}{a^2}\right)$$

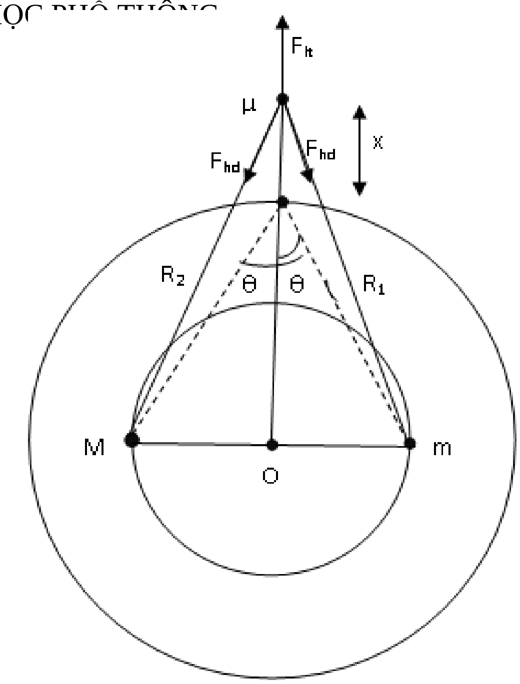
Đạo hàm hai vế ta được:

$$\frac{2Gm\mu}{\sqrt{r^2+a^2}}\frac{\mathrm{a}}{r^2+a^2}x'+\frac{2Gm\mu}{\sqrt{r^2+a^2}}\frac{\mathrm{xx'}}{\left(r^2+a^2\right)}-\frac{2Gm\mu}{\sqrt{r^2+a^2}}\frac{3\mathrm{a}^2\mathrm{xx'}}{\left(r^2+a^2\right)^2}+\mu x'x''-\mu\omega^2{}_0 ax'+3\mu\omega^2{}_0 xx'=0$$

$$\Rightarrow x''+\left(3\omega^2{}_0+\frac{2Gm}{\left(r^2+a^2\right)^{3/2}}-\frac{6Gma^2}{\left(r^2+a^2\right)^{5/2}}\right)x+\frac{2Gm}{\left(r^2+a^2\right)^{3/2}}a-\omega^2{}_0 a=0$$

$$\Leftrightarrow x''+\left(3\omega^2{}_0+\frac{Gm}{4r^3}-\frac{9Gm}{16r^3}\right)x+\frac{\sqrt{3}Gm}{4r^2}-\omega^2{}_0\sqrt{3}r=0$$

$$\Leftrightarrow x''+\left(3\omega^2{}_0+\omega^2{}_0-\frac{9}{4}\omega^2{}_0\right)x+\frac{\sqrt{3}Gm}{4r^2}-\omega^2{}_0\sqrt{3}r=0$$




$$\Leftrightarrow x''+\frac{7}{4}\omega^2{}_0 x=0$$

Vậy tần số gốc dao động quanh vị trí cân bằng

của nó theo phương Oμ là: $\frac{\sqrt{7}}{2}\omega_0$

**Phương pháp động lực học.**

Xét khi μ dịch chuyển ra theo phương Oμ một đoạn nhỏ x.

Khi m = M thì $\theta_1 = \theta_2 = 30^0$. R = r và Oμ ⊥ Mm

$$\omega_0{}^2=\frac{1}{4}\frac{Gm}{r^3}\ ;\ a=\sqrt{3}r$$

Ta có: $R_1 = R_2 = \sqrt{r^2+(a+x)^2}$

Xét trong hệ quy chiếu gắn với μ . Theo định luật II Newton ta có:

$$2F_{hd}\cos(\theta-\Delta\theta)-F_{lt}=\mu x''\ \ (*)$$

Với :

$$F_{hd}=G\frac{m\mu}{R_1^2}=G\frac{m\mu}{r^2+a^2+2ax+x^2}=G\frac{m\mu}{(r^2+a^2)\left(1+\frac{2ax+x^2}{r^2+a^2}\right)}\approx G\frac{m\mu}{(r^2+a^2)}\left(1-\frac{2ax+x^2}{r^2+a^2}\right)$$

$$\Rightarrow F_{hd}\approx G\frac{m\mu}{(r^2+a^2)}-G\frac{2am\mu x}{(r^2+a^2)^2}$$

$$\cos(\theta-\Delta\theta)=\frac{a+x}{R_1}=\frac{a+x}{\sqrt{r^2+(a+x)^2}}\approx\frac{a+x}{\sqrt{r^2+a^2}}\left(1-\frac{2ax+x^2}{2(r^2+a^2)}\right)\approx\frac{a}{\sqrt{r^2+a^2}}-\frac{a^2x}{(r^2+a^2)^{3/2}}+\frac{x}{\sqrt{r^2+a^2}}$$

Vì động lượng của μ được bảo toàn nên: $v_\varphi(a+x)=\omega_0a^2\Rightarrow v_\varphi=\frac{\omega_0a^2}{a+x}$

$$F_{lt}=\mu\frac{v_\varphi^2}{a+x}=\mu\frac{\omega^2{}_0a^4}{(a+x)^3}=\frac{\mu\omega^2{}_0a}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^3}\approx\mu\omega^2{}_0a\left(1-\frac{3x}{a}\right)$$

Thay tất cả vào (*) ta được:

$$2\left(G\frac{m\mu}{\left(r^2+a^2\right)}-G\frac{2am\mu x}{\left(r^2+a^2\right)^2}\right)\left(\frac{a}{\sqrt{r^2+a^2}}-\frac{a^2x}{\left(r^2+a^2\right)^{3/2}}+\frac{x}{\sqrt{r^2+a^2}}\right)-\mu\omega^2{}_0a\left(1-\frac{3x}{a}\right)=\mu x"$$

$$\Leftrightarrow G\frac{2am}{\left(r^2+a^2\right)^{3/2}}-G\frac{2ma^2x}{\left(r^2+a^2\right)^{5/2}}+G\frac{2mx}{\left(r^2+a^2\right)^{3/2}}-G\frac{4a^2mx}{\left(r^2+a^2\right)^{5/2}}-\omega^2{}_0a+3\omega^2{}_0x\approx x"$$

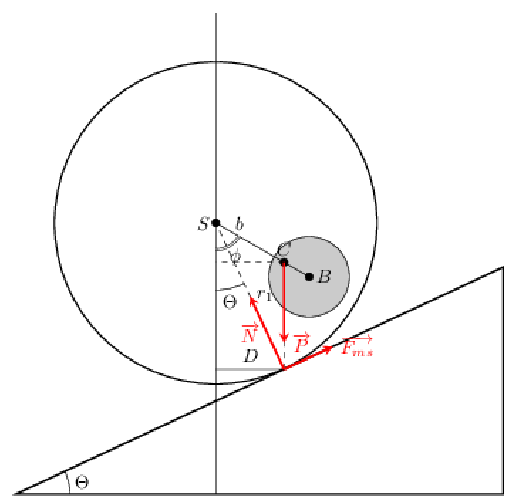
$$\Leftrightarrow G\frac{\sqrt{3}m}{4r^2}-G\frac{3mx}{16r^3}+G\frac{mx}{4r^3}-G\frac{3mx}{8r^3}-\sqrt{3}\omega^2{}_0r+3\omega^2{}_0x=x"$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{4}\omega^2{}_0x+\omega^2{}_0x-\frac{3}{2}\omega^2{}_0+3\omega^2{}_0x=x"$$

$$\Rightarrow x"+\frac{7}{4}\omega^2{}_0x=0$$

Vậy vật μ dao động theo phương Oμ với tần số $\omega=\frac{\sqrt{7}}{2}\omega_0$

**Bài 62**




a) Khi vật rắn cân bằng, moment của trọng lực P đối với trục quay qua tiếp điểm bằng 0 nên C nằm trên đường thẳng đứng đi qua tiếp điểm.

ta có $\sin\phi=\frac{D}{b}$ và $\sin\Theta=\frac{D}{r_1}$ .

Do đó: $\frac{\sin\Theta}{\sin\phi}=\frac{r_1}{b}\Leftrightarrow b=\frac{r_1\sin\Theta}{\sin\phi}$

b) Từ phương trình động lực học: M = Iγ suy ra

$$I_S\ddot{\varphi}=-Mgb\sin\varphi$$

Do φ bé, nên sinφ = φ, do đó: $I_S\ddot{\varphi}+Mgb\varphi=0$

Vậy vật dao động điều hòa với chu kỳ $T=2\pi\sqrt{\frac{I_S}{Mgb}}\Leftrightarrow I_S=\frac{MgbT^2}{4\pi^2}$

c) Từ gọi $M_1$ là khối lượng khối gỗ lúc chưa khoét, $M_2$ là độ tăng khối lượng của khối gỗ sau khi khoét. Từ công thức khối tâm ta suy ra:

$$bM_1 = (d-b)M_2 \Leftrightarrow d = \frac{(M_1+M_2)b}{M_2} = \frac{Mb}{\pi r_2^2 h_2(\rho_2-\rho_1)}$$

d) Gọi $I_1$, $I_2$ lần lượt là moment quán tính của phần khối lượng M1 và M2 đối với trục quay S.
$I_S = I_1 + I_2$ .

$$I_1 = \frac{1}{2}M_1 r_1^2 = \frac{1}{2}\pi h_1 \rho_1 r_1^4$$

$$I_2 = \frac{1}{2}M_2 r_2^2 + M_2 d^2 = \frac{1}{2}\pi h_2(\rho_2-\rho_1)r_2^4 + \pi h_2(\rho_2-\rho_1)r_2^2 d^2$$

Thay kết quả từ các câu trước vào:

$$I_S = \frac{1}{2}\pi h_1 \rho_1 r_1^4 + \frac{1}{2}\pi h_2(\rho_2-\rho_1)r_2^4 + \frac{b^2 M^2}{\pi r_2^2 h_2(\rho_2-\rho_1)}$$

e) Biểu thức khối lượng của vật:

$$M = \pi \rho_1 h_1 r_1^2 + \pi(\rho_2-\rho_1)h_2 r_2^2$$

Thay vào biểu thức $I_S$, giải phương trình với ẩn $r_2^2$, thu được:

$$r_2^2 = \frac{2}{M-\pi r_1^2 h_1 \rho_1}\left(I_S - \frac{1}{2}\pi h_1 \rho_1 r_1^4 - b2\frac{M^2}{M-\pi r_1^2 h_1 \rho_1}\right)$$

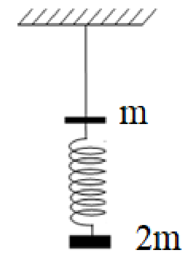
Thay $I_S$ bởi biểu thức thu từ câu b), sau khi đơn giản được

$$r_2 = \sqrt{\frac{2}{M-\pi r_1^2 h_1 \rho_1}\left(\frac{MbgT^2}{4\pi^2} - \frac{1}{2}\pi h_1 \rho_1 r_1^4 - \frac{b^2 M^2}{M-\pi r_1^2 h_1 \rho_1}\right)}$$

Thay $r_2$ thu được từ biểu thức trên vào biểu thức khối lượng, giải phương trình với ẩn $h_2$, thu được

$$h_2 = \frac{M-\pi r_1^2 \rho_1 h_1}{\pi r_2^2(\rho_2-\rho_1)}$$

# CHƯƠNG IV.
# DAO ĐỘNG ĐIỀU HÒA CHẤT ĐIỂM
## IV.1 VIẾT PHƯƠNG TRÌNH DAO ĐỘNG ĐIỀU HÒA




**Bài 1.** Xét hệ quy chiếu gắn với trọng tâm G của hệ .

Lấy vật m làm gốc: $x_M = \frac{mx_1 + 2mx_2}{3m} = \frac{0 + 2ml}{3m} = \frac{2l}{3}$ (l: Khoảng cách từ m đến 2m)

Vậy: G cách m một khoảng bằng 2/3 khoảng cách từ m đến 2m.

**Xét vật m:** ( Chọn chiều dương hướng xuống).

Khi vật ở VTCB: -mg + $F_{qt}$=0 **(1)**

Khi ở li độ x, lò xo dãn một đoạn bằng 3x/2. Suy ra:

-mg + $F_{qt}$ – K.3x/2 =m.a= m.x'' **(2)**

Từ (1) và (2): => $x'' + \frac{3K}{2m}x = 0 \Rightarrow x'' + \omega^2 x = 0$

Với : $\omega = \sqrt{\frac{3K}{2m}} = 10(Rad/s) \Rightarrow x = A.\cos\left(\sqrt{\frac{3K}{2m}}t + \varphi\right)$

Tại t=0 ; $x_0$=A cos$\varphi$ $= \frac{2\Delta l_0}{3}$ = 0,2m và $v_0$=- $\omega$ A sin $\varphi$ =0 => A=0,2m và $\varphi = 0^0$

$\Rightarrow x = 0,2\cos(10t)m$

Độ biến dạng lò xo: $\Delta l = \frac{3x}{2} = 0,3.\cos(10t)m$.

Lò xo ở trạng thái không biến dạng lần đầu tiên $\Rightarrow \Delta l = 0$

$\Rightarrow t = \pi/20(s) \approx 0,157s$. Trọng tâm G chuyển động với gia tốc g, khi đó trọng tâm G đã đi được:

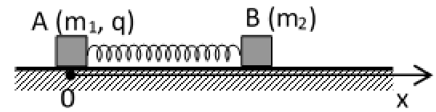
$\Delta h = g.t^2/2 = \pi^2/80(m)$ với vận tốc $v_G$=g.t=$\pi/2(m/s)$.

Tại thời điểm đó ta có: $x' = -2\sin(10t) = -2m/s \Rightarrow v_m = v_G - x' = 2 + \pi/2 \approx 3,57m/s$

Theo định luật bảo toàn năng lượng: $\frac{1}{2}K\Delta l_0^2+3mg\Delta h=\frac{1}{2}mv_m^2+\frac{1}{2}2mv_{2m}^2$

Mặt khác, ta có: $K.\Delta l_0=2m.g\Rightarrow v_{2m}=\pi/2-1\approx 0,57m/s.$

**Bài 2**. - Lực điện tác dụng vào A: F=qE => Gia tốc khối tâm $a_G=\frac{qE}{3m}$: Khối tâm chuyển động thẳng nhanh dần đều đều




- Phương trình chuyển động của khối tâm:

$x_G=\frac{2}{3}\ell_0+\frac{F}{6m}t^2=\frac{2}{3}\ell_0+\frac{qE}{6m}t^2$

- Trong hệ quy chiếu khối tâm thì G đứng yên => ta có hai con lắc lò xo cùng gắn với điểm cố định G:

Con lắc 1 gồm vật A có khối lượng m, lò xo 1 có chiều dài $2\ell_0/3$ nên có độ cứng $k_1=3k/2$.

Con lắc 2 gồm vật B có khối lượng m, lò xo 2 có chiều dài $\ell_0/3$ nên có độ cứng $k_2=3k$.

- **Xét con lắc 2** (Đơn giản hơn): Lực quán tính ngược chiều chuyển động

Tại vị trí cân bằng lò xo 2 có độ nén $\Delta\ell_{02}$: $3k\Delta\ell_{02}-2m.\frac{qE}{3m}=0$ (1) $\Delta\ell_{02}=\frac{2qE}{9m}$

Khi vật có ly độ u so với VTCB, lò xo 2 có độ nén $\Delta\ell_{02}-u$

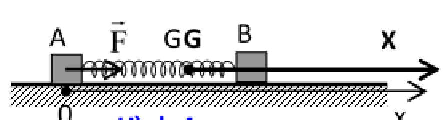
$$2mu''=3k(\Delta\ell_{02}-u)-2m.\frac{qE}{3m} \qquad (2)$$

Từ (1) và(2) => $u''=-\frac{3k}{2m}u$ => Vật dao động điều hoà với tần số góc $\omega_2=\sqrt{\frac{3k}{2m}}$

Lúc t=0: v=0 và ngay sau đó B có vận tốc âm so với G => B ở vị trí biên dương => $A_2=\Delta\ell_{02}=\frac{2qE}{9m}$

PT ly độ của B: $u_2=\frac{2F}{9k}\cos(\sqrt{\frac{3k}{2m}}.t)=\frac{2qE}{9k}\cos(\sqrt{\frac{3k}{2m}}.t)$

- Trong quá trình chuyển động chiều dài lò xo thay đổi nhưng do $m_B=2m_A$ nên luôn có GA=2GB, nghĩa là hai vật dao động cùng tần số, ngược pha nhau và biên độ dao động của chúng có quan hệ:




Hình 4

$A_1=2A_2=\dfrac{4qE}{9m}$

PT ly độ của A: $u_1=-\dfrac{4qE}{9k}\cos(\sqrt{\dfrac{3k}{2m}}.t)$

Chọn trục toạ độ GX song song, cùng chiều trục 0x, có gốc tại G. Vị trí cân bằng của A, và của B có toạ độ:

$X_{A(CB)}=-(\dfrac{2\ell_0}{3}-A_1)=\dfrac{4qE}{9k}-\dfrac{2\ell_0}{3}$; $\qquad X_{B(CB)}=(\dfrac{\ell_0}{3}-A_2)=\dfrac{\ell_0}{3}-\dfrac{2qE}{9k}$

Phương trình toạ độ của A, B đối với trục toạ độ GX:

$X_1=X_{A(CB)}+u_1=\dfrac{4qE}{9k}-\dfrac{2}{3}\ell_0-\dfrac{4qE}{9k}\cos(\sqrt{\dfrac{3k}{2m}}.t)$; $\quad X_2=X_{B(CB)}+u_2=\dfrac{\ell_0}{3}-\dfrac{2qE}{9k}+\dfrac{2qE}{9k}\cos(\sqrt{\dfrac{3k}{2m}}.t)$

Phương trình chuyển động của A, B đối với trục toạ độ Ox gắn với sàn:

$$x_1=X_1+x_G=\frac{4qE}{9k}-\frac{4qE}{9k}\cos(\sqrt{\frac{3k}{2m}}.t)+\frac{qE}{6m}t^2$$

$$x_2=X_2+x_G=\ell_0-\frac{2qE}{9k}+\frac{2qE}{9k}\cos(\sqrt{\frac{3k}{2m}}.t)+\frac{qE}{6m}t^2$$

**Xác định $\ell_{max}$, $\ell_{min}$ của lò xo:**

Lúc t=0: A & B đều ở vị trí biên (Do v=0) và ngay sau đó chiều dài lò xo giảm nên $\ell=\ell_{max}$ lúc t=0 còn $\ell=\ell_{min}$ ứng với lúc A và B đạt vị trí biên còn lại:

$\ell_{max}=\ell_0$

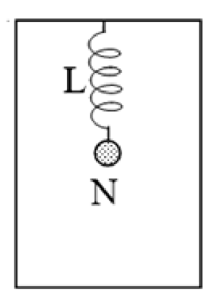
$\ell_{min}=\ell_0-(2A_1+2A_2)=\ell_0-\dfrac{4qE}{3k}$

**Bài 3**. a)

- Tính được : $\omega = 10$rad/s .

- Tính được : A = 4cm.

- Phương trình li độ là : $x = 4\cos\left(10t-\dfrac{\pi}{2}\right)$cm




b)

- Tại VTCB lò xo dãn:

$\Delta\ell_0 = \dfrac{mg}{k} = 0{,}1m = 10cm.$

- Chiều dài lò xo khi cân bằng:

$\ell = \ell_0 + \Delta\ell_0 = 40cm.$

- Chiều dài cực đại:

$\ell_{max} = \ell + A = 44cm.$

- Chiều dài cực tiểu: )

$\ell_{min} = \ell - A = 36cm.$

- Khi thang máy chuyển động với gia tốc a lò xo dãn thêm:

$\Delta\ell = \dfrac{ma}{k} = 0{,}02m = 2cm.$

- Độ biến dạng cực đại là:

$\Delta\ell_{max} = \Delta\ell_0 + \Delta\ell + A = 16$ cm.

Lực đàn hồi cực đại là:

$F_{max} = k.\ \Delta\ell_{max} = 8N.$

- Độ biến dạng cực tiểu là:

$\Delta\ell_{min} = \Delta\ell_0 + \Delta\ell - A = 8$ cm.

Lực đàn hồi cực tiểu là:

$F_{min} = k.\ \Delta\ell_{min} = 4N.$

c)

- Khi rời khỏi lò xo, vật A có vận tốc hướng lên, độ lớn 0,4m/s.

- Gia tốc hướng xuống độ lớn gia tốc là:

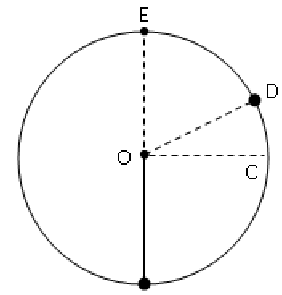
$a' = g + a = 12m/s^2$ (a là gia tốc quán tính).

- Chọn chiều dương hướng xuống.

Điểm O cách sàn khoảng:

$h = \frac{at^2}{2} + vt = 6t^2 – 0,4t = 6x0,64 – 0,4x0,8 = 3,52m.$

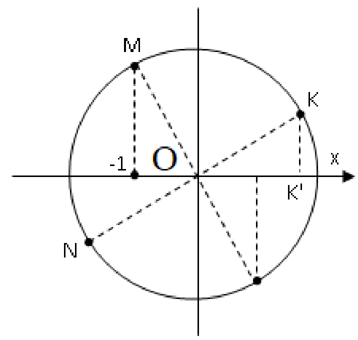
**Bài 4.**




a/ Tại VTCB $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g\sin\alpha}{\Delta l}}$

=> $\Delta l$ = 1cm, $\omega = 10\sqrt{5}$ rad/s, T = $\frac{\pi}{5\sqrt{5}}$s.

Biên độ: A = $\sqrt{x^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$ => A = 2cm và $\varphi = -\frac{\pi}{3}$.




Vậy: x = 2cos($10\sqrt{5}t - \frac{\pi}{3}$)cm.

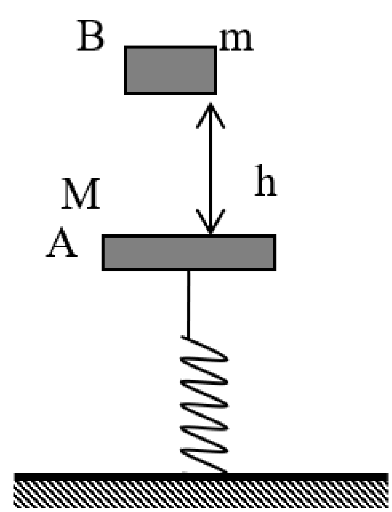
b/ Tại $t_1$ vật ở M có vận tốc $v_1$, sau $\Delta t = \frac{\pi}{4\sqrt{5}}$ = 1,25T.

- vật ở K (nếu $v_1 > 0$) => tọa độ $x_2 = \sqrt{3}$ cm.

- vật ở N (nếu $v_1 < 0$) => tọa độ $x_2 = -\sqrt{3}$ cm.

c/ Quãng đường m đi được: - Nếu $v_1<0$ => $s_1 = 11 - \sqrt{3}$ => $v_{tb}$ = 26,4m/s.

- Nếu $v_1>0$ => $s_2 = 9 + \sqrt{3}$ => $v_{tb}$ = 30,6m/s.




**Bài 5.** a.Chu kỳ dao động T = $2\pi\sqrt{\frac{M+m}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{0,06+0,1}{40}} \approx 0,4$ (s)

Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng cho vật m

Vận tốc vật m ngay trước khi va chạm với đĩa M : v = $\sqrt{2gh} = \sqrt{2}$ (m/s)

Khi vật B va chạm mềm với đĩa A vận tốc của hệ ngay sau va chạm

$$v_0 = \frac{mv}{m+M} = \frac{0,1\sqrt{2}}{0,16} \approx 0,88 \text{ (m/s)}$$

- Vị trí cân bằng của hệ ( m + M ) cách vị trí ban đầu của M một đoạn

$$\Delta l = \frac{mg}{K} = 0,025m = 2,5cm$$

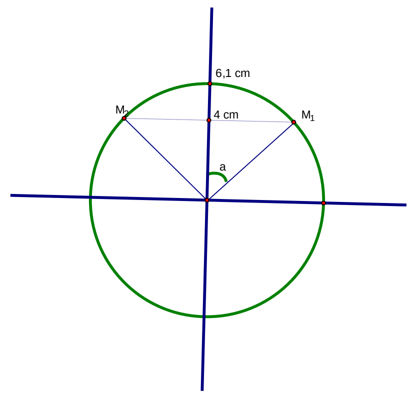
- Áp dụng bảo toàn cơ năng trong dao động điều hòa:

$$\frac{1}{2}KA^2 = \frac{1}{2}K\Delta l^2 + \frac{1}{2}(M+m)v_o^2 \Rightarrow A = \sqrt{\Delta l^2 + \frac{M+m}{K}v_0^2} \approx 6,1cm$$

b.Khoảng thời gian lò xo giãn trong một chu kỳ

Tại vị trí hệ ( m + M ) cân bằng lò xo nén một đoạn

$$\Delta l_0 = \frac{(M+m)g}{K} = 0,04m = 4cm$$

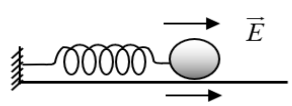



Sử dụng mối liên hệ giữa chuyển động tròn và dao động điều hòa

$$\cos a = \frac{\Delta l_0}{A} = \frac{4}{6,1} \Rightarrow a \approx 0,86rad$$

Thời gian lò xo giãn trong một chu kỳ t = $\dfrac{2a}{\omega} = \dfrac{2a}{\frac{2\pi}{T}} \approx 0,1s$

**Bài 6.** a. Tần số góc: ω = $\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ = 20 (rad/s)




- Vị trí cân bằng mới của con lắc khi có điện trường đều là:

Δl = A = qE/k = 0,05m = 5cm

- Ban đầu con lắc đang ở biên, đến thời điểm t = $\frac{19}{12}T$ = T + $\frac{7}{12}T$ thì con lắc ở vị trí x = $2,5\sqrt{3}$ cm ( chọn chiều dương hướng sang phải) và $m_1$ có độ lớn vận tốc là:

$v_1 = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$ = 50 cm/s

Vận tốc của $m_2$ trước va chạm là: $v_2 = A\omega$ = 100 cm/s

* Vận tốc 2 vật sau va chạm là:

+ **Với va chạm mềm**: $m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)V$ => V = 75cm/s

Biên độ mới khi đó là: $A_1$ = $\sqrt{(A+x)^2+\frac{V^2}{k}.2m_1}$

$$= \sqrt{(5+2,5\sqrt{3})^2+\frac{75^2}{40}.0,2} \approx 10,73 \text{ cm}$$

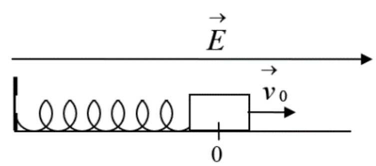
+ **Với va chạm đàn hồi:** $m_1v_1 + m_2v_2 = m_1V_1 + m_2V_2$

$$m_1v_1^2 + m_2v_2^2 = m_1V_1^2 + m_2V_2^2$$

=> $V_1$ = 100cm/s; $V_2$ = 50cm/s

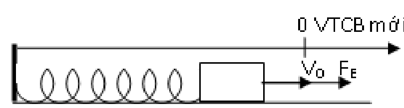
Biên độ dao động của vật khi đó: $A_2$ = $\sqrt{(A+x)^2+\frac{V_1^2}{k}.m_1} = \sqrt{(5+2,5\sqrt{3})^2+\frac{100^2}{40}.0,1} \approx 10,59$ cm

**Bài 7.** Khi bật điện trường đều, con lắc chịu thêm lực điện có độ lớn và chiều không đổi $F_E$=Eq. Khi đó , VTCB của con lắc dịch chuyển theo chiều của lực điện một đoạn $\Delta l = \frac{F_E}{K} = \frac{qE}{K}$




còn chu kì của con lắc không đổi vẫn là $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$ ( tương tự con lắc lò xo thẳng đứng).

Chọn trục tọa độ như hình vẽ thì tại thời điểm bật điện trường , con lắc lò xo có tọa độ $x_0$=-$\Delta l$ =-$\frac{qE}{K}$ và vận tốc $v_0 = A\sqrt{\frac{K}{m}}$.



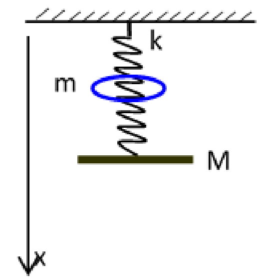

Biên độ dao động mới của con lắc là A', áp dụng định luật bảo toàn cơ năng ta có :

$$\frac{1}{2}KA'^2 = \frac{1}{2}Kx_0^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}Kx_0^2 + \frac{1}{2}mA^2 \Rightarrow A' = \sqrt{x_0^2 + A^2} = \sqrt{\left(\frac{qE}{K}\right)^2 + A^2}$$

Thời điểm con lắc dừng lại lần đầu tiên là thời điểm có li độ x = A' lần đầu tiên. Sử dụng mối quan hệ giữa dao động điều hòa và chuyển động tròn đều ta tìm được thời gian từ lúc bật điện trường đến lúc con lắc dừng lại lần đầu tiên là:

$$\Delta t = \frac{\varphi}{\omega} = \frac{\pi - \arccos\frac{|x_0|}{A'}}{\sqrt{\frac{K}{m}}} = \frac{\pi - \arccos\frac{Eq}{\sqrt{E^2q^2+A^2k^2}}}{\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

**Bài 8.**




1. Vận tốc của vòng ngay trước khi va chạm với đĩa là :

$v = \sqrt{2gh} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}(m/s)$

áp dụng định luật bảo toàn động lượng :

$$mv' = (M+m)v$$
$$\rightarrow v' = \frac{\sqrt{3}}{5}(m/s) = 20\sqrt{3}(cm/s)$$

Độ biến dạng của lò xo khi đĩa ở VTCB trước khi va chạm với vòng là : $\Delta l_1 = \dfrac{Mg}{k}$

Độ biến dạng của lò xo khi hệ ( đĩa và vòng )ở VTCB mới là : $\Delta l_0 = \dfrac{(M+m)g}{k}$

Trong đó : $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{M+m}} = 20(rad/s)$

Tại thời điểm ban đầu : $\begin{cases} x(o) = \Delta l_1 - \Delta l_0 = -1cm \\ v(o) = 20\sqrt{3}cm \end{cases} \rightarrow A = 2cm, \varphi = -\dfrac{2\pi}{3}$

Vậy : phương trình dao động là : $x = 2cos(20t - \dfrac{2\pi}{3})$ (cm)

2. .Giả sử vòng không bị rời khỏi đĩa trong suốt quá trình hệ dao động

Gọi N là phản lực do đĩa tác dụng vào vòng. Ta có :

$$mg - N = ma$$
$$\rightarrow N = m(g + \omega^2 x)$$

Để vòng không rời khỏi đĩa thì :

$$N \geq 0 \rightarrow N_{min} \geq 0 \rightarrow m(g - \omega^2 A) \geq 0$$
$$\rightarrow A \leq \frac{g}{\omega^2} = 2,5cm$$

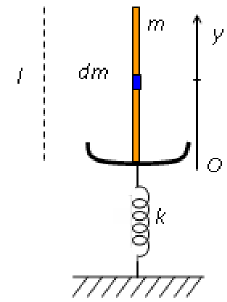
**Bài 9.**

a, Xét phần tử dây dm có toạ độ y

$$dm = \frac{m}{l}dy$$

Vận tốc của dm khi nó chạm đĩa:

$$v = \sqrt{2gy}$$




dm truyền cho đĩa một động lượng:

$$dP = \sqrt{2gy}.dm = \frac{m}{l}\sqrt{2gy}dy$$

Động lượng của toàn bộ dây xích truyền cho đĩa:

$$P = \int_0^P dP = \int_0^y \frac{m}{l}\sqrt{2gy}dy = \frac{m}{l}\sqrt{2g}\,\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\Big|_0^l = \frac{2m}{3}\sqrt{2gl}$$

V là vận tốc của hệ ngay sau va chạm.

Áp dụng định luật bảo toàn động lượng:

$$(M+m)V = P \rightarrow V = \frac{P}{M+m} = \frac{2m}{3(M+m)}\sqrt{2gl}$$

b, Sau va chạm hệ dao động điều hoà xung quanh vị trí cân bằng lò xo nén:

$$\Delta l = \frac{M+m}{k}g$$

Li độ dao động của đĩa ngay sau va chạm:

$$x_0 = \frac{M+m}{k}g - \frac{M}{k}g = \frac{m}{k}g$$

Năng lượng dao động của hệ:

$$E = \frac{M+m}{2}v^2 + \frac{1}{2}k(\frac{mg}{k})^2$$

$$E = \frac{4m^2gl}{M+m} + \frac{m^2g^2}{2k}$$

**Bài 11.** 1. Vật m chịu 2 tác dụng: Trọng lực P và lực đàn hồi của lò xo. Ở vị trí cân bằng (VTCB) lò xo giãn một đoạn $\Delta l$, ta có phương trình:

$$P = F_0 \Rightarrow mg = k\Delta l$$

$$\Rightarrow \Delta l = \frac{mg}{k} = \frac{0,25.10}{100} = 0,025 = 2,5cm$$

Phương trình dao động có dạng:

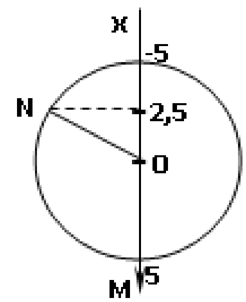
$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

trong đó tần số góc: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{100}{0,25}} = 20rad/s$

Ở thời điểm thả vật thì lò xo giãn 7,5cm tức là cách VTCB một đoạn là: 7,5 – 2,5 = 5cm

$$\begin{cases} A\cos\varphi = 5 \\ -A\omega\sin\varphi = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi = 0(rad) \\ A = 5cm \end{cases}$$

Do đó phương trình dao động là: $x = 5\cos 20t\ (cm)$




Mối liên hệ giữa chuyển động tròn đều và dao động điều hòa:

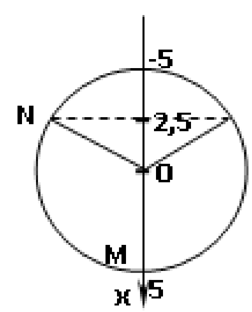
$$t_{min} = \frac{\frac{2\pi}{3}}{\omega} = \frac{2\pi}{60} = \frac{\pi}{30}(s)$$

Tại vị trí có động năng bằng ba lần thế năng:

$$\begin{cases} w_d = 3w_t \\ w_d + w_t = \frac{1}{2}kA^2 \end{cases} \Leftrightarrow w_t = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}kA^2\right) \Leftrightarrow \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}kA^2\right) \Leftrightarrow x = \pm\frac{A}{2} = \pm 2,5cm$$ -

Nếu $x = -2,5cm = \Delta l \ \Rightarrow F_{dh} = 0(N)$

- Nếu $x = 2,5cm \ \Rightarrow F_{dh} = k\left(\Delta l + 2,5.10^{-2}\right) = 100.5.10^{-2} = 5(N)$



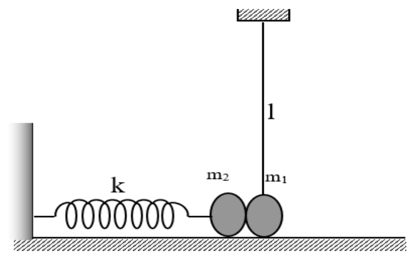

Khoảng thời gian lò xo bị giãn trong một chu kì là:

$$t = \frac{\frac{4\pi}{3}}{\omega} = \frac{4\pi}{60} = \frac{\pi}{15}(s)$$

**Bài 12.**a) Gọi vận tốc $m_1$ ngay trước khi va chạm là $v_0$:

$m_1gh = m_1gl(1 - \cos\alpha_0) = \frac{1}{2}m_1v_0^2$ => góc $\alpha_0$ nhỏ $\rightarrow$ $1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha^2}{2}$

$v_0 = \alpha\sqrt{gl} = 0,314$ (m/s)




+ Gọi $v_1$, $v_2$ là vận tốc của $m_1$, $m_2$ ngay sau khi va chạm

$$(1)\ \begin{cases} m_1v_0 = m_1.v_1 + m_2.v_2 \\ \frac{1}{2}m_1v_0^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \quad (2) \end{cases}$$

vì $m_1 = m_2$ nên từ (1) (2) ta có $\begin{cases} v_0 = v_1 + v_2 & (3) \\ v_0^2 = v_1^2 + v_2^2 & (4) \end{cases}$

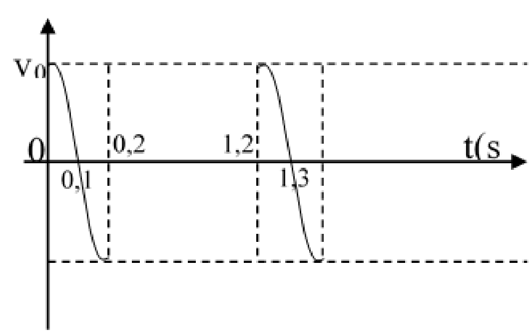
Từ (3) suy ra: $v_0^2 = (v_1 + v_2)^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2$

So sánh với (4) suy ra: $v_1 = 0$; $v_2 = v_0 = 0,314$ (m/s)

+ Như vậy, sau va chạm $m_1$ đứng yên, $m_2$ chuyển động với vận tốc bằng vận tốc của $m_1$ trước khi va chạm.

+ Độ nén cực đại của lò xo: $\frac{1}{2}k\Delta l^2 = \frac{1}{2}m_2v_2^2 \rightarrow \Delta l = v_2\sqrt{\frac{m_2}{k}} = 0,02m = 2cm$

b) Chu kì dao động




+ Con lắc lò xo: $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k}} = 0,4s$

+ Con lắc đơn: $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2s$

$$BC = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2BC}{a}} = \sqrt{\frac{2.0,04}{2}} = 0,2s$$

Chu kì dao động của hệ: $T = \frac{1}{2}(T_1 + T_2) = \frac{1}{2}(2 + 0,4) = 1,2$ (s)

c) Đồ thị

Tại t = 0 => $v = v_0$

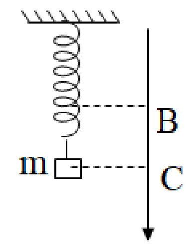
t = 0,1s => v = 0

t = 0,2s => $v = -v_0$

t = 1,2s => $v = v_0$

**Bài 13.** Chọn trục tọa độ Ox thẳng đứng, chiều dương hướng xuống, gốc O là vị trí cân bằng của m. Ban đầu lò xo không biến dạng vật ở vị trí B. Gốc thời gian lúc cho giá đỡ chuyển động.

*Khi chưa rời giá đỡ, m chịu tác dụng của:trọng lực, lực đàn hồi, phản lực $\vec{P}, \vec{F}, \vec{N}$




Theo định luật II Newton: $\vec{P} + \vec{F} + \vec{N} = m\vec{a}$

*Giả sử đến C vật rời giá đỡ, khi đó N= 0, vật vẫn có gia tốc a=2m/s$^2$:

$\vec{P} + \vec{F} = m\vec{a}$. Chiếu lên Ox: P – F = ma hay mg – k.BC = ma.

Suy ra: BC = $\frac{m(g-a)}{k} = \frac{0,1(10-2)}{20} = 0,04m = 4cm$

*Mặt khác : gọi t là thời gian từ lúc bắt đầu chuyển động đến lúc rời giá đỡ, ta có

*Tần số góc: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{20}{0,1}} = 10\sqrt{2}\, rad/s$

*-Độ giãn của lò xo ở vị trí cân bằng: $BO = \Delta l = \frac{mg}{k} = \frac{0,1.10}{20} = 0,05m = 5cm$

-Vận tốc vật tại C :$V_C$ = at = 2.0,2 = 0,4 m/s.

Điều kiện đầu: t=0 $\begin{cases} x = -OC = -1cm \\ v = 40cm/s \end{cases}$

Phương trình $x = A\sin(\omega t + \varphi) = 3\sin(10\sqrt{2}t - \frac{\pi}{9})cm$

$$\begin{cases} A = 3cm \\ \varphi \approx -20^0 = -\frac{20\pi}{180} = -\frac{\pi}{9} rad \end{cases}$$

Phương trình $x = A\sin(\omega t + \varphi) = 3\sin(10\sqrt{2}t - \frac{\pi}{9})cm$

**Bài 14.**

a.Vận tốc của m ngay trước va chạm: $v = \sqrt{2gh} = 0,5\sqrt{3}$ (m/s)=$50\sqrt{3}$ (cm/s)

Do va chạm hoàn toàn không đàn hồi nên sau va chạm vòng và đĩa có cùng vận tốc V

$mv = (M+m)V \rightarrow V = \dfrac{mv}{M+m} = 0,2\sqrt{3}$ (m/s)= $20\sqrt{3}$ (cm/s)

Viết PT dao động: $\omega = \sqrt{\dfrac{K}{M+m}} = 20$ (rad/s). Khi có thêm m thì lò xo bị nén thêm một đoạn:

$\Delta l_0 = \dfrac{mg}{K} = 1$(cm) vậy VTCB mới của hệ nằm dưới VTCB ban đầu một đoạn 1cm

Tính A: $A = \sqrt{x^2{}_0 + \dfrac{V^2}{\omega^2}} = 2$ (cm)

Tại t=0 ta có: $\begin{cases} 1 = 2\cos\varphi \\ -2.20\sin\varphi < 0 \end{cases} \rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{3}$(rad/s)

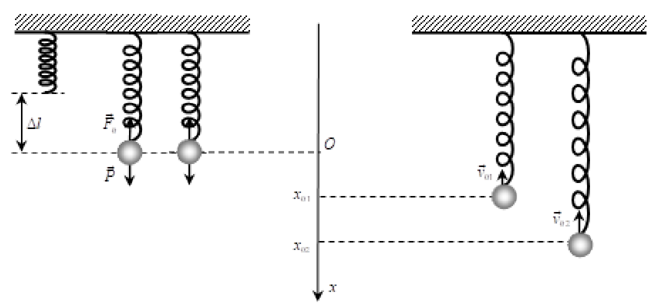
Vậy: x=2cos(20t+$\dfrac{\pi}{3}$) (cm)

Lực tác dụng lên m là: $\vec{N} + \vec{P_1} = m\vec{a} \rightarrow N - P = ma = -m\omega^2 x$

Hay N= $mg - m\omega^2 x \rightarrow N_{\min} = mg - m\omega^2 A$

Để m không rời khỏi M thì $N_{\min} \geq 0 \rightarrow A \leq \dfrac{g}{\omega^2}$ Vậy $A_{max} = \dfrac{g}{\omega^2} = \dfrac{10}{20^2} = 2,5$(cm)

**Bài 15.**



Hinh 1

a) Phải kích thích thế nào để hai con lắc dao động theo hai phương trình trên?
   + Con lắc 1. Tại thời điểm t = 0 thì

$x_{01} = A_1\cos\varphi_1 = 2$ cm ;

$v_{01} = -A_1\omega\sin\varphi_1 = -8\pi\sqrt{3}$ cm/s

Như vậy phải kéo vật xuống một đoạn dưới vị trí cân bằng 2cm rồi truyền cho vật tốc độ $8\pi\sqrt{3}$ cm/s hướng lên trên

+ Con lắc 2. Tại thời điểm t = 0 thì

$x_{02} = A_2\cos\varphi_2 = 2 + 2\sqrt{3}$ cm ; 5,46cm; $v_{02} = -A_2\omega\sin\varphi_2 \approx$ - 18,4 cm/s.

Như vậy phải kéo vật xuống một đoạn dưới vị trí cân bằng 5,46cm rồi truyền cho vật tốc độ 18,4 cm/s hướng lên trên b.Lực tác dụng lên giá treo chính là lực đàn hồi :

$$F = F_1 + F_2 = k(\Delta l_{01} + x_1) + k(\Delta l_{02} + x_2) = 2k\Delta l + k(x_1 + x_2)$$

$$F = 2P + k(x_1 + x_2) = 2mg + k.4\sqrt{5}\cos(4\pi t + 0,58) \Rightarrow F_{MAX} \approx 4,32\text{ N}$$

**c.** Khoảng cách giữa 2 vật trong quá trình dao động: $\Delta x = |x_1 - x_2|$

*+ Xét phương trình:* $\Delta x = x_1 - x_2 = 4\cos(4\pi t + \frac{5\pi}{6})cm$. *Sử dụng mối quan hệ giữa dao động điều hòa và chuyển động tròn đều, biểu diễn tương ứng trên hình 2*

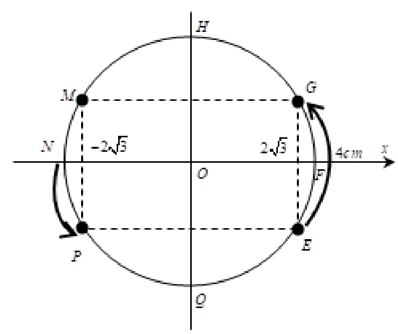
*Tại thời điểm $t_0$ khoảng cách 2 vật là $2\sqrt{3}$ cm (tương ứng là vị trí điểm M)

*Tại thời điểm $t_1 = \frac{1}{24}s = \frac{T}{12}$ khoảng cách 2 vật là 4cm (tương ứng vị trí điểm N)

*Tại thời điểm $t_2 = \frac{1}{3}s = \frac{2T}{3}$ khoảng cách 2 vật là $2\sqrt{3}$ cm (tương ứng vị trí điểm G)

Từ thời điểm $t_1 \to t_2$ trên đường tròn ứng với cung NPQEFG mà bán kính véc tơ quét được thì khoảng thời gian mà khoảng cách 2 vật không nhỏ hơn $2\sqrt{3}$ cm tương ứng với cung NP và cung EG là: $\Delta t = \frac{T}{4} = 0,125s$.

+ Nếu HS xét phương trình: $\Delta x = x_2 - x_1 = 4\cos(4\pi t - \frac{\pi}{6})cm$, tương tự như trên, khoảng thời gian mà khoảng cách 2 vật không nhỏ hơn $2\sqrt{3}$ cm vẫn là: $\Delta t = \frac{T}{4} = 0,125s$



Hình 2

**Bài 16.** a.) Tần số góc riêng của con loắc: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

- Khi m ở vị trí cân bằng: mg = k Δ1

- Tại thời điểm t = 0 có ngoại lực F tác dụng: mg - l (Δl + x) + F = ma

$$\frac{k}{m}x + \frac{F_0.\cos\omega t}{m} = a = x"$$

$$x" + \omega_0^2 x = \frac{F_0\cos\omega t}{m} \qquad (1)$$

Nghiên cứu pt: x = Acos ω t (2)

<u>⇒ Vật DĐ ĐH với tần số góc</u> ω

b) Từ (1) và (2) <u>⇒ Biên độ dao động:</u> $A = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$ (3)

Nhận xét:

- Biên độ của dao động cưỡng bức phụ thuộc vào biên độ của ngoại lực và độ chênh lệch giữ tần số dao động riêng của tần số của ngoại lực.

- Đặc biệt khi xảy ra công hưởng ($\omega \to \omega_0$) thì biên độ của dao động cưỡng bức tiến tới vô cùng lớn. Đồ thị biểu diễn sự phụ thuộc vào A theo ω (Hàm (3))

**Bài 17.** a. Vận tốc của m ngay trước va chạm: $v = \sqrt{2gh} = 50\sqrt{3}cm/s \approx 86,6cm/s$

Do va chạm hoàn toàn không đàn hồi nên sau va chạm hai vật có cùng vận tốc V

$$mv = (M+m)V \to V = \frac{mv}{M+m} = 20\sqrt{3}cm/s \approx 34,6cm/s$$

Tần số dao động của hệ: $\omega = \sqrt{\frac{K}{M+m}} = 20rad/s$. Khi có thêm m thì lò xo bị nén thêm một đoạn: $x_0 = \frac{mg}{K} = 1cm$. Vậy VTCB mới của hệ nằm dưới VTCB ban đầu một đoạn 1cm

Tính A: $A = \sqrt{x^2{}_0 + \frac{V^2}{\omega^2}} = 2$ (cm)

Tại t=0 ta có: $\begin{cases} 1 = 2\cos\varphi \\ -2.20\sin\varphi < 0 \end{cases} \to \varphi = \frac{\pi}{3}rad$

Vậy: $x = 2\cos\left(20t + \frac{\pi}{3}\right)cm$

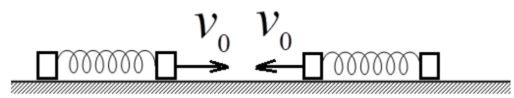
b, Phản lực của M lên m là N thỏa mãn:

$$\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a} \to N - mg = ma = -m\omega^2 x$$

$$\to N = mg - m\omega^2 x \to N_{\min} = mg - m\omega^2 A$$

Để m không rời khỏi M thì $N_{\min} \geq 0 \to A \leq \frac{g}{\omega^2}$ Vậy $A_{max} = \frac{g}{\omega^2} = \frac{10}{20^2} = 2,5cm$

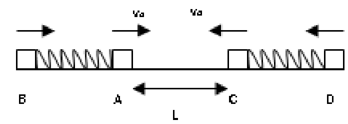
**Bài 18.**




* Chọn gốc thời gian là lúc hai vật vc cách nhau L

+ Thời điểm để hai vật bắt đầu va chạm là: $t_1 = \frac{L}{2v_o}$

+ Do hai hệ giống hệt nhau nên sau va chạm hai vật A và C lại có vận tốc giống hệt nhau nhưng đổi hướng

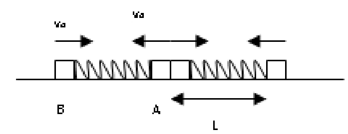


* Khảo sát hệ sau va chạm:

+ Xét hệ A và B

. Khối tâm G của hệ có vận tốc $v_G = 0$

. Vậy A và B cùng dao động đối với G như một hệ gồm vật khối lượng m gắn với lò xo độ cứng 2k với chu kì và biên độ: T = $2\pi\sqrt{\dfrac{m}{2k}}$ ; A = $\dfrac{v_o}{\omega}$ = $v_o.\sqrt{\dfrac{m}{2k}}$



+ Dao động của hệ C và D sau va chạm giống hệt dao động của hệ A và B.

+ Thời điểm ngay sau va chạm các lò xo dài tự nhiên, đó chính là vị trí cân bằng của A và C.

* Xét trường hợp 1: $A > \dfrac{L}{2} \Leftrightarrow v_o.\sqrt{\dfrac{m}{2k}} > \dfrac{L}{2}$:

+ Giả sử sau khoảng thời gian bằng $t_2$ kể từ lúc va chạm lần 1 thì hai vật lại cách nhau L, và mỗi vật đi quãng đường $\dfrac{L}{2}$ kể từ VTCB . Liên hệ với chuyển động tròn đều ta thấy đó là ktg để bán kính quĩ đạo quét góc: $\Delta\varphi = \arcsin\dfrac{L/2}{A} = \arcsin\dfrac{L/2}{v_0\sqrt{\dfrac{m}{2k}}} < \dfrac{\pi}{2}$

+ Vậy thời gian từ lúc hai vật cách nhau L lần đầu đến lúc lại cách nhau L lần thứ 2 là: $\theta_1 = t_1 + t_2 = \dfrac{L}{2v_o} + \dfrac{\Delta\varphi}{\omega} = \dfrac{L}{2v_o} + \Delta\varphi.\sqrt{\dfrac{m}{2k}}$

* Xét trường hợp 2: $A = \dfrac{L}{2} \Leftrightarrow v_o.\sqrt{\dfrac{m}{2k}} = \dfrac{L}{2}$:

+ ktg để A và C lại cách nhau L kể từ lúc ngay sau va chạm lần 1 là: $t_3 = \dfrac{T}{4}$ $\left(\Delta\varphi = \dfrac{\pi}{2}\right)$

Vậy tổng khoảng thời gian để hai vật lại cách nhau L là: $\theta_2 = t_1 + t_3 = \dfrac{L}{2v_o} + \dfrac{T}{4} = \dfrac{L}{2v_o} + \dfrac{\pi}{2}.\sqrt{\dfrac{m}{2k}}$

* Xét trường hợp 3: A < $\frac{L}{2}$ ⇔ $v_o.\sqrt{\frac{m}{2k}} < \frac{L}{2}$:

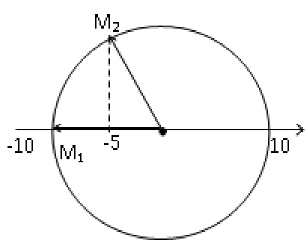
+ Ngay sau va chạm lần đầu, các vật bắt đầu từ VTCB với vận tốc $v_o$ chuyển động về VT biên, mỗi vật đi quãng đường $A < \frac{L}{2}$; sau đó A và C chuyển động đến gặp nhau.

+ Khoảng thời gian A và C đến va chạm lần 2 kể từ va chạm lần 1 là: $t_4 = \frac{T}{2}$

+ Ngay sau va chạm lần 2, vận tốc các vật được biểu diễn như hình vẽ và lò xo đang có chiều dài tự nhiên.

. Thời gian từ vc lần 2 đến khi hai vật lại cách nhau L là: $t_5 = \frac{L}{2v_o}$

+ Vậy tổng khoảng thời gian để hai vật lại cách nhau L lần thứ 2 là:




$$\theta_3 = t_1 + t_4 + t_5 = 2.\frac{L}{2v_o} + \frac{T}{2} = \frac{L}{v_o} + \pi.\sqrt{\frac{m}{2k}}$$

**Bài 19.** 1a.Phương trình dao động : $x = A.\cos(\omega t + \varphi)$

trong đó : $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = 20(rad/s)$

$$t = 0: \begin{cases} x = -10(cm) \\ v = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A\cos\varphi = -10(cm) \\ \sin\varphi = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \varphi = \pi \\ A = 10(cm) \end{cases}$$

Vậy : $x = 10.\cos(20t + \pi)(cm)$

1b. Ta thấy lò xo nén 5cm các lần chẵn liên tiếp cách nhau một chu kì, do đó lò xo nén

lần thứ 2010 tại thời điểm : $t_{2010} = t_2 + \frac{2010-2}{2}.T$ với $t_2$ là thời điểm lò xo nén 5cm

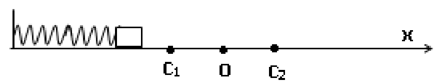
lần thứ 2.

+ Ta xác định thời điểm lò xo nén 5cm lần thứ hai, sử dụng pp vec tơ quay ta có : kể từ

thời điểm ban đầu đến lúc lò xo nén 5cm lần

thứ 2 thì vectơ quay một góc :

$M_1\hat{O}M_2 = \omega.t_2 = 2\pi - \pi/3 = 5\pi/3$




$\rightarrow t_2 = \dfrac{5\pi}{60}(s)$

+ Do đó thời điểm lò xo nén 5cm lần thứ 2010 là : $t_{2010} = \dfrac{5\pi}{60} + 1004.\dfrac{2\pi}{20} = \dfrac{6029\pi}{60}(s)$

+ Lúc có ma sát, tại VTCB của vật lò

xo biến dạng một đoạn :

$\Delta l = \dfrac{\mu mg}{K} = 0,0025(m)$

+ Ta thấy có hai VTCB của vật phụ thuộc vào chiều chuyển động của vật, nếu vật đi sang phải lúc lò xo nén 2,5mm thì VTCB là bên trái O(vị trí $C_1$), lúc vật đi sang trái mà lò xo giãn 2,5mm thì VTCB là bên phải O( vị trí $C_2$)

+ Áp dụng đinh luật bảo toàn năng lượng, ta tính được độ giảm toạ độ cực đại sau mỗi lần qua O là hằng số và bằng : $\Delta x_{max} = \dfrac{2\mu mg}{K} = 0,005(m)$

+ Gia tốc của vật đổi chiều lần thứ 4 ứng với vật đi qua VTCB $C_2$ theo chiều sang trái lần thứ 2, áp dụng định luật bảo toàn năng lượng ta được :

$$\frac{KA^2}{2} - \left(\frac{K(\Delta l)^2}{2} + \frac{mv_4^2}{2}\right) =$$
$$= \mu mg\left[A + 2(A - \Delta x_{max}) + 2(A - 2\Delta x_{max}) + (A - 3\Delta x_{max}) + (A - 3\Delta x_{max} - \Delta l)\right]$$

$\rightarrow v_4 = 1,65(m/s)$

**Bài 20. 1**. Dễ thấy chất điểm chuyển động mỗi khoảng là T/12.

Khoảng cách xa nhất là $\dfrac{A}{2} = 5cm$..

Khoảng cách gần nhất là: $A - A\frac{\sqrt{3}}{2} = 1,34cm$.

**2**. Để có vận tốc TB lớn nhất thì 2 lần vật qua VTCB: $s = \frac{A}{2} + A + A + \frac{A}{2} = 3A$

$$v_{tb} = \frac{30}{0,8} = 37,5cm/s.$$

**Bài 21. 1**. Con lắc 1. Tại thời điểm t = 0 thì $x_0 = A\cos\varphi = 3$ cm ; $v_0 = -A\omega\sin\varphi = 60\sqrt{3}$ cm/s

Như vậy phải kéo vật xuống một đoạn dưới vị trí cân bằng 3cm rồi cấp cho vật vận tốc $60\sqrt{3}$ cm/s theo chiều hướng xuống dưới

Con lắc 2. Tại thời điểm t = 0 thì $x_0 = A\cos\varphi = 9$ cm ; $v_0 = -A\omega\sin\varphi =$ -$60\sqrt{3}$ cm/s

Như vậy phải kéo vật xuống một đoạn dưới vị trí cân bằng 9cm rồi cấp cho vật vận tốc $60\sqrt{3}$ cm/s theo chiều hướng lên trên

**2**. Xét $\Delta x = x_1 - x_2 = 12\cos(20t - \frac{2\pi}{3})$ cm nên $\Delta x_{MAX}$ = 12cm

**3**. Lực tác dụng lên giá treo chính là lực đàn hồi :

$$F = F_1 + F_2 = k(\Delta l_{01} + x_1) + k(\Delta l_{02} + x_2).$$

$F = 2P + k(x_1 + x_2) = 2\,\text{mg} + \text{k}.12\cos 20\text{t}$ suy ra $F_{MAX}$ = 3,4N

**Bài 22. a)** Ở VTCB lò xo bị giãn $\Delta l_0$: $k.\Delta l_0 = mg$

Suy ra $k = \frac{mg}{\Delta l_0} = \frac{0,2.10}{0,16} = 12,5N/m$

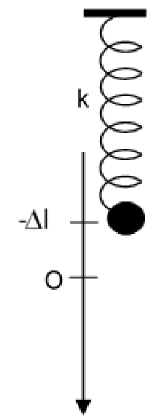
Chu kỳ dao động của hệ:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0,2}{12,5}} = 0,8s$$

**b)** Dưới tác dụng của lực F VTCB của vật m dịch chuyển xuống dưới một đoạn:

$\Delta l = \dfrac{F}{k} = \dfrac{2,5}{12,5} = 0,2m = 20cm$

* Chọn trục toạ độ hướng dọc theo trục lò xo, gốc toạ độ trùng với vị trí cân bằng của vật sau khi đã có lực $\vec{F}$ tác dụng. Khi đó, vị trí ban đầu của vật có toạ độ là $-\Delta l$ .




* Tại toạ độ x bất kỳ thì độ biến dạng của lò xo là $(x + \Delta l)$, theo định luật II Niutơn:

$-k(x + \Delta l) + F = ma$

$\Leftrightarrow -k(x + \dfrac{F}{k}) + F = ma \Leftrightarrow -kx = ma \Leftrightarrow x'' + \omega^2 x = 0$

Trong đó $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \sqrt{\dfrac{12,5}{0,2}} = 2,5\pi$ rad/s . Vật dao động điều hoà với phương trình:

$x = A\cos(\omega t + \varphi)$

Trong thời gian lực F tác dụng vật sẽ dao động điều hòa quanh VTCB mới.

Do vật ban đầu đang đứng yên nên biên độ dao động:

$A = \Delta l = 20cm$

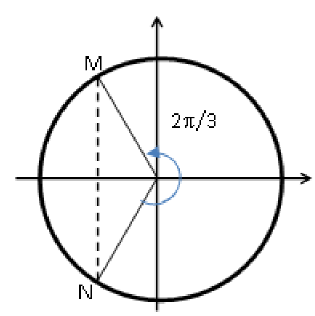
Do $\Delta t = \dfrac{5}{4}T$ nên quãng đường vật đi được: $S = 4.A + A = 100cm$

**c)** Do thời gian vật chịu tác dụng của lực F là $\Delta t = 3.10^{-3}s = T_0$ nên ta bỏ qua dịch chuyển của vật m trong thời gian đó.

Xung của lực F gây ra cho vật m vận tốc v. Ta có

$F.\Delta t = m.v$

Vận tốc của m sau đó: $v = \dfrac{F.\Delta t}{m} = \dfrac{105.3.10^{-3}}{0,2} = 1,575m/s$




Vậy biên độ dao động của m:

$A = \dfrac{v}{\omega} = \dfrac{1,575}{2,5.\pi} = 0,2m = 20cm$

**d)** Do va chạm với bản là đàn hồi nên sau va chạm vật tốc của vật chỉ đổi chiều mà không thay đổi độ lớn.

Tương ứng trạng thái của vật tức thời thay đổi từ M đến N trên đường tròn.

Như vậy chu kỳ dao động mới của vật

$$T = \frac{2}{3}T_0 = \frac{2}{3}.0,8 \approx 0,53 \text{ s}$$

**Bài 23.**

a. Khi vật ở VTCB $\Delta\ell_0 = |x_0| = \dfrac{mg}{k} = 0,01(m) = 1(cm)$ $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = 10\pi$ (rad/s)

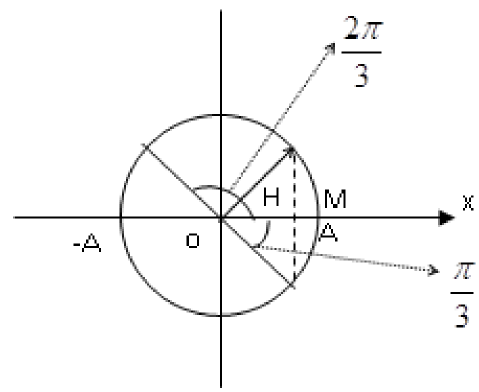
+ Phương trình dao động của vật: $x = 2\cos(10\pi t + \dfrac{2\pi}{3})$ (cm).

+ Chu kỳ T = $\dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{10\pi} = \dfrac{1}{5}$s

+ t =1/3(s) => x = 2(cm). Độ lớn lực đàn hồi: $F_{đh}$=k|$\Delta\ell$|= 3(N).

+ Biểu diễn $x = 2\cos(10\pi t + \dfrac{2\pi}{3})$ bằng véc tơ quay $\vec{A}$.

Sau t =1/6s $\vec{A}$ quay $\omega t = \dfrac{5\pi}{3} = \pi + \dfrac{2\pi}{3}$




Quãng đường vật dao động điều hòa

đi được sau 1/6s là:

S = 2A+ 2HM = 2A + A = 3A = 6cm

+ Tốc độ trùng bình : $V_{tb}$= $\dfrac{S}{t} = \dfrac{6}{\frac{1}{6}} = 36(cm/s)$

b.Chọn mốc tính thế năng là VTCB

+ Cơ năng ban đầu $W_0$ = $\dfrac{mv_0^2}{2} + \dfrac{kx_0^2}{2} = 0,02(J)$

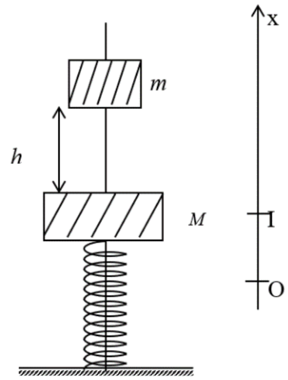
+ Vật chuyển động chậm dần đến vị trí cao nhất cách VTCB A:

$$\frac{kA_1^2}{2} = W_0 - F_c(A_1 - |x_0|) \Rightarrow A_1 = 0,0195m$$

+ Sau đó vât đi xuống nhanh dần và đạt tốc độ cực đại tại vị trí: $F_{hp}$=$F_c$$\Rightarrow |x_1| = \dfrac{F_C}{K} = 0,001(m)$

+ Độ biến thiên cơ năng lúc đầu và vị trí tốc độ cực đại:

$$W_0 - \frac{mv^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2} = F_c(A_1 - |x_0| + A_1 - |x_1|) \Rightarrow v = 0,586(m/s)$$



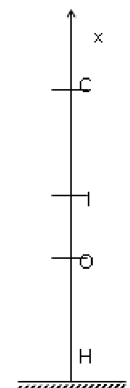

**Bài 24.** a)Vận tốc của vật ngay trước lúc va chạm :

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2.10.3,75.10^{-2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866m/s$$

-Theo định luật bảo toàn động lượng : mv = (m+M)$v_0$ => vận tốc hai vật ngay sau va chạm là: $v_0 = \left(\frac{m}{m+M}\right)v = \left(\frac{200}{200+300}\right)\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{5} = 0,346m/s$

b) Gọi $l_0$ = HC là chiều dài tự nhiên của lò xo ; I là vị trí cân bằng của M trước va chạm cũng là vị trí hai vật ngay sau va chạm:

$$CI = \Delta l_0 = \frac{Mg}{k} = \frac{0,3.10}{200} = 0,015m = 1,5cm$$




Gọi O là VTCB của hệ vật (M+m) sau va chạm:

$$CO = \Delta l = \frac{(M+m)g}{k} = \frac{(0,3+0,2).10}{200} = 0,025m = 2,5cm$$

-Chọn trục tọa độ gốc tại O như hình vẽ, gốc thời gian (t = 0) lúc m và M vừa chạm nhau: $x_0 = IO = CO - CI = 2,5 - 1,5 = 1(cm)$ và $v_0$ = 34,6 (cm/s)...

-Phương trình dao động của hệ vật M+m có dạng $x = A.\cos(\varpi t + \varphi)$

-Tần số góc : $\varpi = \left(\frac{k}{M+m}\right)^{1/2} = \left(\frac{200}{0,2+0,3}\right)^{1/2} = 20(rad/s)$

- Xét khi t = 0 : $\begin{cases} x = x_0 = A.\cos\varphi = 1(cm) \\ v = v_0 = -\omega.A.\sin\varphi = -34,6(cm/s) \end{cases}$ => $\begin{cases} A = 2(cm) \\ \varphi = \frac{\pi}{3}(rad) \end{cases}$

Vậy phương trình dao động là : $x = 2.\cos(20t + \frac{\pi}{3})(cm)$

3- Để hai vật không rời nhau trongquá trình dao động thì vật m luôn chịu tác dụng của hai lực : Trọng lực $\vec{P} = m\vec{g}$ hướng xuống dưới, Phản lực $\vec{N}$ do M tác dụng lên hướng lên trên ($N \geq 0$).

- Theo định luật Niu tơn 2 ta có : $\vec{P} + \vec{N} = m\vec{a}$ , chiếu lên Ox ta được :

$$N - mg = ma = -m\omega^2 x \quad <=> \quad N = mg - m\omega^2 x = m(g - \omega^2 x)$$

- Khi $x_{max}$ =A suy ra : $g-\omega^2 A \geq 0$ <=> $A \leq \dfrac{g}{\varpi^2} = \dfrac{10}{20^2} = 0,025(m) = 2,5(cm)$

Vậy : khi $A_{max}$ = 2,5(cm) thì $N \geq 0$ , m sẽ không rời khỏi M

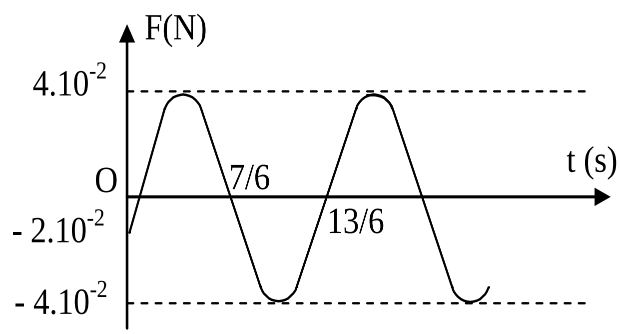
**Bài 25.** 1.Từ đồ thị, ta có: $\dfrac{T}{2} = \dfrac{13}{6} - \dfrac{7}{6}$ = 1(s)

$\Rightarrow$ T = 2s $\Rightarrow$ ω = π(rad/s).

$\Rightarrow$ k = m.$\omega^2$ = 1(N/m).

+) Ta có: $|F_{max}|$ = kA $\Rightarrow$ A = 0,04m = 4cm.

+) Lúc t = 0(s) từ đồ thị, ta có: $F_k$ = - kx = - $2.10^{-2}$ m $\Rightarrow$ x = 2cm và $F_k$ đang tăng dần (vật đang chuyển động về VTCB) $\Rightarrow$ v < 0.




$$\Rightarrow \begin{cases} x = A\cos\varphi = 2\text{cm} \\ \text{v} = -A\sin\varphi < 0 \end{cases} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3} rad$$

Vậy, phương trình dao động của vật là: x= 4cos(πt + π/3) cm.

2. Từ giả thuyết, $\Rightarrow |v| \leq 24\pi\sqrt{3}$ (cm/s).

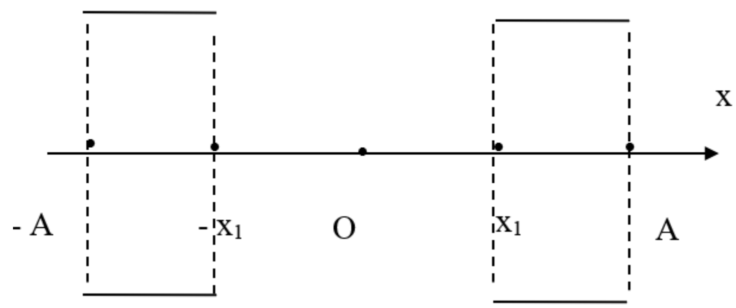
Gọi $x_1$ là vị trí mà v = $24\pi\sqrt{3}$ (cm/s) và $t_1$ là thời gian vật đi từ vị trí $x_1$ đến A.

$\Rightarrow$ Thời gian để vận tốc có độ lớn không vượt quá $24\pi\sqrt{3}$ (cm/s) là: t = $4t_1$ = $\dfrac{2T}{3}$ $\Rightarrow t_1 = \dfrac{T}{6}$ $\Rightarrow$ $x_1$ = A/2.

Áp dụng công thức: $A^2 = x^2 + \left(\dfrac{v}{\omega}\right)^2 \Rightarrow \omega = 4\pi \Rightarrow T = 0,5(s)$.

3. Gọi $x_0$ là tọa độ của VTCB, ta có: $F_{dh} = F_{ms} \Leftrightarrow k.x_0 = \mu mg$

$\Rightarrow\ x_0 = \dfrac{\mu mg}{k} = 1cm.$




Biên độ dao động của con lắc là: A = Δl – $x_0$ = 9cm.

Vận tốc cực đại là: $v_{max}$ = Aω = $90\sqrt{2}$ (cm/s).

**Bài 26.**a. Vật chịu tác dụng của 2 lực: trọng lực

và lực đàn hồi của lò xo:

- Tại VTCB có: $mg = k\Delta l_0 \Rightarrow \Delta l_0 = \dfrac{mg}{k} = 0{,}025m$ $= 2{,}5cm$

- Phương trình dao động của vât có dạng:

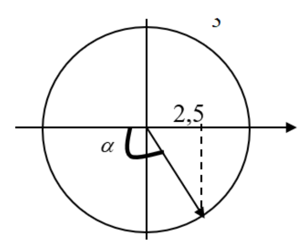
$x = A\cos(\omega t + \varphi)$

Với $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \sqrt{\dfrac{100}{0{,}25}} = 20(rad/s)$

-Tại lúc t = 0 $\begin{cases} x = -(7{,}5 - 2{,}5) = -5cm \\ v = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 5(cm) \\ \varphi = \pi(rad) \end{cases}$

Vậy pt: $x = 5\cos(20t + \pi)(cm)$

b. Vật bắt đầu chuyển động đến lúc x = 2,5 cm thì lò xo ko giãn lầ thư nhất. khi đó ta có bán kính véc tơ của chuyển động tròn đều quét được một góc $\alpha = \dfrac{2\pi}{3} = \omega.t \Rightarrow t = \dfrac{\alpha}{\omega} = \dfrac{\pi}{30}(s)$




c.Gọi $A_1$, $A_2$, ….., $A_n$ là biên độ dao động của vật trong những lần kế tiếp. Mỗi lần vật đi qua vị trí cân bằng năng lượng giảm:

$\Delta w = \dfrac{1}{2}k(A_1^2 - A_2^2) = A_{Fc} = \dfrac{1}{50}mg(A_1 + A_2) \Rightarrow A_1 - A_2 = 10^{-3}m = 0{,}1cm$

Vậy số lần vật đi qua vị trí cân bằng là: $N = \dfrac{A}{A_1 - A_2} = 50$ lần

**Bài 27. a**. Phương trình dao động của con lắc có dạng: s = $S_0\cos(\omega t+\varphi)$, hoặc $\alpha=\alpha_0\cos(\omega t+\varphi)$

Trong đó $\omega=\sqrt{\frac{g}{l}}=\sqrt{2}$ rad/s

Khi t = 0 thì $\alpha=\alpha_0$ => $\cos\varphi=1$ => $\varphi=0$ => $\alpha=\frac{9\pi}{180}\cos(\sqrt{2}t)$ rad

=> $\alpha=\frac{\pi}{20}\cos(\sqrt{2}t)$ rad

Hoặc: $S_0 = l.\alpha_0 = \frac{\pi}{4}$ m => s = $\frac{\pi}{4}\cos(\sqrt{2}t)$ m

b.Sau thời gian t = $\frac{\pi}{6\sqrt{2}}$ s thì $\alpha=\frac{\pi}{20}\cos(\sqrt{2}\frac{\pi}{6\sqrt{2}})$ = $\frac{\pi\sqrt{3}}{40}$ rad

Thế năng của vật lúc đó là: $w_t = \frac{1}{2}mgl\alpha^2$ = 0,046875J

Cơ năng con lắc là: W = $\frac{1}{2}mgl\alpha_0^2$ = 0,0625J

Động năng của vật lúc đó: $w_d = W - w_t$ = 0,015625J

**c.** Từ phương trình bảo toàn năng lượng ta có:

$$\frac{mv^2}{2}=mgl(1-\cos\alpha_0)$$

Mặt khác ta lại có: $\frac{mv^2}{l}=T-mg$

Suy ra: $T=mg(3-2\cos\alpha_0)$=5,123N

**Bài 28.** a. Tính chiều dài và chu kì dao động của con lắc

Ta có: $T=\frac{\Delta_t}{n}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}};T'=\frac{\Delta_t}{n'}=2\pi\sqrt{\frac{l'}{g}}$

$$\Rightarrow\frac{l'}{l}=\left(\frac{T'}{T}\right)^2=\left(\frac{n}{n'}\right)^2=\left(\frac{40}{39}\right)^2=\frac{1600}{1521} \qquad (1)$$

Theo giả thiết ta có: $l' = l + 7,9$ (2)

Từ (1) và (2): $\Rightarrow \dfrac{l+7,9}{l} = \dfrac{1600}{1521} \Rightarrow l = 152,1cm$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{1,521}{9,8}} \approx 2,475(s)$$

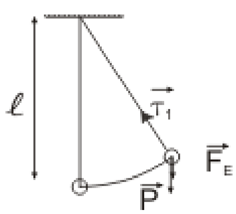
$$l' = l + 7,9 = 152,1 + 7,9 = 160\,cm$$

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{l'}{g}} - \frac{40}{39}T = \frac{40 \times 2,475}{39} \approx 2,538(s)$$

b. Xác định chiều và độ lớn vectơ $\vec{E}$

Khi vật chưa tích điện và được kích thích cho dao động điều hòa dưới tác dụng của lực căng $\vec{\tau}$ và trọng lực $\vec{P} = m\vec{g}$ thì chu kì của con lắc là: $T' = 2\pi\sqrt{\dfrac{l'}{g}}$

Khi vật tích điện q và đặt trong điện trường đều $\vec{E}$ cùng phương với $\vec{P}$ và được kích thích cho dao động điều hòa dưới tác dụng lực căng $\vec{\tau}_1$ và hợp lực $\vec{P} = \vec{P} + \vec{F}_E =$ $m\left(\vec{g} + q\dfrac{\vec{E}}{m}\right) = m\overrightarrow{g_1}$ thì hợp lực $\vec{P}_1$ có vai trò như $\vec{P}$




Do đó chu kì của con lắc có biểu thức:

$T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l'}{g_1}}$ với $g_1 = g \pm \dfrac{qE}{m}$ (3)

Ta có: $T_1 = T \Rightarrow g_1 > g,$ do đó từ (3) ta có:

$g_1 = g \pm \frac{qE}{m}$, trong đó điện tích q > 0

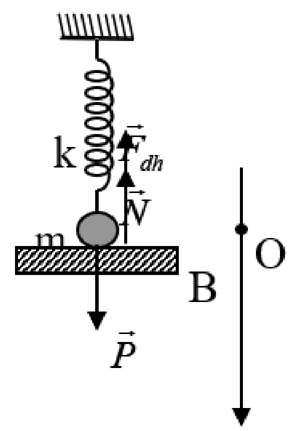
Vậy $\vec{F}_E$ cùng phương, cùng chiều với $\vec{P}$ và điện trường $\vec{E}$ có chiều hướng xuống, cùng chiều với $\vec{P}$

$$\Rightarrow \frac{g_1}{g} = \frac{l'}{l} \Leftrightarrow 1 + \frac{qE}{mg} = \frac{1600}{1521}$$

$$\Rightarrow E = \frac{1600 - 1521}{1521} \times \frac{mg}{q} = \frac{79}{1521} \times \frac{2.10^{-3} \times 9,8}{0,5.10^{-8}} \approx 2,04.10^5 V/m$$

**Bài 29.**

a. Tìm thời gian




• Khi vật ở VTCB lò xo giãn: $\Delta l = \frac{mg}{k} = 0,1$ m

Tần số của dao động: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10$ rad/s

• Vật m: $\vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_{dh} = m\vec{a}$.

Chiếu lên Ox: mg - N - k$\Delta l$ = ma

Khi vật rời giá thì N = 0, gia tốc của vật a = 2 m/s$^2$

• Suy ra:

$$\Delta l = \frac{m(g - a)}{k} = \frac{at^2}{2}$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{2m(g - a)}{ka}} = 0,283 \text{ s}$$

b. Viết phương trình

• Quãng đường vật đi được cho đến khi rời giá là $S = \frac{at^2}{2} = 0,08$ m

Tọa độ ban đầu của vật là: $x_0$ = 0,08 - 0,1 = - 0,02 m = -2 cm

Vận tốc của vật khi rời giá là: $v_0$ = at = $40\sqrt{2}$ cm/s

• Biên độ của dao động: $A=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}}$ = 6 cm

Tại t = 0 thì 6cos$\varphi$ = -2 và v > 0 suy ra $\varphi$ = -1,91 rad

0,5

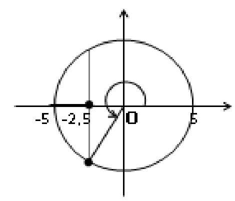
Phương trình dao động: x = 6cos(10t - 1,91) cm

**Bài 30.**

1a Phương trình dao động của vật có dạng: $x = A\cos(\omega t+\varphi)$

- Tần số góc: $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{25}{0,625}}=2\pi(rad/s)$

- Tại thời điểm t = 0: $\begin{cases} x_0 = A\cos\varphi = 5 \\ v_0 = -\omega A\sin\varphi = 0 \end{cases} \Rightarrow A = 5cm; \varphi = 0$




Phương trình dao động là: $x = 5\cos 2\pi t (cm)$.

1b. Từ mối quan hệ giữa dao động điều hòa và chuyển động tròn đều ta xác định được thời gian kể từ lúc vật bắt đầu chuyển động đến lúc vật qua vị trí

x = -2,5cm là:

$$\alpha=\frac{4\pi}{3}=\omega t \quad \Rightarrow \quad t=\frac{2}{3}(s)$$

- Tốc độ trung bình: tđtb $=\frac{S}{t}=\frac{12,5}{2/3}=18,75(cm/s)$.

2.Tại vị trí cân bằng độ giãn của dây là $\Delta l=\frac{mg}{k}=0,25m=25cm.$ Vì vậy vật chỉ dao động điều hòa khi A < 25cm.

- Nếu tại VTCB truyền vận tốc v = 2m/s thì biên độ có thể đạt là $A=\frac{v_{max}}{\omega}=31,8cm$, nên khi đi lên qua vị trí 25cm thì dây bị chùng do vậy vật không dao động điều hòa

- Áp dụng định luật BTNL, chọn gốc thế năng hấp dẫn tại VTCB thì :

Tại VTCB: $W_1=\frac{kx_0^2}{2}+\frac{mv_0^2}{2}$ Tại vị trí cao nhất: $W_2 = mgh_{max}$…

$W_1 = W_2$ => $h_{max}$ = 32,5cm.

**Bài 31. a.Phương trình dao động của con lắc đơn theo li độ dài là:**

s = S0cos(ωt + φ).

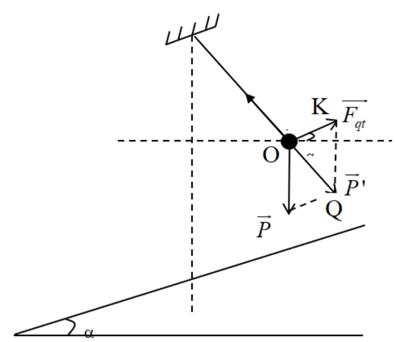
$\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$ = π (rad/s).

$S_0 = \sqrt{s^2 + \left(\dfrac{v}{\omega}\right)^2}$ = 2$\sqrt{5}$ (cm/s) ⇒ α0 = 0,02$\sqrt{5}$ (rad)

Lúc t = 0 thì $\begin{cases} s = S_0\cos\varphi = 0 \\ v > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\varphi = 0 \\ \sin\varphi < 0 \end{cases} \Rightarrow \varphi = -\dfrac{\pi}{2}$ rad

⇒ s = 2$\sqrt{5}$cos(πt - π/2) (cm).

b.Ta có $\overrightarrow{P'} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{F_{qt}}$




Xét ΔOKQ với OK = $\dfrac{KQ}{2}$, góc(OKQ) = $60^0$

⇒ ΔOKQ vuông tại O.

⇒ P’ = OQ = Psin($60^0$) ⇒ g’ = 5$\sqrt{3}$(m/$s^2$).

(Có thể áp dụng định lí hàm số cosin để tính P’)

Vậy, chu kì dao động của con lắc là: $T' = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g'}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{1}{5\sqrt{3}}} \approx 2,135(s)$

**Bài 32.**

**1.1a.**Xác định chu kì dao động và tốc độ cực đại

+ Chu kì dao động: $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}} = \dfrac{2\pi}{5} = 1,257(s)$

+ Biên độ dao động của quả cầu: $s_0 = \alpha_0.l = 6cm$

+ Tốc độ cực đại của quả cầu: $v_{max} = \omega s_0 = 5.6 = 30cm/s$.

**1.1b.**Xác định sức căng dây treo tại VTCB

+ Lúc đi qua VTCB quả cầu có tốc độ: $v_{max} = 30cm/s$

+ Gia tốc hướng tâm của quả cầu: $a_n = \frac{v_{max}^2}{l} = \frac{0,3^2}{0,4} = 0,225m/s^2$

+ Theo định luật II Niu Tơn, khi vật đi qua VTB: $\tau - mg = ma_n \Rightarrow \tau = mg + ma_n = 0,6.(10 + 0,225) = 6,135(N)$

1.1c.Tốc độ trung bình của vật sau n chu kì

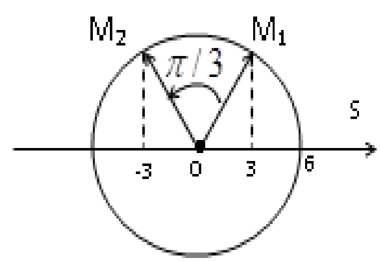
+ Sau n chu kì quãng đường của vật đi được là: $S = n.4s_0$

+ Tốc độ trung bình của vật sau n chu kì là: $\bar{V} = \frac{S}{nT} = \frac{n.4s_0}{n.T} = \frac{4.6}{1,2566} = 19,1(cm/s)$

**1.1d**Quãng đường cực đại

+ Phân tích $\Delta t = \frac{2T}{3} = \frac{T}{2} + \frac{T}{6}$

+ Quãng đường cực đại $S_{max} = 2s_0 + S_{1max}$




Trong thời gian T/6 vật đi được $S_{1max}$ ứng với tốc độ trung bình lớn nhất khi vật chuyển động lân cận VTCB. Sử dụng véc tơ quay ta tính được góc quay $M_1OM_2 = \frac{2\pi}{T}.\frac{T}{6} = \frac{\pi}{3}$ suy ra

$S_{1max}$= A $\rightarrow S_{max} = 3s_0 = 3.6 = 18cm$

+ Ở cuối thời điểm đạt quãng đường cực đại nói trên thì vật có li độ dài s=-3cm ,

vận tốc của vật có độ lớn là:

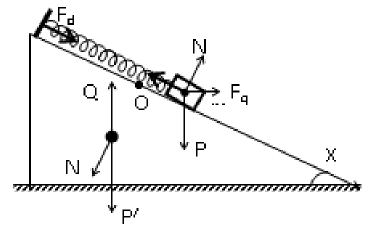
$$|v| = \omega\sqrt{A^2 - x^2} = 6.\sqrt{6^2 - (-3)^2} = 18\sqrt{3}(cm/s)$$

1.2.Tính chu kì dao động của vật so với nêm

+ Trong hệ quy chiếu gắn với nêm:

- Tại VTCB của m trên nêm (khi m cân bằng trên nêm thì nêm cũng cân bằng trên bàn): lò xo giãn một đoạn: $\Delta l_0 = \dfrac{mg\sin\alpha}{K}$ (1)

- Chọn trục Ox gắn với nêm và trùng mặt nêm hướng xuống, O là VTCB của m trên nêm.




- Tại vị trí vật có li độ x: theo định luật II Niutơn:

$mg\sin\alpha - K(\Delta l_0 + x) + ma.\cos\alpha = mx^{//}$ (2)

với a là gia tốc của nêm so với sàn.

+ Trong hqc gắn với bàn, với nêm ta có:

$(mg\cos\alpha\text{-ma.}\sin\alpha)\sin\alpha\text{-K}(x+\Delta l_0)\cos\alpha=\text{Ma}$ ..

thay (1) vào biểu thức vừa tìm ta được:

$a = \dfrac{-Kx.\cos\alpha}{M + m\sin^2\alpha}$ (3)

+ Thay (3) vào (2) cho ta: $-Kx - m\dfrac{K.x.\cos^2\alpha}{M + m.\sin^2\alpha} = mx^{//} \Rightarrow x^{//} + \dfrac{K.(M+m)}{m(M+m.\sin^2\alpha)}.x = 0$

chứng tỏ m dao động điều hoà so với nêm với chu kì: $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m(M+m.\sin^2\alpha)}{K.(M+m)}}$

**Bài 33**. Va chạm tuyệt đối đàn hồi $mv_0 = mv + MV$ (1)

Đinh luật bảo toàn năng lượng $\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2$ (2)

Từ (1), (2) suy ra: $V = \dfrac{2m}{m+M}v_0$

Chu kì: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{M}{k}} = \dfrac{2\pi}{5}(s)$

Định luật bảo toàn cơ năng $\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}M\dfrac{2m}{m+M}v_0$

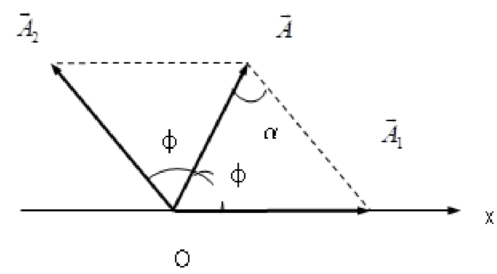
$$A = \frac{2m}{m+M} v_0 \sqrt{\frac{M}{k}} = 4(cm)$$

**Bài 34. Xác định $A_{1(max)}$, $\varphi_2$ và $\varphi$**

- Từ giãn đồ véc-tơ ta có :

$$\frac{A_1}{\sin\alpha} = \frac{A}{\sin(\pi - \varphi_2)}$$

$$\Rightarrow A_1 = A.\frac{\sin\alpha}{\sin(\pi - \varphi_2)}$$




- Do: A và $\sin(\pi - \varphi_2)$ không đổi

nên để $A_{1(max)}$ khi sinα = 1 $\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$.

- Lúc đó ta có: $A_{1\max} = \sqrt{A_2^2 + A^2} = 5(cm)$

- Vậy: $\sin(\pi - \varphi_2) = \frac{A}{A_{1\max}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \pi - \varphi_2 = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \varphi_2 = \frac{5\pi}{6}$

- Pha ban đầu của dao động tổng hợp: $\varphi = \varphi_2 - \alpha = \pi/3$

**2) Bài toán con lắc lò xo.**

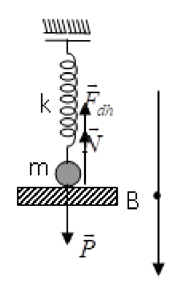
**a) Tìm thời gian từ lúc chuyển động đến lúc vật rời giá B.**

- Phương trình động lực học của vật m: $\vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_{dh} = m\vec{a}$.

- Chiếu lên Ox: mg - N - k$\Delta l$ = ma $\Rightarrow$ N = m(g – a) - k$\Delta l$

- Khi vật rời giá thì N = 0

$$\Rightarrow \Delta l = \frac{m(g-a)}{k} = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2m(g-a)}{ka}} = \sqrt{0{,}08}(s)$$




**b) Viết phương trình dao động.**

- Phương trình dao động: $x = A\cos(\varpi t + \varphi)$

- Tần số góc: $\varpi = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10(rad/s)$

- Khi vật m ở VTCB: $\vec{P}+\vec{F}_{dh0}=\vec{0}\Rightarrow mg-k\Delta l_0=0\Rightarrow \Delta l_0=\dfrac{mg}{k}=0{,}1m=10cm$.

- Quãng đường vật đi được cho đến khi rời giá B là: $S=\dfrac{at^2}{2}=0{,}08\text{ m}$ = 8cm.

- Ly độ của vật m khi rời giá B là: x = 8 - 10 = -2 cm.

- Vận tốc của vật khi rời giá B là: v = at = $40\sqrt{2}$ cm/s.

- Biên độ dao động của vật m: $A=\sqrt{x^2+\dfrac{v^2}{\varpi^2}}=6cm$.

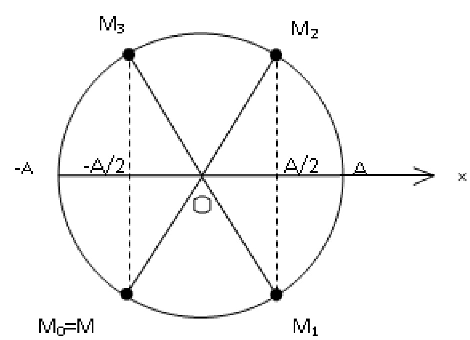
- Khi t = 0 $\Rightarrow\begin{cases}x_0=\Delta l-\Delta l_0=7-10=-3cm\\ v_0>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cos\varphi=-1/2\\ \sin\varphi<0\end{cases}\Rightarrow\varphi=-\dfrac{2\pi}{3}$.

- Phương trình dao động: $x=6\cos(10t-\dfrac{2\pi}{3})\ \ (cm)$.

**c) Thời điểm vật qua vị trí có $W_đ=3W_t$ lần 2013 :**

- Khi $W_đ=3W_t\Rightarrow W=4W_t$
$\Rightarrow x=\pm\dfrac{A}{2}=\pm3(cm)$

- Khi t = 0 $\Rightarrow\begin{cases}x_0=-3cm\\ v_0>0\end{cases}$




$\Rightarrow$Ứng với điểm $M_0$ trên vòng tròn.

- Khi vật qua vị trí có $W_đ=3W_t$ lần đầu tiên ứng với điểm $M_1$ trên vòng tròn.

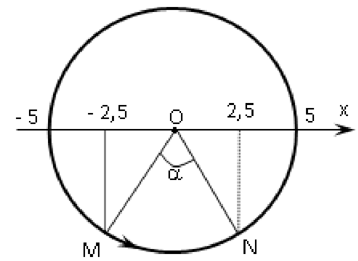
- Góc quét ứng với thời điểm vật qua vị trí có $W_đ=3W_t$ lần thứ 2013 là:

$\Delta\varphi=|\varphi|-\alpha+n2\pi$

- Với $\cos\alpha=\dfrac{|x|}{A}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\alpha=\dfrac{\pi}{3}$; $n=\dfrac{2013-1}{4}=503$

- Vậy: $\Delta\varphi=\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\pi}{3}+503.2\pi=\dfrac{3019\pi}{3}\Rightarrow t=\dfrac{\Delta\varphi}{\varpi}=\dfrac{3019\pi}{30}(s)$

**Bài 35.a.** Tần số góc $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{50}{0,5}} = 10rad/s$



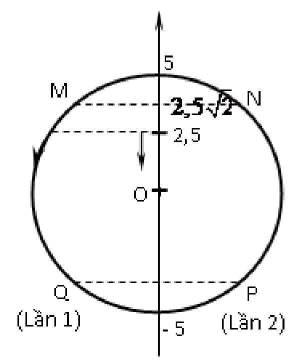

Tại t = 0, ta có: $\begin{cases} x = A\cos\varphi = 2,5 \\ v = -A\omega\sin\varphi = -25\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\varphi = \frac{2,5}{A} \\ \sin\varphi = \frac{25\sqrt{3}}{10A} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi = \frac{\pi}{3} \\ A = 5cm \end{cases}$

→ Phương trình dao động $x = 5\cos(10t + \frac{\pi}{3})$ (cm)

b. Khoảng thời gian ngắn nhất vật đi từ vị trí có li độ $x_1$ = -2,5cm đến vị trí có li độ $x_2$ = 2,5cm

$$\Delta t = \frac{\alpha}{\omega} = \frac{\pi}{3.10} = \frac{\pi}{30}s \approx 0,1s$$

c. Quãng đường vật đi từ vị trí ban đầu tới vị trí có động năng bằng thế năng lần thứ 2




$$\frac{W_d}{W_t} = \frac{A^2 - x^2}{x^2} = 1 \Leftrightarrow x = \pm\frac{A}{\sqrt{2}} = \pm 2,5\sqrt{2}cm$$

$$\Rightarrow s = 7,5 + 5 - 2,5\sqrt{2} = 12,5 - 2,5\sqrt{2} \approx 8,96cm$$

**Bài 36. a.Viết phương trình dao động .**

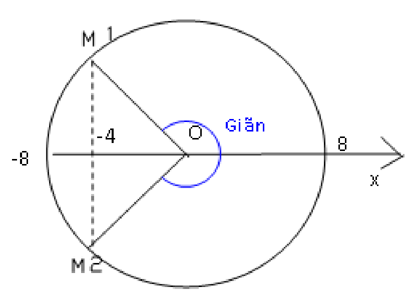
+ phương trình dao động: $x = A\cos(\omega t + \varphi)$

+ Trong đó: $\varpi = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{25}{0,1}} = 5\pi \ (rad/s)$

+ Biên độ dao động: A = 8 (cm).

+ Khi t = 0 $\Rightarrow x = A \Rightarrow \cos\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0 \ (rad)$

+ Phương trình dao động là: $x = 8\cos(5\pi t) \ (cm)$




**b.Tính động năng, thế năng và cơ năng khi x = 4 (cm)**

+ Cơ năng: $W = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}.25.0,08^2 = 0,08 \ (J)$

+ Thế năng: $W = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}.25.0,04^2 = 0,02 \quad (J)$

+ Động năng: $W_đ = W - W_t = 0,08 - 0,02 = 0,06 \quad (J)$.

**c.Xác định thời gian lò xo bị giãn trong một chu kỳ dao động.**

+ Độ giãn của lò xo khi vật nhỏ cân bằng : $\Delta l = \frac{mg}{k} = \frac{0,1.10}{25} = 0,04(m) = 4(cm)$

+ Thời gian lò xo bị giãn là khi vật dao động từ vị trí có li độ $x = -\Delta l = -4(cm)$ đến vị trí biên phía dưới rồi quay trở lại vị trí có li đô $x = -\Delta l = -4(cm)$.

+ Góc quét tương ứng với lò xo bị giãn là : $\Delta\varphi = 2\pi - 2\theta$

+ Với $\cos\theta = \frac{|x|}{A} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$

+ Vậy : $\Delta\varphi = 2\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

$\Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta\varphi}{\varpi} = \frac{4\pi}{3.5\pi} = \frac{4}{15} \quad (s)$

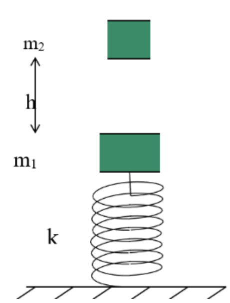
**Bài 37.** a. Vận tốc của $m_2$ ngay trước va chạm : $v = \sqrt{2gl} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866(m/s)$

* Xét hệ hai vật $m_1$ và $m_2$ ngay trước và sau va chạm, theo định luật bảo toàn động lượng ta có :

$m_2v = (m_1 + m_2).v_0 \Rightarrow v_0 = \frac{m_2.v}{m_1 + m_2} = \frac{\sqrt{3}}{5}(m/s) \approx 20\sqrt{3}(cm/s)$

Vì va chạm mềm nên ngay sau va chạm cả hai vật chuyển động cùng vận tốc là:
$v_0 = 20\sqrt{3}(cm/s)$

b. Chọn trục toạ độ Ox có gốc O trùng vời VTCB của hai vật, chiều dương thẳng đứng hướng lên trên.




Chọn gốc thời gian là lúc hai vật bắt đầu dao động.

* Độ biến dạng của lò xo khi vật $m_1$ cân bằng là :

$\Delta l_1 = \frac{m_1 g}{k} = 1,5(cm)$

* Độ biến dạng của lò xo khi hai vật cân bằng là : $\Delta l_2 = \frac{(m_1 + m_2)g}{k} = 2,5(cm)$

* Tần số góc : $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m_1 + m_2}} = 20(rad/s)$

* lúc t = 0 ta có : $\begin{cases} x = A\sin\varphi = 1(cm) \\ v = A\omega c\cos\varphi = -20\sqrt{3}(cm/s) \end{cases}$

$\Rightarrow tg\varphi = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ vì $\sin\varphi > 0$ và $\cos\varphi < 0 \Rightarrow \varphi = \dfrac{5\pi}{6}(rad)$

Biên độ dao động là : $A = \dfrac{1}{\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)} = 2(cm)$

* Vậy phương trình dao động là : $x = 2\sin\left(20t + \dfrac{5\pi}{6}\right)(cm)$

**Bài 38.** 1. Chứng minh vật dao động điều hòa

* Viết phương trình dao động của vật:

Tại VTCB: $\Delta l = 4$(cm) Tần số góc: $\omega = 5\pi$ (rad/s). Tại thời điểm t = 0 ta có:

$\begin{cases} x = A\cos\varphi = -2(cm) \\ v = -A\omega\sin\varphi = 10\pi\sqrt{3}(cm/s) \end{cases}$

Vì $\sin\varphi < 0; \cos\varphi < 0; \tan\varphi = \sqrt{3} \Rightarrow \varphi = -\dfrac{2\pi}{3}$ (rad) Biên độ dao động : A = 4 (cm)

Vậy phương trình dao động của vật là: $x = 4\cos\left(5\pi t - \dfrac{2\pi}{3}\right)$(cm)

2. Khi vật qua vị trí mà lò xo bị giãn 6cm lần thứ hai thì vật có li độ x = 2cm và chuyển động theo chiều âm của trục tọa độ.

Ta có: $\begin{cases} \cos\left(5\pi t - \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \\ \sin\left(5\pi t - \frac{2\pi}{3}\right) > 0 \end{cases}$ Giải hệ phương trình (lấy giá trị nhỏ nhất) được kết quả: $t = 0,2$(s)

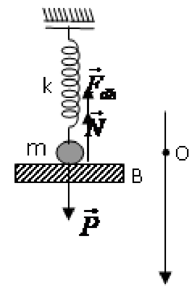
* Xác định hướng và độ lớn của lực tác dụng lên điểm treo tại thời điểm đó:

- Hướng: Phương thẳng đứng, chiều từ trên xuống dưới.

- Độ lớn: $F = k\Delta l_1 = 25.6.10^{-2} = 1,5$(N)

**Bài 39.** a. Tìm thời gian

• Khi vật ở VTCB lò xo giãn: $\Delta l = \dfrac{mg}{k} = 0,1$ m




Tần số của dao động: $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = 10$ rad/s

• Vật m: $\vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_{dh} = m\vec{a}$ .

Chiếu lên Ox: mg - N - k$\Delta l$ = ma

Khi vật rời giá thì N = 0, gia tốc của vật a = 2 m/s$^2$

• Suy ra:

$$\Delta l = \frac{m(g - a)}{k} = \frac{at^2}{2}$$
$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{2m(g - a)}{ka}} = 0,283 \text{ s}$$

b. Viết phương trình

• Quãng đường vật đi được cho đến khi rời giá là $S = \dfrac{at^2}{2} = 0,08$ m

Tọa độ ban đầu của vật là: $x_0$ = 0,08 - 0,1 = - 0,02 m = -2 cm

Vận tốc của vật khi rời giá là: $v_0 = at = 40\sqrt{2}$ cm/s

• Biên độ của dao động: $A = \sqrt{x_0^2 + \dfrac{v_0^2}{\omega^2}} = 6$ cm

Tại t = 0 thì 6cos$\varphi$ = -2 và v > 0 suy ra $\varphi$ = -1,91 rad

Phương trình dao động: x = 6cos(10t - 1,91) (cm)

**Bài 40. a.** Viết phương trình dao động:

- Gọi v là vận tốc của hệ vật sau va chạm, sử dụng định luật bảo toàn động lượng ta có:

$$mv_0 = (M + m)v \Rightarrow v = 0,4 \text{ m/s} = 40 \text{ cm/s}$$

- Phương trình dao động của hệ hai vật:

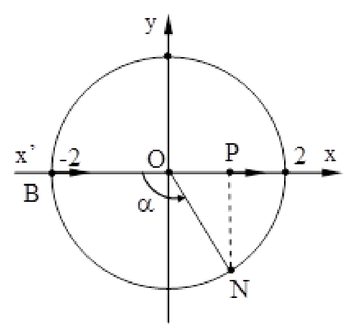
$$\begin{cases} x = A\cos(\omega t + \varphi) \\ v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

Chọn gốc thời gian, trục tọa độ như giả thiết, tại t = 0 ta có:

$$\begin{cases} x = A\cos\varphi = 0(cm) \\ v = -A\omega\sin\varphi = -40(cm/s) \end{cases} \quad (1)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M+m}} = \sqrt{\frac{100}{0,25}} = 20 \text{ rad/s} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta tìm được A = 2 cm, φ = π/2.




- Phương trình dao động: x = 2cos(20t + π/2)(cm)

**b.** Xác định thời gian ngắn nhất:

- Lực tác dụng vào mối hàn là lực kéo khi hệ vật (M + m) dao động với x > 0

- Lực tác dụng vào mối hàn chính là lực đàn hồi của lò xo

$F_đ = k|x| = kx$

- Mối hàn sẽ bật ra khi $F_đ \geq 1N \Rightarrow kx \geq 1N$

$\Leftrightarrow x \geq 0,01m = 1$ cm

- Thời gian ngắn nhất từ khi lò xo bị nén cực đại cho tới khi mối hàn bị bật ra là thời gian vật chuyển động từ B đến P ( $x_P = 1$ cm). Sử dụng hình chiếu chuyển động tròn đều ta xác định được: $t_{min} = T/3 = \pi/30$ (s)

**Bài 41.**a) Tính được : ω = 10rad/s .

- Tính được : A = 4cm.

- Phương trình li độ là : $x = 4\cos\left(10t - \frac{\pi}{2}\right)$cm

b) Tại VTCB lò xo dãn:

$\Delta\ell_0 = \dfrac{mg}{k} = 0{,}1m = 10cm.$

- Chiều dài lò xo khi cân bằng:

$\ell = \ell_0 + \Delta\ell_0 = 40cm.$

- Chiều dài cực đại:

$\ell_{max} = \ell + A = 44cm.$

- Chiều dài cực tiểu: )

$\ell_{min} = \ell - A = 36cm.$

- Khi thang máy chuyển động với gia tốc a lò xo dãn thêm:

$\Delta\ell = \dfrac{ma}{k} = 0{,}02m = 2cm.$

- Độ biến dạng cực đại là:

$\Delta\ell_{max} = \Delta\ell_0 + \Delta\ell + A = 16$ cm.

Lực đàn hồi cực đại là:

$F_{max} = k.\ \Delta\ell_{max} = 8N.$

- Độ biến dạng cực tiểu là:

$\Delta\ell_{min} = \Delta\ell_0 + \Delta\ell - A = 8$ cm.

Lực đàn hồi cực tiểu là:

$F_{min} = k.\ \Delta\ell_{min} = 4N.$

c)

- Khi rời khỏi lò xo, vật A có vận tốc hướng lên, độ lớn 0,4m/s.

- Gia tốc hướng xuống độ lớn gia tốc là:

$a' = g + a = 12m/s^2$ (a là gia tốc quán tính).

- Chọn chiều dương hướng xuống.

Điểm O cách sàn khoảng:

$h = \frac{at^2}{2} + vt = 6t^2 – 0,4t = 6x0,64 – 0,4x0,8 = 3,52m.$

**Bài 42.**

1. $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0,25}{12}} = 0,906 \approx 0,91$ s

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow l = \frac{gT^2}{4\pi^2} = \frac{9,8(0,906)^2}{4.9,86} = 0,2095 \approx 0,21 \text{ m}$$

2. Trong HQC gắn với thang máy, vật m chịu thêm lực quán tính $\vec{F}_{qt} = -m\vec{a}$. Do gia tốc $\vec{a}$ của thang máy hướng lên, nên lực quán tính cùng hướng với trọng lực. Hợp lực của trọng lực và lực quán tính gọi là trọng lực hiệu dụng của vật:

$$\vec{P}_{hd} = \vec{P} + \vec{F}_{qt}$$

Nói cách khác, các vật ở trong trọng trường hiệu dụng của thang máy, có gia tốc trọng trường hiệu dụng là: $\vec{g}_{hd} = \vec{g} - \vec{a}$

Trong trường hợp này $g_{hd}$ có độ lớn bằng: $g_{hd} = g + a = \frac{11}{10}g$

a) Xét con lắc đơn: $\frac{T_1}{T} = \sqrt{\frac{g}{g_{hd}}} = \sqrt{\frac{10}{11}} = 0,953.$

– Chu kì của con lắc đơn giảm đi, chỉ còn bằng $0,953T \approx 0,85$ s.

– VTCB của con lắc đơn không thay đổi.

– Biên độ dao động. Xét hai trường hợp:

+ Khi con lắc ở vị trí biên (v = 0) thì thang máy bắt đầu đi lên. Con lắc coi như được thả từ biên độ góc $\alpha = 8^o$ và dao động trong trọng trường hiệu dụng của thang máy. Thế năng cực đại tăng lên, động năng cực đại tăng lên. Nhưng biên độ góc thì không đổi: $W_t = mg_{hd}l\ (1 - \cos\alpha) = \frac{1}{2}mv_m^2$.

+ Khi con lắc qua VTCB thì thang máy bắt đầu đi lên. Theo định luật BTCN ta viết: W = mgl (1 - cosα) = $\frac{1}{2}mv_m^2 = mg_{hd}l(1-\cos\alpha_1)$.

$$g(l-\cos\alpha) = \frac{11}{10}g(1-\cos\alpha_1)$$

$$\frac{1}{2}\alpha^2 = \frac{11}{10}.\frac{1}{2}\alpha_1^2 \Rightarrow \frac{\alpha_1}{\alpha} = \sqrt{\frac{10}{11}} = 0,953$$

Biên độ góc giảm chỉ còn bằng 0,953α ≈ 7°40'

b) Xét con lắc lò xo

– Chu kì $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, không phụ thuộc g, nên không đổi.

– Ở VTCB, độ dãn của lò xo tăng lên:

$$\Delta l_1 = \frac{mg_{hd}}{k} = \frac{11}{10}\frac{mg}{k} = \frac{11}{10}\Delta l = 0,224\ \text{m}$$

Như vậy, VTCB của con lắc thay đổi, ở thấp hơn so với trước một đoạn bằng:

$$\Delta l_1 - \Delta l = \frac{1}{10}\Delta l \approx 2\ \text{cm}$$

- Biên độ dao động. Xét ba trường hợp:

+ Khi con lắc ở vị trí biên trên thì thang máy đi lên: Vị trí này cách VTCB mới một đoạn lớn hơn trước 2 cm. Biên độ dao động thăng thêm 2 cm: $A_1 = A + 2$ cm.

+ Khi con lắc ở vị trí biên dưới thì thang máy đi lên. Biên độ dao động giảm đi 2 cm: $A_1 = A - 2$ cm.

+ Khi con lắc qua VTCB thì thang máy đi lên. Theo định luật bảo toàn cơ năng, ta có: $\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv_m^2$ (gốc toạ độ tại VTCB cũ).

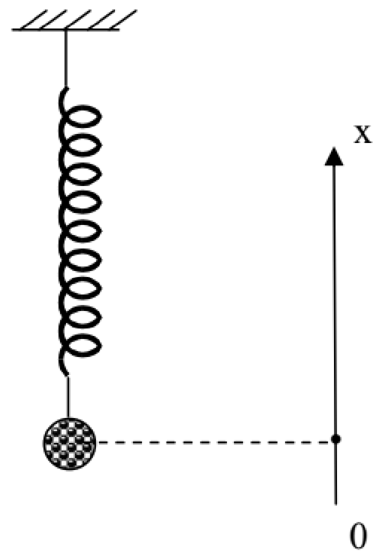
$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv_m^2 = \frac{1}{2}kA_1^2$ (gốc toạ độ tại VTCB mới) với $|x| = 2$ cm = 0,02 m.

Suy ra biên độ dao động mới lớn hơn: $A_1 > A$.

**Bài 43.** a. Vật chịu tác dụng của 2 lực: trọng lực và lực đàn hồi của lò xo:

- Tại VTCB có: $mg = k\Delta l_0 \Rightarrow \Delta l_0 = \frac{mg}{k} = 0,025m = 2,5cm$

- Phương trình dao động của vật có dạng: $x = A\cos(\omega t + \phi)$




Với $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{100}{0,25}} = 20(rad/s)$

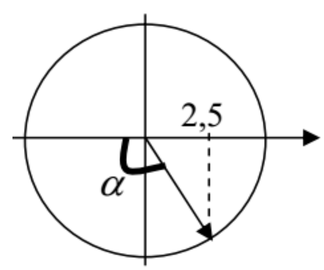
-Tại lúc t = 0 $\begin{cases} x = -(7,5-2,5) = -5cm \\ v = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 5(cm) \\ \phi = \pi(rad) \end{cases}$

Vậy pt: $x = 5\cos(20t + \pi)(cm)$

b) Vật bắt đầu chuyển động đến lúc x = 2,5 cm thì lò xo ko giãn lần thứ nhất.

khi đó ta có bán kính véc tơ của chuyển động tròn đều quét được một góc

$\alpha = \frac{2\pi}{3} = \omega.t \Rightarrow t = \frac{\alpha}{\omega} = \frac{\pi}{30}(s)$




c) Gọi $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là biên độ dao động của vật trong những lần kế tiếp. Mỗi lần vật đi qua vị trí cân bằng năng lượng giảm:

$\Delta w = \frac{1}{2}k(A_1^2 - A_2^2) = A_{Fc} = \frac{1}{50}mg(A_1 + A_2) \Rightarrow A_1 - A_2 = 10^{-3}m = 0,1cm$

Vậy số lần vật đi qua vị trí cân bằng là: $N = \frac{A}{A_1 - A_2} = 50$ lần

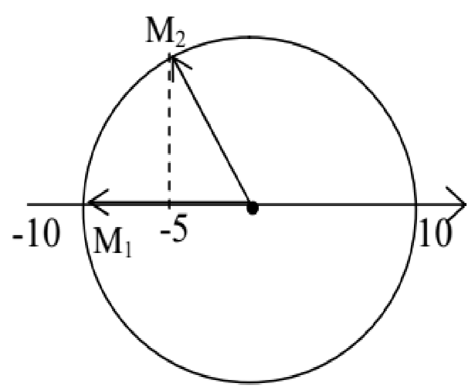
**Bài 44.** Phương trình dao động : $x = A.\cos(\omega t + \varphi)$

trong đó : $\omega = \sqrt{\dfrac{K}{m}} = 20(rad/s)$

$$t=0:\begin{cases} x=-10(cm) \\ v=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A\cos\varphi=-10(cm) \\ \sin\varphi=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \varphi=\pi \\ A=10(cm) \end{cases}$$

Vậy : $x = 10.\cos(20t+\pi)(cm)$

+ Ta thấy lò xo nén 5*cm* các lần chẵn liên tiếp cách nhau một chu kì, do đó lò xo nén lần thứ 2010 tại thời điểm : $t_{2010} = t_2 + \dfrac{2010-2}{2}.T$ với $t_2$ là thời điểm lò xo nén 5*cm* lần thứ 2.



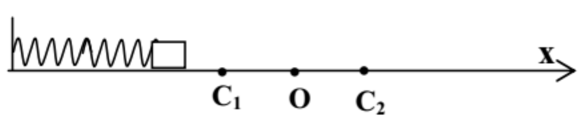

+ Ta xác định thời điểm lò xo nén 5*cm* lần thứ hai, sử dụng pp vec tơ quay ta có : kể từ thời điểm ban đầu đến lúc lò xo nén 5*cm* lần thứ 2 thì vectơ quay một góc :

$$M_1\hat{O}M_2 = \omega.t_2 = 2\pi - \pi/3 = 5\pi/3 \rightarrow t_2 = \frac{5\pi}{60}(s)$$

+ Do đó thời điểm lò xo nén 5*cm* lần thứ 2010 là : $t_{2010} = \dfrac{5\pi}{60} + 1004.\dfrac{2\pi}{20} = \dfrac{6029\pi}{60}(s)$

+ Lúc có ma sát, tại VTCB của vật lò xo biến dạng một đoạn :

$$\Delta l = \frac{\mu mg}{K} = 0{,}0025(m)$$




+ Ta thấy có hai VTCB của vật phụ thuộc vào chiều chuyển động của vật, nếu vật đi sang phải lúc lò xo nén 2,5mm thì VTCB là bên trái O(vị trí $C_1$), lúc vật đi sang trái mà lò xo giãn 2,5mm thì VTCB là bên phải O( vị trí $C_2$)

+ Áp dụng đinh luật bảo toàn năng lượng, ta tính được độ giảm toạ độ cực đại sau mỗi lần qua O là hằng số và bằng : $\Delta x_{max} = \dfrac{2\mu mg}{K} = 0,005(m)$

+ Gia tốc của vật đổi chiều lần thứ 4 ứng với vật đi qua VTCB $C_2$ theo chiều sang trái lần thứ 2, áp dụng định luật bảo toàn năng lượng ta được :

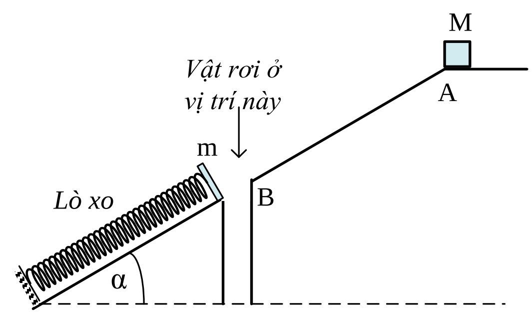
$$\frac{KA^2}{2} - \left(\frac{K(\Delta l)^2}{2} + \frac{mv_4^2}{2}\right) =$$
$$= \mu mg\left[A + 2(A - \Delta x_{max}) + 2(A - 2\Delta x_{max}) + (A - 3\Delta x_{max}) + (A - 3\Delta x_{max} - \Delta l)\right]$$

$\rightarrow v_4 = 1,65(m/s)$

**Bài 45.**

a) Để không bị trượt , từ sơ đồ, ta có: μmg cos α ≥ mg sin α

Như vậy: μ ≥ tan α ; Vì vậy $\mu_0$ = tan α và do đó $\mu = \dfrac{\tan\alpha}{2}$




b) Trong một chu kỳ, năng lượng đầu vào của hệ thống là: *MgLsin α*

Sự mất mát năng lượng trên đường lên là: *Lμmg cos α*

và sự mất mát năng lượng trên đường xuống là: *Lμ(m + M)g cos α*

Vậy *MgLsin α = Lμmg cos α + Lμ(m + M)gcos α*

và vì 2μ cos α = sin α , nên

$$M = \frac{m}{2} + \frac{m+M}{2} = 2m; R = \frac{M}{m} = 2$$

c) Thời gian chuyển động của tấm từ B về A $T' = \pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

Thời gian chuyển động của vật từ A về B: $T_0 = \pi\sqrt{\dfrac{m+M}{k}} = \pi\sqrt{\dfrac{3m}{k}}$

$$\frac{T_0}{T'} = \sqrt{3}$$

d) Như đã đề cập ở phần (c), chuyển động lên và xuống đều là chuyển động điều hòa, . Các vị trí cân bằng cho hai chiều là khác nhau. Trong chiều lên, vị trí cân bằng rõ ràng là ở một khoảng cách L / 2 từ B, vì A, B là hai biên của dao động. Đối với chiều đi xuống, vị trí cân bằng sẽ dịch một khoảng *y* sao cho

$$ky = 2\mu mg\cos\alpha = mg\sin\alpha$$

Do đó, các điểm dừng (vị trí biên) nằm ở cách B

n(2mg sin α)/k và L - n (2mg sin α)/k

cho số nguyên n . Các tấm sẽ ngừng vĩnh viễn khi

n(2mg sin α)/k > L/2

hoặc: L - n(2mg sin α)/k < L/2 + (mg sin α)/k,

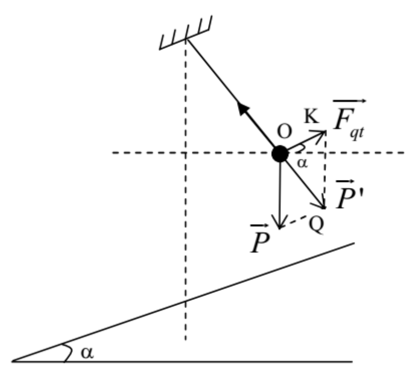
bất cứ điều kiện nào xảy ra đầu tiên (điều kiện đầu tiên tương ứng với đi xuống và dừng lại phía trên trung điểm, điều kiện thứ hai tương ứng với đi lên và dừng lại phía dưới điểm cân bằng trên. ) Điều kiện thứ hai có thể được viết lại như sau

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)(2mg\sin\alpha)/k > L/2$$

**Bài 46.** a) Phương trình dao động của con lắc đơn theo li độ dài là:

s = $S_0$cos(ωt + φ).

+) $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ = π (rad/s).




+) $S_0 = \sqrt{s^2 + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2}$ = $2\sqrt{5}$ (cm/s) ⇒ $\alpha_0 = 0{,}02\sqrt{5}$ (rad)

+) Lúc t = 0 thì $\begin{cases} s = S_0\cos\varphi = 0 \\ v > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\varphi = 0 \\ \sin\varphi < 0 \end{cases} \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2}$ rad

⇒ s = $2\sqrt{5}$ cos(πt - π/2) (cm).

Phương trình dao động theo li độ góc là: α = $0{,}02\sqrt{5}$ cos(πt - π/2) (rad).

b) Ta có $\overrightarrow{P'} = \vec{P} + \overrightarrow{F_{qt}}$

ét ΔOKQ với OK = $\dfrac{KQ}{2}$, góc(OKQ) = $60^0$

$\Rightarrow$ ΔOKQ vuông tại O.

$\Rightarrow$ P' = OQ = Psin($60^0$) $\Rightarrow$ g' = $5\sqrt{3}$ (m/s$^2$).

(Có thể áp dụng định lí hàm số cosin để tính P')

Vậy, chu kì dao động của con lắc là: $T' = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g'}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{1}{5\sqrt{3}}} \approx 2{,}135(s)$

**Bài 47.** *a) Xác định chu kì dao động và tốc độ cực đại*

+ Chu kì dao động: $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}} = \dfrac{2\pi}{5} = 1,257(s)$

+ Biên độ dao động của quả cầu: $s_0 = \alpha_0.l = 6cm$

+ Tốc độ cực đại của quả cầu: $v_{max} = \omega s_0 = 5.6 = 30cm/s$

b) *Xác định sức căng dây treo tại VTCB*

+ Lúc đi qua VTCB quả cầu có tốc độ: $v_{max} = 30cm/s$

+ Gia tốc hướng tâm của quả cầu: $a_n = \dfrac{v_{max}^2}{l} = \dfrac{0,3^2}{0,4} = 0,225m/s^2$

+ Theo định luật II Niu Tơn, khi vật đi qua VTB:

$\tau - mg = ma_n \Rightarrow \tau = mg + ma_n = 0,6.(10+0,225) = 6,135(N)$

c) *Tốc độ trung bình của vật sau n chu kì*

+ Sau n chu kì quãng đường của vật đi được là: $S = n.4s_0$

+ Tốc độ trung bình của vật sau n chu kì là: $\bar{V} = \frac{S}{nT} = \frac{n.4s_0}{n.T} = \frac{4.6}{1,2566} = 19,1(cm/s)$

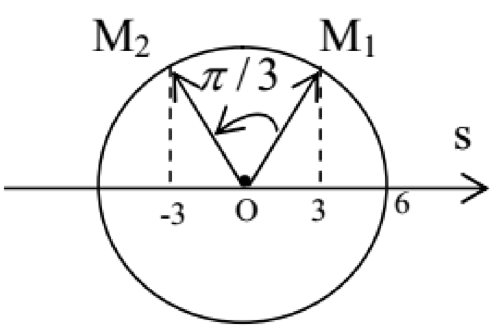
d) *Quãng đường cực đại* ***(1,5điểm)****:*

+ Phân tích $\Delta t = \frac{2T}{3} = \frac{T}{2} + \frac{T}{6}$

+ Quãng đường cực đại $S_{max} = 2s_0 + S_{1max}$

Trong thời gian T/6 vật đi được $S_{1max}$ ứng với tốc độ trung bình lớn nhất khi vật chuyển động lân cận VTCB. Sử dụng véc tơ quay ta tính được góc quay $M_1OM_2 = \frac{2\pi}{T}.\frac{T}{6} = \frac{\pi}{3}$

suy ra $S_{1max}$=A$\rightarrow S_{max} = 3s_0 = 3.6 = 18cm$




+ Ở cuối thời điểm đạt quãng đường cực đại nói trên thì vật có li độ dài s=-3cm ,

vận tốc của vật có độ lớn là:

$$|v| = \omega\sqrt{A^2 - x^2} = 6.\sqrt{6^2 - (-3)^2} = 18\sqrt{3}(cm/s)$$

**Bài 48.** a. Tính chiều dài và chu kì dao động của con lắc

Ta có: $T = \frac{\Delta_t}{n} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}; T' = \frac{\Delta_t}{n'} = 2\pi\sqrt{\frac{l'}{g}}$

$$\Rightarrow \frac{l'}{l} = \left(\frac{T'}{T}\right)^2 = \left(\frac{n}{n'}\right)^2 = \left(\frac{40}{39}\right)^2 = \frac{1600}{1521} \quad (1)$$

Theo giả thiết ta có: $l' = l + 7,9$ (2)

Từ (1) và (2): $\Rightarrow \dfrac{l+7,9}{l}=\dfrac{1600}{1521}\Rightarrow l=152,1cm$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}=2\pi\sqrt{\frac{1,521}{9,8}}\approx 2,475(s)$$

$$l'=l+7,9=152,1+7,9=160\,cm$$

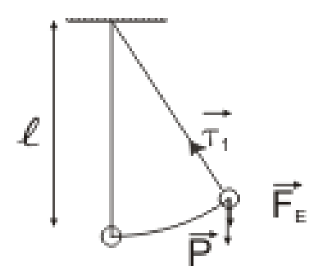
$$T'=2\pi\sqrt{\frac{l'}{g}}-\frac{40}{39}T=\frac{40\times 2,475}{39}\approx 2,538(s)$$

b. Xác định chiều và độ lớn vecto $\vec{E}$

Khi vật chưa tích điện và được kích thích cho dao động điều hòa dưới tác dụng của lực căng $\vec{\tau}$ và trọng lực $\vec{P}$ = m$\vec{g}$ thì chu kì của con lắc là: $T'=2\pi\sqrt{\dfrac{l'}{g}}$

Khi vật tích điện q và đặt trong điện trường đều $\vec{E}$ cùng phương với $\vec{P}$ và được kích thích cho dao động điều hòa dưới tác dụng lực căng $\vec{\tau}_1$ và hợp lực $\vec{P}$ = $\vec{P}$ + $\vec{F}_E$ = $m\left(\vec{g}+q\dfrac{\vec{E}}{m}\right)=m\overrightarrow{g_1}$ thì hợp lực $\vec{P}_1$ có vai trò như $\vec{P}$

Do đó chu kì của con lắc có biểu thức:




$T_1=2\pi\sqrt{\dfrac{l'}{g_1}}$ với $g_1=g\pm\dfrac{qE}{m}$ (3)

Ta có: $T_1=T\Rightarrow g_1>g$, do đó từ (3) ta có:

$g_1=g\pm\dfrac{qE}{m}$, trong đó điện tích q > 0

Vậy $\vec{F}_E$ cùng phương, cùng chiều với $\vec{P}$ và điện trường $\vec{E}$ có chiều hướng xuống, cùng chiều với $\vec{P}$

$$\Rightarrow \frac{g_1}{g} = \frac{l'}{l} \Leftrightarrow 1 + \frac{qE}{mg} = \frac{1600}{1521}$$

$$\Rightarrow E = \frac{1600 - 1521}{1521} \times \frac{mg}{q} = \frac{79}{1521} \times \frac{2.10^{-3} \times 9,8}{0,5.10^{-8}} \approx 2,04.10^5 V/m$$

**Bài 49. a)** Phương trình dao động của con lắc có dạng: s = $S_0\cos(\omega t + \varphi)$, hoặc $\alpha = \alpha_0 \cos(\omega t + \varphi)$

Trong đó $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} = \sqrt{2}$ rad/s

Khi t = 0 thì $\alpha = \alpha_0$ => $\cos\varphi = 1$ => $\varphi = 0$ => $\alpha = \frac{9\pi}{180}\cos(\sqrt{2}t)$ rad

=> $\alpha = \frac{\pi}{20}\cos(\sqrt{2}t)$ rad

Hoặc: $S_0$ = l.$\alpha_0$= $\frac{\pi}{4}$ m => s = $\frac{\pi}{4}\cos(\sqrt{2}t)$ m

b) Sau thời gian t = $\frac{\pi}{6\sqrt{2}}$ s thì $\alpha = \frac{\pi}{20}\cos(\sqrt{2}\frac{\pi}{6\sqrt{2}})$ = $\frac{\pi\sqrt{3}}{40}$ rad

Thế năng của vật lúc đó là: $w_t$ = $\frac{1}{2}mgl\alpha^2$ = 0,046875J

Cơ năng con lắc là: W = $\frac{1}{2}mgl\alpha_0^2$ = 0,0625J

Động năng của vật lúc đó: $w_d$ = W – $w_t$ = 0,015625J

c) Từ phương trình bảo toàn năng lượng ta có: $\frac{mv^2}{2} = mgl(1 - \cos\alpha_0)$

Mặt khác ta lại có: $\frac{mv^2}{l} = T - mg$

Suy ra: $T = mg(3 - 2\cos\alpha_0)$=5,123N

# IV.2. CON LẮC LÒ XO

**Bài 1.** Tại vị trí cân bằng của $m_1$ ta có $F_{hl} = -m_1 g + k\Delta\ell_0 = 0 \Rightarrow$

$$m_1 g = k\Delta\ell_0 \Rightarrow \Delta\ell_0 = \frac{m_1 g}{k} = \frac{0,4.10}{100} = 0,04\,(m) = 4\,(cm)$$

a) Biên độ dao động của $m_1$ là $A_1 = \frac{F}{k} = 0,03m = 3cm$

- Để $m_2$ luôn đứng yên thì $T_{AB} = F_{dh} - m_2 g \geq 0 \Rightarrow F_{dh} \geq m_2 g$ với mọi $x_1$

$$\Rightarrow F_{dh\min} \geq m_2 g \Leftrightarrow k(\Delta l - A) \geq m_2 g$$

$$\Rightarrow m_2 \leq \frac{k(\Delta l - A)}{g} = \frac{100(0,04 - 0,03)}{10} = 0,1kg$$ Vậy $m_{2\max} = 0,1kg$

**Bài 2.** 1. a. $\frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}mv_2'^2$ (1)

$$\boldsymbol{m_1\vec{v}_1} = \boldsymbol{m_1\vec{v}'_1} + \boldsymbol{m_2\vec{v}'_2}$$

Chiếu lên hướng $\vec{v}_1$: $m_1v_1 = m_1v_1' + m_2v_2'$ (2)

Thay số giải hệ (1) và (2) ta được $v_1' = -0,4$m/s ; $v_2' = 0,4$m/s

Sau va chạm $m_1$ chuyển động ngược trở lại với vận tốc 0,4m/s.

Vật $m_2$ DĐĐH quanh VTCB với vận tốc lúc đi qua VTCB là 0,4m/s.

b. Tần số góc: $\omega = \sqrt{\frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{m_2}}} = 40$ (rad/s)

Chọn trục toạ độ là Ox trùng với phương dao động của $m_2$ , gốc toạ độ O trùng với VTCB, chiều dương là chiều chuyển động ban đầu của $m_2$, gốc thời gian $t_0 = 0$ lúc vật $m_2$ bắt đầu chuyển động.

$$t_0 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 = A\sin\varphi \\ v_0 = 0,4 = 40A\cos\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi = 0 \\ A = 0,01m = 1cm \end{cases}$$

Phương trình dao động của vật $m_2$ : $x = \sin 40t$ ( cm)

2. a. Va chạm mềm nên sau va chạm 2 vật có cùng vận tốc $v = \frac{\boldsymbol{m_1v_1}}{\boldsymbol{m_1 + m_2}} = 0,2$m/s.

Sau va chạm 2 vật chuyển động chậm dần đến biên rồi đổi chiều và chuyển động nhanh dần đến VTCB $m_1$ tiếp tục chuyển động đều sang trái với vận tốc 0,2m/s

$m_2$ DĐĐH quanh VTCB (lúc qua VTCB có vận tốc 0,2m/s) theo pt x = 0,5sin40t (cm)

b. Khi chưa tách $m_1$ $m_2$ hệ có $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{k}{m_1 + m_2}} = 20\sqrt{3}$ (rad/s)

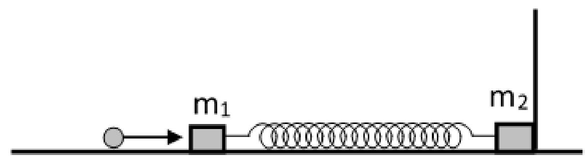
Biên độ khi đó $A_1 = \dfrac{v_{\max}}{\omega_1} = \dfrac{10^{-2}}{\sqrt{3}}m = \dfrac{1}{\sqrt{3}}cm = \dfrac{\sqrt{3}}{3}cm$

Sau khi tách ra $m_2$ có $\omega_2$ = 40rad/s $A_2$ = 0,5cm

c. Chiều dài cực đại của lò xo: $l_{max} = l_0 + A_2 = 20,5$cm

Chiều dài cực tiểu của lò xo: $l_{min} = l_0 - A_1 = 20 - \sqrt{3}/3 \approx 19,423$cm

**Bài 3.** a.Kể từ lúc va chạm, $m_2$ tiếp xúc với tường trong suốt thời gian lò xo bị nén Trong suốt thời gian này hệ vật ( $m_1$+ m /2) dao động điều hòa với chu kì




$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 + m/2}{k}}$$

Vậy khoảng thời gian cần tìm là : $\Delta t = \dfrac{T}{2} = \pi\sqrt{\dfrac{m_1 + m/2}{k}} \approx 0,1s$

Vận tốc của hệ ( $m_1$+ m /2) ngay sau va chạm được xác định bởi

$$\frac{m}{2}V_0 = \frac{3m}{2}v_0 \Rightarrow v_0 = \frac{V_0}{3}$$

Khi vật $m_2$ bắt đầu rời khỏi tường, theo định luật bảo toàn năng lượng thì tốc độ của hệ ( $m_1$+ m /2) cũng là $v_0$.

Vận tốc của khối tâm của hệ được xác định bởi :

$$(m_1 + m_2 + m/2)V_G = (m_1 + m/2)v_0$$

$$\Rightarrow V_G = \frac{V_0}{5} = 0,3m/s$$

b. Gắn hệ quy chiếu vào khối tâm của hệ , trong hệ quy chiếu này ta có

$$(m_1 + m/2)\vec{v_1} + m_2\vec{v_2} = 0$$

Trong đó $\vec{v_1}$ và $\vec{v_2}$ lần lượt là vận tốc của ( $m_1$+ m /2) và $m_2$

Vậy hai vật ( $m_1$+ m /2) và $m_2$ luôn chuyển động ngược chiều nhau và khi vận tốc của vật này triệt tiêu thì vận tốc của vật kia cũng triệt tiêu. Lúc này chiều dài của lò xo hoặc cực đại hoặc cực tiểu.Độ biến dạng của lò xo lúc này được tính bởi :

$$\frac{1}{2}k\Delta l^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m/2)(v_0 - V_G)^2 + \frac{1}{2}m_2(-V_G)^2$$

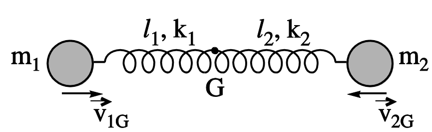
$$\frac{1}{2}k\Delta l^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m/2)(v_0 - V_G)^2 + \frac{1}{2}m_2(-V_G)^2$$

$$\Rightarrow \Delta l = V_0\sqrt{\frac{m}{15k}} = 1cm$$

Vậy chiều dài cực đại của lò xo là $l_{max} = l_0 + \Delta l = 51cm$

Và chiều dài cực tiểu của lò xo là $l_{min} = l_0 - \Delta l = 49cm$

**Bài 5.** Áp dụng định luật BTĐL ta tính được vận tốc của khối tâm G của hệ. Chọn chiều dương là chiều của vectơ $\vec{v}_1$, ta có:




$$m_1v_0 = (m_1 + m_2)v_G$$

$$v_G = \frac{m_1v_0}{m_1 + m_2} \qquad (1)$$

Khối tâm của hệ chuyển động thẳng đều với vận tốc này.

Chọn HQC gắn với khối tâm. Trong HQC này G đứng yên, nên ta có thể coi hệ như hai con lắc được "treo" vào điểm cố định G. Gọi $l_1$ và $l_2$ là chiều dài của lò xo của mỗi con lắc khi chưa biến dạng ; gọi $k_1$ và $k_2$ là độ cứng của các lò xo này. Ta có:

$$l_1 = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \;;\quad l_2 = \frac{m_1 l}{m_1 + m_2} \;(2) \;;\quad k_1l_1 = k_2l_2 = kl \;(3)$$

Từ (2) và (3) ta suy ra:

$$k_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_2}k \;;\; k_2 = \frac{m_1 + m_2}{m_1}k \qquad (4)$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} = \sqrt{k\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)} \quad ; \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} = \sqrt{k\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)}$$

Gọi $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ là *khối lượng rút gọn* của hệ thì tần số góc của mỗi con lắc (hay của hệ dao động) là: $\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$ (5)

Công thức (5) chứng tỏ hệ dao động tương đương với một con lắc gồm một lò xo có độ cứng k và một khối lượng bằng khối lượng rút gọn của hệ.

Bây giờ ta tìm biên độ dao động của mỗi con lắc. Trong HQC khối tâm, tại t = 0 lò xo chưa biến dạng, hai quả cầu ở VTCB và có vận tốc lần lượt là:

$$v_{1G} = v_0 - v_G = v_0 - \frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 v_0}{m_1 + m_2} > 0$$

$$v_{2G} = 0 - v_G = -\frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2} < 0$$

Việc $v_{1G}$ và $v_{2G}$ trái dấu nhau chứng tỏ hai quả cầu dao động ngược pha nhau.

Để tìm biên độ dao động của mỗi con lắc, ta áp dụng định luật BTCN:

$$\frac{1}{2}k_1 A_1^2 = \frac{1}{2}m_1 v_{1G}^2 \Rightarrow A_1 = \frac{m_2 v_0}{m_1 + m_2}\sqrt{\frac{\mu}{k}}$$

$$\frac{1}{2}k_2 A_2^2 = \frac{1}{2}m_2 v_{2G}^2 \Rightarrow A_2 = \frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2}\sqrt{\frac{\mu}{k}}$$

Gọi A là độ nén cực đại hay độ dãn cực đại của lò xo, ta có:

$$A = A_1 + A_2 = v_0\sqrt{\frac{\mu}{k}} \qquad (6)$$

Tóm lại, sau khi truyền cho quả cầu $m_1$ vận tốc $v_0$ thì:

- Khối tâm của hệ chuyển động thẳng đều với vận tốc $v_G = \dfrac{m_1 v_0}{m_1 + m_2}$.

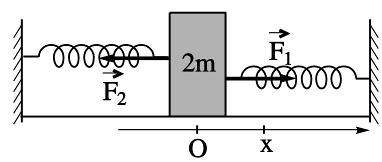
- Hai quả cầu DĐĐH đối với khối tâm với tần số góc $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{\mu}}$, trong đó $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ gọi là khối lượng rút gọn của hệ.

**Bài 6.** Hệ xem như một vật có khối lượng 2m mắc với hai lò xo.

Tại VTCB: $F_1 = F_2 \Rightarrow k_1\Delta l_1 = k_2\Delta l_2$

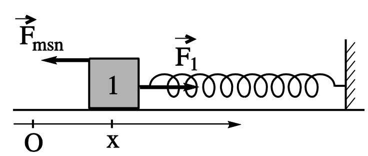
Tại li độ x:

$F = F_1 + F_2 = k_1(\Delta l_1 - x) - k_2(\Delta l_2 + x)$




$$= \underbrace{k_1\Delta l_1 - k_2\Delta l_2}_{=0} - (k_1 + k_2)x$$

$\Rightarrow F = -(k_1 + k_2)x = 2mx''$




$x'' + \omega^2 x = 0$

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{2m}}$$

$$\Rightarrow \quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{10 + 20}{0,2}} = 1,95 \approx 1,9 \text{ Hz}$$

Xét riêng vật 1 ở li độ x:

$$mx'' = k_1(\Delta l_1 - x) - F_{msn}$$

Thay $x'' = -\omega^2 x$ vào ta được: $-m\omega^2 x = k_1(\Delta l_1 - x) - F_{msn}$.

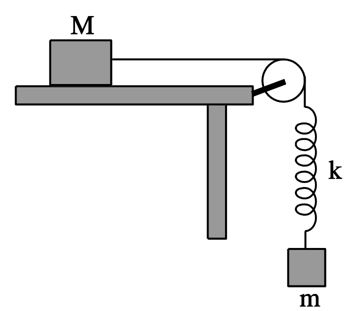
$$F_{msn} = k_1\Delta l_1 - k_1x + m\left(\frac{k_1 + k_2}{2m}\right)x \Rightarrow F_{msn} = k_1\Delta l_1 + \frac{1}{2}(k_2 - k_1)x$$

Suy ra: $$\left|k_1\Delta l_1 + \frac{1}{2}(k_2 - k_1)x\right| \le \mu mg$$

Cuối cùng ta được: $|x| \le 0{,}06$ m hay A = 6 cm.

**Bài 7.** Biên độ dao động lớn nhất đạt được khi không có sự mất mát năng lượng, tức là khi vật M không trượt trên bàn. Do vật M đứng yên nên VTCB của vật m ứng với $\Delta l_0 = \frac{mg}{k}$.

Khi vật m ở vị trí biên dưới thì vật M vẫn đứng yên nên ta có:




$$T = k(\Delta l_0 + A_1) \le \mu Mg$$

(1)

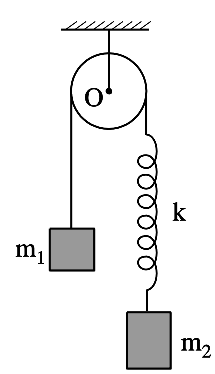
Thay $k\Delta l_0 = mg$ và $k = m\omega^2 = m.\frac{4\pi^2}{T^2}$ vào (1) ta được:

$$m\left(g + \frac{4\pi^2}{T^2}A_1\right) \le \mu Mg = \mu 8mg$$

$$g + \frac{4\pi^2}{T^2}A_1 \le 8\mu g$$

$$A_1 \le \frac{T^2}{4\pi^2}.1{,}4g = 0{,}0886 \text{ m} \Rightarrow A_1 \le 8{,}86 \text{ cm}$$

Khi vật m ở vị trí biên trên thì dây vẫn căng. Ta có:




$$T \ge 0 \Rightarrow k(\Delta l_0 - A_2) \ge 0$$

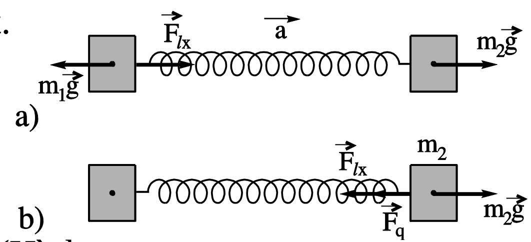
$$A_2 \le \Delta l_0 = \frac{mg}{k} = \frac{mg}{m}.\frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{gT^2g}{4\pi^2}$$

$$A_2 \le \frac{1}{16} = 0{,}063 \text{ m} \Rightarrow A_2 \le 6{,}3 \text{ cm}$$

Từ $A_1 \le 8{,}86$ cm và $A_2 \le 6{,}3$ cm, suy ra $A_{max} = 6{,}3$ cm.

**Bài 8.**

a) Vì chỉ xét chuyển động của hệ theo phương của dây nối nên ta có thể bỏ qua ròng rọc.




Trước hết tìm gia tốc của vật 1 trong HQC mặt đất.

$$a_1 = \frac{F_{lx} - m_1 g}{m_1} = \frac{F_{lx}}{m_1} - g \qquad (1)$$

Chọn HQC gắn với $m_1$ để xét chuyển động của $m_2$ (Hình 2.11Gb).

$$m_2 a_{21} = m_2 g - F_q - F_{lx}$$

$$m_2 a_{21} = m_2 g - m_2\left(\frac{F_{lx}}{m_1} - g\right) - F_{lx}$$

$$m_2 a_{21} = -\left(\frac{m_1 + m_2}{m_1}\right) k(\Delta l_0 + x) + 2m_2 g \qquad (2)$$

Tại VTCB, lò xo dãn $\Delta l_0$, $x = 0$ và $a_{21} = 0$.

Khi ấy phương trình (2) trở thành:

$$-\left(\frac{m_1 + m_2}{m_1}\right) k\Delta l_0 + 2m_2 g = 0 \quad (3)$$

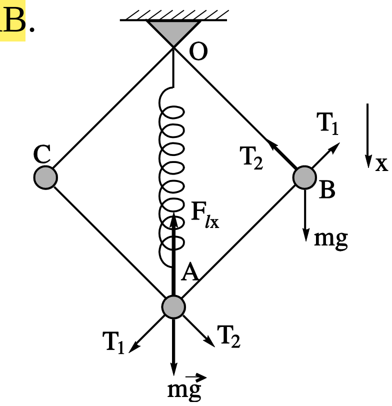
Từ (2) và (3), ta có: $-\dfrac{(m_1 + m_2)kx}{m_1} = m_2 x''$,

hay $x'' + \dfrac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2} x = 0 \Rightarrow x'' + \dfrac{k}{\mu} x = 0$ ($\mu$ là khối lượng rút gọn hệ)

Suy ra hệ dao động điều hoà với $\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$.

b) Tại t = 0, lò xo không dãn và vật ở vị trí biên vì $v_{21} = 0$. Suy ra $A = \Delta l_0$. Theo phương trình (3) ta được: $A = \Delta l_0 = \frac{2m_1m_2g}{k(m_1 + m_2)}$.

**Bài 9.** a) Xét sự cân bằng của thanh cứng AB theo hướng AB.




$$\sum F = 0 \Rightarrow (F_{lx} - 2mg)\cos 45^o = 0 \Rightarrow F_{lx} = 2mg$$

$$\Delta l = \frac{2mg}{k} \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \quad l\sqrt{2} - l_0 = \frac{2mg}{k}$$

Cuối cùng $l_0 = l\sqrt{2} - \frac{2mg}{k}$

b) Chọn mốc thế năng trọng trường của các quả cầu và thế năng đàn hồi của lò xo tại VTCB của hệ.

Khi quả cầu dưới ở li độ x thì hai quả cầu trên ở li độ $\frac{x}{2}$ còn lò xo thì dãn thêm x.

Độ biến thiên thế năng trọng trường là: $\Delta W_{t_1} = -mgx - 2mg\frac{x}{2} = -2mgx$

Độ biến thiên thế năng đàn hồi là: $\Delta W_{t_2} = \frac{1}{2}k(\Delta l + x)^2 - \frac{1}{2}k\Delta l^2 = \frac{1}{2}kx^2 + k\Delta l.x$

Thay (1) vào ta được: $\Delta W_{t_2} = \frac{1}{2}kx^2 + 2mgx$

$$\Delta W_t = \Delta W_{t_1} + \Delta W_{t_2} = \frac{1}{2}kx^2$$

Vậy, so với VTCB thì ở li độ x thế năng của hệ tăng thêm $\frac{1}{2}kx^2$.

c) Vì B quay quanh O nên $\vec{v}_B \perp OB$, tức là hướng dọc theo thanh AB. Theo tính chất của thanh cứng, ta có:

$$v_B = v_A \cos 45^o = \frac{v}{\sqrt{2}} = v_C$$

$$W_{đ} = \frac{1}{2}mv^2 + 2.\frac{1}{2}m\frac{v^2}{2} = mv^2$$

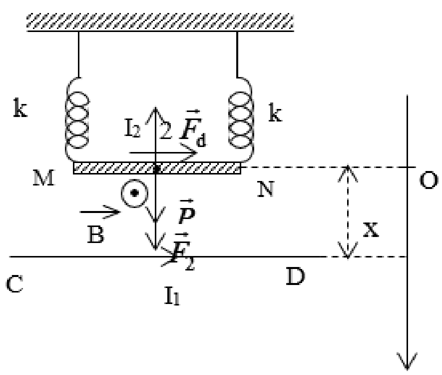
d) Vì dao động nhỏ nên hình hợp bởi 4 thanh chỉ biến dạng nhỏ so với hình vuông. Vì thế ở li độ x, một cách gần đúng ta có:

$$W = mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = const$$

$$\frac{dW}{dt} = 0 \Rightarrow x'' + \frac{k}{2m}x = 0$$

Ta được $\omega = \sqrt{\frac{k}{2m}}$ và $T = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{k}}$.

**Bài 10.** 1Chiều $I_2$ qua thanh như hình vẽ.




2. Tại vị trí cân bằng của thanh: $2k.\Delta l = mg + B.I_2.l$ (1)

Với $B = \frac{\mu_0.I_1}{2\pi x}$ ; $\Delta l = d - x$

- $\Delta l$ độ biến dạng của lò xo khi AB cân bằng.

- d là khoảng cách giữa dây C và đầu dưới của hai lò xo khi ta chưa treo thanh AB

- x là khoảng cách đó khi thanh AB được treo và có dòng điện $I_2$ chạy qua thanh

Từ (1) $2k(d-x)=mg+B.I_2.l$

$$x^2-\left(d-\frac{mg}{2k}\right)+\frac{\mu_0 I_2 I_1 l}{4\pi k}=0$$

- Đặt $d_0=d-\frac{mg}{2k}$

$$\Leftrightarrow \quad x^2-d_0x+\frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{4k\pi}=0(2)$$

Điều kiện để (2) có nghiệm

$$\Delta\geq 0 \Leftrightarrow d_0^2-\frac{\mu_0.I_1.I_2.l}{k\pi}\geq 0 \Leftrightarrow d_0\geq\sqrt{\frac{\mu_0.I_1.I_2.l}{k\pi}} \quad (*)$$

- Với điều kiện (*), nghiệm của phương trình là

$$\begin{cases} x_{01}=\dfrac{d_0-\sqrt{d_0^2-\dfrac{\mu_0.I_1.I_2.l}{k\pi}}}{2}>0 \\ x_{02}=\dfrac{d_0+\sqrt{d_0^2-\dfrac{\mu_0.I_1.I_2.l}{k\pi}}}{2}>0 \end{cases}$$

- Trong hai vị trí này có một vị trí là VTCB bền và một vị trí là VTCB không bền

+ VTCB không bền: $x_{01}$

+ VTCB bền: $x_{02}$

3. Xét khi thanh lệch khỏi VTCB bền một đoạn nhỏ (li độ); x > 0

- Từ định luật II N

$$\rightarrow mg+BI_2.l-2k\left(\frac{mg}{2k}+d_0-x_{02}+x\right)=mx''$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi(x_{02}-x)}-2k(d_0-x_{02})-2kx=mx''$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi\, x_{02}}\left(1+\frac{x}{x_{02}}\right)-2k(d_0-x_{02})-2kx=mx''$$

$$\Leftrightarrow \qquad -\left(2k - \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi\ x_{02}^2}\right)x = mx''$$

Vậy thanh dao động điều hòa với chu kỳ

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k - \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi .x_{02}^2}}}$$

**Bài 11.** Khối tâm của hệ chuyển động với vận tốc $V_G$.

Áp dụng định luật bảo toàn động lượng ta có:

$$2mV_G = mV_0 \ \Rightarrow V_G = \frac{V_0}{2}$$

Mỗi vật xem là con lắc lò xo có khối lượng m, độ cứng $k_1 = 2k$, dao động điều hòa đối với hệ quy chiếu gắn với khối tâm G của hệ.

Chu kì dao động : $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$

Biểu thức li độ của vật bên phải với khối tâm G: $x_2 = A\cos(\omega t + \varphi)$

Với: $\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{2k}{m}}$

$$A = \omega\frac{V_0}{2} = \frac{V_0}{2}\sqrt{\frac{2k}{m}}$$

Tại thời điểm ban đầu vật ở VTCB và chuyển động theo chiều dương: $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

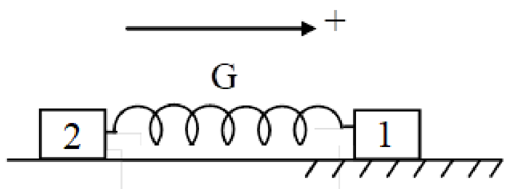
$$\Rightarrow x_2 = \frac{V_0 k}{m}\cos(\sqrt{\frac{2k}{m}}t - \frac{\pi}{2})$$

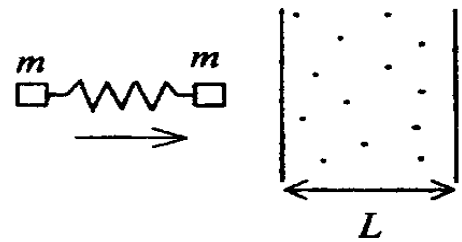
Khi lò xo giãn cực đại lần đầu vật bên phải đi từ VTCB ra đến biên dương, nên thời gian chuyển động là:

$$t = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{2k}}$$

**Bài 12.** Ngay khi vật 1 đi vào dải ráp. Ta có:

$$a_1 = \frac{F_{ms}}{m} = -\mu g \text{ và } a_G = F_{ms}/2m = -\mu g/2 \quad (1)$$




Chọn hệ quy chiếu  gắn với khối tâm G của hệ. Khi này, ta có:

$v_{10} = v_{20} = 0$ và $a_{20} = -a_G = \mu g/2$,

$a_{10} = a_1 - a_G = -\mu g/2$

Như vậy trong hệ quy chiếu này hai vật 1 và 2 sẽ dao động điều hoà như các con lắc lò xo nằm ngang quanh khối tâm G, với tần số góc $\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$ (2)

Để hai vật có thể vượt qua dải ráp với vận tốc ban đầu nhỏ nhất thì ta phải có:

$$2m\frac{v_{min}^2}{2} = m\mu g L \Rightarrow v_{min} = \sqrt{\mu g L} \quad (3)$$

và lúc này lò xo phải không biến dạng đồng thời vận tốc của 2 vật phải bằng 0.

Hai vật 1 và 2 đã thực hiện dao động được n chu kỳ quanh khối  tâm G và $v_G = 0$.

Thời gian chuyển động của hệ là:

$$t = \frac{v_{min}}{|a_G|} = n \cdot T = n \cdot \frac{2\pi}{\omega} \quad (4)$$

Từ (1), (2), (3) và (4) ta có:

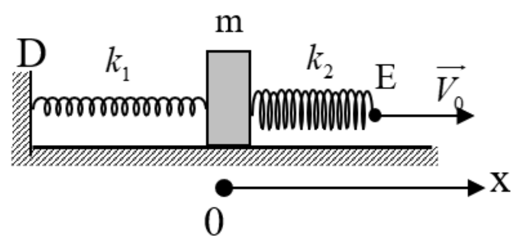
$$\frac{2\sqrt{\mu gL}}{\mu g} = n \cdot 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{2k}}$$

$$\Rightarrow k = \frac{n^2\pi^2 m\mu g}{2L} \text{ với } n = 1, 2, ....$$

Với mỗi giá trị của n (số chu kỳ) ta có một giá trị tương ứng của $k$.

**Bài 13.** ***1.***

Ở thời điểm t bất kì, vật có li độ x; khi đó đầu E của lò xo đi được một đoạn đường dài là $V_0.t$




Phương ĐLII Newton cho m theo phương Ox có dạng:

$$-k_1x + k_2(V_0.t - x) = mx^{//} \Leftrightarrow -(k_1+k_2)x + k_2V_0.t = mx^{//} \quad (1)$$

Đặt $F = -(k_1+k_2)x + k_2V_0.t \Rightarrow F^{/} = -(k_1+k_2)x^{/} + k_2V_0 \Rightarrow F^{//} = -(k_1+k_2)x^{//}$ (2)

Từ (1)(2)$\Rightarrow F^{//} + \frac{k_1+k_2}{m}F = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} F = F_0cos(\omega t + \varphi) = -(k_1+k_2)x + k_2V_0.t \\ \omega^2 = \frac{k_1+k_2}{m} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \left(\frac{k_2V_0}{k_1+k_2}\right)t - \left(\frac{F_0}{k_1+k_2}\right)cos(\omega t + \varphi)$$

Tại $t_0 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{F_0}{k_1+k_2}cos\varphi = 0 \\ x^{/} = \frac{k_2V_0}{k_1+k_2} + \left(\frac{F_0\omega}{k_1+k_2}\right)\sin\varphi = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi = -\pi/2 \\ F_0 = \frac{k_2V_0}{\omega} = k_2V_0\sqrt{\frac{m}{k_1+k_2}} \end{cases} \quad (3)$$

$$\Rightarrow x = \frac{k_2V_0}{k_1+k_2}\left(t - \sqrt{\frac{m}{k_1+k_2}}cos(\omega t - \pi/2)\right) \quad (4)$$

**2.**

Khi $k_1 = k_2 = k \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{V_0}{2}\left(t - \sqrt{\dfrac{m}{2k}}cos(\omega t - \pi/2)\right) & (5) \\ x' = \dfrac{V_0}{2}[1 + \sin(\omega t - \pi/2)] & (6) \end{cases}$

a. Ta có $x' = V_0 \Leftrightarrow \dfrac{V_0}{2}[1+\sin(\omega t - \pi/2)] = V_0 \Rightarrow \sin(\omega t - \pi/2) = 1 \Rightarrow t = \dfrac{T}{2} = \pi\sqrt{\dfrac{m}{2k}}$

Thay $t = \dfrac{T}{2} = \pi\sqrt{\dfrac{m}{2k}}$ vào (5) $\Rightarrow x = \dfrac{V_0 T}{4} = \left(\dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{m}{2k}}\right)V_0$

b. Gọi chiều dài tự nhiên của lò xo $k_2$ là $\ell_{02}$

Xét chuyển động của m trong hệ quy chiếu gắn với điểm E trên lò xo (hệ trục tọa độ $O^*u$).

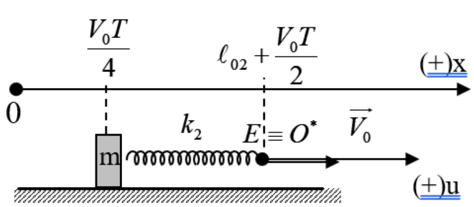
Ở thời điểm lúc bắt đầu lò xo $k_1$ bị bung ra thì đầu E của lò xo và vật có tọa độ lần lượt là

$x_{0E} = \ell_{02} + V_0.\dfrac{T}{2}; x_m = \dfrac{V_0.T}{4}$ (trong hệ tọa độ Ox của đề).

Phương trình chuyển động của E trong hệ tọa độ Ox là: $x_E = x_{0E} + V_0 t = \ell_{02} + V_0.\dfrac{T}{2} + V_0.t$

Trong hệ tọa độ $O^*u$, m sẽ dao động với biên độ $U_0$, ta có $x_m + U_0 + \ell_{02} = x_E$

$\Leftrightarrow \dfrac{V_0.T}{4} + U_0 + \ell_{02} = \ell_{02} + \dfrac{V_0.T}{2} \Rightarrow U_0 = \dfrac{V_0.T}{4}$




Phương trình dao động của m trong hệ tọa độ $O^*u$:

$u = \dfrac{V_0T}{4}cos(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t + \pi) - \ell_{02}$

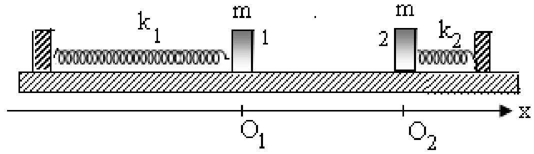
Trong hệ tọa độ Ox phương trình dao động của m là: $x = x_E + u$

Hay $x = \dfrac{V_0T}{2} + V_0.t + \dfrac{V_0T}{4}cos(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t + \pi) = V_0\left[\pi\sqrt{\dfrac{m}{2k}} + t + \dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{m}{2k}}cos(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t + \pi)\right]$

**Bài 14. ĐS: a.**$A_1 = \sqrt{\dfrac{k_2}{k_1}}\,A_2$

**Bài 15.**

a. Tính độ cứng mỗi lò xo:




* Vì độ cứng tỉ lệ nghịch với chiều dài với những lò xo cùng loại nên ta áp dụng công thức $k_1 l_1 = k_2 l_2 = k l_0 \Rightarrow$ $k_1$ = 20N/m ; $k_2$ = 80N/m.

b. Xác định khoảng cách cực tiểu và khoảng thời gian tương ứng:

* Biên độ của mỗi vật: $A_1 = \sqrt{\frac{2W_0}{k_1}}$ = 0,1m = 10cm; $A_2 = \sqrt{\frac{2W_0}{k_2}}$ = 0,05m = 5cm.

Tần số góc dao động của mỗi vật là: $\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m}}$ = 2π(rad/s) = ω ; $\omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m}}$ = 2ω

* Phương trình dao động của mỗi vật đối với các vị trí cân bằng của chúng:

$x_1 = A_1\cos(\omega_1 t + \phi_1) = 10\cos(\omega t - \pi)$ (cm)

$x_2 = A_2\cos(\omega_2 t + \phi_2) = 5\cos(2\omega t)$ (cm

* Khoảng cách hai vật tại một thời điểm bất kỳ (tính theo cm):

$d = |O_1O_2 + x_2 - x_1 = 20 + 5\cos(2\omega t) - 10\cos(\omega t - \pi)|$ (cm)

* Biến đổi toán học:

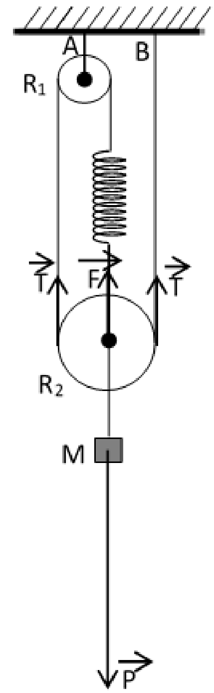
$d = |\ 20 + 5(2\cos^2\omega t - 1) + 10\cos\omega t\ = 15 + 10(\cos^2\omega t + \cos\omega t)|$

$\Rightarrow d = |15 + 10(\cos^2\omega t + 2.\frac{1}{2}.\cos\omega t + \frac{1}{4}) - 2,5| = |12,5 + (\cos\omega t + \frac{1}{2})^2|$

Vậy khoảng cách nhỏ nhất giữa hai vật $d_{min}$ = 12,5cm xảy ra khi $\cos\omega t = -\frac{1}{2}$

* Để tìm khoảng thời gian kể từ lúc thả đến khi đạt khoảng cách cực tiểu lần đầu tiên ta giải phương trình trên: $\cos\omega t = -\frac{1}{2} = \cos(\pm\frac{2\pi}{3})$. Vậy, hoặc t = 1/3 + k ( k = 0; 1; 2; ...) hoặc t = -1/3 + k ( k = 1; 2; ...) Từ đó ta lấy nghiệm : $t_{min}$ = 1/3 (s)

**Bài 16.** Chọn trục Ox thẳng đứng hướng xuống, gốc toạ độ O ở VTCB của M.




1)- Tại VTCB của vật M ta có: $\vec{P}+2\vec{T}_0+\vec{F}_0=0$ hay $\vec{P}+3\vec{F}_0=0$ (1)

- Từ (1) suy ra: mg=3kΔ$l_0$ (2)

- Tại vị trí vật M có toạ độ x bất kì ta có: $\vec{P}+2\vec{T}+\vec{F}=m\vec{a}$ hay $\vec{P}+3\vec{F}=m\vec{a}$ (3)

- Chiếu (3) lên trục toạ độ Ox ta có: mg - 3k(Δ$l_0$+3x) = ma = mx'' (4)

- Từ (2) và (4) ta có : $x''+\frac{9k}{m}x=0$ đặt $\omega^2=\frac{9k}{m}$ ta có $x''+\omega^2x=0$ (5)

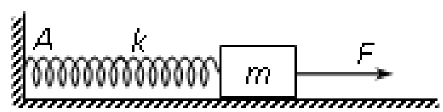
- Phương trình (5) có nghiệm $x=A\sin(\omega t+\varphi)$ trong đó A,ử,ự là những hằng số.

2)- Chọn gốc thời gian là lúc thả vật. Tại thời điểm t =0 ta có:

$\begin{cases} 4 = A\sin ử \text{ suy ra } A = 4\text{ (cm) và } ử = ð/2;\ \omega=\sqrt{\frac{9k}{m}}=60(N) \\ 0 = A\cos ử. \end{cases}$

Vậy phương trình dao động là x = 4sin(60t+ ð/2) (cm)

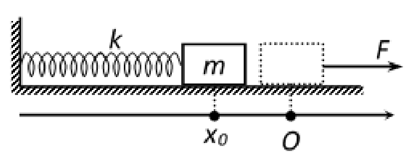
**Bài 17.** a) Chọn trục tọa độ hướng dọc theo trục lò xo, gốc tọa độ trùng vào vị trí cân bằng của vật sau khi đã có lực *F* tác dụng như hình vẽ. Khi đó, vị trí ban đầu của vật có tọa độ là $x_0$. Tại vị trí cân bằng, lò xo bị biến dạng một lượng $x_0$ và:




**Hình bài 5a**

$F=-kx_0 \quad \Rightarrow \quad x_0=-\frac{F}{k}.$ (0,25đ)

Tại tọa độ *x* bât kỳ thì độ biến dạng của lò xo là ($x$–$x_0$), nên hợp lực tác dụng lên vật là:




$-k(x-x_0)+F=ma.$

Thay biểu thức của $x_0$ vào, ta nhận được:

$-k\left(x+\frac{F}{k}\right)+F=ma \quad \Rightarrow \quad -kx=ma \quad \Rightarrow \quad x''+\omega^2x=0.$ (0,25đ)

Trong đó $\omega=\sqrt{k/m}$ . Nghiệm của phương trình này là: $x=A\sin(\omega t+\varphi).$

Như vậy vật dao động điều hòa với chu kỳ $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. Thời gian kể từ khi tác dụng lực $F$ lên vật đến khi vật dừng lại lần thứ nhất (tại ly độ cực đại phía bên phải) rõ ràng là bằng 1/2 chu kỳ dao động, vật thời gian đó là: $t = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. (0,25đ)

Khi $t$=0 thì: $\begin{matrix} x = A\sin\varphi = -\frac{F}{k}, \\ v = \omega A\cos\varphi = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{F}{k}, \\ \varphi = -\frac{\pi}{2}. \end{cases}$

Vậy vật dao động với biên độ $F/k$, thời gian từ khi vật chịu tác dụng của lực $F$ đến khi vật dừng lại lần thứ nhất là $T/2$ và nó đi được quãng đường bằng 2 lần biên độ dao động. Do đó, quãng đường vật đi được trong thời gian này là: $S = 2A = \frac{2F}{k}$. (0,25đ)

b) Theo câu a) thì biên độ dao động là $A = \frac{F}{k}$. (0,25đ)

Để sau khi tác dụng lực, vật $m$ dao động điều hòa thì trong quá trình chuyển động của $m$, $M$ phải nằm yên.

Lực đàn hồi tác dụng lên $M$ đạt độ lớn cực đại khi độ biến dạng của lò xo đạt cực đại khi đó vật $m$ xa $M$ nhất (khi đó lò xo giãn nhiều nhất và bằng: $|x_0| + A = 2A$). (0,25đ)

Để vật $M$ không bị trượt thì lực đàn hồi cực đại không được vượt quá độ lớn của ma sát nghỉ cực đại:

$$k.2A < \mu Mg \Rightarrow k.2.\frac{F}{k} < \mu Mg.\ (0,25đ)$$

Từ đó suy ra điều kiện của độ lớn lực $F$: $F < \frac{\mu mg}{2}$. (0,25đ)

**Bài 18.**

1. Tại VTCB: $\begin{cases} 2T_0 = k\Delta l \\ mg = T_0 \end{cases} \rightarrow mg = \frac{1}{2}k\Delta l$ (1)

Khi vật ở li độ x bất kì, lò xo giãn thêm đoạn x/2; $T_1 = T_2 = T$.

Theo định luật II Niu-tơn:

$\begin{cases} 2T = k(\Delta l + x/2) \\ mg - T = mx" \end{cases} \rightarrow mg - \frac{1}{2}k(\Delta l + \frac{x}{2}) = mx"$ (2)

(1) và (2) suy ra:

$x" + \omega^2 x = 0$ với $\omega = \sqrt{\frac{k}{4m}} = 10\sqrt{5}$ rad/s ⟶ m dao động điều hòa

A = $|x_0|$ = $2\Delta l = \frac{4mg}{k}$ = 0,02m = 2cm.

t = 0: $\begin{cases} A\cos\varphi = -2 \\ A\omega\sin\varphi = 0 \end{cases}$ ⟶ φ = π

Phương trình dao động: x = 2cos(10$\sqrt{5}$ t + π) cm

T = mg + mω$^2$x

Khi x = A  Tmax = 1N

Khi x = -A  Tmin = 0

2. Tại VTCB: $\begin{cases} mg - T_{01} = 0 \\ T_{01} + T_{02} + Mg - k\Delta l = 0 \Rightarrow 2mg + Mg - k\Delta l = 0 \\ T_{01}.R - T_{02}.R = 0 \end{cases}$ (1)

Khi m tại li độ x bất kì: $\begin{cases} mg - T_1 = mx" \\ T_1 + T_2 + Mg - k(\Delta l + \frac{x}{2}) = M\frac{x"}{2} \\ T_1.R - T_2.R = I\gamma = \frac{1}{2}MR^2.\frac{x"}{2R} \end{cases}$

$\longrightarrow \begin{cases} 2mg - 2T_1 = 2mx" \\ T_1 + T_2 + Mg - k(\Delta l + \frac{x}{2}) = M\frac{x"}{2} \\ T_1 - T_2 = \frac{Mx"}{4} \end{cases}$

$\Rightarrow 2mg + Mg - k\Delta l - k\frac{x}{2} = (2m + \frac{3M}{4})x"$ (2)

(1) và (2) suy ra: $x" + \frac{2k}{8m+3M}.x = 0$

(2) Vậy vật m dao động điều hòa với chu kì: $T = 2\pi\sqrt{\frac{8m+3M}{2k}} \approx$ 0,37s

**Bài 19.** Vật cân bằng khi chưa tác dụng lực F: mg = $k\dfrac{\Delta l_o}{2}$

Chọn trục Ox thẳng đứng từ trên xuống. O trùng với VTCB mới khi có lực F tác dụng.

Tại VTCB mới: F + P - $k\dfrac{\frac{\Delta l_o + x_o}{2}}{2}$ = 0 (với $x_o$ là khoảng cách giữa VTCB mới so với VTCB cũ)

Khi vật có li độ x lò xo giãn: $\Delta l_o + x_o$ + x

F + P - $k\dfrac{\frac{\Delta l_o + x_o + x}{2}}{2}$ = mx'' $\Rightarrow$ x'' + $\dfrac{k}{4m}$x = 0

Vậy vật DĐĐH với phương trình: x = Acos($\omega t + \varphi$)

Trong đó $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{4m}}$

Như vậy chu kì dao động của vật T = $2\pi\sqrt{\dfrac{4m}{k}}$. Thời gian từ lúc tác dụng lực đến khi vật dừng lại lần thứ nhất là $t = \dfrac{T}{2} = \pi\sqrt{\dfrac{4m}{k}}$.

Khi t = 0: x = Acos($\varphi$) = - $x_o$ = - $\dfrac{4F}{k}$

V = -A$\omega\sin\varphi$ = 0$\Rightarrow$ A = $\dfrac{4F}{k}$, $\varphi = \pi$

S = 2A = $\dfrac{8F}{k}$

Lực tác dụng lên M như hình vẽ

Để m dao động điều hoà sau khi tác dụng lực F thì M phải đứng yên $\Leftrightarrow$ N $\geq 0$ trong quá trình m chuyển động

$\Leftrightarrow$ N = **P** - $\dfrac{(F_{đh})_{max}}{2}$ $\geq$ 0 $\Leftrightarrow$ Mg - $k\dfrac{\frac{\Delta l_o + x_o + A}{2}}{2}$ = Mg -k$\dfrac{A}{4}$ $\geq$ 0$\Rightarrow$ F $\leq$ Mg

**Bài 20**. 1) a. Đặt $m_1 + m_2 = 250$ g = 0,25 kg, áp dụng hai ĐLBT ta tính được vận tốc hai vật sau va chạm: $v = \frac{2m_0v_0}{m+m_0} = v_0/2$ (1)

Hai vật dao động điều hoà với tần số: $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{100}{0,25}} = 20rad/s$ (2)

Vận tốc của hai vật ngay sau va chạm chính là vận tốc cực đại của dao động. Từ công thức (1), với A = 1 cm, ta có: $v_0 = 2v = 2\omega A = 2.20.1 = 40cm/s$ (3)

b. Lúc t = 0, ta có: $\begin{cases} x_0 = A\cos\varphi = 0 \\ v = -\omega A\sin\varphi < 0 \end{cases} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$

Phương trình dao động của hệ ($m_1 + m_2$) là: $x = \cos(20t + \pi/2)cm$.

+ Dùng PP véc tơ quay, ta tìm được thời điểm vật đi qua vị trí có li độ x = + 0,5 cm lần thứ 2011 là: $t = t_1 + t_2 = \frac{7\pi}{120} + 1005T = \frac{7\pi}{120} + 1005.\frac{\pi}{10} = \frac{12067\pi}{120} \approx 315,75s$

2) Khi hai vật đứng yên với nhau thì lực làm cho vật $m_2$ chuyển động chính là lực ma sát nghỉ giữa hai vật, lực này gây ra gia tốp cho vật $m_2$ :

$$F_{msn} = m_2a = -m_2\omega^2x < \mu_{12}m_2g \Rightarrow A < \frac{\mu_{12}g}{\omega^2} \quad (5)$$

Mà: $v_0 = 2\omega A \Rightarrow A = \frac{v_0}{2\omega}$ (6)

Từ (5) và (6) ta có: $v_0 < \frac{2\mu_{12}g}{\omega} = 0,6m/s$

**Bài 21.** Xét khi ròng rọc có độ dãn x so với chiều dài tự nhiên.

Do hệ không có vi trí cân bằng cố định nên chọn gốc tọa độ tại vị trí ban đầu của ròng rọc, các chiều dương như hình vẽ.

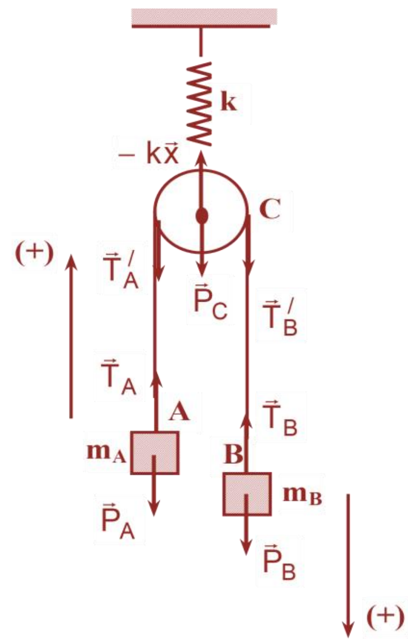
Áp dụng các phương trình cơ bản của động lực học ($T_A' = T_A$ và $T_B' = T_B$) ta có:

$2mg - T_B = 2ma_B$ (1)

$T_A - mg = ma_A$ (2)

$$2mg + T_A + T_B - kx = 2ma_C \qquad (3)$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a}_{A/C} = \vec{a}_A - \vec{a}_C \\ \vec{a}_{B/C} = \vec{a}_B - \vec{a}_C \\ \vec{a}_{A/C} = -\vec{a}_{B/C}\end{array}\right\} \Rightarrow 2\vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{a}_B$$




Chiếu: $2a_C = a_B - a_A \qquad (4)$

Ta lại có: $(T_B - T_A)R = mR^2\gamma$ (do $I\gamma = \frac{2mR^2}{2}\gamma$)

Mặt khác: $\gamma R = a_{A/C} = a_A + a_C \Rightarrow T_B - T_A = m(a_A + a_C)$ (5)

* Từ (1), (2) và (5) ta có: $mg - m(a_A + a_C) = m(a_A + 2a_B)$

$$\Rightarrow g = 2(a_A + a_B) + a_C$$

Từ (4): $a_B = 2a_C + a_A$ nên $g = 2(a_A + 2a_C + a_A) + a_C$

$$\Rightarrow a_A = \frac{g - 5a_C}{4} \ (*) \text{ và } a_B = \frac{g + 3a_C}{4} \ (**)$$

Thay vào (1) và (2), ta được: $T_B = \frac{3}{2}m(g - a_C)$ và $T_A = \frac{5}{4}m(g - a_C)$

Thay vào (3): $2mg + \frac{5}{4}m(g - a_C) + \frac{3}{2}m(g - a_C) - kx = 2ma_C$

$$\Rightarrow -\frac{19}{4}ma_C = kx - \frac{19}{4}mg \ (6) \qquad (\text{Với } a_C = x'')$$

Đặt $X = kx - \frac{19}{4}mg \Rightarrow X'' = kx''$

Khi đó, (6) trở thành: $-\frac{19}{4}m\frac{X''}{k} = X \Rightarrow X'' = -\frac{4k}{19m}X = -\omega^2 X$

Nghiệm phương trình trên là: $X = A\sin(\omega t + \varphi) \Leftrightarrow kx - \frac{19}{4}mg = A\sin(\omega t + \varphi)$

* Tại t = 0: $\left\{\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow -\frac{19}{4}mg = A\sin\varphi \\ x' = 0 \Rightarrow A\omega\cos\varphi = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\varphi = -\frac{\pi}{2} \\ A = \frac{19}{4}mg\end{array}\right.$

Thay vào (6) thì: $-\frac{19}{4}ma_C = \frac{19}{4}mg\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow a_C = g\cos\sqrt{\frac{4k}{19m}}t$

[*Hoặc: Nghiệm của phương trình là: X = Acos(ωt + φ)* $\Leftrightarrow kx-\frac{19}{4}mg=Acos(\omega t+\varphi)$

* *Tại t = 0:* $\begin{cases} x=0\Rightarrow -\frac{19}{4}mg=Acos\varphi \\ x'=0\Rightarrow -A\omega\sin\varphi=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\varphi=\pi \\ A=\frac{19}{4}mg\end{cases}$

*Thay vào (6) thì:* $-\frac{19}{4}ma_C=\frac{19}{4}mgcos(\omega t+\pi)\ \Rightarrow\ a_C=g\cos\sqrt{\frac{4k}{19m}}\,t$

Thay vào (*) và (**) ta được:

$$a_A=\frac{g}{4}-\frac{5}{4}g\cos\sqrt{\frac{4k}{19m}}t=\frac{g}{4}\left(1-5\cos\sqrt{\frac{4k}{19m}}\ t\right)$$

$$a_B=\frac{g}{4}+\frac{3}{4}g\cos\sqrt{\frac{4k}{19m}}t=\frac{g}{4}\left(1+3\cos\sqrt{\frac{4k}{19m}}\ t\right)$$

**Bài 22.** Thế năng ban đầu của khung: $W_t=\frac{1}{2}kL^2$

Động năng của khung ngay trước lúc va chạm lần đầu tiên: $\frac{1}{2}mv^2$.

Vận tốc của khung ngay trước lúc va chạm: $v=L\sqrt{\frac{k}{m}}$.

Do va chạm là đàn hồi và hai vật có khối lượng như nhau nên sau va chạm hai vật trao đổi vận tốc cho nhau. Vậy sau lần va chạm thứ nhất vận tốc của vật là: $v=L\sqrt{\frac{k}{m}}$.

Kể từ khi va chạm lần đầu, vật đi đến cạnh trái của khung hết thời gian $t_1=\frac{L}{v}$. Tiếp đó là lần va chạm thứ hai, sau va chạm vật đứng yên còn khung chuyển động với vận tốc v từ trạng thái lò xo không biến dạng. Nên thời gian này bằng: $t_2=\frac{T_0}{2}$.

Tiếp đó, khung trở lại vị trí ban đầu, lại va chạm lần thứ 3 với vật và khung đứng yên còn vật lại chuyển động với vận tốc v sang cạnh phải của khung hết thời gian $t_3 = t_1$.

Tiếp đó, va chạm lần thứ tư, vật lại nằm yên, còn khung lại thực hiện ½ chu kỳ dao động riêng của nó: $t_4 = t_2$.

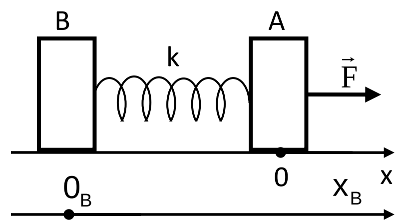
Chu kỳ dao động của hệ là $t = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 2\frac{T_0}{2} + 2\frac{L}{v} = 2(\pi+1)\sqrt{\frac{m}{k}}$ .

Từ đó suy ra điều kiện của độ lớn lực *F*: $F < \frac{\mu mg}{2}$.

**Bài 23.** 1. Phương trình chuyển động của A

Chọn trục Ox như hình vẽ, 0 là vị trí ban đầu của A.

$mx_A'' = 2\mu mg - \mu mg - kx_A \quad \Rightarrow \quad x_A'' = -\frac{k}{m}(x_A - \frac{\mu mg}{k})$




$x_A = A_1 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi\right) + \frac{\mu mg}{k}$ (1)

$v_A = x_A' = A_1\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi\right)$ (2)

Thay $t = 0; x_A = 0; v_A = 0 \Rightarrow A_1 = \frac{\mu mg}{k}, \varphi = -\frac{\pi}{2}$. Và:

$x_A = \frac{\mu mg}{k}\left[1 + \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t - \frac{\pi}{2}\right)\right]; v_A = \mu g\sqrt{\frac{m}{k}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t - \frac{\pi}{2}\right)$ (3)

2. Khi $t = t_1$, vật B bắt đầu chuyển động, B chỉ chuyển động khi lực đàn hồi của lò xo tác dụng vào B ít nhất bằng lực ma sát nghỉ cực đại và từ lúc đó trở đi: $v_A = v_0 = hs$. Tính $t_1$:

$$x_A = \frac{\mu mg}{k}\left[1 + \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t_1 - \frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{3\mu mg}{2k}$$

$$\Rightarrow t_1 = \frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{m}{k}}; \quad v_A = \mu g\sqrt{\frac{3m}{4k}} = v_0 \ (4)$$

Khi $t \geq t_1$ chọn trục toạ độ $0_B x_B$, với gốc $0_B$ là vị trí của B ở thời điểm nó cách A một khoảng bằng chiều dài tự nhiên của lò xo (chiều dài khi lò xo không bị biến dạng) và cho $0_B$ chuyển động cùng với A với vận tốc $v_0$ không đổi.

$$mx_B'' = -\mu mg - kx_B \Rightarrow \quad x_B = -\frac{\mu mg}{k} + A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \vartheta\right) \quad (5)$$

$$v_B = x_B' = A\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \vartheta\right)$$

Thay $t = t_1; x_B = -1{,}5\frac{\mu mg}{k}$ (dấu trừ chỉ lò xo bị giãn), $v_B = -v_0$:

$$x_B = -\frac{\mu mg}{k} + A\sin\left(\frac{2\pi}{3} + \vartheta\right) = -1{,}5\frac{\mu mg}{k},\ v_B = x_B' = A\sqrt{\frac{k}{m}}.\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \vartheta\right) = -\mu g\sqrt{\frac{3m}{4k}},$$

Giải hệ: $\vartheta = -\frac{5\pi}{6}; A = \frac{\mu mg}{k}; v_{B\max} = \mu g\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow$

$$x_B = \frac{\mu mg}{k}\left[\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}(t - t_1) - \frac{5\pi}{6}\right) - 1\right] = \frac{\mu mg}{k}\left[\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t - \frac{3\pi}{2}\right) - 1\right],$$

$$v_B = \mu g\sqrt{\frac{m}{k}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t - \frac{3\pi}{2}\right),$$

$$t \geq \frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Đối với mặt sàn B có vận tốc:

$$v_B^* = v_B + v_0 = \mu g\sqrt{\frac{m}{k}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t - \frac{3\pi}{2}\right) + v_0 = \mu g\sqrt{\frac{m}{k}}\left[\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t - \frac{3\pi}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\right] \quad (6)$$

ở thời điểm $t = t_2; v_B = -v_0$ thì B có vận tốc bằng 0 đối với đất:

$$\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t - \frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow t_2 = \frac{7\pi}{3}\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (7)$$

Lúc đó
$$x_B(t_2) = \frac{\mu mg}{k}\left[\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) - 1\right] = -\frac{\mu mg}{2k}$$

Vậy lò xo giãn $0{,}5\frac{\mu mg}{k}$, lực đàn hồi nhỏ hơn lực ma sát tĩnh và B đứng yên, chỉ có A chuyển động đều cho đến thời điểm $t_3$ sao cho $v_0(t_3 - t_2) = \frac{\mu mg}{k}$ thì lò xo giãn $1{,}5\frac{\mu mg}{k}$, B lại chuyển động. Quá trình lặp lại tuần hoàn với chu kỳ T.

Tính $t_3$:

$$t_3 = t_2 + \frac{\mu mg}{kv_0} = \left(\frac{7\pi}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{\frac{m}{k}} \approx 8{,}5\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (8)$$

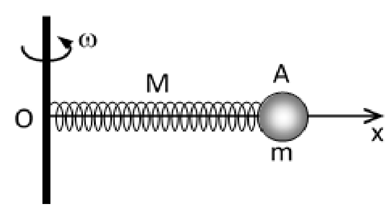
Chu kỳ chuyển động của vật B

$$T = t_3 - t_1 = \left(\frac{5\pi}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{\frac{m}{k}} \approx 6{,}4\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (9)$$

**Kết luận**: $t_1 = \frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{m}{k}}$, $t_2 = \frac{7\pi}{3}\sqrt{\frac{m}{k}}$, $t_3 = \left(\frac{7\pi}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{\frac{m}{k}}$, $T = \left(\frac{5\pi}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{\frac{m}{k}}$.

$$\begin{cases} 0 \le t < t_1 : v_B^* = 0; \\ t_1 + nT \le t < t_2 + nT : v_B^* = \mu g\sqrt{\frac{m}{k}}\left[\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t - \frac{3\pi}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\right] \quad (n = 0,1,2,3,...) \\ t_2 + nT \le t < t_3 + nT : v_B^* = 0 \end{cases}$$

**Bài 24.**



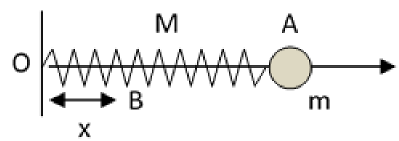

**1.** Xét một đoạn lò xo ngắn có chiều tự nhiên $Dx_0$ nằm tại điểm B cách O là x. Độ cứng của đoạn này là $k\frac{L_0}{Dx_0}$. Lực tác dụng lên vòng dây ở B là lực li tâm, ta gọi là F(x).

Đoạn lò xo này bị dãn ra là: $\dfrac{F(x)}{k\dfrac{L_0}{Dx_0}} = \dfrac{F(x)Dx_0}{kL_0}$.

Vậy: $Dx = Dx_0 + \dfrac{F(x)Dx_0}{kL_0}$.

Khối lượng một đơn vị dài của lò xo khi chưa biến dạng là $r_0 = \dfrac{M}{L_0}$, ở vị trí x là

$$r_{(x)} = \frac{r_0 Dx_0}{(1+\dfrac{F(x)}{kL_0})Dx_0} = \frac{r_0}{(1+\dfrac{F(x)}{kL_0})}$$




Phương trình định luật II Niutơn cho đoạn dx là

$$-dF(x) = dmw^2x = r_{(x)}dxw^2x = \frac{r_0w^2xdx}{(1+\dfrac{F(x)}{kL_0})}.$$

Vậy $(1+\dfrac{F(x)}{kL})dF(x) = -r_0dxw^2x$.

Tích phân hai vế ta có:

$$F(x) + \frac{F^2(x)}{2kL_0} = -r_0w^2\frac{x^2}{2} + C.$$

Tìm C như sau: Khi x = L (độ dài cần tìm của lò xo) thì $F(L) = mw^2L$ (lực giữ cho m chuyển động tròn), thay vào phương trình trên

$$C = mw^2L + \frac{(mw^2L)^2}{2kL_0} + r_0w^2\frac{L^2}{2}.$$

$$F^2(x) + 2kL_0F(x) + kL_0(r_0w^2x^2 - 2C) = 0.$$

Nghiệm là: $F(x) = kL_0\sqrt{1+\dfrac{(2C - r_0w^2x^2)}{kL_0}} - kL_0$;

$$\rho_{(x)} = \frac{\rho_0}{\left(1+\frac{F(x)}{kL_0}\right)} = \frac{\rho_0}{\sqrt{1+\frac{(2C-\rho_0\omega^2x^2)}{kL_0}}}$$

Để tìm L ta tính khối lượng M của lò xo theo L:

$$M = \int_0^L \rho_{(x)}dx = \int_0^L \frac{\rho_0}{\sqrt{1+\frac{2C}{kL_0}-\frac{\rho_0\omega^2}{kL_0}x^2}}dx\ .$$

$$M = \frac{\rho_0}{\sqrt{\frac{\rho_0\omega^2}{kL_0}}}\int_0^L \frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{2C}{kL_0}\right)\frac{kL_0}{\rho_0\omega^2}-x^2}}dx$$

Áp dụng $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}$ với $a = \sqrt{\left(1+\frac{2C}{kL_0}\right)\frac{kL_0}{\rho_0\omega^2}}$

$$M = \sqrt{\frac{\rho_0 kL_0}{\omega^2}}\arcsin\frac{L}{\sqrt{\frac{kL_0}{\rho_0\omega^2}\left(1+\frac{2C}{KL_0}\right)}}$$

hay $\frac{L}{\sqrt{\frac{kL_0}{\rho_0\omega^2}\left(1+\frac{2C}{KL_0}\right)}} = \sin\frac{M\omega}{\sqrt{\rho_0 kL_0}}$ (1)

Nếu m <<M, ta coi m= 0 thì $C = \rho_0\omega^2\frac{L^2}{2}$.

$$\sin\frac{M\omega}{\sqrt{\rho_0 kL_0}} = \frac{L}{\sqrt{L^2+\frac{kL_0}{\rho_0\omega^2}}} \rightarrow L = \sqrt{\frac{kL_0}{\rho_0\omega^2}}\tan\frac{M\omega}{\sqrt{\rho_0 kL_0}} = L_0\sqrt{\frac{k}{M\omega^2}}\tan\sqrt{\frac{M\omega^2}{k}}$$

Nếu có kể đến m thì:

$$\frac{L}{\sqrt{\frac{1}{\rho_0\omega^2}\left(kL_0+2m\omega^2L+\frac{(m\omega^2L)^2}{kL_0}+\rho_0\omega^2L^2\right)}}=\sin\frac{M\omega}{\sqrt{\rho_0 kL_0}}$$

$$\frac{1}{\rho_0\omega^2}\left(\frac{kL_0}{L^2}+2m\omega^2\frac{1}{L}+\frac{(m\omega^2)^2}{kL_0}+\rho_0\omega^2\right)=\frac{1}{\sin^2\frac{M\omega}{\sqrt{\rho_0 kL_0}}}$$

$$\frac{1}{\rho_0\omega^2}\left(\frac{kL_0}{L^2}+2m\omega^2\frac{1}{L}+\frac{(m\omega^2)^2}{kL_0}\right)=\frac{1}{\tan^2\frac{M\omega}{\sqrt{\rho_0 kL_0}}}$$

Giải tìm được $L=\dfrac{\frac{kL_0}{\omega^2\rho_0}}{\sqrt{\frac{kL_0}{\omega^2\rho_0}}\cdot\frac{1}{\tan\frac{M\omega}{\sqrt{\rho_0 kL_0}}}-\frac{m}{\rho_0}}=\dfrac{\frac{k}{\omega^2M}}{\sqrt{\frac{k}{\omega^2M}}\cdot\frac{1}{\tan\sqrt{\frac{M\omega^2}{k}}}-\frac{m}{M}}L_0$

Điều kiện để tồn tại L: $\sqrt{\dfrac{k}{\omega^2M}}\cdot\dfrac{1}{\tan\sqrt{\frac{M\omega^2}{k}}}-\dfrac{m}{M}>0$ hay $m<\sqrt{\dfrac{kM}{\omega^2}}\cdot\dfrac{1}{\tan\sqrt{\frac{M\omega^2}{k}}}$

**2.** Động năng của chuyển động quay: Momen quán tính của quả cầu đối với trục quay đi qua O.

$$I=\int_0^L\frac{\rho_0x^2dx}{\left(1+\frac{F(x)}{kL_0}\right)}+mL^2=\frac{\rho_0}{\sqrt{\frac{\rho_0\omega^2}{kL_0}}}\int_0^L\frac{x^2}{\sqrt{\frac{kL_0+2C}{\rho_0\omega^2}-x^2}}dx+mL^2$$

Áp dụng: $\displaystyle\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a}-\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)$

$$I=\frac{\rho_0}{\sqrt{\frac{\rho_0\omega^2}{kL_0}}}\frac{kL_0+2C}{2\rho_0\omega^2}\left.\left(\arcsin\frac{x}{\sqrt{\frac{kL_0+2C}{2\rho_0\omega^2}}}-\frac{x}{\sqrt{\frac{kL_0+2C}{2\rho_0\omega^2}}}\sqrt{1-\frac{x^2}{\frac{kL_0+2C}{2\rho_0\omega^2}}}\right)\right|_0^L+mL^2$$

$$I = \frac{r_0}{\sqrt{\frac{r_0 w^2}{kL_0}}}\frac{kL_0 + 2C}{2r_0 w^2}\left(\arcsin\frac{L}{\sqrt{\frac{kL_0+2C}{2r_0 w^2}}} - \frac{L}{\sqrt{\frac{kL_0+2C}{2r_0 w^2}}}\sqrt{1-\frac{L^2}{\frac{kL_0+2C}{2r_0 w^2}}}\right) + mL^2$$

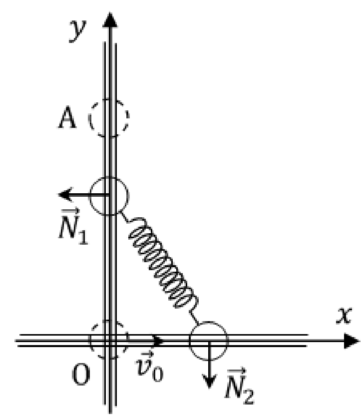
Vậy động năng của chuyển động quay là:

$$W = \frac{w^2}{2}\left\{\sqrt{\frac{kL_0}{r_0 w^2}}\frac{kL_0 + 2C}{2w^2}\left(\arcsin\frac{L}{\sqrt{\frac{kL_0+2C}{2r_0 w^2}}} - \frac{L}{\sqrt{\frac{kL_0+2C}{2r_0 w^2}}}\sqrt{1-\frac{L^2}{\frac{kL_0+2C}{2r_0 w^2}}}\right) + mL^2\right\}.$$

Trong đó: $C = mw^2L + \frac{(mw^2L)^2}{2kL_0} + r_0 w^2\frac{L^2}{2}$.

**Bài 25.**

1. Vì hai quả cầu cùng khối lượng nên khối tâm $C$ của hệ hai quả cầu nằm tại là trung điểm của lò xo. Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng (chú ý là $\vec{v}_1.\vec{v}_2 = 0$) ta có




$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 + m\vec{v}_1.\vec{v}_2 + \frac{1}{2}k\Delta\ell^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 \Leftrightarrow 4v_C^2 + \frac{k\ell^2}{m}\left(\frac{\Delta\ell}{\ell}\right)^2 = v_0^2$$

Tại thời điểm lò xo có độ dãn cực đại khoảng cách từ $C$ đến $O$ là lớn nhất nên $\vec{v}_C$ vuông góc với $CO$. Mặt khác vì momen động lượng của hệ luôn bằng 0 nên momen của ngoại lực luôn bằng 0

$$N_1 y = N_2 x \Leftrightarrow (-2m\ddot{x}_C)2y_C = (-2m\ddot{y}_C)x_C$$

$$\Rightarrow \dot{x}_C y_C - \dot{y}_C x_C = const \Leftrightarrow \frac{\ell + \Delta\ell}{2}v_C = \frac{\ell}{2}\frac{v_0}{2} \Rightarrow$$

$$2v_C = \frac{v_0}{1+\frac{\Delta\ell}{\ell}}$$

Từ đó ta có

$$\frac{1}{\left(1+\frac{\Delta\ell}{\ell}\right)^2} + \frac{k\ell^2}{mv_0^2}\left(\frac{\Delta\ell}{\ell}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{\Delta\ell}{\ell}\left(\left(\frac{\Delta\ell}{\ell}\right)^3 + 2\left(\frac{\Delta\ell}{\ell}\right)^2 + \left(1-\frac{mv_0^2}{k\ell^2}\right)\frac{\Delta\ell}{\ell} - \frac{2mv_0^2}{k\ell^2}\right) = 0$$

Thay số ta được

$$\frac{\Delta\ell}{\ell}\left(\left(\frac{\Delta\ell}{\ell}\right)^3 + 2\left(\frac{\Delta\ell}{\ell}\right)^2 + 0{,}96\frac{\Delta\ell}{\ell} - 0{,}08\right) = 0$$

Giải phương trình trên và loại nghiệm $\Delta\ell/\ell = 0$ ta được

$$\frac{\Delta\ell}{\ell} \approx 0{,}0721$$

2. Khi 2 quả cầu chuyển động không ma sát trên mặt sàn nằm ngang thì momen động lượng và cơ năng của hệ trong hệ quy chiếu gắn với khối tâm đều bảo toàn nên ta có

$$2\frac{mv^2}{2} + \frac{k\Delta\ell^2}{2} = 2\frac{m\left(\frac{v_0}{2}\right)^2}{2} \Rightarrow \left(\frac{2v}{v_0}\right)^2 + 2\frac{k\ell^2}{mv_0^2}\left(\frac{\Delta\ell}{\ell}\right)^2 = 1$$

$$2\frac{\ell+\Delta\ell}{2}mv = 2\frac{\ell}{2}m\frac{v_0}{2} \Rightarrow \frac{2v}{v_0} = \frac{1}{1+\frac{\Delta\ell}{\ell}}$$

Từ đó ta có

$$\frac{1}{\left(1+\frac{\Delta\ell}{\ell}\right)^2} + 2\frac{k\ell^2}{mv_0^2}\left(\frac{\Delta\ell}{\ell}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{\Delta\ell}{\ell}\left(\left(\frac{\Delta\ell}{\ell}\right)^3 + 2\left(\frac{\Delta\ell}{\ell}\right)^2 + \left(1-\frac{mv_0^2}{2k\ell^2}\right)\frac{\Delta\ell}{\ell} - \frac{mv_0^2}{k\ell^2}\right) = 0$$

Thay số ta được: $\frac{\Delta\ell}{\ell}\left(\left(\frac{\Delta\ell}{\ell}\right)^3 + 2\left(\frac{\Delta\ell}{\ell}\right)^2 + 0{,}98\frac{\Delta\ell}{\ell} - 0{,}04\right) = 0$

Giải phương trình trên và loại nghiệm $\Delta\ell/\ell = 0$ ta được: $\frac{\Delta\ell}{\ell} \approx 0{,}0378$

**Bài 26.** Ta sẽ lần lượt xác định:

- Tần số dao động.
- Năng lượng mất mát trong một dao động.
- Biên độ của dao động theo thời gian.

a) Tần số dao động:

- Khối lượng của phần dây chưa nằm trên sàn: σL.

- Khi nâng dây lên, lực phục hồi là: -ky – σgy.

Vì vậy phương trình chuyển động: -(k + σg)y = (σL)y” (1)

Tần số dao động: $\omega = \sqrt{\frac{k+\sigma g}{\sigma L}} = \sqrt{\frac{k}{M}+\frac{g}{L}}$ (2)

b) Năng mất mát trong một động:

Li độ của dây đối với vị trí cân bằng: x(t) = A(t)cos(ωt)

- Khi một khối lượng dm va chạm vào sàn, động năng bị mất đi một lượng $\frac{1}{2}dmv^2$.

- Trong thời gian ngắn dt ta có dm = σvdt. Vì vậy năng lượng tiêu hao là $\left|\frac{1}{2}\sigma v^3 dt\right|$

Từ (1) ta có: v(t) = -ωA(t)sin(ωt)

- Độ biến thiên năng lượng (năng lượng mất mát) trong một nửa chu kì khi dây xuống là:

$$\Delta E_x = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \sigma\omega^3 A^3 \sin^3(\omega t)dt \qquad (3)$$

+ Đặt θ = ωt ta có : $\int_0^{\pi} \sin^3\theta d\theta = \int_0^{\pi}(1-\cos^2\theta)\sin\theta d\theta = \left(-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3}\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{4}{3}$ (4)

Do đó $\Delta E_x = -\frac{2}{3}\sigma\omega^2 A^3$ (5)

- Khi dây đang nâng lên, thì khối lượng dm nhập vào sợi dây đang đi lên với vận tốc v sẽ nhận được động năng $\frac{1}{2}(dm)v^2$, từ đó thu được động lượng dp = (dm)v

- Công của lò xo để nâng dây lên (ứng với khối lượng dm): W = $\int Fdx = \int Fvdt$

- Trong thời gian rất ngắn xem v không đổi: W = $v\int Fdx$ = v(dp) = (dm)$v^2$ (6)

Một nửa công này chuyển thành động năng $\frac{1}{2}(dm)v^2$, vì vậy nửa còn lại chuyển thành nhiệt năng.

- Năng lượng mất mát khi dây đi lên: $\Delta E_L = \frac{1}{2}(dm)v^2 = \frac{1}{2}|\sigma vdt|v^2 = \left|\frac{1}{2}\sigma v^3 dt\right|$

- Tổng năng lượng mất mát trong một chu kì dao động: $\Delta E = \Delta E_x + \Delta E_L = -\frac{4}{3}\sigma\omega^2 A^3$ (7)

c) Biên độ dao động:

Ta biết năng lượng của dây khi dao động với biên độ A là: E = $\frac{M\omega^2 A^2}{2}$. Vì vậy dE = $M\omega^2 AdA$

- Số dao động trong thời gian dt = $\frac{\omega dt}{2\pi}$

- Từ phương trình (7) (M $\approx \sigma L$), ta có: $(\sigma L)\omega^2 AdA = -\left(\frac{\omega dt}{2\pi}\right)\left(\frac{4}{3}\sigma\omega^2 A^3\right)$

$$\frac{dA}{A^2} = -\left(\frac{2\omega}{3\pi L}\right)dt \qquad (8)$$

- Lấy tích phân theo 9t) và xét điều kiện ban đầu A(0) ≡b : $A(t) = \frac{1}{\frac{1}{b} + \frac{2\omega t}{3\pi L}}$ (9)

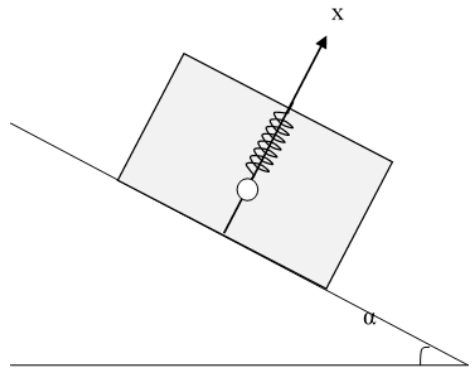
Chý ý sau khoảng thời gian lớn: A(t) $\approx \frac{3\pi L}{2\omega t}$. Đặt n = $\frac{\omega t}{2\pi}$ ta có: A(t) $\approx \frac{3L}{4n}$

**Bài 27.** Gọi F là lực đàn hồi của lò xo tác dụng lên M

Ta có Mgcosα – N – F = 0 ⇒ N = Mgcosα – F ≥ 0

Với F = k(x + Δl) = kx + kΔl = kx + mgcosα

$\Rightarrow$ Mgcosα $\geq kA\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ + mgcosα với mọi t




Với k = $m\omega^2 = m\frac{4\pi^2}{T^2} \Rightarrow$ Mgcosα ≥ m$\frac{4\pi^2}{T^2}$A + mgcosα

$$\Rightarrow \frac{M}{m} \geq \frac{4\pi^2}{gT^2}.\frac{A}{\cos\alpha} + 1$$

1) Với N = (M + m)gcosα - mω²Asin(ωt)

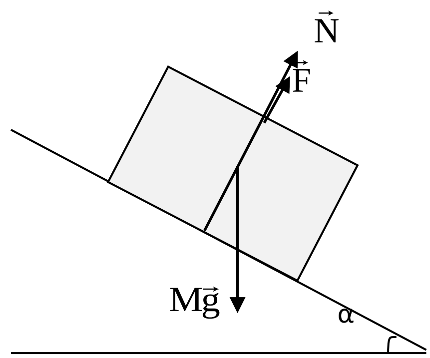
Áp dụng đl II Niu tơn cho hòm và vật theo phương mặt phẳng nghiêng ta có:

$$(M + m)a = (M + m)g\sin\alpha - \mu N$$

$$\Rightarrow a = v' = g\sin\alpha - \tan\alpha(g\cos\alpha - \frac{m}{m+M}\omega^2\sin\omega t)$$

$$= \frac{m}{m+M}\tan\alpha.\frac{4\pi^2}{T^2}.A\sin\omega t$$

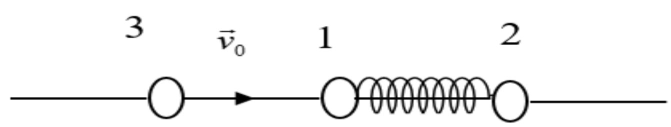
$$\Rightarrow v = \int_0^t a dt = \frac{m}{m+M}.\frac{2\pi}{T}A\tan\alpha.(1-\cos\omega t)$$




Vậy $\bar{v} = \frac{m}{m+M}.\frac{2\pi}{T}A\tan\alpha.$

**Bài 28.**

**1.Chuyển động cuả khối tâm G:**




Vì quả cầu 3 va chạm đàn hồi với quả cầu 1 và hệ kín nên động lượng(theo phương ngang) và động năng được bảo toàn.Gọi $v_1, v_3$ là vận tốc quả cầu 1 và 3 sau va chạm,ta có:

$$\begin{cases} \frac{m}{2}v_0 = mv_1 + \frac{m}{2}v_3 \\ \frac{m}{2}\frac{v_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{m}{2}\frac{v_3^2}{2} \end{cases} \Rightarrow 3v_3^2 - 2v_0v_3 - v_0^2 \quad (3)$$

(3) có nghiệm $v_3 = v_0$(loại vì vô lý) và $v_3 = -\frac{v_0}{3}$ (4)

Đưa (4) vào (1) ta có: $v_1 = \frac{2v_0}{3}$

Hệ hai quả cầu 1 và 2 là hệ cô lập nên khối tâm G chuyển động thẳng đều.Từ toạ độ khối tâm,ta có :

$$x_G = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} \rightarrow \frac{dx_G}{dt} = v_G = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} \quad (6)$$

Sau va chạm: $v_1 = \frac{2v_0}{3}$ và $v_2 = 0$ nên (6) cho ta: $v_G = \dfrac{m_1\frac{2v_0}{3}}{m_1 + m_2} = \dfrac{m\frac{2v_0}{3}}{m+m} = \dfrac{v_0}{3}$ (7)

**2.Dao động cuả quả cầu 1 và 2**

+Chọn trục toạ độ Ox nằm ngang,gốc O trùng với khối tâm G cuả hai quả cầu

+Khi lò xo chưa biến dạng,gọi $0_1, 0_2$ là vị trí cân bằng cuả hai quả cầu.Lúc đó $x_1, x_2$ là toạ độ cuả hai quả cầu.Toạ độ cuả khối tâm là : $x_G = \dfrac{-m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} = 0$

Với $m_1 = m_2$ thì $x_1 = x_2 = \frac{l}{2}$

Phương trình chuyển động cuả $m_1 = m$ là: $mx'' = -K'x \rightarrow x'' + \frac{K'}{m}x = 0$ (8)

Do khối tâm đứng yên và luôn có $x_1 = x_2 = \frac{l}{2}$ nên ta coi G là nơi buộc chặt cuả hai con lắccó khối lượng $m_1, m_2$ và chiều dài lò xo là $\frac{l}{2}$

Độ cứng cuả lò xo tỉ lệ nghịch với chiều dài nên K’ = 2 K,nên (8) viết là: $x'' + \frac{2K}{m}x = 0$

Tần số góc cuả dao động là : $\omega_1 = \sqrt{\frac{2K}{m}}$

Chu kỳ dao động : $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2K}}$

Tương tự,$m_2$ có chu kỳ dao động : $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2K}}$

Hai dao động này ngược pha nhau

Vận tốc cuả quả cầu 1 và 2 đối với khối tâm:

$$v_{1G}=v_1-v_G=\frac{2v_0}{3}-\frac{v_0}{3}=\frac{v_0}{3}$$

$$v_{2G}=v_2-v_G=0-\frac{v_0}{3}=-\frac{v_0}{3}$$

Cơ năng bảo toàn nên biên độ dao động được tính:

$$\frac{m_1v_{1G}^2}{2}=\frac{2KA_1^2}{2}\rightarrow A_1=\frac{v_0}{3}\sqrt{\frac{m}{2K}}$$

$$\frac{m_2v_{2G}^2}{2}=\frac{2KA_2^2}{2}\rightarrow A_2=\frac{v_0}{3}\sqrt{\frac{m}{2K}}$$

**Bài 29. 1.** Tại VTCB lò xo nén $\Delta l=\dfrac{mg\sin\alpha}{k}=0,05m$

Lúc chạm vào lò xo, vật có vận tốc $v=\sqrt{2gL\sin\alpha}=0,5m/s$

Biên độ $A=\sqrt{\dfrac{v^2}{\omega^2}+\Delta l^2}=0,05\sqrt{2}$ m

Độ nén cực đại của lò xo $\Delta l_{max}=\Delta l+A=0,121m$

Vận tốc cực đại của vật $v_{max}=\omega A=0,5\sqrt{2}$ m/s

**2.** Thời gian vật trượt từ A đến I: $t_1=\dfrac{v}{a}=\dfrac{v}{g\sin\alpha}=0,1s$

Dựa vào liên hệ giữa dao động điều hòa và chuyển động tròn đều, suy ra thời gian vật chuyển động từ I đến khi lò xo nén cực đại: $t_2=\dfrac{3T}{8}=0,236\text{s}$

Thời gian cần tìm: $t=2(t_1+t_2)=0,672\text{s}$

**Bài 30.**

**1.** Tìm độ co ban đầu tối đa $\Delta l$ của lò xo để B không bị nâng lên khi đốt dây.

A dao động điều hòa xung quanh vị trí cân bằng, ở VTCB lò xo nén $\Delta l_0=\dfrac{mg}{k}$

Lực đàn hồi kéo B lên đạt giá trị lớn nhất khi A ở vị trí cao nhất cách VTCB một đoạn là a, phản lực của mặt đất tác dụng lên B là

$$N = P - F_{dh} = mg - k(a - \Delta l_0) \geq 0 \to a \leq \frac{2mg}{k}$$

Độ co tối đa ứng với A ở vị trí thấp nhất $\Delta l = \Delta l_0 + a \leq \frac{3mg}{k}$

Vậy muốn nâng B khỏi mặt đất thì $\Delta l \geq \frac{3mg}{k}$ . Vậy $\Delta l_{\min} = \frac{3mg}{k}$

**2.** B bị nâng lên.

- Tìm vận tốc $v_0$ của A khi B bắt đầu rời sàn:

Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng, ta có:

$$\frac{1}{2}k(\frac{7mg}{k})^2 = \frac{1}{2}k(\frac{mg}{k})^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh$$

Với $h = \frac{8mg}{k} \to v_0^2 = \frac{32mg^2}{k}$

- Khi đó vận tốc của khối tâm là $v_G = \frac{mv_0}{2m} = \frac{v_0}{2}$

Vì lực đàn hồi là nội lực nên khối tâm G chuyển động như một vật bị ném lên thẳng đứng với vận tốc ban đầu là $v_G \to h_G = \frac{v_G^2}{2g} = \frac{4mg}{k}$

Khi B bắt đầu rời sàn, khối tâm đã đi được đoạn $\frac{h}{2} = \frac{4mg}{k}$

Vậy độ cao được nâng lên của khối tâm hệ là $\frac{8mg}{k}$

**Bài 31.** Chọn chiều dương là chiều của $\vec{v_0}$ .

- Khối tâm G của hệ chuyển động thẳng đều với vận tốc $v_G = \frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2}$

- Chọn hệ qui chiếu gắn với khối tâm G. Trong HQC này ta coi hệ như hai con lắc được "treo" vào điểm cố định G. Hai con lắc dao động điều hòa đối với khối tâm G. Gọi $l_1$, $k_1$ và $l_2$, $k_2$ lần lượt là chiều dài tự nhiên và độ cứng của mỗi con lắc này.

Ta có: $l_1 = \dfrac{m_2 l}{m_1 + m_2}$ ; $l_2 = \dfrac{m_1 l}{m_1 + m_2}$ ; $k_1 l_1 = k_2 l_2 = kl$

Suy ra: $k_1 = \dfrac{m_1 + m_2}{m_2} k$ ; $k_2 = \dfrac{m_1 + m_2}{m_1} k$

$\rightarrow \omega_1 = \omega_2 = \sqrt{k(\dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_2})}$ ; Chu kì dao động

$$T_1 = T_2 = 2\pi \sqrt{\dfrac{\dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}}{k}}$$

Gọi $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ là khối lượng rút gọn của hệ thì chu kì dao động của mỗi con lắc hay của hệ dao động là $\rightarrow T = 2\pi \sqrt{\dfrac{\mu}{k}}$ ; Vậy hệ tương đương với một con lắc gồm một lò xo có độ cứng k và một khối lượng bằng khối lượng rút gọn của hệ.

- Tìm biên độ dao động của mỗi con lắc.

Trong HQC khối tâm, tại thời điểm t = 0, lò xo chưa biến dạng, hai vật ở VTCB và có vận tốc lần lượt là:

$$v_{1G} = v_0 - v_G = v_0 - \frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 v_0}{m_1 + m_2} > 0 \,;\, v_{2G} = 0 - v_G = -\frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2} < 0$$

Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng:

Vật 1: $\dfrac{1}{2} k_1 A_1^2 = \dfrac{1}{2} m_1 v_{1G}^2 \rightarrow A_1 = \dfrac{m_2 v_0}{m_1 + m_2} \sqrt{\dfrac{\mu}{k}}$

Vật 2: $\dfrac{1}{2} k_2 A_2^2 = \dfrac{1}{2} m_2 v_{2G}^2 \rightarrow A_2 = \dfrac{m_1 v_0}{m_1 + m_2} \sqrt{\dfrac{\mu}{k}}$

Hai quả cầu dao động ngược pha nhau.

Độ nén cực đại hay độ dãn cực đại của lò xo là $A = A_1 + A_2 = v_0 \sqrt{\dfrac{\mu}{k}}$

**Bài 32.** Xét theo phương ngang khi có sự tương tác giữa các quả cầu, gọi $F_1$ là lực tác dụng lên quả cầu m, $F_2$ là lực tác dụng lên quả cầu 6m. Tại thời điểm t, khi hai quả có li độ $x_1$, $x_2$:

$$F_1 = mx_1''; F_2 = 6mx_2''$$

- Theo định luật III Newton:

$$F_1 = -F_2 \to x_2'' - x_1'' = F_2\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{6m}\right) = \frac{7F_2}{6m} \quad (1)$$

- Độ biến dạng lò xo tại thời điểm t:

$\Delta l = l_0 - l(t) = 6R - [x_2 - x_1 - 2R] = 8R - (x_2 - x_1)$

Tìm được lực đàn hồi: $F_1 = F_2 = k[8R - (x_2 - x_1)]$ (2)

- Từ (1) và (2) ta có:

$$(x_2 - x_1 - 8R)'' + \frac{7k}{6m}(x_2 - x_1 - 8R) = 0$$

Nghiệm của phương trình là:

$$x = x_2 - x_1 - 8R = A\cos(\omega t + \varphi),\ \omega = \sqrt{7k/6m}$$

- Từ điều kiện ban đầu (t = 0): $\begin{cases} (x_2 - x_1 - 8R)\big|_{t=0} = 0 \\ v_2(0) - v_1(0) = -v_0 \end{cases}$

$$\to x = x_2 - x_1 - 8R = v_0\sqrt{\frac{6m}{7k}}\cos\left(\sqrt{\frac{7k}{6m}}t + \frac{\pi}{2}\right)$$

(Nếu chọn một quả cầu làm HQC thì đây là phương trình dao động của quả cầu còn lại trong HQC đó)

Và $\Delta l = 8R - (x_2 - x_1) = v_0\sqrt{\frac{6m}{7k}}\sin\left(\sqrt{\frac{7k}{6m}}t\right)$

$$\Rightarrow \Delta l_{max} = v_0\sqrt{\frac{6m}{7k}}$$

- Thời gian m tiếp xúc với lò xo bằng nửa chu kì dao động

$$\tau = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\frac{6m}{7k}}$$

**Bài 33.** a) $T = mg(3\cos\alpha - 2\cos\alpha_m)$

$T_{\max} = mg(3 - 2\cos\alpha_m) = 40(N)$

b) $T_{max}$= 3mg. Từ hệ thức trên suy ra: $3 - 2\cos\alpha_m = 3$. kết quả $\alpha_m = 90^0$

c) Chọn mốc thế năng tại VT thấp nhất.

Cơ năng tại A(ngang): $E_A = mg(l_0 + \Delta l)$ (1)

Cơ năng tại B(thấp nhất): $E_B = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k\Delta l^2$ (2)

Lực đàn hồi tại VT B: $F = k\Delta l = mg + m\frac{v^2}{l_0 + \Delta l}$ (3)

Từ (1),(2)$\Rightarrow mv^2 = 2mg(l_0 + \Delta l) - k\Delta l^2$

Thay vào (3): $k(l_0 + \Delta l) = mg(l_0 + \Delta l) + 2mg(l_0 + \Delta l) - k\Delta l^2$

$\Delta l^2 + 0,24\Delta l - 0,036 = 0$

Giải ra: $\Delta l$ =0,104(m)

**Bài 34**. Xét trong hệ qui chiếu không quán tính với tốc độ góc $\omega$.

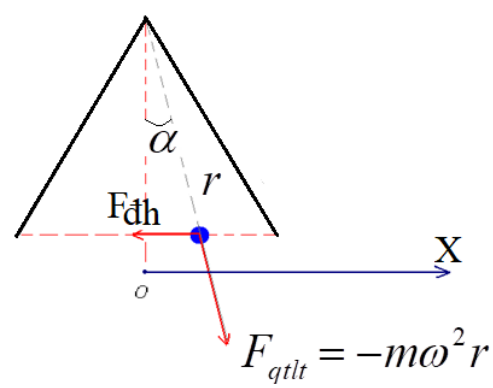
Tại vị trí vật lệch khỏi VTCB một đoạn X ta có

$mX'' = -2KX + m\omega^2 r\sin\alpha \quad (r\sin\alpha = X)$

$\Leftrightarrow mX'' = -2KX + m\omega^2 X \Rightarrow X'' + (\frac{2K}{m} - \omega^2)X = 0$

Vật dao động điều hòa với tần số

$\Rightarrow f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2K}{m} - \omega^2} \approx 1,1s$

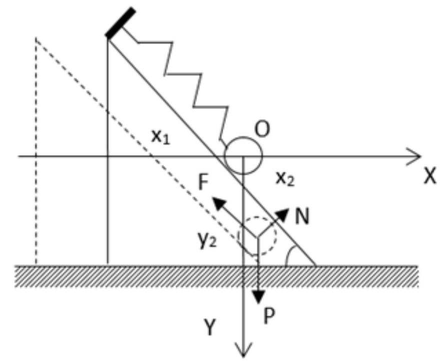


Hình 1.36S

**Bài 35**.

Chọn hệ tọa độ như hình vẽ, gốc O ở vị trí cân bằng của m. Tại vị trí cân bằng lò xo giãn:

$$\Delta l = \frac{mg\sin\alpha}{k}$$



Hình 1.37S

Xét hệ ở thời điểm t bất kỳ, khi đó m có tọa độ ($x_2$, $y_2$), còn M có tọa độ $x_1$. Động lượng của hệ theo phương ngang bảo toàn: $M.x_1 + m.x_2 = 0$

Mối liên hệ giữa các tọa độ của m và M:

$$y_2 = (x_2 - x_1).\text{tg}\alpha$$

$$\rightarrow \quad y_2 = x_2.\text{tg}\alpha\left(1+\frac{m}{M}\right) \rightarrow$$

$$a_{2y} = a_{2x}.\text{tg}\alpha\left(1+\frac{m}{M}\right)$$

Xét vật m: chịu 3 lực tác dụng. Phương trình định luật II Niutơn cho m:

$$m.\vec{a}_2 = \vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}$$

Chiếu lên hai trục tọa độ:

$$ma_{2x} = N\sin\alpha - F\cos\alpha$$
$$ma_{2y} = mg - N\cos\alpha - F\sin\alpha$$

trong đó: $\Delta l = \Delta l_0 + \dfrac{x_2 - x_1}{\cos\alpha} = \Delta l_0 + \dfrac{x_2}{\cos\alpha}\left(1+\dfrac{m}{M}\right)$

Từ các phương trình trên ta có:

$$a_{2x} = -\frac{k}{m}.\frac{M+m}{M+m.\sin^2\alpha}x_2 = x_2''$$

Vậy chu kỳ dao động là: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m\left(M+m\sin^2\alpha\right)}{k\left(M+m\right)}}$

* Hai trường hợp riêng:

Khi $\alpha$ = 0 thì $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{mM}{k\left(M+m\right)}}$ ; Khi = $90^0$ thì $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

**Bài 36.** a.Chọn O là một điểm gắn cố định trên sàn làm cực,$M_1$ và $M_2$ lần lượt là vị trí vật 1 và 2. Theo định về khối tâm :

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{r_G} = \frac{m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\overrightarrow{OM_2}}{m_1 + m_2} \Rightarrow \overrightarrow{r_G} = \frac{m_1\overrightarrow{r_1} + m_2\overrightarrow{r_2}}{m_1 + m_2} \qquad (1.a1)$$

Từ (1) và (2) suy ra

Tọa độ của $M_1$,$M_2$ đối với khối tâm G là

$$\begin{cases} \overrightarrow{r_{1G}} = \overrightarrow{GM_1} = \overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_G} = \overrightarrow{r_1} - \dfrac{m_1\overrightarrow{r_1} + m_2\overrightarrow{r_2}}{m_1 + m_2} = \dfrac{m_2(\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2})}{m_1 + m_2} \\ \overrightarrow{r_{2G}} = \overrightarrow{GM_2} = \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_G} = \overrightarrow{r_2} - \dfrac{m_1\overrightarrow{r_1} + m_2\overrightarrow{r_2}}{m_1 + m_2} = \dfrac{m_1(\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1})}{m_1 + m_2} \end{cases} \qquad (1.a2)$$

Hay
$$\begin{cases} \dot{\overrightarrow{r_{1G}}} = \dfrac{m_2(\dot{\overrightarrow{r_1}} - \dot{\overrightarrow{r_2}})}{m_1 + m_2} \\ \dot{\overrightarrow{r_{2G}}} = \dfrac{m_1(\dot{\overrightarrow{r_2}} - \dot{\overrightarrow{r_1}})}{m_1 + m_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\dot{\overrightarrow{r_{1G}}}\right)^2 = (\dfrac{m_2}{m_1 + m_2})^2\left[(\dot{\overrightarrow{r_1}})^2 + (\dot{\overrightarrow{r_2}})^2 - 2\dot{\overrightarrow{r_1}}\dot{\overrightarrow{r_2}}\right] \\ \left(\dot{\overrightarrow{r_{2G}}}\right)^2 = (\dfrac{m_1}{m_1 + m_2})^2\left[(\dot{\overrightarrow{r_1}})^2 + (\dot{\overrightarrow{r_2}})^2 - 2\dot{\overrightarrow{r_1}}\dot{\overrightarrow{r_2}}\right] \end{cases} \qquad (1.a3)$$

Vì $\left.\dot{\overrightarrow{r_1}}\dot{\overrightarrow{r_2}}\right|_{t=0} = 0$ nên

$$\begin{cases} \left(\dot{\overrightarrow{r_{1G}}}\right)^2 = \left(\dfrac{m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 (v_1^2 + v_2^2) \\ \left(\dot{\overrightarrow{r_{2G}}}\right)^2 = \left(\dfrac{m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 (v_1^2 + v_2^2) \end{cases}$$

Vậy cơ năng hệ hai vật trong HQC gắn với G chính là tổng động năng ban đầu các vật đối với G:

$$E_G = K_G\big|_{t=0} = \frac{m_1(\dot{\overrightarrow{r_{1G}}})^2}{2} + \frac{m_2(\dot{\overrightarrow{r_{2G}}})^2}{2} = \frac{m_1}{2}\left(\frac{m_2}{(m_1 + m_2)}\right)^2 (v_1^2 + v_2^2) + \frac{m_2}{2}\left(\frac{m_1}{(m_1 + m_2)}\right)^2 (v_1^2 + v_2^2)$$

Vậy $E_G = K_G\big|_{t=0} = \dfrac{1}{2}\dfrac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)}\left[v_1^2 + v_2^2\right]$

**b.**Trường hợp 2: Các véc tơ $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ ngược chiều nhau và trùng với trục lò xo. Tìm chu kì và biên độ dao động mỗi vật.

-Vì trong hệ khối tâm G, nên G đứng yên, do đó ta coi mỗi vật dao động điều hòa đối với G. Gọi $l_1, l_2$ là chiều dài tự nhiên của mỗi lò xo trong hệ G:

$$m_1 l_1 = m_2 l_2 \Rightarrow l_1 = \frac{m_2}{m_1} l_2$$

Mặt khác tổng $l_1$ và $l_2$ là chiều dài tự nhiên của lò xo ban đầu: $l_1 + l_2 = l_0$

Từ đó ta suy ra $\frac{m_2}{m_1} l_2 + l_2 = l_0 \Rightarrow l_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} l_0$; $l_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} l_0$ (1.b1)

Mặt khác độ cứng lò xo tỉ lệ nghịch với chiều dài tự nhiên tương ứng của chúng:

$$\frac{k}{k_1} = \frac{l_1}{l_0} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = \dfrac{m_1 + m_2}{m_2} k \\ k_2 = \dfrac{m_1 + m_2}{m_1} k \end{cases} \qquad (1.b.2)$$

Chu kì dao động của các vật nặng trong HQC gắn khối tâm G là: $\begin{cases} T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m_1}{k_1}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)k}} \\ T_2 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m_2}{k_2}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)k}} \end{cases}$

(1.b.3)

Theo (1.a.3) $\begin{cases} \vec{\dot{r}}_{1G} = \dfrac{m_2(\vec{\dot{r}}_1 - \vec{\dot{r}}_2)}{m_1 + m_2} \\ \vec{\dot{r}}_{2G} = \dfrac{m_1(\vec{\dot{r}}_2 - \vec{\dot{r}}_1)}{m_1 + m_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\vec{\dot{r}}_{1G}\right)^2 = (\dfrac{m_2}{m_1 + m_2})^2\left[(\vec{\dot{r}}_1)^2 + (\vec{\dot{r}}_2)^2 - 2\vec{\dot{r}}_1\vec{\dot{r}}_2\right] \\ \left(\vec{\dot{r}}_{2G}\right)^2 = (\dfrac{m_1}{m_1 + m_2})^2\left[(\vec{\dot{r}}_1)^2 + (\vec{\dot{r}}_2)^2 - 2\vec{\dot{r}}_1\vec{\dot{r}}_2\right] \end{cases}$ nhưng vì $\left.\vec{\dot{r}}_1\vec{\dot{r}}_2\right|_{t=0} = -v_1 v_2 < 0$

với $v_1, v_2$ có giá trị số học

Do vậy $\begin{cases} \left(\vec{\dot{r}}_{1G}\right)^2 = (\dfrac{m_2}{m_1 + m_2})^2\left[(\vec{\dot{r}}_1)^2 + (\vec{\dot{r}}_2)^2 - 2\vec{\dot{r}}_1\vec{\dot{r}}_2\right] = (\dfrac{m_2}{m_1 + m_2})^2(v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2) = (\dfrac{m_2}{m_1 + m_2})^2(v_1 + v_2)^2 \\ \left(\vec{\dot{r}}_{2G}\right)^2 = (\dfrac{m_2}{m_1 + m_2})^2\left[(\vec{\dot{r}}_1)^2 + (\vec{\dot{r}}_2)^2 - 2\vec{\dot{r}}_1\vec{\dot{r}}_2\right] = .... = (\dfrac{m_2}{m_1 + m_2})^2(v_1 + v_2)^2 \end{cases}$

Mặt khác $\begin{cases} \dfrac{m_1}{2}\left(\dot{\vec{r}}_{1G}\right)^2 = \dfrac{1}{2}k_1A_1^2 \\ \dfrac{m_2}{2}\left(\dot{\vec{r}}_{2G}\right)^2 = \dfrac{1}{2}k_2A_2^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2}k_1A_1^2 = \dfrac{m_1}{2}.\left(\dfrac{m_2}{m_1+m_2}\right)^2(v_1+v_2)^2 \\ \dfrac{1}{2}k_2A_2^2 = \dfrac{m_2}{2}.\left(\dfrac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2(v_1+v_2)^2 \end{cases}$

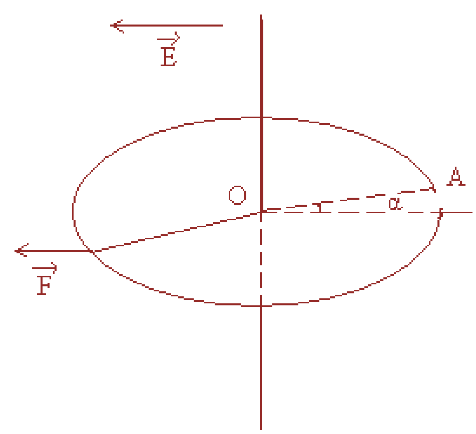
Hay $\begin{cases} \dfrac{1}{2}(\dfrac{m_1+m_2}{m_2}k)A_1^2 = \dfrac{m_1}{2}.\left(\dfrac{m_2}{m_1+m_2}\right)^2(v_1+v_2)^2 \\ \dfrac{1}{2}(\dfrac{m_1+m_2}{m_1}k)A_2^2 = \dfrac{m_2}{2}.\left(\dfrac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2(v_1+v_2)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1^2 = \dfrac{m_1m_2^3(v_1+v_2)^2}{k(m_1+m_2)^3} \\ A_2^2 = \dfrac{m_2m_1^3(v_1+v_2)^2}{k(m_1+m_2)^3} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_1 = \dfrac{m_2}{(m_1+m_2)}(v_1+v_2)\sqrt{\dfrac{m_1m_2}{k(m_1+m_2)}} \\ A_2 = \dfrac{m_1}{(m_1+m_2)}(v_1+v_2)\sqrt{\dfrac{m_1m_2}{k(m_1+m_2)}} \end{cases} \qquad (1.b.4)$$

Hoặc tính theo $\begin{cases} A_1 = \dfrac{m_2}{(m_1+m_2)}|v_1-v_2|\sqrt{\dfrac{m_1m_2}{k(m_1+m_2)}} \\ A_2 = \dfrac{m_1}{(m_1+m_2)}|v_1-v_2|\sqrt{\dfrac{m_1m_2}{k(m_1+m_2)}} \end{cases}$ nếu $v_1, v_2$ có giá trị đại số

# IV.3. DAO ĐỘNG CỦA ĐIỆN TÍCH – HỆ ĐIỆN TÍCH

**Bài 1.** Xét thời điểm vòng dây lệch khỏi vị trí cân




bằng góc α lực gây ra dao động là lực $\vec{F}$ do điện trường tác dụng lên đoạn dây dài ℓ đối xứng với khe hở A. Lực này tạo ra một mome :

$$M_{\vec{F}} = -FR\sin\alpha$$

Với $F = (\Delta Q)E = \dfrac{\ell}{2\pi R}.Q.E$

vì α nhỏ sinα ≈ α: $M_{\vec{F}} = -\dfrac{\ell QE.\alpha}{2\pi}$

Mặt khác vì $M_{\vec{F}} = I\gamma = I\alpha'' = MR^2\alpha''$

$$\Rightarrow MR^2\alpha'' + \frac{\ell QE.\alpha}{2\pi} = 0 \text{ hay } \alpha'' + \frac{\ell QE}{2\pi\pi M^2}\cdot\alpha = 0$$

Vậy vòng dao động đều hòa với chu kỳ :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2\pi.mR^2}{\ell QE}}$$

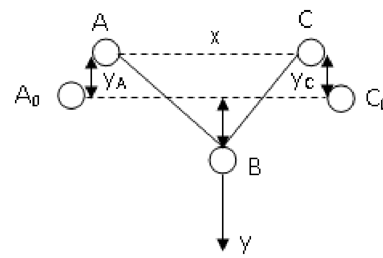
**Bài 2.**

Gọi x, y là các khoảng cách được ký hiệu như trên hình vẽ.

- Tổng thế năng của hệ là : $U = U_{AB} + U_{BC} + U_{AC}$

Với $U_{AB}$ là thế năng tương tác giữa A và B, phụ thuộc vào vị trí tương đối giữa A và B... Vì khoảng cách giữa A với B và B với C là không thay đổi nên:

$$U_{AB} = U_{BC} = \text{không đổi.}$$




Ta lại có : $U_{AC} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\times\dfrac{q^2}{x} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\times\dfrac{q^2}{2\sqrt{d^2 - y^2}}$

Do khoảng cách y rất nhỏ, nên ta có thể áp dụng công thức xấp xỉ :

$$(1 + z)^a \approx 1 + a.z\text{, với } z << 1.$$

Ta được : $U_{AC} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q^2}{2d\sqrt{1 - (y/d)^2}} \approx \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\times\dfrac{q^2}{2d}\left(1 + \dfrac{y^2}{2d^2}\right)$

Độ biến thiên động năng của hệ là

$$\Delta U = U_{2AC} - U_{1AC} \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\times\frac{q^2}{2d}\left(\frac{y^2}{2d^2} - 0\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\times\frac{q^2}{4d^3}\times y^2$$

Vì vị trí khối tâm của hệ không thay đổi trong quá trình dao động nên đồng xu B dịch chuyển đoạn $y_B = 2y/3$, còn các đồng xu A và C dịch chuyển được đoạn y/3 theo chiều ngược lại. Độ biến thiên thế năng của hệ là hàm của $y_B$, có biểu thức :

$$\Delta U \approx \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\times\frac{9q^2}{8d^3}\right)\times y_B^2$$

- Động lượng của hệ được bảo toàn nên khi đồng xu B dịch chuyển theo phương y với tốc độ $v_B$, thì thành phần vận tốc theo phương y của các đồng xu A và C là $v_B/2$ theo chiều ngược lại. Vì độ dịch chuyển của các đồng xu là nhỏ nên thành phần vận tốc theo phương x của các đồng xu A và C là không đáng kể, nên tổng động năng của hệ là

$$K \approx \frac{1}{2}mv_B^2 + 2.\frac{1}{2}m\left(\frac{v_B}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3m}{2}\right)v_B^2$$

- Ta có thể coi dao động của hệ tương đương với dao động của con lắc có khối lượng hiệu dụng $m_{hd} = \frac{3m}{2}$ và có hệ số đàn hồi : $k \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\times\frac{9q^2}{8d^3}$

Chu kỳ dao động của hệ là : $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_{hd}}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{3m/2}{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\times\frac{9q^2}{8d^3}}} = \frac{4\pi}{q}\sqrt{\frac{md^3/3}{1/4\pi\varepsilon_0}}$

Điện tích của mỗi đồng xu là : $q \approx \frac{4\pi}{T}\sqrt{\frac{md^3/3}{1/4\pi\varepsilon_0}}$

**Bài 3.** Giả sử q < 0. Q > 0

a) Trước hết ta đi xác định cường độ điện trường tại một điểm cách tâm O một đoạn r < R

Áp dụng ĐL Gau-xơ ta có: $E.4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}.\rho.\frac{4}{3}\pi r^3$ , với $\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ là mật độ điện tích khối. →

$E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$ ( $\vec{E}$ Hướng ra xa tâm quả cầu )

Hiệu điện thế giữa tâm của quả cầu và một điểm trên bề mặt quả cầu ( mép của rãnh nhỏ ) là:

$U = \int_0^R Edr = \frac{\rho R^2}{6\varepsilon_0}$

Ta có công của lực điện trường bằng phần động năng bị mất mát:

$$K_0 = -qU = -q.\frac{\rho R^2}{6\varepsilon_0} = \frac{-qQ}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

b) Áp dụng ĐL II Niu-tơn cho hạt tích điện q ta có: $qE = mr''$

Hay: $r'' + \frac{(-q)\rho}{3m\varepsilon_0}r = 0$

→ Hạt tích điện sẽ dao động điều hòa với chu kì: $T = 2\pi\sqrt{\frac{3m\varepsilon_0}{(-q)\rho}}$

Vậy thời gian chuyển động của hạt là $\Delta t = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3m\varepsilon_0}{(-q)\rho}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{4\pi\varepsilon_0 m}{-qQ}}$

**Bài 4.** Khi M có li độ $x_1$ thì hai vật m có li độ $x_2$. Khối tâm của hệ có tọa độ :

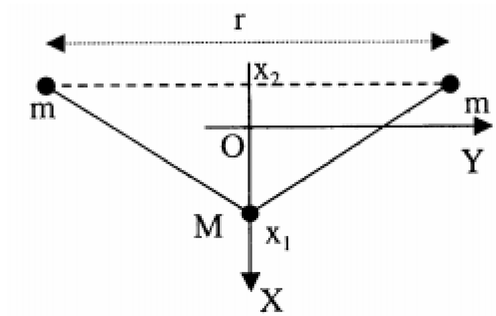
$$x_0 = \frac{Mx_1 + 2mx_2}{M + 2m} = 0 \Rightarrow x_2' = -\frac{M}{2m}x_1'$$

Động năng của hệ : $E_k = \frac{1}{2}M(x_1')^2 + 2\frac{1}{2}m(x_2')^2 = \frac{M}{2}\left(1 + \frac{M}{2m}\right)(x_1')^2$

Thế năng của hệ : $E_t = 2k\frac{q^2}{l} + \frac{kq^2}{r}$

Với $r/2 = \sqrt{l^2 - (x_1 - x_2)^2} = \sqrt{l^2 - x_1^2\left(1 + \frac{M}{2m}\right)^2}$

$$= l\left[1 - \left(\frac{x_1}{l}\right)^2\left(1 + \frac{M}{2m}\right)^2\right]^{1/2}$$




$$\Rightarrow E_t = 2k\frac{q^2}{l} + \frac{kq^2}{2l}\left[1 - \left(\frac{x_1}{l}\right)^2\left(1 + \frac{M}{2m}\right)^2\right]^{-1/2} \approx \frac{5kq^2}{2l} + \frac{kq^2}{4l}\left(\frac{x_1}{l}\right)^2\left(1 + \frac{M}{2m}\right)^2$$

Do năng lượng của hệ được bảo toàn, ta có :

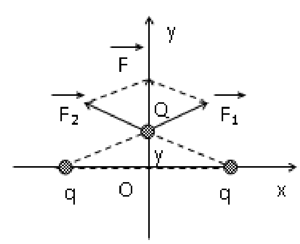
$$E = E_k = E_t = \frac{M}{2}\left(1 + \frac{M}{2m}\right)(x_1')^2 + \frac{5kq^2}{2l} + \frac{kq^2}{4l}\left(\frac{x_1}{l}\right)^2\left(1 + \frac{M}{2m}\right)^2 = const$$

Lấy đạo hàm hai vế phương trình trên ta dễ dàng nhận được phương trình vi phân mô tả dao động điều hòa với tần số góc :

$$\omega = \frac{kq^2}{2l^3M}\left(1 + \frac{M}{2m}\right) = \frac{kq^2(M + 2m)}{4Mml^3} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{4Mml^3}{kq^2(M + 2m)}}$$

**Bài 5**. Gọi O là VTCB của Q.

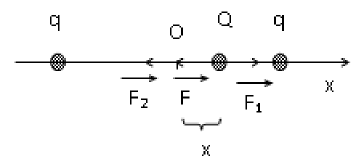
1) Xét khi Q lệch khỏi O theo phương Oy một đoạn y nhỏ. Lúc đó hợp lực tác dụng vào Q là $\vec{F}$ có xu hướng đẩy Q ra xa vị trí cân bằng O$\Rightarrow$ Chuyển động của Q là ổn định.




* Xét khi Q lệch khỏi O theo phương Ox một đoạn nhỏ x.

Lúc đó : $F_1 = \dfrac{k.Q.q}{(x+a)^2} < F_2 = \dfrac{k.Q.q}{(a-x)^2}$

Vậy hợp lực $\vec{F}$ có tác dụng kéo Q về VTCB O và luôn như thế nên chuyển động của Q là ổn định.




2) Điện thế do 2 điện tích q gây ra : $V = \dfrac{k.q}{x+a} + \dfrac{k.q}{a-x}$

3) Ta có : $V = \dfrac{k.q}{x+a} + \dfrac{k.q}{a-x} = \dfrac{2k.q.a}{-x^2+a^2} = \dfrac{2k.q.a}{a^2\left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]} = \dfrac{2k.q}{a}.\left[1-\left(\dfrac{x}{a}\right)^2\right]^{-1}$

Vì $x << a \Rightarrow \left(\frac{x}{a}\right)^2 << 1 \Rightarrow V \approx \dfrac{2k.q}{a}\left(1+\dfrac{x^2}{a^2}\right) = \dfrac{2k.q.\left(a^2+x^2\right)}{a^3}$

- Áp dụng công thức : $E = -\dfrac{dV}{dx} \Rightarrow E = -\dfrac{4kqx}{a^3}$

- Lực điện trường tác dụng lên Q : $F = |E|.Q = \dfrac{4kQq|x|}{a^3} = \dfrac{4kQqx}{a^3}$

4) Ta có: Xét khi Q có li độ $x > 0$ :

- Định luật II Niutơn : $-F = mx'' \Leftrightarrow -\dfrac{4kQqx}{a^3} = mx'' \Leftrightarrow -\dfrac{4kQq}{ma^3}.x = x''$

- Đặt : $\omega = \sqrt{\dfrac{4kQq}{ma^3}} \Rightarrow -\omega^2 x = x''$. Vậy Q dao động quanh O với $\omega = \sqrt{\dfrac{4kQq}{ma^3}}$

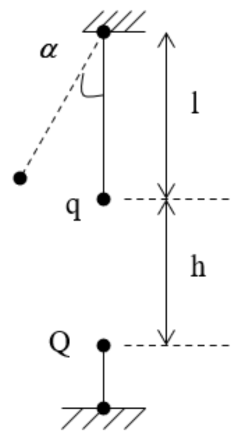
**Bài 6.** Tại vị trí dây treo lệch góc $\alpha$ nhỏ so với VTCB: Năng lượng của con lắc:

$$W = \frac{mv^2}{2} + mgl(1 - \cos\alpha) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{q.Q}{r}$$

$$= \frac{ml^2.(\alpha')^2}{2} + mgl\frac{\alpha^2}{2} + \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{1}{\sqrt{[h + l(1 - \cos\alpha)]^2 + (l.\alpha)^2}}$$

$$W = \frac{ml^2.(\alpha')^2}{2} + mgl\frac{\alpha^2}{2} + \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{\left[h + l.\frac{\alpha^2}{2}\right]^2 + l^2.\alpha^2}} =$$

$$W = \frac{ml^2.(\alpha')^2}{2} + mgl.\frac{\alpha^2}{2} + \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0.\sqrt{h^2 + l(l + h).\alpha^2}}$$




(bỏ qua vô cùng bé bậc cao $\frac{l^2.\alpha^4}{4}$)

+ Năng lượng của hệ được bảo toàn nên: $\frac{dW}{dt} = 0$, ta có

$$\frac{dW}{dt} = ml^2.\alpha'.\alpha'' + mgl.\alpha.\alpha' + \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{- l(l + h).\alpha.\alpha'}{(\sqrt{h^2 + \alpha^2.l(l + h)})^{\frac{3}{2}}} = 0$$

$$\Rightarrow ml^2.\alpha'' + (mgl - \frac{qQl(l + h).}{4\pi\varepsilon_0 h^3}).\alpha = 0$$

(bỏ qua vô cùng bé bậc cao $\alpha^2.l(l + h)$) $\Rightarrow \alpha'' + (\frac{g}{l} - \frac{qQ(h + l)}{4\pi\varepsilon_0.m.h^3.l}).\alpha = 0$

Chứng tỏ vật dao động điều hoà với tần số góc: $\omega = \sqrt{\frac{g}{l} - \frac{qQ(h + l)}{4\pi\varepsilon_0.m.h^3.l}}$

với điều kiện $mg > \frac{qQ(h + l)}{4\pi\varepsilon_0 mh^3}$ nếu q.Q> 0

**Bài 7.** 1) Mật độ điện khối : $\rho = \frac{3e}{4\pi R^3}$

- Điện trường tại một điểm M bên trong quả cầu : $\vec{E}\dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}$

$\Rightarrow$ electron chịu lực kéo hướng tâm tuyến tính : $\vec{f} = -\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\vec{r}$ hướng về 0.

$\vec{f}(0) = 0$ : vị trí cân bằng của electron là tại 0.

2) Phương trình CĐ của electron : $mr'' + \dfrac{e^2 r}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = 0$

$\Rightarrow$ electron dao động với : $\omega = \sqrt{\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3}}$

Nghiệm của phương trình: $r(t) = r_0\cos(\omega t+\varphi)$

$\Rightarrow$ Quỹ đạo là một hình elip tâm O. Mô men lưỡng cực tức thời của nguyên tử $\vec{P} = -e\vec{r}$

$\Rightarrow$ Giá trị trung bình của nó bằng 0.

3) Phương trình CĐ của electron : $mr'' + \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3}r + eE_0 = 0$

$$\Rightarrow r = \frac{4\pi E_0\varepsilon_0 R^3}{e} + r_0\cos(\omega t + \varphi).$$

$\Rightarrow$ Quĩ đạo của electron vẫn có hình dạng như cũ nhưng bị lệch đi một đoạn không đổi:

elip sẽ có tâm tại $\vec{r} = \dfrac{4\pi\varepsilon_0 R^3}{e}\overrightarrow{E_0}$

- Giá trị trung bình của momen lưỡng cực : $P = 4\pi\varepsilon_0 R^3 E_0$

$\Rightarrow \alpha = 4\pi R^3$ thứ nguyên: $[m^3]$ có cỡ lớn R = 0,1nm = $10^{-10}$m.

4) Khi bị ion hóa : $eE_0 > \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3} r \Rightarrow E_0 \geq \dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$ với R = $10^{-10}$ (m)

$\Rightarrow E_0$ cỡ $10^{11}$V/m rất lớn.

**Bài 8.** 1a. Điện tích e được phân bố đều ở bên trong quả cầu, tương ứng mật độ điện khối $\rho = \dfrac{3e}{4\pi R^3}$.

Điện trường tại điểm M có $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ bên trong quả cầu:

$\vec{E} = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r} = \dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\vec{r}$. Do đó, Lực điện trường tác dụng lên electron luôn có hướng về O:

$\vec{F} = -e\vec{E} = -\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\vec{r} \Rightarrow$ O là vị trí cân bằng của electron.

+ Theo định luật II Niutơn, suy ra: $\vec{F} = -\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\vec{r} = m.\vec{r}\,'' \Leftrightarrow m.\vec{r}\,'' + \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\vec{r} = 0$

Với các điều kiện ban đầu t=0 nó có vị trí $\vec{r}_0$ và vận tốc $\vec{v}_0$ vuông góc với $\vec{r}_0$ so với tâm khối cầu, ta tìm được phương trình chuyển động của electron:

$\vec{r}(t) = \vec{r}_0.\cos\omega t + \dfrac{\vec{v}_0}{\omega}\sin\omega t$, trong đó: $\omega = \sqrt{\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m R^3}}$. Quỹ đạo là một elip có tâm O.

b. Khi có thêm điện trường ngoài $\vec{E_0}$, electron chịu tác dụng thêm lực $\vec{f} = -e\vec{E_0}$.

Nếu electron vẫn ở trong quả cầu thì quỹ đạo của nó vẫn là một elip như câu a nhưng tâm O' của nó bị lệch đi một vectơ không đổi: $\overrightarrow{OO'} = -\dfrac{4\pi\varepsilon_0 R^3}{e}\vec{E_0}$

+ Mô men lưỡng cực tức thời của nguyên tử: $\vec{p} = -e.\vec{r}\,'$ với $\vec{r}\,' = \overrightarrow{O'M}$

Do đó, mômen lưỡng cực trung bình của nguyên tử: $\langle\vec{p}\rangle = 4\pi\varepsilon_0 R^3\vec{E_0}$

2. Trường tĩnh điện tạo bởi phân bố điện tích này là:

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{2}{\text{ar}} + \frac{2}{a^2}\right)\exp(-\frac{2\text{r}}{\text{a}})\vec{\text{e}}_\text{r}$$

+ Áp dụng định lí Gauss cho quả cầu tâm O bán kính r:

$$Q(r) = \varepsilon_0 \oiint_{\text{cầu}} \vec{E}\,\vec{dS} = \varepsilon_0 4\pi r^2 \vec{E}\vec{e}_r = q\left(1 + \frac{2r}{a} + \frac{2r^2}{a^2}\right)\exp(-\frac{2\text{r}}{\text{a}})$$

+ Sự phân bố điện tích có đối xứng cầu quanh điểm O. Điện tích nằm giữa hai quả cầu đồng tâm và có bán kính r và r+dr bằng $4\pi r^2\rho(r)$ đồng nhất với Q(r+dr)-Q(r), vậy:

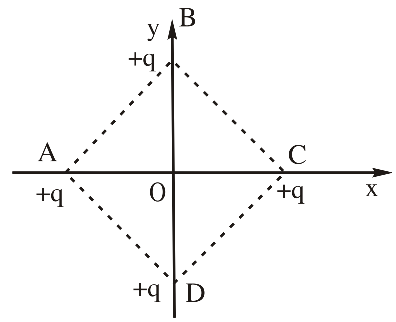
$$\rho(r) = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{dQ(r)}{dr} = -\frac{q}{a^3}\exp(-\frac{2\text{r}}{\text{a}})$$

Mật độ điện tích này luôn luôn âm, mặc dù điện tích toàn phần của phân bố là: Q(r→∞)=0. Tuy vậy, ta không quên được rằng điểm kì dị của thế tại gốc O có Q(r→0)=q, nghĩa là tại O có một điện tích dương q. Vậy thế trên được tạo ra hệ điện tích gồm điện tích dương q tại O được bao xung quanh bởi một quầng điện tích âm có mật độ khối $\rho(r)$, có điện tích toàn bộ -q.

+ Năng lượng liên kết là năng lượng cần cung cấp để tách điện tích +q ra khỏi đám mây tích điện âm bằng cách đưa nó từ O ra vô cùng. Năng lượng liên kết này là $W=q.(V_-(\infty)-V_-(0))=-q.V_-(0)$, trong đó $V_-$ là thế tạo ra bởi đám mây tích điện âm.

Tại O: $V_-(0) = \lim\limits_{r\to 0}\left(V(r) - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\right) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}$. Do đó $\text{W} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$

**Bài 9**.




a) Các điện tích được bố trí như trên hình vẽ.

$$V_0 = V_A + V_B + V_C + V_D \Rightarrow V_0 = \frac{q}{\pi\varepsilon_0 a}$$

b) Xét điểm M ở gần O nằm trong mặt phẳng xOy, có toạ độ

M(x, y) với x, y =   a. Điện thế tại M do điện tích đặt tại A gây ra là :

$$V_A = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{1}{\sqrt{(a+x)^2 + y^2}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a\sqrt{\left(1+\frac{x}{a}\right)^2 + \frac{y^2}{a^2}}}$$

Vì x, y =   a, áp dụng công thức tính gần đúng cho $\varepsilon\ =\ 1$ :

$$(1+\varepsilon)^n \approx 1 + n\varepsilon + \frac{n(n-1)}{2!}\varepsilon^2 + ...$$

Ta được : $V_A \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{x^2+y^2}{2a^2} + \frac{3x^2}{2a^2}\right)$

Tương tự với $V_B$, $V_C$, $V_D$ suy ra : $V_M = V_A + V_B + V_C + V_D = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(4 + \frac{x^2+y^2}{a^2}\right)$

$$\Rightarrow V_M = V_0 + \frac{q(x^2+y^2)}{4\pi\varepsilon_0 a^3} = V_0 + \frac{qr^2}{4\pi\varepsilon_0 a^3}$$

Với $r = \sqrt{x^2+y^2}$ là khoảng cách từ M đến O.

- Thế năng của điện tích Q đặt tại M là : $W_M = qV_M = qV_0 + \frac{q^2 r^2}{4\pi\varepsilon_0 a^3}$

Ta thấy thế năng có trị số cực tiểu tại O, ứng với r = 0. Tại O, hợp lực của các lực điện tác dụng lên điện tích Q bằng không. Vậy O là vị trí cân bằng bền của điện tích Q trong mặt phẳng xOy.

- Xét một điểm N(0, 0, z) trên trục Oz vuông góc với mặt phẳng xOy. Điện thế gây bởi 4 điện tích A, B, C, D tại N là : $V_N = \frac{q}{\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2+z^2}}$

- Thế năng của điện tích Q tại N là : $W_{tN} = qV_N = \frac{q^2}{\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2+z^2}}$

- Tại điểm O (z = 0) thế năng $W_{tN}$ đạt cực đại. Vậy O là vị trí cân bằng không bền của Q trên trục Oz. (Cũng có thể xét hợp lực của các lực tác dụng lên Q và thấy rằng hợp lực này luôn có phương hướng ra xa O, suy ra O là vị trí cân bằng không bền của Q trên trục Oz).

c) Xét điện tích Q = q đặt tại điểm M trong mặt phẳng xOy, lực tác dụng lên điện tích Q là :

$$F_r = -\frac{dW_{tM}}{dr} = -\frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 a^3}r.$$

- Lực này hướng về vị trí cân bằng O, phương trình chuyển động của điện tích Q (xét theo phương trình OM) là : $F_r = ma \Rightarrow m\ddot{r} + \frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 a^3}r = 0.$

Đó là phương trình vi phân của dao động điều hoà, với m là khối lượng của vật mang điện tích Q. Tần số góc của dao động là : $\omega = \sqrt{\frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 a_m^3}}$ .

Chu kì dao động nhỏ của điện tích Q trong mặt phẳng xOy : $T = \frac{2\pi}{q}\sqrt{2\pi\varepsilon_0 ma^3}$

d) Nếu Q = - q thì $W_{tM} = -qV_0 - \frac{q^2r^2}{4\pi\varepsilon_0 a^3}$ và lực tác dụng lên điện tích Q là :

$$F_r = -\frac{dW_{tM}}{dr} = +\frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 a^3}r > 0$$

Điểm O là vị trí cân bằng không bền trong mặt phẳng xOy.

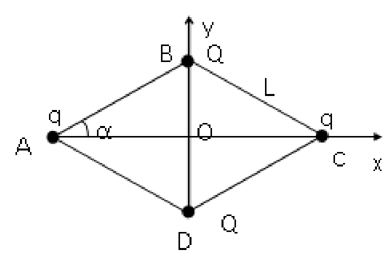
- Xét điểm N trên trục Oz thì thế năng của Q tại N sẽ là : $W_N = -\frac{q^2}{\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2+z^2}}$

Suy ra O là vị trí cân bằng bền của Q theo trục z.

Bằng cách lập luận như ở câu c (tính $F_z = -\frac{dW_{tN}}{dz}$, áp dụng định luật II Niu□tơn và chú ý rằng $\frac{z}{a} << 1$) ta thấy điện tích Q dao động điều hoà quanh vị trí cân bằng O với chu kì :

$$T = \frac{2\pi}{q}\sqrt{\pi\varepsilon_0 ma^3}.$$

**Bài 10.** a) Khi cân bằng, lực căng dây là F :




$$\left(2F - \frac{kqQ}{L^2}\right)\cos\alpha = \frac{kq^2}{(2L\cos\alpha)^2}. \ (1)$$

$$\left(2F - \frac{kqQ}{L^2}\right)\sin\alpha = \frac{kQ^2}{(2L\sin\alpha)^2}. \ (2)$$

$$tg\alpha = \sqrt[3]{\left(\frac{Q}{q}\right)^2}. \quad Q = q\sqrt{tg^3\alpha}$$

b) Khi các điện tích A, C ở hai đầu đường chéo này có độ dời là $x_1$ và - $x_1$ và có vận tốc là $v_1 = x_1'$; $v_2 = x_2'$. Vì dây không giãn và góc α thay đổi rất ít nên :

$$v_1\cos\alpha = -v_2\sin\alpha$$

$v_2 = - v_1 \cot g\alpha$

- Bảo toàn năng lượng:

$$E = 2\frac{mv_1^2}{2} + 2\frac{mv_2^2}{2} + \frac{1}{2}2q\left(\frac{kq}{2L\cos\alpha + 2x_1} + \frac{2kQ}{2L}\right) + \frac{1}{2}2Q\left(\frac{kQ}{2L\sin\alpha + 2x_2} + \frac{2kq}{2L}\right) = hs$$

Biến đổi : $\dfrac{kq}{2L\cos\alpha + 2x_1} = \dfrac{kq}{2L\cos\alpha(1 + x_1/L\cos\alpha)} » \dfrac{kq}{2L\cos\alpha}\left(1 - \dfrac{x_1}{L\cos\alpha} + \dfrac{x_1^2}{L^2\cos^2\alpha}\right)$

$$\frac{kQ^2}{2L\sin a + x_2} » \frac{kq}{2L\sin a}\left(1 - \frac{x_2}{L\sin a} + \frac{x_2^2}{L\sin^2 a}\right)$$

và $x_2 = \sqrt{L^2 - (L\cos\alpha + x_1)^2} - L\sin\alpha$

$$x_2 \approx -x_1 \cot g\alpha - \frac{x_1^2}{2L\sin\alpha}(1 + \cot g^2\alpha)$$

Do đó: $E = mv_1^2(1 + \cot g^2\alpha) + \dfrac{2kqQ}{L} - \left(\dfrac{kq^2x_1}{2L^2\cos^2\alpha} + \dfrac{kQ^2x_2}{2L^2\sin^2\alpha}\right)x + Ax_1^2 = hs$

Với: $A = \dfrac{kq^2x_1^2}{2L^3\cos^3 a} + \dfrac{kQ^2x_2^2}{2L^3\sin^3 a} = \dfrac{kq^2x_1^2}{2L^3\cos^3 a}(1 + \cot g^2 a)$ .

$$\left(\frac{kq^2x_1}{2L^2\cos^2 a} + \frac{kQ^2x_2}{2L^2\sin^2 a}\right) = \frac{kq^2x_1}{2L^2\cos^2 a} + \frac{kq^2 tg^3 a\left(- x_1 \cot g a - \dfrac{(x_1^2 - x_2^2)}{2L\sin a}\right)}{2L^2\sin^2 a}$$

$$» - \frac{kq^2x_1^2}{4L^2\cos^3 a}(1 + \cot g^2 a)$$

$$E = mv_1^2(1 + \cot g^2\alpha) + \frac{3kq^2x_1^2}{4L^3\cos^3\alpha}(1 + \cot g^2\alpha) = hs$$

$$x'' + \frac{3kq^2x}{4mL^3\cos^3\alpha} = 0$$

Dao động có $\omega = \sqrt{\frac{3kq^2}{4mL^3\cos^3\alpha}}$ ; $T = \frac{2\pi}{\omega} = \sqrt{\frac{4mL^3\cos^3\alpha}{3kq^2}}$

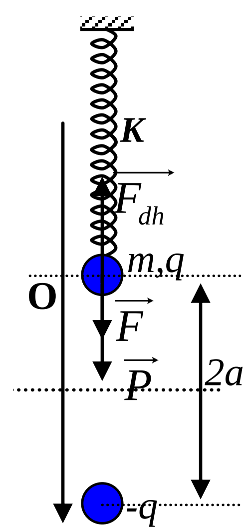
c) Khi đứt dây đồng thời các hạt ra xa vô cùng, từng đôi có vận tốc $v'_1$ và $v'_2$ như nhau. Gia tốc ngay sau khi đứt dây là

$$a_1 = \frac{kq^2}{m4L^2\cos^2\alpha} + \frac{2kqQ}{mL^2}\cos\alpha \; ; \; a_2 = \frac{kQ^2}{m4L^2\sin^2\alpha} + \frac{2kqQ}{mL^2}\sin\alpha$$

$$a_2\cos\alpha = \frac{kQ^2\cos\alpha}{m4L^2\sin^2\alpha} + \frac{2kqQ}{mL^2}\sin\alpha\cos\alpha = \frac{kq^2tg^3\alpha\cos\alpha}{m4L^2\sin^2\alpha} + \frac{2kqQ}{mL^2}\sin\alpha\cos\alpha$$

$$= \frac{kq^2\sin\alpha}{m4L^2\cos^2\alpha} + \frac{2kqQ}{mL^2}\sin\alpha\cos\alpha = a_1\sin\alpha \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \cot g\alpha$$

**Bài 11.** 1) Khi quả cầu cách mặt phẳng khoảng r, lực tương tác giữa điện tích q và bản kim loại là $F = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 r^2}$.




Chọn trục Ox thẳng đứng hướng xuống, gốc O tại VTCB của quả cầu

+ Vị trí cân bằng, gọi $\Delta l$ là độ biến dạng của lò xo.

$$P + F - F_{dh} = 0 \Rightarrow mg + \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 a^2} - k\Delta l = 0 \quad (1)$$

+ Khi quả cầu có li độ x. Phương trình động lực học :

$$mg + \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(2a - x)^2} - k(\Delta l + x) = mx''$$

$$\Leftrightarrow mg + \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 a^2\left(1 - \frac{x}{2a}\right)^2} - k(\Delta l + x) = mx'' \quad (2)$$

Ta chỉ xét dao động nhỏ (x << 2a). Khi đó $\left(1 - \frac{x}{2a}\right)^{-2} \approx 1 + \frac{x}{a}$

Thay vào (2) được: $mg + \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 a^2}\left(1 + \frac{x}{a}\right) - k(\Delta l + x) = mx''$

$$\Leftrightarrow \left(mg + \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 a^2} - k\Delta l\right) + \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 a^3}x - kx = mx'' \qquad (3)$$

Từ (2) và (3) $\Rightarrow \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 a^3}x - kx = mx'' \Rightarrow x'' + \left(\frac{k}{m} - \frac{q^2}{16\pi m\varepsilon_0 a^3}\right)x = 0$

Đặt $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{q^2}{16\pi m\varepsilon_0 a^3}} \Rightarrow x'' + \omega^2 x = 0$ quả cầu dao động điều hòa với chu kì :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{k}{m}} \times \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{16k\pi\varepsilon_0 a^3}}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{16k\pi\varepsilon_0 a^3}}},$$

trong đó $T_0$ là chu kì dao động khi quả cầu không tích điện.

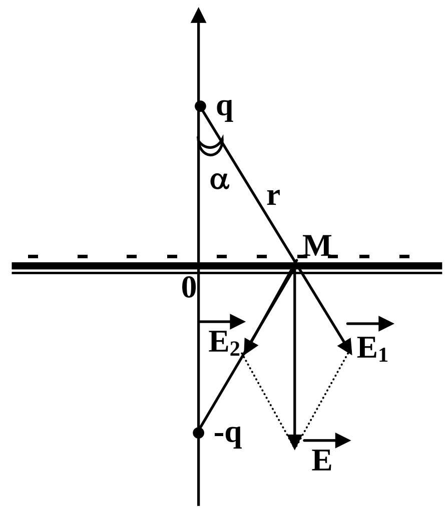
Phương trình dao động $x = A\cos(\omega t + \varphi)$.

Từ điều kiện ban đầu: $\begin{cases} x(0) = x_0 \\ v(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = x_0 \\ \varphi = 0 \end{cases} \Rightarrow x = x_0\cos\omega t$

2) Xét trường gây ra tại điểm M nằm trên mặt vật dẫn, ở thời điểm t, cách quả cầu khoảng r. Cường độ điện trường do các điện tích q và -q gây ra tại M có phương, chiều như hình vẽ. Độ

lớn : $E_1 = E_2 = k\dfrac{q}{r^2}$

Theo kết quả bài 1, mật độ điện tích hưởng ứng trên mặt vật dẫn : $\sigma = \varepsilon_0 E = \dfrac{1}{4\pi k}\times\dfrac{2kqa}{r^3} = \dfrac{qa}{2\pi r^3}$.




+ Khi quả cầu ở vị trí cân bằng thì

$$r = a \Rightarrow \sigma_0 = \frac{q}{16\pi a^2} \text{ và}$$

$$HM = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}$$

+ Khi quả cầu có li độ x thì:

$$r = \sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2 + (a - x)^2} = \sqrt{4a^2 - 2ax + x^2} \approx 2a\sqrt{1 - \frac{x}{2a}}$$

Khi đó $\sigma = \dfrac{q}{16\pi a^2}\left(1 - \dfrac{x}{2a}\right)^{-3/2} \approx \sigma_0\left(1 + \dfrac{3x}{4a}\right)$

Hay $\sigma \approx \dfrac{q}{16\pi a^2}\left(1 + \dfrac{3}{4a}x_0\cos\omega t\right)$

Vậy mật độ điện tích tại M cũng biến đổi tuần hoàn.

+ $\sigma_{max} = \sigma_0\left(1 + \dfrac{3x_0}{4a}\right) \Rightarrow x = x_0$ quả cầu ở vị trí thấp nhất.

+ $\sigma_{min} = \sigma_0\left(1 - \dfrac{3x_0}{4a}\right) \Rightarrow x = -x_0$ quả cầu ở vị trí cao nhất.

**Bài 12.**

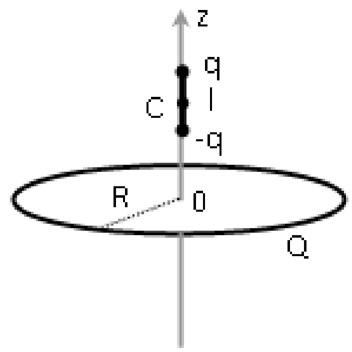
- Thế năng của lưỡng cực tại điểm cách tâm O của vòng dây một khoảng z là:

$$W_t = \frac{kQq}{\sqrt{r^2+(z+l/2)^2}} - \frac{kQq}{\sqrt{r^2+(z-l/2)^2}}$$

$$\approx \frac{kQq}{\sqrt{r^2+z^2}\{(1+Zl/(r^2+z^2)\}^{1/2}} - \frac{kQq}{\sqrt{r^2+z^2}\{(1-Zl/(r^2+z^2)\}^{1/2}}$$

$$W_t \approx \frac{kqQ}{\sqrt{r^2+z^2}}(1-\frac{0{,}5Zl}{r^2+z^2}) - \frac{kqQ}{\sqrt{r^2+z^2}}(1+\frac{0{,}5Zl}{r^2+z^2}) = -\frac{kqQZl}{(r^2+z^2)^{3/2}}$$

$$F = -\frac{dW_t}{dZ};\ F = \frac{kqlQ(r^2-2Z^2)}{(r^2+Z^2)^{\frac{5}{2}}} \qquad (1)$$




F = 0 khi: $z = r/\sqrt{2}$ và $z = -r\sqrt{2}$;

+ $z = r\sqrt{2}$, tại điểm đó thế năng cực tiểu, là cân bằng bền.

+ $z = -r/\sqrt{2}$, tại điểm đó thế năng cực đại, là cân bằng không bền

+ Tại điểm cân bằng bền ($z = r/\sqrt{2}$). Khi vật lệch x:

$Z' = r/\sqrt{2} + x$. Thay vào (1)

$$F' \approx \frac{kqlQ(r^2-2(r/\sqrt{2}+x)^2)}{(r^2+(r/\sqrt{2}+x)^2)^{\frac{5}{2}}} \approx -\frac{kqlQ2\sqrt{2}rx)}{(1{,}5r^2)^{\frac{5}{2}}} \approx -\frac{16kqlQrx)}{r^5 3^{\frac{5}{2}}} \quad \omega = \sqrt{\frac{16kqlQ}{mr^4 3^{\frac{5}{2}}}}; \qquad T = \frac{\pi r^2 3^{\frac{5}{4}}}{2}\sqrt{\frac{m}{kpQ}}$$

2. Tại điểm cân bằng bền ($z = r/\sqrt{2}$), F= 0 nên vận tốc cực đại:

$$\frac{mv_{max}^2}{2} = \frac{kqlQr/\sqrt{2}}{\left(1{,}5r^2\right)^{\frac{3}{2}}};\quad v_{max} = \frac{2}{r.3^{3/4}}\sqrt{\frac{kpQ}{m}}$$

**Bài 13. 1. Hạt chuyển động trong mặt phẳng chứa trục đối xứng:**

Tại điểm cách trục một khoảng r cường độ điện trường là E. Áp dụng định lí OG:

$E.2\pi Lr = \rho.\pi r^2 L/\varepsilon_0$.

Suy ra: $$E = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}$$

Theo phương Or vuông góc với trục x'x, hạt chịu tác dụng của lực $F = qE = \frac{q\rho r}{2\varepsilon_0}$ , do đó hạt có gia tốc $\ddot{r}$ : Có $-F = m\ddot{r} \rightarrow -\frac{q\rho r}{2\varepsilon_0} = m\ddot{r} \rightarrow \ddot{r} + \frac{q\rho}{2m\varepsilon_0}r = 0$.

Hạt dao động điều hoà theo phương Or với chu kì : $T = 2\pi\sqrt{\frac{2\varepsilon_0 m}{q\rho}}$

Thời gian hạt đi từ M tới N theo phương x'x của trục là $t = \frac{L}{v_0}$.

Mặt khác theo phương vuông góc với trục: $a\cos(2\pi\frac{t}{T}) = \frac{a}{2} \rightarrow t = (k \pm \frac{1}{6})T$

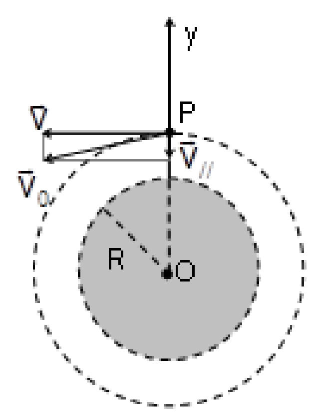
suy ra $t = \frac{T}{6}$ và $t = (k \pm \frac{1}{6})T$ với k nhận giá trị nguyên dương.

Vậy $v_0 = \frac{L}{\frac{T}{6}} = \frac{3L}{\pi}\sqrt{\frac{q\rho}{2m\varepsilon_0}}$ và $v_0 = \frac{L}{T(k \pm \frac{1}{6})} = \frac{L}{2\pi(k \pm \frac{1}{6})}\sqrt{\frac{q\rho}{2m\varepsilon_0}}$ với k=1,2,3,

**2. Hạt chuyển động trong mặt phẳng vuông góc với trục đối xứng.**

Tại điểm cách trục r (r > R) cường độ điện trường là E. Theo định lí O-G:

$$E.2\pi Lr = \rho.\pi R^2 L/\varepsilon_0 \rightarrow E = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}.$$




Tại P: Từ điểm cắt O của mặt phẳng quỹ đạo điện tích và trục xx' làm tâm, ta vẽ qua P một vòng tròn bán kính b.

Ứng với khoảng cách b, hạt có vận tốc v, lực điện tác dụng: $F = F_{ht} \rightarrow$

$$qE = \frac{\rho q R^2}{2\varepsilon_0 b} = m\frac{v^2}{b} \rightarrow v = R\sqrt{\frac{q\rho}{2m\varepsilon_0}}.$$

Xét chuyển động của hạt trong hệ quy chiếu quay cùng vận tốc góc ω' với hạt (ω' là vận tốc góc tại thời điểm t >0).

Ta có vận tốc góc của hạt tại thời điểm t = 0: $\omega = \frac{v}{b} = \frac{R}{b}\sqrt{\frac{q\rho}{2m\varepsilon_0}}$.

a. Tại thời điểm t, vận tốc của điện tích là $v_t \approx \omega'.(b+y)$ vì $v_{//} \ll v_t$

Theo định luật bảo toàn mô men động lượng:

$$m\omega'(b+y)^2 = m\omega b^2 \rightarrow \omega' = \omega\left(\frac{b}{b+y}\right)^2 = \omega(1+\frac{y}{b})^{-2} \approx \omega(1-\frac{2y}{b}).$$

Lực điện tác dụng lên hạt $F = \frac{q\rho R^2}{2\varepsilon_0(b+y)} \approx \frac{q\rho R^2}{2\varepsilon_0 b}(1-\frac{y}{b}) = m\omega^2 b(1-\frac{y}{b})$ (vì x << b).

Lực quán tính trong hệ quy chiếu quay:

$$F_{qt} = ma_{ht} = m\omega'^2(b+y) \approx m\omega^2(1-\frac{2y}{b})^2.b(1+\frac{y}{b}) \approx m\omega^2 b(1-\frac{3y}{b}).$$

Ta có: $m\ddot{y} = -F + F_{qt} = -m\omega^2 b(1-\frac{y}{b}) + m\omega^2 b(1-\frac{3y}{b}) = -2m\omega^2 y \rightarrow \ddot{y} + 2\omega^2 y = 0$

Phương trình này chứng tỏ theo phương bán kính, hạt chuyển động tuần hoàn với tần số góc $\omega\sqrt{2}$ và chu kỳ T.

b. $T = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{2}} = \frac{2\pi b}{R\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2m\varepsilon_0}{q\rho}} = \frac{2\pi b}{R}\sqrt{\frac{m\varepsilon_0}{q\rho}}$.

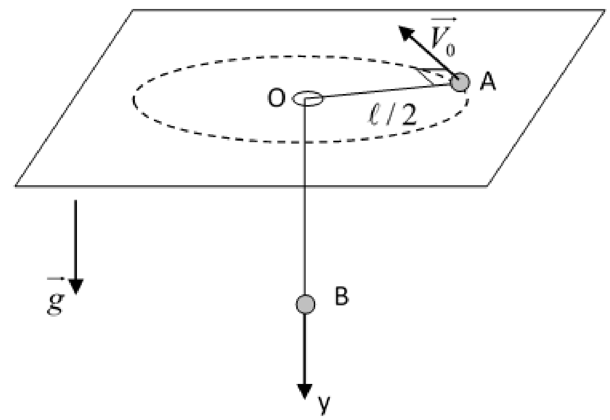
c. Sau thời gian $\frac{T}{2}$, bán kính véc tơ quay được góc $\alpha = \omega\frac{T}{2} = \frac{\omega}{\sqrt{2}}.\frac{2\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

Sau $t = n\dfrac{T}{2}$ thì hạt quay được góc $\dfrac{n\pi}{\sqrt{2}}$.

Khoảng cách cần tìm là $l = 2b\left|\sin\dfrac{n\pi\sqrt{2}}{4}\right|$ (n nguyên, dương).

# IV.4. MỘT SỐ DAO ĐỘNG ĐIỀU HÒA KHÁC.

**Bài 1.**




1. Để B đứng yên thì $T = m_B g = mg$ (1)

Xét A khi đó: $T = ma_{ht} = \dfrac{mV_0^2}{r} = \dfrac{mV_0^2}{\frac{\ell}{2}}$ (2)

Từ (1)(2)$\Rightarrow V_0 = \sqrt{\dfrac{g\ell}{2}}$ (3)

2. Vì $V_0 = \sqrt{\dfrac{g\ell}{2}}$ nên ngay khi thả B thì B sẽ đứng yên.

* Lúc B có tọa độ y bất kì thì A chuyển động trên đường tròn bán kính r với tốc độ góc $\omega$ ta luôn có: $y + r = \ell = const$ (4)

Khi đó vật B và A có vận tốc lần lượt là:

$$\begin{cases} V_B = y' = -(r') \Rightarrow V_B^2 = (y')^2 = [-(r')]^2 = (r')^2 \qquad (5) \\ V_A^2 = (\omega r)^2 + (r')^2 \qquad (6) \end{cases}$$

(Với $r'$ là thành phần vận tốc của A theo phương bán kính, còn $(\omega r)$ là thành phần vận tốc của A theo phương tiếp tuyến).

* Bảo toàn momen động lượng cho A đối với trục quay qua O ta có:

$$m\omega r^2 = mV_0\frac{\ell}{2} = const$$

$$\Rightarrow \omega^2 r^2 = \frac{V_0^2\ell^2}{4r^2} = \frac{V_0^2\ell^2}{4(\ell - y)^2} = \frac{V_0^2\ell^2}{4\left[\frac{\ell}{2} - \left(y - \frac{\ell}{2}\right)\right]^2} = \frac{V_0^2\ell^2}{4\left[\frac{\ell}{2} - (\Delta y)\right]^2} = \frac{V_0^2}{4\left[\frac{1}{2} - \frac{\Delta y}{\ell}\right]^2} = \frac{V_0^2}{4}\left[\frac{1}{2} - \frac{\Delta y}{\ell}\right]^{-2} \quad (7)$$

**Chú ý:** $\Delta y = y - y_0 = y - \dfrac{\ell}{2} \Rightarrow \Delta y' = y'$ (*)

* Bảo toàn năng lượng ta có:

$$W = \frac{m_A V_A^2}{2} + \frac{m_B V_B^2}{2} - m_B g y = \frac{m}{2}[\omega^2 r^2 + (r')^2] + \frac{m(y')^2}{2} - mgy = const \qquad (8)$$

Thay (5)(6)(7) vào (8) ta có:

$$W = \frac{m}{2}\left(\frac{V_0^2}{4}\left[\frac{1}{2} - \frac{\Delta y}{\ell}\right]^{-2} + (y')^2\right) + \frac{m(y')^2}{2} - mgy = \frac{mV_0^2}{8}\left[\frac{1}{2} - \frac{\Delta y}{\ell}\right]^{-2} + m(y')^2 - mgy = const \qquad (9)$$

Đạo hàm hai vế của (9) theo thời gian chú ý (*)

$$\Rightarrow \frac{mV_0^2}{8}(-2)\left[\frac{1}{2} - \frac{\Delta y}{\ell}\right]^{-3}.\left(-\frac{y'}{\ell}\right) + 2m(y')y'' - mgy' = 0 \Leftrightarrow \frac{V_0^2}{4\ell}\left[\frac{1}{2} - \frac{\Delta y}{\ell}\right]^{-3} + 2y'' - g = 0 \qquad (10)$$

Sử dụng công thức rất nhỏ của đề bài cho (10) $\Rightarrow \frac{V_0^2}{4\ell}\left[\frac{1}{2} + \frac{3\Delta y}{\ell}\right] + 2y'' - g = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{V_0^2}{4\ell}\left[\frac{1}{2} + \frac{3\left(y - \frac{\ell}{2}\right)}{\ell}\right] + 2y'' - g = 0 \Leftrightarrow y'' + \frac{3V_0^2}{8\ell^2}y - \frac{1}{2}\left(\frac{V_0^2}{4\ell} + g\right) = 0 \qquad (11)$$

Thay $V_0^2 = \frac{g\ell}{2}$ vào (11) ta có: $y'' + \left(\frac{3g}{16\ell}\right)y - \frac{9}{16}g = 0$

$\Rightarrow$Vật B dao động điều hòa với chu kì $T = 2\pi\sqrt{\frac{16\ell}{3g}}$

3. Vì $V_0 = \sqrt{\frac{g\ell}{3}} < \sqrt{\frac{g\ell}{2}}$ nên ngay sau khi thả B tự do thì B sẽ chuyển động xuống dưới.

B đạt vận tốc max tại VTCB, tức chỗ $\begin{cases} T = m_B g = mg \\ T = \frac{m_A V_t^2}{r} = \frac{mV_t^2}{r} \end{cases} \Rightarrow V_t^2 = gr \qquad (12)$

(với $V_t$ là vận tốc theo phương tiếp tuyến của A).

* Bảo toàn momen động lượng cho vật A đối với trục quay qua O có:

$$r.m_A V_t = \frac{\ell}{2} m_A V_0 \Rightarrow r.V_t = \frac{\ell V_0}{2} \qquad (13)$$

Từ (12)(13)$\Rightarrow \begin{cases} r = \left(\dfrac{\ell^2 V_0^2}{4g}\right)^{1/3} = \dfrac{\ell}{\sqrt[3]{12}} \approx 0,43679\ell \\ V_t^2 = gr = \dfrac{g\ell}{\sqrt[3]{12}} \approx 0,43679g\ell \end{cases}$ (14)

* Bảo toàn năng lượng cho hệ có:

$$\begin{cases} \dfrac{m_A V_0^2}{2} - m_B g\dfrac{\ell}{2} = \dfrac{m_A(V_t^2 + V_n^2)}{2} - m_B g\left(\dfrac{\ell}{2} + \dfrac{\ell}{2} - r\right) + \dfrac{m_B V_{max}^2}{2} \\ V_n = V_B = V_{max} \end{cases} \quad (15)$$

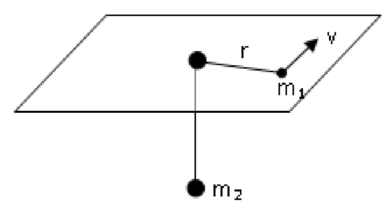
Từ (14)(15)$\Rightarrow V_{max} = \sqrt{\dfrac{V_0^2 - V_t^2 + g(\ell - 2r)}{2}} = \sqrt{\dfrac{g\ell}{2}\left[\dfrac{4}{3} - \dfrac{3}{\sqrt[3]{12}}\right]} \approx 0,107151\sqrt{g\ell}$

**Bài 2a)** Phương trình chuyển động của $m_1$ và $m_2$ là :

$m_1(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -T$ (1) ; $m_1 r^2\dot{\theta} = m_1 h$ (2) ; $T - m_2 g = m_2\ddot{r}$ (3)

Trong đó : $m_1 h$ là momen động lượng, là hằng số.

Từ 3 phương trình trên ta được : $(m_1 + m_2)\ddot{r} - m_1 r\dot{\theta}^2 + m_2 g = 0$ (4)




Kết hợp phương trình (2) và (4) ta được :

$$(m_1 + m_2)\ddot{r} - \frac{m_1 h^2}{r^3} = -m_2 g \quad (5)$$

Với $\ddot{r} = \dot{r}\dfrac{d\dot{r}}{dr} = \dfrac{1}{2}\dfrac{d\dot{r}^2}{dr}$, Lấy tích phân biểu thức trên ta được :

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{r}^2 + \frac{m_1 h^2}{2r^2} = -m_2 gr + C \quad (6)$$

Ở t = 0 thì : $r = R_0$ ; $\dot{r} = v_0\cos\varphi$ ; $r\dot{\theta} = v_0\sin\varphi$

Ta có : $h = R_0 v_0 \sin\varphi$. Ở đây, $\varphi$ là góc giữa $R_0$ và $v_0$

Thay vào phương trình ta được : $C = \dfrac{1}{2}[(m_1 + m_2)v_0^2\cos^2\varphi + m_1 v_0^2\sin^2\varphi] + m_2 g R_0$

Để r có cực trị thì $\dot{r} = 0$, phương trình (6) trở thành :

$$2\,m_2gr^3 – 2Cr^2 + m_1h^2 = 0$$

Nghiệm của phương trình này là giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất của r

**b)** Khi quỹ đạo của $m_1$ là đường tròn, $\ddot{r} = 0$ và (5) trở thành :

$$h^2 = \frac{m_2gR_0^3}{m_1} \quad (7)$$

Khi quỹ đạo hơi lệch so với tròn, đặt $r = R_0 + x$, với $x << R_0$. Phương trình (5) trở thành :

$$(m_1 + m_2)\,\ddot{x} - \frac{m_1h^2}{(R_0+x)^3} = - m_2g$$

Với : $(R_0+x)^{-3} \approx R_0^{-3}(1-\frac{3x}{R_0})$

Phương trình trên trở thành : $(m_1 + m_2)\,\ddot{x} - m_1h^2\,R_0^{-3}(1-\frac{3x}{R_0}) = - m_2g$

Thay (7) vào phương trình ta được : $(m_1 + m_2)\,\ddot{x} + \frac{3m_2gx}{R_0} = 0$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{3m_2gx}{(m_1+m_2)R_0} = 0$$

Phương trình này cho thấy x dao động điều hòa với tần số

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3m_2g}{(m_1+m_2)R_0}}$$

**Bài 3.** a. $U(x) = U_0(1 - \cos ax)$

$$F_x = -\frac{dU}{dx} = -U_0\,a\sin ax \qquad (1)$$

$$F_x = -U_0 a a x \rightarrow F_x = -U_0 a^2 x \quad (1)$$

$$\omega_0^2 = \frac{U_0 a^2}{m} \qquad \omega_0 = a\sqrt{\frac{U_0}{m}}$$

Từ đây ta thấy chu kỳ dao động

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{a}\sqrt{\frac{m}{U_0}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{a^2 U_0}}$$

Vậy $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{a^2 U_0}}$

b. $$U(x) = \frac{a}{x^2} - \frac{b}{x}$$

Vị trí cân bằng là x = $x_0$ khi $U'(x_0) = 0$

$$-\frac{2a}{x_0^3} + \frac{b}{x_0^2} = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{2a}{b}.$$

Bây giờ ta viết : $x = x_0 + y$

Tiếp theo $$U(x) = \frac{a}{x_0^2} - \frac{b}{x_0} + (x - x_0)U'(x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 U''(x_0)$$

Nhưng $$U''(x_0) = \frac{6a}{x_0^4} - \frac{2b}{x_0^3} = (2a/b)^{-3}(3b - 2b) = b^4/8a^3$$

Vì vậy cuối cùng: $$U(x) = U(x_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{b^4}{8a^3}\right)y^2 + \dots$$

Ta không cần quan tâm tới những kỳ dao động nhỏ còn lại và so sánh với năng lượng của dao động điều hoà

$$\frac{1}{2}m\omega^2 y^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{b^4}{8a^3}\right)y^2 \qquad \omega = \frac{b^2}{\sqrt{8a^3 m}}$$

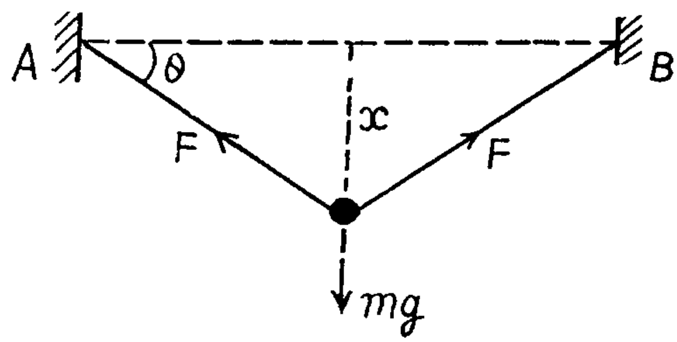
Hay $T = 2\pi\frac{\sqrt{8ma^3}}{b^2}$

**Bài 4.** Ta hãy xác định và biểu diễn lực tác dụng vào quả cầu ở vị trí khi nó ở li độ **x** từ vị trí cân bằng của dây. Ở vị trí này, lực hướng xuống dưới tác dụng vào quả cầu

Theo định luật Newton

$$m\ddot{x} = mg - 2F\sin\theta = mg - 2F\theta = mg - 2F\frac{x}{l/2} = mg - \frac{4F}{l}x$$

$$\ddot{x} = g - \frac{4F}{ml}x = -\frac{4F}{ml}\left(x - \frac{mgl}{4F}\right)$$

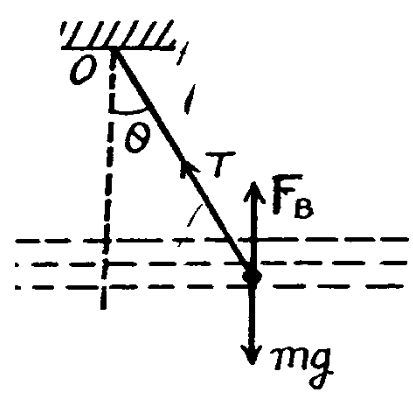



Đặt $x' = x - \frac{mg.l}{T}$ $\qquad \ddot{x}' = -\frac{4T}{ml}x'$

$$T = \pi\frac{\sqrt{ml}}{F} = 0,2s$$

**Bài 5.** Phân tích các lực tác dụng vào quả cầu tại vị trí quả cầu hợp một góc θ (hình) với vị trí cân bằng, với $F_B$ là lực đẩy của nước. Xét quả cầu, từ phương trình $N_Z = IB_Z$

(ở đây ta hiểu rằng chiều dương của trục Z theo phương của vận tốc góc $\dot{\theta}$ của quả cầu và chuyển động qua điểm treo O của con lắc).




$$-mgl\sin\theta + F_B l\sin\theta = ml^2\ddot{\theta} \qquad (1)$$

$$m = \frac{4}{3}\pi r^3\sigma, \quad F_B = \frac{4}{3}\pi r^3\rho$$

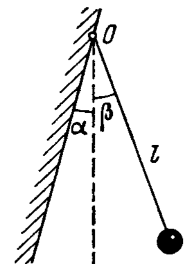
Và $\sin\theta \approx \theta$, khi θ nhỏ vào (1) ta có

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\left(1 - \frac{\rho}{\sigma}\right)\theta$$

$$T = 2\pi \frac{1}{\sqrt{\frac{g}{l}\left(1-\frac{\rho}{\sigma}\right)}} = 2\alpha\sqrt{\frac{l/g}{1-\frac{1}{\eta}}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\eta l}{g(\eta-1)}} = 1{,}1s$$

**Bài 6.** Rõ ràng với β nhỏ quả bóng thực hiện một phần dao động điều hoà. Vì va chạm là tuyệt đối đàn hồi nên vectơ vận tốc của quả cầu bị đảo ngược. Trong khi quả bóng dao động điều hoà (| θ | < α ở bên trái )




Phương trình chuyển động của quả bóng dưới dạng vi phân

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\theta = -\omega_0^2\theta \qquad (1)$$

Nếu ta giả thiết quả bóng được thả từ vị trí biên θ = β tại t = 0 nghiệm của phương trình vi phân trên có dạng

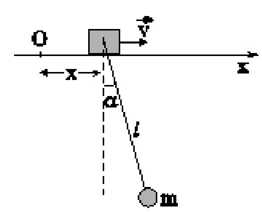
$$\theta = \beta\cos\omega_0 t = \beta\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t \qquad (2)$$

Nếu t' là thời gian quả bóng thả từ vị trí biên θ = β đến tường, nghĩa là θ = - α

Phương trình (2) có thể viết lại là

$$-\alpha = \beta\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t'$$

$$t' = \sqrt{\frac{l}{g}}\cos^{-1}\left(-\frac{\alpha}{\beta}\right) = \sqrt{\frac{l}{g}}\left(\pi-\cos^{-1}\frac{\alpha}{\beta}\right)$$




Như vậy chu kỳ dao động

$$T = 2t' = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\left(\pi - \arccos\frac{\alpha}{\beta}\right)$$

**Bài 7.** a) x = Acosωt

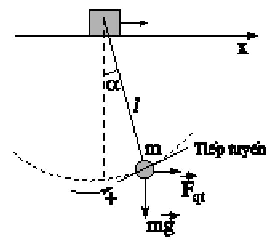
$a = x'' = -\omega^2 A\cos\omega t$

Xét chuyển động của con lắc trong HQC gắn với giá đỡ. Con lắc chịu thêm lực quán tính:

$F_{qt} = -mx'' \Rightarrow F_{qt} = -m\omega^2 A\cos\omega t$

Lực quán tính là ngoại lực cưỡng bức biến thiên tuần hoàn. Do đó dao động của con lắc là dao động cưỡng bức.

Xét theo phương tiếp tuyến ta có:




$$ma_t = -mg\sin\alpha + ma\cos\alpha$$

$$ml\alpha'' = -mg\alpha + m\omega^2 A\cos\omega t$$

$$\alpha'' + \omega_0^2\alpha = \frac{A\omega^2}{l}\cos\omega t \quad (\text{với } \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}) \qquad (1)$$

b) Nghiệm tổng quát của phương trình (1) gồm 2 nghiệm:

– Nghiệm tổng quát của phương trình không có vế phải: $\alpha'' + \omega_0^2\alpha = 0$

Nghiệm này là $\alpha_1 = B\cos(\omega_0 t + \varphi)$

– Nghiệm đặc biệt của phương trình (1) có dạng $\alpha_2 = C\cos\omega t$. Thay nghiệm này vào phương trình (1) ta được:

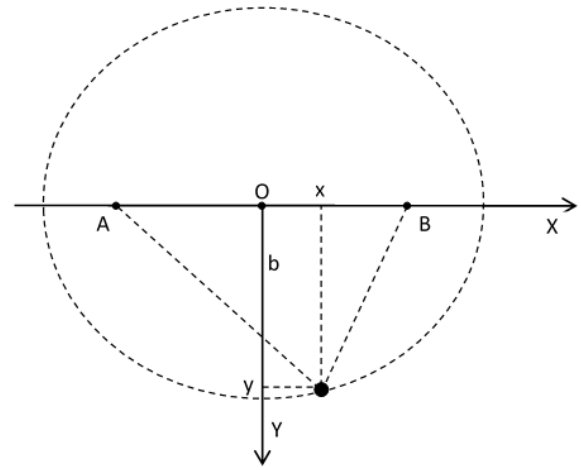
$$-\omega^2 C\cos\omega t + \omega_0^2 C\cos\omega t = \frac{A\omega^2}{l}\cos\omega t$$

Suy ra: $C = \dfrac{A\omega^2}{l(\omega_0^2 - \omega^2)}$.

Nghiệm tổng quát của phương trình (1) là: $\alpha = \dfrac{A\omega^2}{l(\omega_0^2 - \omega^2)}\cos\omega t + B\cos(\omega_0 t + \varphi)$

Hiện tượng cộng hưởng xảy ra nếu $\omega \approx \omega_0$. Còn nếu $\omega \neq \omega_0$ thì chuyển động của con lắc là ổn định.

**Bài 8**a. Dao động nhỏ của hạt cườm trong mặt phẳng vuông góc với đoạn thẳng AB giống như dao động của con lắc đơn có chiều dài $b = \sqrt{l^2 - a^2}$ do đó chu kỳ dao động cần tìm là:




$$T_{\perp} = 2\pi\sqrt{\frac{b}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{\sqrt{l^2 - a^2}}{g}}$$

b. Trong mặt phẳng thẳng đứng chứa đoạn thẳng AB, do tổng khoảng cách từ hạt cườm đến điểm treo là không đổi nên quỹ đạo của hạt cườm là elíp với các tiêu điểm là A và B, bán trục lớn là l, bán trục nhỏ là $b = \sqrt{l^2 - a^2}$ (hình vẽ). Phương trình elíp này là:

$$\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad y = b\sqrt{1 - \left(\frac{x}{l}\right)^2} \approx b - \frac{bx^2}{2l^2}$$

Độ cao của hạt cườm so với vị trí cân bằng khi nó có tọa độ x là: $h = b - y = \frac{bx^2}{2l^2}$. Nghiã là vật có thế năng: $E_p = mgh = \frac{1}{2}mgb.\frac{x^2}{l^2}$

Bỏ qua vận tốc chuyển động theo phương thẳng đứng, tức là coi v = x’ thì cơ năng dao động có thể viết bằng:

$$E = \frac{1}{2}m(x')^2 + \frac{1}{2}mgb.\frac{x^2}{l^2} = const$$

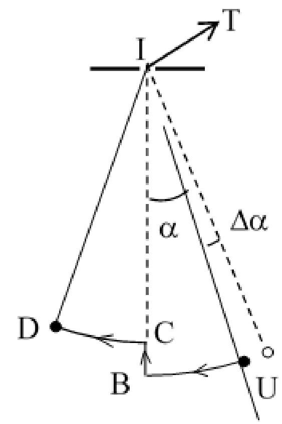
Từ đây suy ra chu kỳ dao động trong mặt phẳng thẳng đứng chứa các điểm treo:

$$T_{\parallel} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g\sqrt{1 - \left(\frac{a}{l}\right)^2}}}$$

c. Từ hình vẽ ta thấy $T_{\parallel} = 2T_{\perp}$. Dựa vào các kết quả của hai phần trên ta tìm được: $\frac{l}{a} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

**Bài 9.** Có thể giải bài toán theo hai cách:

+ Dùng định luật bảo toàn năng lượng




Lực căng dây ở vị trí cân bằng là $T_1 = mg + \frac{mv^2}{L}$, nên công ngoại lực rút ngắn dây:

$$A_1 = T.\Delta L = \left(mg + \frac{mv^2}{L}\right)\Delta L$$

Lực căng dây ở vị trí biên là $T_2 = mg.\cos\alpha$, và công của ngoại lực khi thả cho dây dài ra:

$$A_2 = T_2.\Delta L = mg\cos\alpha.\Delta L$$

Như vậy sau mỗi chu kỳ năng lượng dao động sẽ tăng thêm:

$$\Delta E = 2(A_1 + A_2) = 2\left(\frac{mv^2}{L} + mg - mg.\cos\alpha\right).\Delta L$$

Sử dụng: $v = \omega L.\alpha$ và $1 - \cos\alpha = \alpha^2/2$ ta có:

$$\Delta E = 3mg\alpha^2\Delta L = 3m\omega^2 L.\alpha^2\Delta L \qquad (1)$$

Mặt khác, sau một chu kỳ biên độ góc tăng từ $\alpha$ đến $\alpha + \Delta\alpha$ thì năng lượng đã tăng lên:

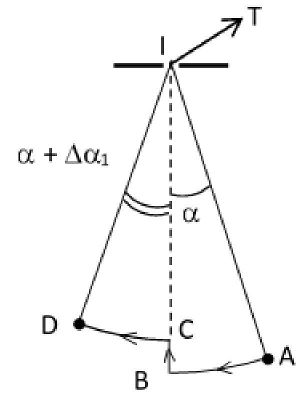
$$\Delta E = \frac{1}{2}m\omega^2 L^2(\alpha + \Delta\alpha)^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 L^2\alpha^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 L^2\alpha^2\left[\left(1 + \frac{\Delta\alpha}{\alpha}\right)^2 - 1\right] \approx m\omega^2 L^2\alpha\Delta\alpha \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{\Delta\alpha}{\alpha} = 3\frac{\Delta L}{L}$

CÁCH 2.

+ Dùng định luật bảo toàn mô men động lượng

Lúc dây được kéo lên khi vật đi qua vị trí cân bằng, các lực căng dây và trọng lực đều đi qua điểm treo O nên mômen của các lực ấy đối với O bằng không và do đó mômen động lượng đối với O bảo toàn.




$L_B = L_C$, với

$$L_B = mL.v_B = mL(\omega_1 L\alpha) = m\omega_1 L^2\alpha$$

$$L_C = m(L-\Delta L).v_C = m(L-\Delta L)\omega_2(L-\Delta L)(\alpha+\Delta\alpha_1)$$
$$= m\omega_1(L-\Delta L)^2(\alpha+\Delta\alpha_1)$$

Trong đó $\alpha_1$ là biên độ sau nửa chu kỳ (hình vẽ), còn $\omega_1 = \sqrt{g/L}$ và $\omega_2 = \sqrt{g/(L-\Delta L)}$.

Từ đó: $\dfrac{\alpha+\Delta\alpha_1}{\alpha} = \left(\dfrac{L}{L-\Delta L}\right)^{3/2} = \left(1-\dfrac{\Delta L}{L}\right)^{-3/2} \approx 1+\dfrac{3}{2}\dfrac{\Delta L}{L}$.

Tính trong mỗi chu kỳ thì: $\dfrac{\Delta\alpha}{\alpha} = 2\dfrac{\Delta\alpha_1}{\alpha} = 3\dfrac{\Delta L}{L}$

**Bài 10**a) Tại quỹ đạo ổn định, lực xuyên tâm $F(r)$ đóng vai trò lực hướng tâm

$$m\frac{v_0^2}{r_0} = -F(r_0)$$

b) Phương trình chuyển động theo phương bán kính là:

$F(r) = m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) = m\left(\ddot{r} - \dfrac{C^2}{r^3}\right)$ (với $C = r_0 v_0$ là momen động lượng của vật lúc ban đầu)

$$F(r) == m\left(\ddot{r} - \frac{r_0^2 v_0^2}{r^3}\right)$$

Xét sự lệch nhỏ so với quỹ đạo tròn, ta viết: $r = r_0\left[1+\varepsilon(t)\right]$. Khai triển lực $F(r)$ quanh trị $F(r_0)$ ta được:

$$\frac{F(r_0)}{m} + \varepsilon r_0 . \frac{F'(r_0)}{m} + ... = r_0\ddot{\varepsilon} - \frac{v_0^2}{r_0}(1-3\varepsilon+...)$$

Sử dụng kết quả: $m\frac{v_0^2}{r_0} = -F(r_0)$ ta viết lại biểu thức trên:

$$\ddot{\varepsilon} + \left(\frac{3v_0^2}{r_0^2} - \frac{F'(r_0)}{m}\right)\varepsilon = 0 \rightarrow \ddot{\varepsilon} - \frac{1}{m}\left(\frac{3F(r_0)}{r_0} + F'(r_0)\right)\varepsilon = 0$$

Vậy điều kiện để vật chuyển động trong quỹ đạo ổn định là:

$$\frac{3F(r_0)}{r_0} + F'(r_0) < 0$$

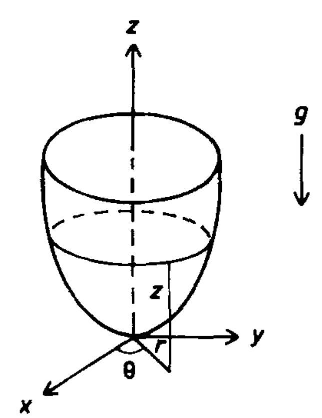
Tần số góc dao động của hạt quanh quỹ đạo cân bằng là:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m}\left(\frac{3F(r_0)}{r_0} + F'(r_0)\right)}$$

**Bài 11.**

Cắt tiết diện Oxz. Do y = 0 nên $z = \frac{b}{2}.x^2$

Bán kính quỹ đạo ở vị trí cân bằng $z_0 = \frac{b}{2}.x_0^2 \rightarrow x_0 = \sqrt{\frac{2z_0}{b}}$




Hệ số góc tiếp tuyến: $\tan\alpha_0 = b.x_0$

Chiếu các lực theo phương tiếp tuyến:

$$mg\sin\alpha_0 = m\omega_0^2.x_0.\cos\alpha_0 \rightarrow \omega_0^2 = gb$$

Khi ấn xuống đoạn nhỏ dz << z

Ta có: $z_0 - dz = \frac{b}{2}.(x_0 - dx)^2 = \frac{z_0}{x_0^2}(x_0^2 - 2x_o.dx) \rightarrow dx = dz.\frac{x_0}{2z_0}$

Bảo toàn momen động lượng có

$$\omega_0.x_0^2 = \omega.x^2 = \omega(x_0 - dx)^2 = \omega(x_0^2 - 2x_0.dx) \rightarrow \omega = \omega_0.\left(1 + \frac{2dx}{x_0}\right)$$

Chiếu các lực theo phương tiếp tuyến

$$mg\sin\alpha - m\omega^2 x.\cos\alpha = \frac{m\ddot{x}}{\cos\alpha}$$

$$\to g\tan\alpha.\cos^2\alpha - gbx.\cos^2\alpha\left(1+\frac{4dx}{x_0}\right) = \ddot{x}$$

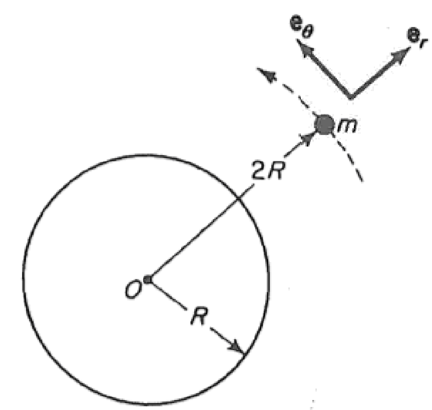
$$\to gbx.\cos^2\alpha - gbx.\cos^2\alpha\left(1+\frac{4dx}{x_0}\right) = \ddot{x}$$

$$\to -gbx.\cos^2\alpha_0.\frac{4dx}{x_0} = \ddot{x}$$ (do cos α ≈ cos $\alpha_0$)

Suy ra $\omega = \sqrt{4gb\cos^2\alpha_0} = \sqrt{\dfrac{4gb}{1+b^2.x_0^2}} = \sqrt{\dfrac{4gb}{1+2bz_0}}$

**Bài 12.**

- Ta có các phương trình chuyển động của vệ tinh:




$$a_r = r'' - r\theta'^2 = \frac{F_{hd}}{m} = -\frac{g_0R^2}{r^2} \qquad (1)$$

$$a_\theta = 2r'\theta' + r\theta'' = \frac{F}{m} \qquad (2)$$

- Ở quỹ đạo trong ban đầu: $F = 0, \theta'' = 0, r' = 0, r'' = 0$ nên: $r = r_0 = 2R$

$$2R.\theta'^2 = \frac{g_0R^2}{4R^2} = \frac{g_0}{4} \qquad (3)$$

$$\omega = \theta_0' = \sqrt{\frac{g_0}{8R}} = \frac{v_0}{2R} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{g_0R}{2}}$$

- Xét sự nhiễu loạn do xuất hiện lực $F = 10^{-4}mg_0$ theo phương tiếp tuyến.

Giả sử: $r = r_0 + \delta r$ và $\theta' = \theta_0' + \delta\theta'$. Khi đó các pt (1), (2) trở thành:

(1): $\delta r'' - (r_0 + \delta r).(\theta_0' + \delta\theta')^2 = -\dfrac{g_0 R^2}{(r_0 + \delta r)^2}$

$$\delta r'' - (r_0 + \delta r).\left(\theta_0'^2 + 2\theta_0'.\delta\theta' + \delta\theta'^2\right) = -\frac{g_0 R^2}{r_0^2} + \frac{2g_0 R^2}{r_0^3}\delta r$$

$$\delta r'' - r_0\theta_0'^2 - 2r_0\theta_0'\delta\theta' - \delta r.\theta_0'^2 + 2\theta_0'\delta r\delta\theta' = -\frac{g_0 R^2}{r_0^2} + \frac{2g_0 R^2}{r_0^3}\delta r$$

Bỏ qua số hạng rất nhỏ $2\theta_0'\delta r\delta\theta'$ và thay (3) vào ta được:

$$\delta r'' - 2r_0\theta_0'\delta\theta' - \delta r.\theta_0'^2 = \frac{2g_0 R^2}{r_0^3}\delta r$$

$$\delta r'' - 2r_0\theta_0'\delta\theta' - \frac{3g_0}{8R}\delta r = 0 \qquad (4)$$

(2): $2\delta r'(\theta_0' + \delta\theta') + (r_0 + \delta r)\delta\theta'' = \dfrac{F}{m}$

$$2\delta r'.\theta_0' + 2\delta r'\delta\theta' + r_0\delta\theta'' + \delta r.\delta\theta'' = 10^{-4} g_0$$

Bỏ qua số hạng rất bé, ta được:

$$2\delta r'.\theta_0' + r_0\delta\theta'' = 10^{-4} g_0$$

Lấy tích phân 2 vế theo thời gian:

$$2\delta r.\theta_0' + r_0\delta\theta' = 10^{-4} g_0 t$$

$$\Rightarrow r_0\delta\theta' = 10^{-4} g_0 t - 2\delta r.\theta_0' \qquad (5)$$

Thay (5) vào (4) được:

$$\delta r'' - 2\theta_0'\left(10^{-4} g_0 t - 2\delta r.\theta_0'\right) - \frac{3g_0}{8R}\delta r = 0$$

$$\delta r'' - 2\theta' 10^{-4} g_0 t + 4\theta_0'^2\delta r - \frac{3g_0}{8R}\delta r = 0$$

Thay (3) vào có:

$$\delta r'' + \frac{g_0}{8R}\delta r - 2g_0 10^{-4} t\sqrt{\frac{g_0}{8R}} = 0$$

Phương trình trên cho nghiệm có dạng:

$$\delta r = A\cos(\omega t + \varphi) + 4\sqrt{2g_0 R}10^{-4} t$$

Tại $t = 0$: $\delta r = A\cos\varphi = 0$

$$\delta r' = -A\omega\sin\varphi + 4\sqrt{2g_0 R}10^{-4} = 0$$

Suy ra: $\varphi = \frac{\pi}{2}, A = \dfrac{4.10^{-4}\sqrt{2g_0 R}}{\sqrt{g_0/8R}} = 16.10^{-4} R$

Sau 1 vòng quay $(t = T)$: $\dfrac{\delta r}{r_0} = \dfrac{4.10^{-4}\sqrt{2g_0 R}.2\pi\sqrt{8R/g_0}}{2R} = 16\pi.10^{-4}$

Mặt khác: $v = r\theta' \Rightarrow \dfrac{\delta v}{v_0} = \dfrac{\delta r}{r_0} + \dfrac{\delta\theta'}{\theta'_0}$

Từ(5) có: $2\dfrac{\delta r}{r_0} + \dfrac{\delta\theta'}{\theta'_0} = \dfrac{10^{-4} g_0 t}{r_0\theta'_0} = \dfrac{10^{-4} g_0 t}{v_0}$

Suy ra: $\dfrac{\delta v}{v_0} = \dfrac{10^{-4} g_0 t}{v_0} - \dfrac{\delta r}{r_0}$

$$\frac{\delta v}{v_0} = \frac{10^{-4} g_0 2\pi\sqrt{8R/g_0}}{\sqrt{g_0 R/2}} - 16\pi 10^{-4} = 8\pi 10^{-4} - 16\pi 10^{-4} = -8\pi 10^{-4}$$

**Bài 13.** - Rõ ràng theo tính đối xứng của hệ ban đầu và vận tốc, 3 hạt sẽ luôn tạo thành 1 tam giác đều. Khoảng cách $l$ sẽ thay đổi, tốc độ góc $\dot{\theta}$ sẽ thay đổi nhưng vẫn bảo toàn động lượng hệ.

- Giờ ta sẽ đi tính năng lượng tổng cộng của hệ:

- Thế năng của hệ ( $l = r\sqrt{3}$ ): $W_t = -\frac{3Gm^2}{l} = -\frac{\sqrt{3}Gm^2}{r}$

- Động năng của hệ: $W_d = \frac{3}{2}mv^2 = \frac{3}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$

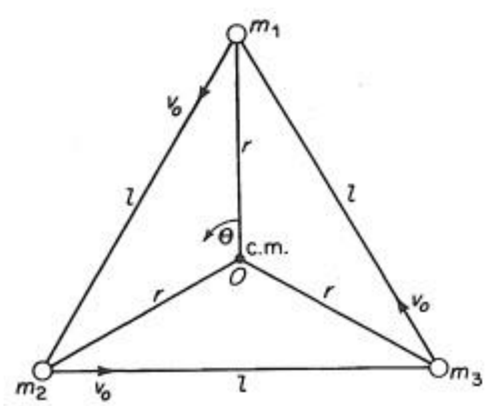
- Bảo toàn năng lượng: $\frac{3}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{\sqrt{3}Gm^2}{r} = \frac{3}{2}m{v_0}^2 - 3\frac{Gm^2}{c}$ (1)

Momen động lượng hệ được bảo toàn: $L = 3mr^2\dot{\theta} = \frac{\sqrt{3}}{2}mv_0c \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{cv_0}{2\sqrt{3}r^2}$ (2)

Khi r đạt cực đại hay cực tiểu, $\dot{r} = 0$, thay vào (1), kết hợp với (2) ta có:

$$m{v_0}^2\left(\frac{c^2}{8r^2} - \frac{3}{2}\right) = Gm^2\left(\frac{\sqrt{3}}{r} - \frac{3}{c}\right)$$

Thay giá trị $v_0$ ta nhận: $r^2 - \frac{2c}{\sqrt{3}}r + \frac{c^2}{12} = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_{\min} = c\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\right) = 0,077c \\ r_{\max} = c\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\right) = 1,077c \end{cases}$




- Giờ chúng ta hãy nói đến lực tác dụng lên từng hạt. Các lực này có phương bán kính.

- Gọi $F_r$ là lực tác dụng lên từng vật, ta có: $F_r = -\frac{1}{3}\frac{\partial W_t}{\partial r} = -\frac{Gm^2}{\sqrt{3}r^2}$

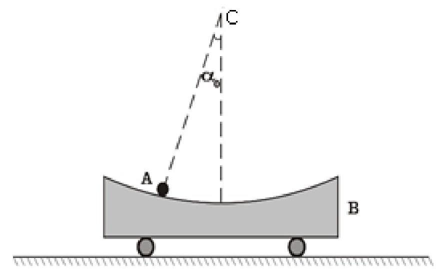
- Mỗi vật chịu 1 lực hấp dẫn tỉ lệ nghịch với bình phương khoảng cách từ vật tới tâm O

- Từ lực $F_r$ ta suy ra hệ số hấp dẫn của hệ là: $\mu = \frac{Gm}{\sqrt{3}}$

- Mỗi hạt chuyển động theo quỹ đạo hình elip với bán kính trục lớn: $a = \frac{r_{\min} + r_{\max}}{2} = \frac{c}{\sqrt{3}}$

- Từ đó ta tìm được chu kì chuyển động của hệ: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{a^3}{\mu}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{c^3}{3Gm}}$

**Bài 14.** 1. Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng, ta có:



Hình 2

$$\frac{mv^2}{2} + mgR(1-\cos\alpha) = mgR(1-\cos\alpha_0)$$

+ Suy ra: $v = \sqrt{2gR(\cos\alpha - \cos\alpha_0)}$ (1)

+ Áp dụng định luật II NiuTơn rồi chiếu dọc bán kính, chiều dương tới tâm bán cầu, ta có:

$$-mg\cos\alpha + N = \frac{mv^2}{R} \quad (2)$$

+ Từ (1), (2) và định luật III NiuTơn, ta được: $Q = N = mg(3\cos\alpha - 2\cos\alpha_0)$

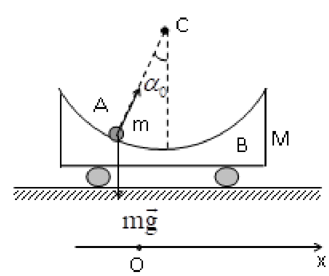
1. b.+ Chọn trục tọa độ ox như hình vẽ, gốc O trùng vị trí cân bằng của A.

+ Khi bán kính OA lệch góc α thì : $\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}$. (3)

+ Chiếu (3) trên trục Ox, ta được: $-mg\dfrac{x}{R} = mx''$

$$x'' + \omega^2 x = 0 \quad \text{với} \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{R}}.$$

+ A dao động điều hoà với: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{R}{g}}$.




2. 2. + Theo phương ngang, động lượng bảo toàn và α nhỏ nên có thể coi vận tốc của m có phương nằm ngang:

$$mv + MV = 0 \quad (4)$$

+ Bảo toàn cơ năng:

$$\frac{mv^2}{2}+\frac{MV^2}{2}=mgR(\cos\alpha-\cos\alpha_0). \qquad (5)$$

với $\alpha' R = (v - V) = v\left(1+\frac{m}{M}\right)$ (6)

+ Từ (4), (5) và (6), ta được:

$$\frac{mR^2\alpha'^2}{2\left(1+\frac{m}{M}\right)^2}+\frac{Mm^2R^2\alpha'^2}{2M^2\left(1+\frac{m}{M}\right)^2}=\frac{1}{2}mgR(\alpha_0^2-\alpha^2)\ ;$$

$$\frac{R\frac{\alpha'^2}{2}}{\left(1+\frac{m}{M}\right)}=\frac{1}{2}g(\alpha_0^2-\alpha^2). \qquad (7)$$

+ Đạo hàm hai vế theo thời gian t của (7), ta được:

$$\alpha''+\frac{g\left(1+\frac{m}{M}\right)}{R}\alpha=0.$$

+ Hệ dao động điều hòa với: $\omega=\sqrt{\dfrac{g\left(1+\frac{m}{M}\right)}{R}};T=2\pi\sqrt{\dfrac{R}{g\left(1+\frac{m}{M}\right)}}$

+ Lại xét vật m : $\vec{N}+m\vec{g}=m\vec{a}$ (8)

+ Trong hệ quy chiếu gắn với xe lăn. Chiếu (3) lên bán kính chiều dương hướng tới tâm C, ta được:

$$-mg\cos\alpha+N-m\omega^2|x|\sin\alpha=\frac{m(v-V)^2}{R}.$$

$$N=mg\cos\alpha+\frac{m(v-V)^2}{R}+m\omega^2|x|\sin\alpha.$$

+ Từ (4) và (5) ta được:

$$v=\sqrt{\left(\frac{M}{m+M}\right)2gR(\cos\alpha-\cos\alpha_0)}\ ;$$

Và: $v - V = v(1+\frac{m}{M})$ nên khi α = 0 , cosα và (v-V) cực đại, khi đó sin α = 0, nên N cực đại:

+Vậy: $N_{max} = mg + \frac{m(v-V)^2}{R} = mg + 2mg(1+\frac{m}{M})(\cos a - \cos a_0)$.

$= 3mg + 2mg\frac{m}{M} - 2mg(1+\frac{m}{M})\cos a_0$.

+Trong hệ quy chiếu Ox ở trên thì $mx_1 + Mx_2 = 0 \Rightarrow$ A và B dao động điều hòa và ngược pha nhau.

+Tốc độ của hai vật sẽ đạt cực đại cùng lúc. Từ (6) suy ra:

$\omega A_1 = \frac{M}{m}\omega A_2$ (9)

+Mặt khác: $A_1 + A_2 = R.\alpha_0$ (10)

+Từ (7) và (8), ta được:

$A_1 = \frac{MR\alpha_0}{M+m}$; $A_2 = \frac{mR\alpha_0}{M+m}$.

Lưu ý: GV có thể CM hệ DĐĐH theo cách sau nếu đúng thì cho điểm tối đa ( 1đ):

+ Trong hệ Ox trên: mv + MV = 0 (1')

+ Tọa độ khối tâm hệ thỏa mãn: $mx_1 + Mx_2 = 0$ (2')

+ Cơ năng hệ được bảo toàn: $\frac{1}{2}mgR\alpha_0^2 = \frac{1}{2}mgR\alpha^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2$ (3')

+ Để ý liên hệ: $\alpha\ell = x_1 - x_2$ (4')

+ Từ (1') (2') và (3'), ta được: $\frac{1}{2}mgR\alpha_0^2 = \frac{1}{2}m\frac{g}{k}(1+\frac{m}{M})^2 + \frac{1}{2}mv^2(1+\frac{m}{M})$ 5')

+ Đạo hàm hai vế (4') theo t, ta được: $x_1'' + \frac{g}{R}(1+\frac{m}{M})x_1 = 0$

+ Suy ra A DĐĐH với: $T = 2p\sqrt{\dfrac{R}{g(1+\dfrac{m}{M})}}$

+ Tại t = 0 thì: $v_{10} = 0$ và $x_1 < 0$, suy ra: $\varphi = \pi$, $x_{01} = -A_1$

+ Mặt khác: $x_{10} - x_{20} = -\alpha_0 R$, kết hợp (2') ta được: $A_1(1+\dfrac{m}{M}) = R\alpha_0$

+ Hay: $A_1 = \dfrac{MR\alpha_0}{M+m}$

**Bài 15.** a. Xét chuyển động của vật trong HQC gắn với giá đở đứng yên. Tại thời điểm nào đó vật

đứng yên trên băng lực ma sát tác dụng lên vật là lực ma sát nghỉ đạt cực đại và chuyển động như vậy duy trì cho đến khi lực đàn hồi chưa thắng được lực ma sát nghỉ, kí hiệu tọa độ điểm đó là $x_1$, sau đó vật trượt ( ma sát giảm xuống thành ma sát trượt) tọa độ $x_1$ tìm được từ sự cân bằng giữa lực đàn hồi và lực ma sát nghỉ cực đại:

$$kx_1 = \mu_0 mg \Rightarrow x_1 = \frac{\mu_0 mg}{k} \quad (1)$$

khi vật trượt trên băng chuyền thỏa mã phương trình : $ma = -kx + \mu mg \quad (2)$

$$\Rightarrow a = -\frac{k}{m}\left(x - \frac{\mu mg}{k}\right) \quad (3)$$

Nghiệm phương trình có dạng:

$$x - \frac{\mu mg}{k} = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t \quad (4) \text{ với } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (5)$$

suy ra : $v = x' = -A\omega_0 \sin\omega_0 t + B\omega_0 \cos\omega_0 t \quad (6)$

tại t=0: $\begin{cases} x = A + \dfrac{\mu mg}{k} = x_1 = \dfrac{\mu_0 mg}{k} \\ v = B\omega_0 = v_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{(\mu_0 - \mu)mg}{k} \\ B = \dfrac{v_0}{\omega_0} \end{cases}$

Nên

$$\begin{cases} x = \dfrac{\mu mg}{k} + \dfrac{(\mu_0 - \mu)mg}{k}\cos\omega_0 t + \dfrac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t \\ v = -\dfrac{(\mu_0 - \mu)mg}{k}\omega_0 \sin\omega_0 t + v_0\cos\omega_0 t \end{cases} \quad (7)$$

Vậy quy luật chuyển động của vật có dạng là:

$$x = \frac{\mu mg}{k} + \sqrt{\left(\frac{(\mu_0 - \mu)mg}{k}\right)^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2}\cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (8)$$

Vậy

$$\begin{cases} x_{max} = \dfrac{\mu mg}{k} + \sqrt{\left(\dfrac{(\mu_0 - \mu)mg}{k}\right)^2 + \left(\dfrac{v_0}{\omega_0}\right)^2} = 3,2cm \\ x_{min} = \dfrac{\mu mg}{k} - \sqrt{\left(\dfrac{(\mu_0 - \mu)mg}{k}\right)^2 + \left(\dfrac{v_0}{\omega_0}\right)^2} = 1,8cm \end{cases} \quad (9)$$

b. Gọi $t_1$ là thời gian vật vẫn còn bằng vận tốc của băng, thay vào (7)

$$v_0 = -\frac{(\mu_0 - \mu)mg}{k}\omega_0 \sin\omega_0 t_1 + v_0\cos\omega_0 t_1 \quad (10)$$

Trong miền giới hạn nghiệm có dạng:

$$t_1 = \frac{2\pi}{\omega_0} - \frac{2}{\omega_0}\arctan\left(\frac{\mu_0 - \mu}{kv_0}mg\right)$$

Tìm được vị trí mà vật tốc vật bằng vận tốc băng chuyền: $x_2 = -\dfrac{\mu_0 mg}{k} + \dfrac{2\mu mg}{k}$

Sau đó vật chuyển động với vận tốc không đổi, do đó quy luật chuyển động của vật trong thời gian này là:

$$x = x_2 + v_0(t - t_1)$$

Cho đến khi tọa độ của nó đạt $x_1$, đó là thời điểm:

$$t_2 = t_1 + \frac{x_1 - x_2}{v_0} = \frac{2\pi}{\omega_0} - \frac{2}{\omega_0}\arctan\left(\frac{(\mu_0 - \mu)mg}{kv_0}\right) + \frac{2(\mu_0 - \mu)mg}{kv_0}$$

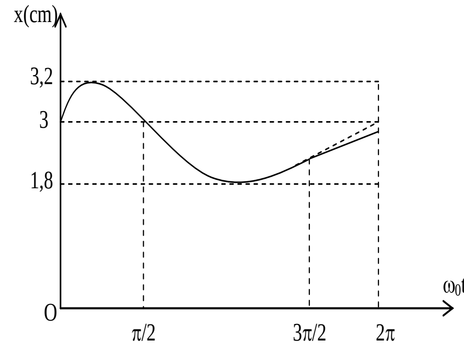
Biểu thức này cho phép ta xác định được

chu kì T= $t_2$ = 0,67(s) giá trị này lớn hơn chu kì dao động tự do của vật và lò xo không đáng kể.

Để vẽ đồ thị chuyển động ta thay các số liệu vào biểu thức (7) ta được:

$x = 2,5 + 0,5\cos\omega_0 t + 0,5\sin\omega_0 t$ .

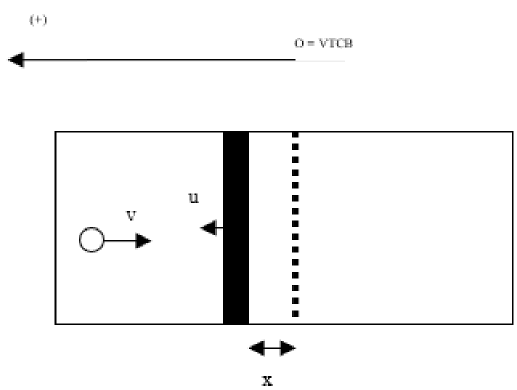
Giá trị $t_1$ ứng với $\omega_0 t \approx \frac{3\pi}{2}$ sau điểm này đồ thị là đường thẳng.




**Bài 16.** Gọi vận tốc của m khi pitông đứng yên ở VTCB là $v_o$.

+ Xét tại một thời điểm t: pitông có toạ độ x, vận tốc u: $u=\frac{dx}{dt}$ (1)

+ Cũng tại thời điểm t gọi vận tốc $m_T$ là v $\Rightarrow$ số va chạm của $m_T$ vào pitông trong ktg dt là: $dN=\frac{v.dt}{2(l-x)}$ (2)




+ Mặt khác cứ mỗi lần va chạm $m_T$ lại có giá trị tăng thêm 2u $\Rightarrow$ độ tăng vận tốc của $m_T$ sau ktg dt là: dv=2udN (3)

+ Từ (1); (2) và (3) $\Rightarrow$ $dv = 2u.\frac{v.dt}{2(l-x)} = \frac{v.dx}{(l-x)}$ $\Rightarrow$ $\frac{dv}{v} = \frac{dx}{l-x}$

+ Tích phân hai vế của pt trên ta được: $\int_{v_o}^{v}\frac{dv}{v} = \int_{o}^{x}\frac{dx}{l-x}$ $\Rightarrow$ $v = \frac{v_o l}{l-x}$ (4)

* Độ biến thiên động lượng của $m_T$ sau mỗi lần va chạm là: $\Delta p_T$ = -2mv $\Rightarrow$ biến thiên động lượng sau khoảng thời gian dt là: dp =-2mv.$\frac{v.dt}{2(l-x)}$

+ Ngoại lực tác dụng lên $m_T$ ở thời điểm t: $F = \frac{dp}{dt} = -\frac{mv^2}{(l-x)}$

+ Ngoại lực do $m_T$ tác dụng lên pitông ở thời điểm t là: $|F_T| = \frac{mv^2}{(l-x)} = \frac{mv_o^2 l^2}{(l-x)^3}$

+ Do x<<l nên: $|F_T| = \frac{mv_o^2}{l}(1+\frac{3x}{l})$ (không phụ thuộc gì vào u)

* Hoàn toàn tương tự ta cũng có lực do quả cầu bên phải tác dụng lên pitông ở thời điểm t là:

$$|F_F| = \frac{mv_o^2}{l}(1-\frac{3x}{l})$$

* Theo định luật II Niutơn tại thời điểm t ta có:

$$Mx'' = |F_F| - |F_T| = -\frac{6mv_o^2}{l^2}.x$$

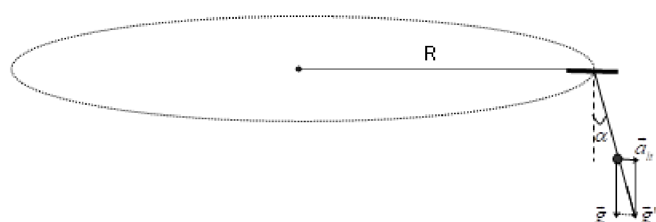
+ Với $v_o = 2lf$ $\Rightarrow$ $x'' + 24f^2\frac{m}{M}.x = 0$

**Vậy pitông dao động nhỏ với T =** $\frac{\pi}{\sqrt{6}f}.\sqrt{\frac{M}{m}}$

**Bài 17.** Khi tàu đứng yên, chu kỳ dao động bé của con lắc là $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

Khi tàu chuyển động, chu kỳ dao động bé của con lắc là $T' = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g'}}$

Trong đó g' là gia tốc trọng trường biểu kiến: $\vec{g}' = \vec{g} + \frac{\vec{F}_{lt}}{m} = \vec{g} + \vec{a}_{lt}$




Với $a_{lt} = \frac{v^2}{R + l.\sin\alpha} \approx \frac{v^2}{R}$ do l có thể bỏ qua so với R

Trên hình vẽ ta có $\vec{g} \perp \vec{a}_{lt}$ nên $g' = \sqrt{g^2 + a_{lt}^2} = \sqrt{g^2 + \frac{v^4}{R^2}} = \frac{\sqrt{g^2R^2 + v^4}}{R}$

Vậy suy ra $\frac{T'}{T} = \sqrt{\frac{g}{g'}} = \frac{\sqrt{gR}}{\sqrt[4]{v^4 + g^2R^2}}$ $\Rightarrow T' = \frac{T\sqrt{gR}}{\sqrt[4]{v^4 + g^2R^2}}$

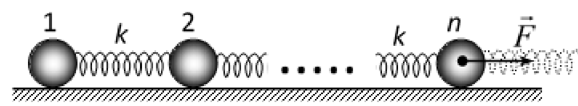
**Bài 18.** a) Khối lượng của hệ M=Nm. Phương trình định luật 2 Niutơn cho toàn hệ:

$Nma = F - NF_{ms} = F - N\mu mg$ (1)

Từ đó tính được gia tốc của hệ:

$$a = \frac{F - N\mu mg}{Nm} \quad (2)$$

Khảo sát hệ quả cầu từ thứ n kể từ đầu phía sau cùng của dãy (như hình vẽ)




Gọi $F_{dh}$ là lực đàn hồi của lò xo thứ n gây ra gia tốc cho n quả cầu này thì:

$nma = F_{đh} - nF_{ms} = F_{đh} - n\mu mg$ (3)

Từ (3) tính được độ lớn của lực đàn hồi: $F_{đh} = \frac{n}{N}F$ (4)

Theo (4) thì độ giãn của lò xo tăng tỷ lệ với n kể từ đầu dãy, độ giãn ít nhất đối với lò xo đầu tiên n=1 và cực đại với lò xo cuối cùng n=N – 1, tức là lò xo nối với quả cầu có đặt lực F.

Từ đó tính được độ biến dạng của lò xo thứ n:

$$\Delta x_n = \frac{F_{dhn}}{k} = \frac{n}{N}.\frac{F}{k} \quad (5)$$

Để tìm tổng độ biến dạng của hệ, ta dùng công thức:

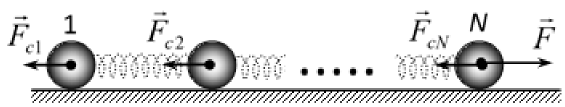
$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \quad ... \quad + \Delta x_{N-1} = \sum_{n=1}^{N-1} \Delta x_n \quad (6)$$

Giữa N quả cầu sẽ có N–1 lò xo. Tổng (6) được xác định:

$$\begin{aligned}\Delta x &= \Delta x_1 + \Delta x_2 + \quad ... \quad + \Delta x_{N-1} = \frac{1}{N}.\frac{F}{k} + \frac{2}{N}.\frac{F}{k} + \quad ... \quad + \frac{N-1}{N}.\frac{F}{k} \\ &= \frac{F}{Nk}\left[1 + 2 + \quad ... \quad + (N-1)\right] = \frac{F}{k}.\frac{(N-1)}{2}.\end{aligned} \quad (7)$$

b) Khi các quả cầu chuyển động trong môi trường nhớt, do lực cản tăng theo vận tốc nên khi tăng vận tốc đến một giá trị $v_{max}$ nào đó thì lực cản cân bằng với lực F và hệ chuyển động với gia tốc bằng không và độ biến dạng của các lò xo sẽ ổn định.

Từ biểu thức của định luật 2 Niutơn, rút ra được biểu thức lực cản:




$$F - NF_c = 0 \quad \Rightarrow \quad F_c = \frac{F}{N} \qquad (8)$$

Ta lại xét n quả cầu giống như câu a). Lực đàn hồi của lò xo thứ n sẽ cân bằng với tổng lực cản tác dụng lên n quả cầu:

$$F_{dh} - nF_c = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{dh} = \frac{n}{N}F \qquad (9)$$

Biểu thức này cũng giống như biểu thức câu trên, vì vậy tổng độ biến dạng cũng được xác định:

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \quad ... \quad + \Delta x_{N-1} = \frac{F}{Nk}\left[1 + 2 + \quad ... \quad + (N-1)\right] = \frac{F}{k}.\frac{(N-1)}{2}. \qquad (10)$$

Khi số quả cầu rất lớn thì số 1 có thể bỏ qua và độ biến dạng tổng cộng có biểu thức:

**Bài 19.** Khi khung rơi, trong thanh AB xuất hiện suất điện động cảm ứng: $e_C = Bvl$

\+ Cường độ dòng điện trong khung: $i = \frac{e_C}{R} = \frac{Bvl}{R}$

\+ CD không chịu tác dụng lực từ; Lực từ tác dụng lên cạnh AD và CB cân bằng; Lực từ tác dụng lên AB hướng thẳng đứng từ dưới lên và có độ lớn: $F_t = Bil = \frac{B^2l^2v}{R}$

a. + Theo định luật II Niu tơn: $mg - F_t = ma$

Khi khung đạt vận tốc giới hạn: $a = 0$

Suy ra: $v = \dfrac{mgR}{B^2l^2}$

+ Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng cho quá trình chuyển động của khung từ lúc ban đầu đến khi AB vừa ra khỏi từ trường: $Q = mgb - \dfrac{mv^2}{2} = mg\left(b - \dfrac{m^2gR^2}{2B^4l^4}\right)$

+ Khi khung rơi, trong thanh AB xuất hiện suất điện động cảm ứng: $e_C = Bvl = Blx'$

+ Suất điện động tự cảm trong khung: $e_{tc} = -Li'$

+ Theo định luật Ôm:

$$e_C + e_{tc} = 0 \Rightarrow Blx' = Li' \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(i - \frac{Blx}{L}\right) = 0 \Rightarrow i - \frac{Blx}{L} = const$$

b. Chọn gốc tọa độ O trùng với vị trí ban đầu của trọng tâm

+ Tại

$$t = 0 : i = 0;\ x = 0 \Rightarrow const = 0 \Rightarrow i = \frac{Blx}{L}$$

+ Lực từ tác dụng lên cạnh AB: $F_t = Bil = \dfrac{B^2l^2x}{L}$

+ Theo định luật II Niu tơn: $mg - F_t = ma$

$$\Rightarrow mg - \frac{B^2l^2x}{L} = ma \Rightarrow x'' + \frac{B^2l^2}{mL}\left(x - \frac{gmL}{B^2l^2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow x - \frac{gmL}{B^2l^2} = A\cos(\omega t + \varphi); \quad \omega = \frac{Bl}{\sqrt{mL}}$$

+ Tại $t = 0: \begin{cases} x = \dfrac{gmL}{B^2l^2} + A\cos\varphi = 0 \\ v = x' = -A\omega\sin\varphi = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi = \pi \\ A = \dfrac{gmL}{B^2l^2} \end{cases}$

$$\Rightarrow x = \frac{gmL}{B^2l^2}\left[\cos\left(\frac{Bl}{\sqrt{mL}}t + \pi\right) + 1\right]$$

+ Vậy phương trình chuyển động của khung khi chọn gốc O tại vị trí ban đầu của thanh CD:

$$x = \frac{gmL}{B^2l^2}\left[\cos\left(\frac{Bl}{\sqrt{mL}}t + \pi\right) + 1\right] - \frac{b}{2}$$

**Bài 20.** Phần A:

Hệ số đàn hồi của dây: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} \Rightarrow k = \dfrac{4\pi^2 m}{T^2} = \dfrac{40.0,2}{2^2} = 2\left(\dfrac{N}{m}\right)$.

Vận tốc của vật ở vị trí D: $v = \omega\sqrt{A^2 - x^2} = \pi\sqrt{0,1^2 - 0,05^2} = 0,27(m/s)$.

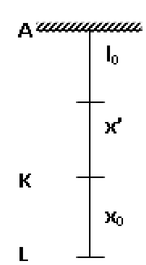
Thời gian vật đi từ C đến D: $\Delta t = \dfrac{T}{6} = \dfrac{1}{3}(s)$.

Động năng cực đại của vật: $W_{d\max} = \dfrac{1}{2}mv_{\max}^2 = \dfrac{1}{2}kA^2 = \dfrac{1}{2}.2.0,1^2 = 0,01(J)$.

Phần B:

Khi vật lên đến điểm A rồi rơi xuống, gọi L là vị trí thấp nhất mà vật đi xuống được, K là vị trí cân bằng.

Đặt BK = x’ ; KL = $x_0$.




Tính x’: Ta có: mg = kx’ $\Rightarrow x' = \dfrac{mg}{k} = \dfrac{0,2.10}{2} = 1m$.

$x_0$ được tính từ định luật bảo toàn năng lượng:

Cơ năng ở A bằng cơ năng ở L (chọn mốc thế năng ở B):

$mgl_0 = \frac{1}{2}k(x'+x_0)^2 - mg(x'+x_0) \Rightarrow x_0 = \sqrt{3}$.

Hoặc: $\frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}kx'^2 = \frac{1}{2}kx_0^2 \Rightarrow x_0 = \sqrt{3}$.

Thời gian vật quay lại A:

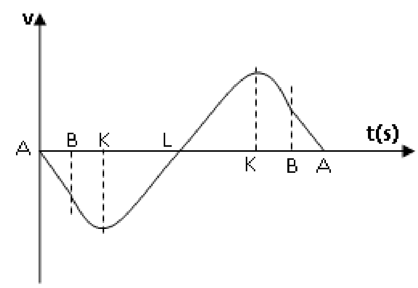
$t = 2.(t_{AB} + t_{BK} + t_{KL})$

$t_{AB} = \sqrt{\frac{2l_0}{g}} = 0,447(s)$

$t_{BK} = \frac{\alpha}{\omega} = \frac{0,196\pi}{\pi} = 0,196(s)$

$t_{KL} = \frac{T}{4} = 0,5(s)$

$t = 2,286(s)$

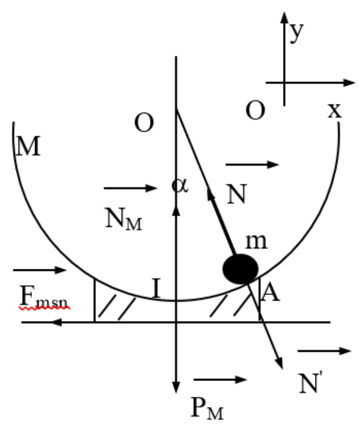



**Bài 21.** a. Ta có: $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N}$

* Chiếu lên phương tiếp tuyến:

$$ma_t = -P\sin\alpha \approx mg\frac{x}{R}$$

$$\Rightarrow x'' + \omega^2 x = 0 \qquad \text{Với: } \omega^2 = \frac{g}{R}$$




Từ đó cho thấy m dao động điều hoà, thời gian đi từ A đến B là $\frac{1}{2}$ chu kỳ dao động. $\Delta t = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{R}{g}}$

b. Chén đứng yên nên: $\vec{P_M} + \vec{N_M} + \vec{N'} + \vec{F_{msn}} = \vec{0}$ (1)

* Chiếu (1) lên phương Oy: $-P_M + N_M - N'\cos\alpha = 0$ Với N' = N (2)

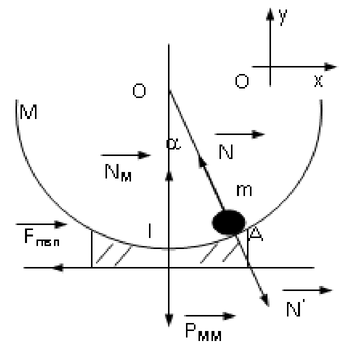
Ở góc lệch α, Với m có: $\begin{cases} \frac{mV^2}{R} = N - mg\cos\alpha \\ \frac{mV^2}{2} + mgh = mgh_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} N = \frac{mV^2}{R} + mg\cos\alpha \\ \frac{mV^2}{2} = mgR(\cos\alpha - \cos\alpha_0) \end{cases}$

$\Rightarrow N = mg(3\cos\alpha - 2\cos\alpha_0)$ (3)

Từ (2) và (3) ta được: $N_M = Mg + mg\cos\alpha\left(3\cos\alpha - 2\cos\alpha_0\right)(4)$

* Chiếu (1) lên Ox: $N'\sin\alpha - F_{msn} = 0 \Leftrightarrow N\sin\alpha = F_{msn} \le \mu N$

$$\Leftrightarrow \mu \ge \frac{N\sin\alpha}{N_M} \ge \frac{(N\sin\alpha)_{\max}}{(N_M)_{\min}}$$




$$\begin{cases} N\sin\alpha = mg\left(3\cos\alpha - 2\cos\alpha_0\right)\sin\alpha \\ N_M = Mg + mg\cos\alpha\left(3\cos\alpha - 2\cos\alpha_0\right) \end{cases}$$ ($\alpha_0$ bé; $\alpha \le \alpha_0$ )

$\Rightarrow \left(N\sin\alpha\right)_{\max};(N_M)_{\min}$ khi $\alpha = \alpha_0$

Vậy: $$\mu \ge \frac{m\sin 2\alpha}{2\left(M + m\cos^2\alpha\right)}$$

**Bài 22.** Để có tham số x xác định vị trí của hệ, ta chọn độ dịch chuyển của các điểm trên thanh ra khỏi vị trí cân bằng. Khi đó động năng của hệ bằng $mx'^2/2$, với khối lượng hiệu dụng đúng bằng khối lượng của thanh.

Để tính thế năng, ta coi rằng ta đã dịch chuyển một mẩu của thanh có chiều dài x và khối lượng mx/l từ đầu này đến đầu kia của thanh (như minh hoạ trong hình vẽ). Khi đó tâm của đầu mẫu đã dịch chuyển một đoạn x, tức là độ biến thên thế năng của thanh bằng $E_t = \frac{mx}{l}gx = \frac{2mg}{l}\frac{x^2}{2}$ (2) (ta quy ước thế năng ở VTCB=0). Điều này có nghĩa là độ cứng hiệu dụng của hệ là $k_{hd}=2mg/l$. Do đó tần số góc của dao động là $\varpi = \sqrt{\frac{k_{hd}}{m_{hd}}} = \sqrt{\frac{2g}{l}}$ =7 (rad/s)

**Bài 23.** Để làm tham số xác định đọ lệch của cung tròn ra khỏi vị trí cân bằng, ta chọn góc lệch nhỏ $\alpha$. Khi đó động năng của hệ là:

$$E_k = 2\frac{mv^2}{2} = \frac{2mR^2\varpi^2}{2} = 2mR^2\frac{\alpha'^2}{2}$$

Tức khối lượng hiệu dụng là $m_{hd}=2mR^2$ (ở đây m là khối lượng của vật nặng)

Sẽ là thuận tiện nếu ta biểu diễn thế năng của hệ qua sự biến thiên độ cao trọng tâm của hệ. Dễ thấy rằng trọng tâm của hệ nằm giữa 2 vật nặng và ở cách điểm treo một khoảng $l=R\cos60^0=R/2$, do đó

$E_t$=2mgl(1-cos$\alpha$)=2mgl$\frac{\alpha^2}{2}$=mgR$\frac{\alpha^2}{2}$. Điều này có nghĩa là độ cứng hiệu dụng $k_{hd}$=mgR và tần số góc của dao động bé là: $\varpi = \sqrt{\frac{k_{hd}}{m_{hd}}} = \sqrt{\frac{g}{2R}}$ = 10 (rad/s)

**(**Coi như là một bài luyện tập nhỏ, em hãy làm lại bài toán trên nhưng bây giờ chọn tham số xác định vị trí của hệ không phải là góc $\alpha$ mà là độ dịch chuyển quen thuộc x=R$\alpha$)

**Bài 24.** Có thể coi bài toán này là tổ hợp của ví dụ về con lắc đơn và bài toán 1. Do đó khi tính thế năng cần phải sử dụng đồng thời phương pháp tính độ cao khi góc lệch bé (công thức (1))và phương pháp dịch chuyển một mẩu của thanh(công thức (2)). Khi đó ta có

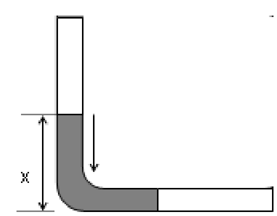
$E_t$=(mgR(1-cos$\alpha$)+$\frac{Mx}{l}gx = \frac{mg}{R}\frac{x^2}{2} + \frac{2Mg}{l}\frac{x^2}{2} = \frac{(\pi m + 2M)g}{l}\frac{x^2}{2}$.

Vì động năng của hệ bằng $E_k$=(m+M)$\frac{x'^2}{2}$

nên tần số góc của dao động là: $\varpi = \sqrt{\frac{k_{hd}}{m_{hd}}} = \sqrt{\frac{\pi m + 2M}{m+M}\frac{g}{l}}$ =5 (rad/s)

**Bài 25.** Nếu tại thời điểm t phần dây còn lại ở nhánh thẳng đứng có chiều dài x thì năng lượng của hệ có dạng:

$$E = \frac{mx'^2}{2} + \frac{mx}{l}g\frac{x}{2} = \frac{mx'^2}{2} + \frac{mg}{l}\frac{x^2}{2}$$




Trong đó mx/l là khối lượng của đoạn dây nằm trong nhánh thẳng đứng, và x/2 là độ cao trọng tâm của nó. Vì biểu thức này đồng nhất với biểu thức của năng lượng của dao động điều hoà với tần só góc $\varpi = \sqrt{\frac{g}{l}}$, và vận tốc ban đầu bằng không, nên chuyển động xảy ra theo quy luật x=lcos$\varpi$t (vì tại thời điểm ban đầu $x_0$=l). Công thức này chỉ có hiệ lực trong ẳ chu kì, khi mà x chưa =0, nghĩa là khi toàn bộ sợi dây chưa nằm trọn ven trong ống nằm ngang. Để tính thời gian cần tìm, ta chỉ cần đặt vào công thức trên x=l/2. Giải phương trình đó ta nhận được: $T = \frac{\pi}{3\varpi} = \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{l}{g}}$ =314 ms

**Bài 26.** Các phương trình chuyển động của hạt viết trong hệ tọa độ cực là:

$$m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) + \frac{K}{r^n} = 0 \text{ và } r^2\dot{\theta} = h = const$$

Suy ra $m\left(\ddot{r}-\frac{h^2}{r^3}\right)+\frac{K}{r^n}=0$

Phương trình nhiễu loạn của vật là: $m\delta\ddot{r}+\left(\frac{3mh^2}{r^4}-\frac{nK}{r^{n+1}}\right)\delta r=\left(\frac{2mh}{r^3}\right)\delta h=0$ (1)

Tại quỹ đạo tròn ổn định ta có: $\frac{K}{r^n}=mr\dot{\theta}^2=\frac{mh^2}{r^3}\Rightarrow K=mh^2r^{n-3}$

Điều kiện để quỹ đạo ổn định là hệ số của $\delta r$ phải dương: $\frac{3mh^2}{r^4}>\frac{mh^2n}{r^4}\to n<3$

**Bài 27.** a) Phương trình chuyển động quay của vật theo phương bán kính:

$$eBV=\frac{mV^2}{R}\Rightarrow V=\frac{eBR}{m} \text{ (1)}$$

Mômen động lượng của hạt: $L=mVR=eBR^2$

b) Khi $B_{av}$ thay đổi $dB_{av}$ thì $B_0$ thay đổi $dB_0$

Trên quỹ đạo của hạt e xuất hiện điện trường E tiếp tuyến quỹ đạo:

$$E\,2\pi R=\frac{dB_{av}.\pi R^2}{dt}\Rightarrow Edt=\frac{dB_{av}R}{2}$$

Lực điện do E tác dụng lên e gây ra 1 xung lực X:

$$X=F\mathrm{d}t=eEdt=m\mathrm{dV}\Rightarrow dV=\frac{\mathrm{eRdB}_{av}}{2m}$$

Vi phân phương trình trên ta được: $dV=\frac{\mathrm{eR}}{m}dB_0$

$$\frac{\mathrm{eRd}B_{av}}{2m}=\frac{\mathrm{eR}}{m}dB_0\Rightarrow\Delta B_0=\frac{\Delta B_{av}}{2}$$

c)Ở VTCB vật có hạt chuyển độn trên đường tròn bán kính $r_0$

$$V_0 = \frac{eBr_0}{m} = \frac{eA}{mr_0^{\ n-1}}$$

Khi vật lệch 1 đoạn rất nhỏ x theo phương bán kính: $r = r_0 + x$

Bảo toàn mômen động lượng: $mV_0r_0 = mVr \Rightarrow V = \frac{V_0r_0}{r} = \frac{V_0r_0}{r_0 + x}$

Xét hệ quy chiều gắn với bán kính. Phương trình chuyển động hướng tâm:

$$\frac{mV^2}{r} - eBv = mx''$$

$$\Rightarrow \frac{e^2A^2}{m}\frac{1}{r_0^{\ 2n-4}}\frac{1}{(r_0+x)^3} - \frac{e^2A^2}{m}\frac{1}{r_0^{\ n-2}}\frac{1}{(r_0+x)^{n+1}} = mx''$$

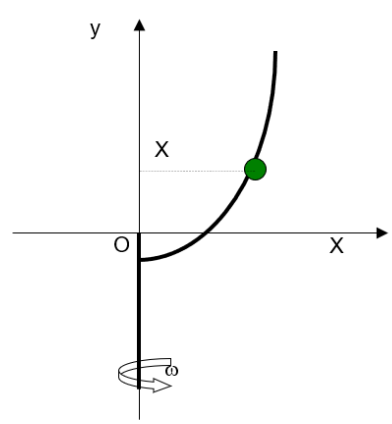
$$\Rightarrow \frac{e^2A^2}{m}\frac{1}{r_0^{\ 2n-1}}(1-\frac{3x}{r_0}) - \frac{e^2A^2}{m}\frac{1}{r_0^{\ 2n-1}}(1-\frac{(n+1)x}{r_0}) \approx mx''$$

$$\Rightarrow x'' + \frac{e^2A^2}{m^2r_0^{\ 2n-1}}(\frac{3x}{r_0} - \frac{(n+1)x}{r_0}) = 0$$

$$\Rightarrow x'' + \frac{e^2A^2}{m^2r_0^{\ 2n}}(2-n)x = 0$$

Vậy hạt dao động với tần số: $f = \frac{eA}{2\pi mr^n}\sqrt{2-n}$

Điều kiện để hạt có dao động ổn định: $n < 2$




**Bài 28.**

1- Nghiên cứu chuyển động của hạt trong HQC phi quán tính chuyển động quay với vận tốc góc ω.

Khi vật ở vị trí M (x,y). Thế năng của vật :

$W_t$ = mgy - $m\omega^2x^2/2$ = $mgax^3 - m\omega^2x^2/2$

Lấy đạo hàm theo x tại x = $x_0$ .

$$\frac{dW_t}{dx}\Big|_{x=x_0} = 3mga\,x_0^2 - m\omega^2 x_0 = 0$$

Tìm được $x_0 = 0$ hoặc $x_0 = \omega^2/3ga$

+) Vị trí $x_0 = 0 \rightarrow y_0 = 0$.

Có $W_t''(0) = -m\omega^2 < 0 \rightarrow$ Cân bằng không bền .

+) Vị trí $x_0 = \omega^2/ga \rightarrow y_0 = \omega^6/27g^3a^2$ .

Có $W_t''(x_0) = m\omega^2 > 0 \rightarrow$ Cân bằng bền.

2- Xét vật dịch khỏi vị trí cân bằng một đoạn nhỏ $\Delta S = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$

+ Động năng :

$W_đ = m(x'^2 + y'^2)/2 = m(1 + 9a^2x^4)x'^2/2 \approx m(1 + 9a^2x_0^4)x'^2/2$

+ Khai triển : $y = ax^3 = ax_0^3\left(1+\frac{\Delta x}{x_0}\right)^3 \approx ax_0^3\left(1+\frac{3\Delta x}{x_0}+\frac{3\Delta x^2}{x_0^2}\right)$

$$x^2 = x_0^2\left(1+\frac{\Delta x}{x_0}\right)^2 \approx x_0^2\left(1+\frac{2\Delta x}{x_0}+\frac{\Delta x^2}{x_0^2}\right)$$

+ Cơ năng của dao động :

$W = mgax^3 - m\omega^2x^2/2 + m(1 + 9a^2x_0^4)x'^2/2 = \text{Const}$

Đạo hàm theo t

$$W'(t) = mgax_0^3\left(\frac{3\Delta x'}{x_0}+\frac{6\Delta x\Delta x'}{x_0^2}\right) - m\omega^2x_0^2\left(\frac{\Delta x'}{x_0}+\frac{\Delta x\Delta x'}{x_0^2}\right) + m\left(1+9a^2x_0^4\right)\Delta x'\Delta x''$$

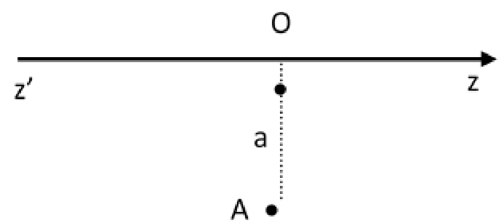
Cho $W'(t) = 0$, đơn giản $\Delta x'$ và để ý $3mgax_0^2 - m\omega^2x_0 = 0$ ta tìm được:

$$\Delta x'' + \frac{\omega^2}{1+9a^2x_0^4}\Delta x = 0$$

Vật dao động điều hoà với chu kì :

$$T = \frac{2\pi}{\omega}\sqrt{1+9a^2x_0^4}$$

**Bài 29.** 1, Chuyển động thực hiện không ma sát, sử dung lí thuyết năng lượng động học. Lực duy nhất tác động trong lí thuyết này tương ứng với tương tác hấp dẫn giữa các khối lượng M và m. Mối quan hệ này kết hợp với thế năng $E_p$ đưa ra bởi biểu thức:




$$E_p = -\frac{\xi Mm}{r}$$, vậy thì $$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{\xi Mm}{r} = const = K$$

Hằng số K được xác định bởi điều kiện ban đầu

Khi t = 0, v = $v_0$ .

Từ đó $$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{\xi Mm}{r} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{\xi Mm}{a}$$

Nó còn có thể viết $$v^2 = v_0^2 - \frac{2\xi M}{a}\left(1 - \frac{r}{a}\right) \quad (1)$$

Với $v_0 = v_c$, K = 0 cho ta $v^2 = v_c^2\left(\frac{a}{r}\right)$ và phần tử đạt tới vận tốc bằng 0.

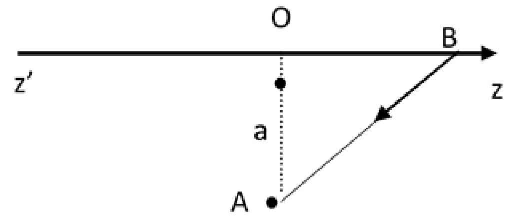
Phương trình (1) trở thành

$$v^2 = v_0^2 - v_c^2\left(1 - \frac{a}{r}\right) \quad \text{hay} \quad v^2 = \left(v_0^2 - v_c^2\right) + v_c^2\frac{a}{r} \quad (2)$$

Hai trường hợp có thể được xem xét:

- Trường hợp 1: $v_0 > v_c$:

Đại lượng $v^2$, đưa ra từ (2) , xác định dương $\forall$ r, nó dẫn đến phần tử chuyển động chậm dần từ $v_0$ về $\sqrt{v_0^2 - v_c^2}$ .




- Trường hợp 2 : $v_0 < v_c$

Quan hệ (2) làm xuất hiện r giới hạn ($r_1$), ở đó vận tốc triệt tiêu.

$r_1$ được xác định bởi $0 = v_0^2 - v_c^2 + v_c^2 \dfrac{a}{r}$, đưa ra $r_1 = \dfrac{a}{1 - \left(\dfrac{v_0}{v_c}\right)^2}$ (3).

Trong thời kì đầu, phần tử di chuyển từ O (vận tốc $v_0$) tới B :

$$\left(z_B = \sqrt{r_1^2 - a} \quad ; v_B = 0\right)$$

Vì hình chiếu $\vec{F}'$ của lực $\vec{F}$ lên trục Oz không triệt tiêu, nên điểm B không đáp ứng là vị trí cân bằng, như vậy phần tử sẽ quay ngược trở lại. như vậy nó diễn tả chuyển động dao động giữa các điểm ngoài cùng B(zB) và B'(-zB)

**Chú ý**: Phương trình bảo toàn năng lượng viết là :

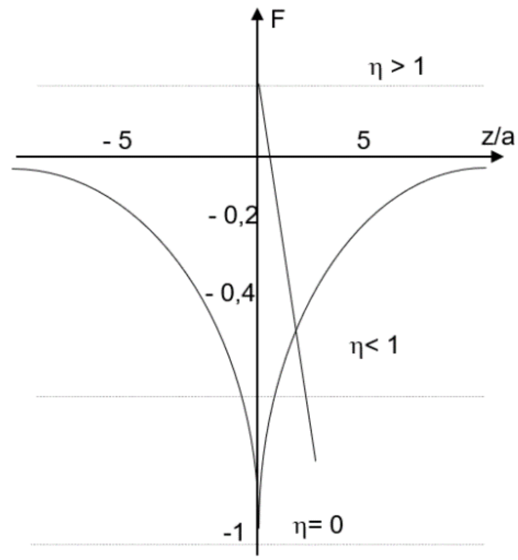
$$v^2 = v_c^2 \frac{a}{r} = v_0^2 - v_c^2$$

Từ đó
$$\frac{v^2}{v_c^2} - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{z^2}{a^2}}} = \frac{v_0^2}{v_c^2} - 1$$

hoặc với
$$f(z) = \frac{-1}{\sqrt{1 + \left(\frac{z}{a}\right)^2}} \text{ và } \eta = \frac{v_0}{v_c}$$

$$\Rightarrow \qquad \left(\frac{v}{v_c}\right)^2 + f(z) = \eta^2 - 1$$

Đường cong f(z) như hình vẽ.




Ta tìm được tất cả các trường hợp có thể theo giá trị tham số η

(giá trị tới hạn η = 1 hay $v_0 = v_c$).

2. Chuyển động trước giới hạn, phải có $v_0 < v_c$. Nó thực hiện trong một lân cận của O lại càng giảm khi tham số $\eta = \frac{v_0}{v_c}$ là nhỏ so với đơn vị.

Phương trình chuyển động viết :

$$v = z' \text{ và } \quad z'^2 = v_c^2\left[\left(\eta^2 - 1\right) + \frac{a}{r}\right] \quad (4)$$

Hay $r = \sqrt{z^2 + a^2}$ từ đó $z'^2 - v_c^2\left[\left(\eta^2 - 1\right) + \frac{a}{\sqrt{r^2 + a^2}}\right] = 0$

Hay với $|z| \ll a, \dfrac{1}{\sqrt{z^2 + a^2}} = \dfrac{1}{a}\left(1 + \dfrac{z^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx \dfrac{1}{a}\left(1 - \dfrac{z^2}{2a^2}\right)$

Từ đó $z'^2 - v_c^2\left[\left(\eta^2 - 1\right) + \left(1 - \frac{z^2}{2a^2} + \ldots\right)\right] = 0$

$\rightarrow \quad z'^2 + \dfrac{v_c^2}{2a^2} z^2 = const$ (theo thứ tự xét).

Nghiệm phương trình : z = Asin ( $\omega_0$ t + φ )

Quan hệ này đưa ra phương trình năng lượng của con lắc dao động điều hoà tần số riêng $\omega_0$ là :

$$\omega_0 = \frac{v_c}{a\sqrt{2}} \text{ và } T_0 = 2\pi\frac{a\sqrt{2}}{v_c}.$$

Chú ý: Phương trình (4) đưa ra $2z'z'' = av_c^2(-\frac{r'}{r^2})$

Và với : $r^2 = a^2 + z^2$ , r.r' = z.z' ta được :

$$2z'z'' = av_c^2\left(-\frac{rr'}{r^3}\right) = -av_c^2\frac{z'z}{\left(a^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Sau khi đơn giản z', ta nhận được :

$$z'' + \frac{v_c^2}{2a^2}\frac{z}{\left(1+\frac{z^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = 0 \qquad (5)$$

Vì z << a. Bỏ qua số hạng bậc hai của tỉ số z/a. Ta được :

$$z'' + \frac{v_c^2}{2a^2}z = 0$$

Với điều kiện ban đầu : z(0) = 0 ; z'(0) = $v_0$. Ta tìm được :

$$z(t) = \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$$

**Bài 30.** 1. Gọi θ : góc hợp bởi bán kính nối vật và phương thẳng đứng .

Xét trong hệ quy chiếu phi quán tính gắn với vòng và quay với vận tốc góc ω quanh trục thẳng đứng.

Thế năng của hạt cườm :

$$U = -mgR\left[\cos\theta + \frac{1}{2}.\frac{\omega^2}{\omega_0^2}(1+\sin\theta)^2\right]$$

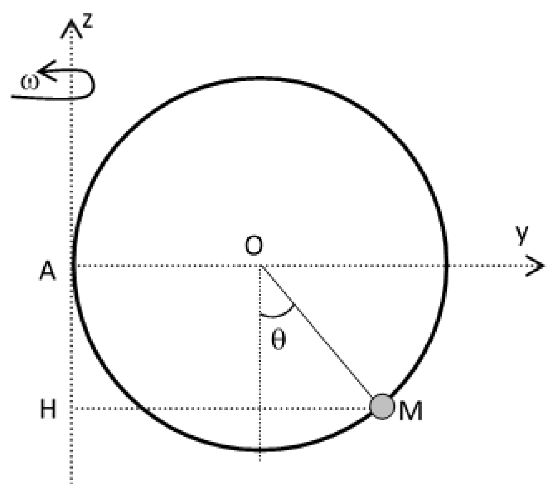
Với :

$$\omega_0^2 = \frac{g}{R} = 100(rad/s)$$

Hạt cườm nằm cân bằng khi :

$$\frac{dU}{d\theta} = -\text{ mgR}\left[\sin\theta - .\frac{\omega^2}{\omega_0^2}(1+\sin\theta)\cos\theta\right] = 0$$

Thay số :




với $\omega = \omega_0 = 100$(rad/s) ta được :

$\sin\theta - (1 + \sin\theta)\cos\theta = 0$

Nghiệm phương trình : $\theta_1 = 63^0$ và $\theta_2 = 208^0$

Ta có :

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} = -\text{ mgR}\left[\cos\theta + \sin\theta - \cos 2\vartheta\right]$$

* Vị trí ứng với $\theta_1 = 63^0$ có $\frac{d^2U}{d\theta^2} > 0 \rightarrow$ Cân bằng bền.

* Vị trí ứng với $\theta_2 = 208^0$ có $\frac{d^2U}{d\theta^2} < 0 \rightarrow$ Cân bằng không bền.

2. Cơ năng của hạt trong hệ quy chiếu quay :

$$E = \frac{1}{2}mR^2\theta'^2 + U = \text{const}$$

Đạo hàm hai vế ta tìm được :

$$mR^2\theta'' + mgR\left[\sin\theta - .\frac{\omega^2}{\omega_0^2}(1+\sin\theta)\cos\theta\right] = 0$$

Thay $\omega_0^2 = \dfrac{g}{R}$ và $\omega = \omega_0$ ta được :

$$\theta'' + \omega_0^2\left[\sin\theta - (1+\sin\theta)\cos\theta\right] = 0$$

Đặt $\theta = \theta_1 + \Delta\theta$ ($\Delta\theta \le 1$) và sử dụng các công thức gần đúng :

$\sin\theta \approx \sin\theta_1 + \Delta\theta\cos\theta_1$ ; $\cos\theta \approx \cos\theta_1 + \Delta\theta\cos\theta_1$(bỏ qua số hạng $\Delta\theta^2$)

Với chú ý rằng $\sin\theta_1 - \cos\theta_1 - \sin\theta_1\cos\theta_1 = 0$ (vị trí cân bằng)

Ta được : $\Delta\theta'' + \omega_0^2(\sin\theta_1 + \cos\theta_1 + \cos2\theta_1)\Delta\theta = 0$

Vậy hạt dao động điều hoà quanh vị trí $\theta_1$ với chu kỳ :

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{\cos\theta_1 + \sin\theta_1 + \cos2\theta_1}} \approx 0,72(s)$$

**Bài 31.** 1- Dùng Định lý O-G tìm được $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$ hay $\vec{E} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$

- Viết biểu thức cường độ điện trường do mặt phẳng vô hạn tích điện đều gây ra $E' = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ . Từ đó

$\Rightarrow E = 2E'$

- Nhận xét: +) Mặt phẳng vô hạn tích điện đều gây ra điện trường ở hai phía của bề mặt. Gọi $\vec{E_1}, \vec{E_2}$ là cường độ điện trường do diện tích dS và (S – dS) gây ra tại vị trí dS thì $\vec{E} = \vec{E_1} + \vec{E_2}$

Vì bên trong vật dẫn thì $\vec{E} = \vec{E_1} + \vec{E_2} = \vec{0} \Rightarrow \vec{E_1} = -\vec{E_2}$

Bên ngoài vật dẫn $E = E_1 + E_2 = 2E_1 = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_1 = E_2 = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

- Như vậy các điện tích trên diện tích còn lại (S- dS) đã tạo ra một điện trường có giá trị $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ làm triệt tiêu điện trường của dS gây ra bên trong màng nhưng là cho điện trường bên ngoài màng tăng một lượng $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$.

2- Theo trên các điện tích trên diện tích còn lại (S- dS) đã tạo ra một điện trường có giá trị $E_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ tại vị trí dS và tác dụng lên dS một lực

$$d\vec{F} = \vec{E_2}.dq = \vec{E_2}.(\sigma dS) = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} dS\vec{n} = \frac{Q^2 dS}{32\pi^2\varepsilon_0 R^4}\vec{n}$$

3- Trước hết ta có nhận xét lực $d\vec{F}$ hướng theo phương pháp tuyến với bề mặt màng nên có xu hướng đẩy dS ra xa khỏi mặt màng. Như vậy có thể xem như mặt màng tích điện luôn chịu một áp suất hiệu dụng $P_{eff} = \frac{dF}{dS} = \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 R^4}$.

- Từ điều kiện cân bằng áp suất cho $P_{eff} = P_c$ (áp suất phụ gây bởi mặt cong)

$$\Leftrightarrow \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 R^4} = \frac{4\sigma}{R} \Rightarrow R = R_0 = \left(\frac{Q^2}{128\pi^2\varepsilon_0\sigma}\right)^{1/3} = 3cm$$

4- Khi bán kính màng là $R = R_0 + \Delta R$, lực tổng hợp tác dụng diện tích dS của màng:

$$F = \left(\frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 R^4} - \frac{4\sigma}{R}\right)dS = 4\sigma\left(\frac{R_0^3}{(R_0+\Delta R)^4} - \frac{1}{R_0+\Delta R}\right)dS$$

$$\Leftrightarrow F = \frac{4\sigma}{R_0}\left(\frac{1}{\left(1+\frac{\Delta R}{R_0}\right)^4} - \frac{1}{1+\frac{\Delta R}{R_0}}\right)dS$$

- Vì $\frac{\Delta R}{R_0} << 1 \Rightarrow \frac{1}{\left(1+\frac{\Delta R}{R_0}\right)^4} - \frac{1}{1+\frac{\Delta R}{R_0}} \approx 1 - 4\frac{\Delta R}{R_0} - 1 + \frac{\Delta R}{R_0} = -3\frac{\Delta R}{R_0}$

$$\Rightarrow F = -\frac{12\sigma\Delta R}{R_0^2}dS.$$

- Phương trình ĐLH viết cho phần tử diện tích dS, có khối lượng $dm = \frac{m}{4\pi R_0^2}dS$:

$$F = dm.R'' \Leftrightarrow -\frac{12\sigma\Delta R}{R_0^2}dS = \frac{m}{4\pi R_0^2}dS\Delta R''$$

$$\Rightarrow \Delta R'' + \frac{48\pi\sigma\Delta R}{m}\Delta R = 0.$$

Màng dao động với chu kì $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{48\pi\sigma}} = \sqrt{\frac{m\pi}{12\sigma}} = 16\,s$.

**Bài 32.** Một mô hình khả dĩ cho sao biến quang . Xét một phần tử khí bất kì ta có

$$\rho\frac{d^2}{dt^2}\vec{r} = \overrightarrow{F_{hd}} + \vec{F}_{apluc} \Rightarrow \rho\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{1}{r^2}GM_2\rho + \left|\frac{dp_r}{dr}\right|$$

Xét lớp khí ngoài cùng R → R + dR có lớp khí m phân bố đối xứng cầu. Lớp này chịu lực hấp dẫn của khối khí bên trong và áp suất bên trong đẩy ra

$$m\frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{GMm}{R^2} + 4\pi R^2 p \qquad (1)$$

Sao ở trạng thái cân bằng nên $\left.\frac{d^2R}{dt^2}\right|_{R=R_0} = 0$ (2)

$$\frac{GMm}{R^2} = 4\pi R_0^2 p_0 \qquad (3)$$

Tuyến tính hoá (3) bằng phương pháp Niutơn (phương pháp biến phân) thay

$R = R_0 + \delta R$ và $p = p_0 + \delta p$ (4) vào (1) ta được:

$$m\frac{d^2}{dt^2}(R_0 + \delta R) = -\frac{GMm}{(R_0 + \delta R)^2} + 4\pi(R_0 + \delta R)^2 (p_0 + \delta p) \quad (5)$$

Ta tính các số hạng ở trái và phải ta được:

$$\frac{d^2}{dt^2}(R_0 + \delta R) = \frac{d^2}{dt^2}.R_0 + \frac{d^2}{dt^2}.\delta R$$

$$\frac{1}{(R_0 + \delta R)^2} \approx \frac{1}{R_0^2}\left(1 - 2\frac{\delta R}{R_0}\right) \text{ (khai triển lorent)}$$

$$R_0 + \delta R = R_0 \left(1 + \frac{\delta R}{R_0}\right) \quad (6)$$

Thay các số hạng ở (6) vào (5) và chú ý $\frac{d^2}{dt^2}R_0 = 0$ (vì $R_0$ = const)

ta có

$$m\frac{d^2}{dt^2}\delta R \approx \frac{GMm}{R_0^2}\left(2\frac{\delta R}{R_0} - 1\right) + 4\pi[R_0^2 + 2R_0\delta R + (\delta R)^2] (p_0 + \delta p)$$

$$\approx \frac{2GMm\delta R}{R_0^3} - \frac{GMm}{R_0^2} + 4\pi R_0^2 p_0^2 + 8\pi R_0 p_0 \delta R + 4\pi R_0^2 \delta p$$

Với chú ý (3) và bỏ số hạng bậc cao ta được:

$$m\frac{d^2}{dt^2}(\delta R) \approx \frac{2GMm\delta R}{R_0^3} + 8\pi R_0 p_0 \delta R + 4\pi R_0^2 \delta p \quad (7)$$

Nếu khí giãn nỡ đoạn nhiệt thì:

$$pV^\gamma = \text{const} \quad (8)$$

loga hoá (8) ta được: $\ln p + \gamma \ln V = \ln\text{const} = C$ (9)

$$\left.\frac{\delta p}{p}\right|_{p_0} + \gamma \left.\frac{\delta V}{V}\right|_{V_0} = 0 \qquad (10)$$

Dừng δ bậc nhất ta được:

$$\frac{\delta p}{p_0} + 3\gamma \frac{4}{3}\pi R_0^2 . \frac{\delta R}{\frac{4}{3}\pi R_0^2} = 0 \Rightarrow \delta p = -3p_0\gamma . \frac{\delta R}{R_0} \qquad (11)$$

Thay (11) vào (7) và chú ý $4\pi R_0 p_0 = \frac{GMm}{R_0^3}$ ta được:

$$\frac{d^2}{dt^2}(\delta R) \approx -(3\gamma - 4)\frac{GM\delta R}{R_0^3}$$

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho_0.(3\gamma - 4)}} \quad \text{Với } \rho_0 = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R_0^3}$$

Với $\gamma = \frac{5}{3} > \frac{4}{3}$ thỏa mãn điều kiện tồn tại chu kì.

**Bài 33.** a. Phương trình động lực học cho vật M khi lò xo bị nén là:

Mz" = - Mg - k ( z – $\ell$ )

Khi vật nằm yên, z" = 0, thì z = $z_a$ với $z_a = \ell - \frac{Mg}{k}$

Phương trình cho z là: $z'' + \frac{k}{M}(z - z_a) = 0$

và nghiệm của nó có dạng z - $z_a$ = A cos(ωt+φ) với $\omega = \sqrt{\frac{k}{M}}$.

Từ điều kiện đầu bài: lúc t = 0, z = $z_b$ và z' =0, ta có phương trình chuyển động của vật M:

z = $z_a$ + ($z_b$ - $z_a$)cosωt

Lực căng mà lò xo tác dụng lên các vật M và m có độ lớn:

$F = k ( z - \ell ) = k [(z_a - \ell) + (z_b - z_a)\cos\omega t]$

Lực F có độ lớn cực đại $F_{max}$ khi $\cos\omega t = -1$, vì $z_b < z_a$.

Vật m bị nâng lên khỏi mặt sàn khi $F_{max} \geq mg$. Do đó, phải nén vật M ít nhất đến toạ độ $z_b$ mà:

$$z_b \leq \ell - \frac{(2M+m)g}{k}$$

b. Vật m bị nâng lên khỏi mặt sàn ở thời điểm $t_1$, khi lực căng của lò xo bằng trọng lực

$F = mg$. Theo (3) và (4) thì

$$\cos\omega t_1 = \frac{(M+m)}{k(z_b - z_a)}g \ .$$

Toạ độ của vật M lúc đó là $z_c$ với

$$z = z(t_1) = z_a + (z_b - z_a)\cos\omega t_1 = \ell + \frac{mg}{k}$$

Vận tốc của M lúc đó là:

$v_c = z'(t_1) = (z_b - z_a)\omega\sin\omega t_1$ hay

$$v_c = \left(\ell - \frac{Mg}{k} - z_b\right)\sqrt{\frac{k}{M}}\sqrt{1 - \left(\frac{(M+m)g}{Mg - k(\ell - z_b)}\right)^2}$$

c. Khi vật m bị nâng lên khỏi mặt sàn, ta gọi $z_M$ và $z_m$ lần lượt là toạ độ của các vật M và m.

Phương trình động lực học cho hai vật là:

$Mz_M'' = -Mg + k ( z_M - z_m - \ell )$

$mz_m'' = - m g - k ( z_M - z_m - \ell )$

Cộng hai phương trình này ta có:

$Mz_M'' + mz_m'' = -(M+m)g$

Toạ độ khối tâm G của hệ là:

$z_G = \dfrac{Mz_M + mz_m}{M+m}$. Gia tốc của khối tâm là:

$$z''_G = \frac{Mz''_M + mz''_m}{M+m} = -g.$$

Do đó khối tâm chuyển động chậm dần theo phương trình:

$$z_G = z_{G_1} + v_{G_1}t - \frac{gt^2}{2}$$

Trong đó $z_{G_1}, v_{G_1}$ là toạ độ và vận tốc khối tâm ở thời điểm $t_1$, khi vật m bắt đầu rời khỏi sàn, với $z_{G1} = \dfrac{Mz_C}{M+m}$ và $v_{G1} = \dfrac{Mv_C}{M+m}$

Khối tâm G đạt độ cao cực đại ở thời điểm $t_2$ khi vận tốc của nó bằng không, hay:

$z'_G = v_G = v_{G_1} + gt_2 = 0$ tức là: $t_2 = \dfrac{v_{G_1}}{g}$.

Toạ độ khối tâm ở độ cao cực đại là:

$$z_{G\max} = z_G(t_2) = z_{G_1} + \frac{v_{G_1}^2}{2g} = \frac{Mz_C}{M+m} + \frac{v_{G_1}^2}{2g}$$

hay: $$z_{G\max} = \frac{Mg}{2k} + \frac{M}{M+m}\left(\ell - \frac{Mg}{k}\right) + \frac{kM}{2g(M+m)^2}\left(\ell - \frac{Mg}{k} - z_b\right)^2.$$

# IV.5. DAO ĐỘNG TẮT DẦN- CƯỠNG BỨC

**Bài 1.**

*a.Theo định luật II Newton:*

$$mx" = P_t + F_{ms} = mg\sin\theta - \alpha x(\text{mgcos}\theta) \qquad (1)$$

Tại vị trí cân bằng $x" = 0 \to mg\sin\theta = \mu mgcos\theta = \alpha x_0 mgcos\theta$

$$\to \sin\theta = \alpha x_0 cos\theta \to x_0 = \frac{\tan\theta}{\alpha} \qquad (2)$$

b.Từ (1) $x"+\alpha g\cos\theta x - g\sin\theta = 0 \to x"+\alpha g\cos\theta\left(x - \frac{\tan\theta}{\alpha}\right) = 0$

$$\to \left(x - \frac{\tan\theta}{\alpha}\right)" + \omega^2\left(x - \frac{\tan\theta}{\alpha}\right) = 0 \qquad (3)$$

Trong đó $\omega^2 = \alpha g\cos\theta$

Nghiệm của (3) có dạng

$$\left(x - \frac{\tan\theta}{\alpha}\right) = A.\cos(\omega t + \varphi) \to \left(x - \frac{\tan\theta}{\alpha}\right) = A.\cos\left[\sqrt{\alpha g\cos\theta}t + \varphi\right]$$

Hay $x = \frac{\tan\theta}{\alpha} + A.\cos\left[\sqrt{\alpha g\cos\theta}t + \varphi\right]$ (4)

Chọn mốc thời gian t=0 khi x(0)=0; v(0)=0

$$\begin{cases} 0 = \frac{\tan\theta}{\alpha} + A.\cos\varphi \\ 0 = -A\sqrt{\alpha g\cos\theta}sin\varphi \end{cases} \to \begin{cases} A = \frac{\tan\theta}{\alpha} = x_0 \\ \varphi = \pi \end{cases} \qquad (5)$$

Thay (5) vào (4) ta được $x = \frac{\tan\theta}{\alpha}\left\{1 + cos\left[(\sqrt{\alpha g\cos\theta})t + \pi\right]\right\}$ (6)

Từ (2) và (6) ta thấy $\to \frac{h}{sin\theta} = 2x_0 = 2\frac{\tan\theta}{\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{2\sin^2\theta}{\text{hcos}\theta}$ (7)

c. Thay (7) vào (6) ta được

$$x = \frac{h}{2\sin\theta}\left\{1 + cos\left[(\sqrt{\frac{2g}{\text{h}}}\sin\theta)t + \pi\right]\right\} \qquad (8)$$

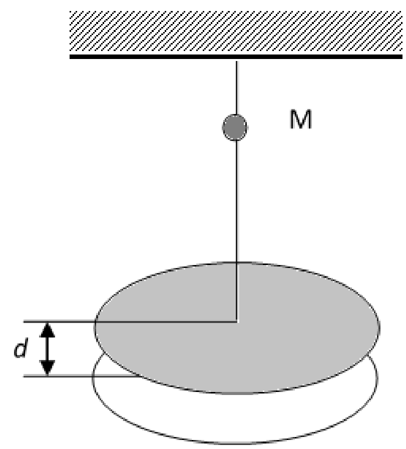
Bảo toàn cơ năng $\frac{1}{2}mv_{max}^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}m\frac{2g\sin^2\theta}{h}(\frac{h}{2\sin\theta})^2$

$$v_{max}^2 = \frac{g}{2}h \rightarrow v_{max} = \sqrt{\frac{gh}{2}} \qquad (9)$$

d. Thời gian chuyển động bằng nửa chu kì dao động trong (6):

$$t = \frac{1}{2}T = \frac{1}{2}\frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{\sin\theta}\sqrt{\frac{h}{2g}} \qquad (10)$$

**Bài 2.**




Phương trình động lực mô tả dao động tắt dần của đĩa:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + 2\varepsilon\frac{d\phi}{dt} + \omega^2\phi = 0$$

Trong đó:

$$\varepsilon = \frac{M_C}{2I\frac{d\phi}{dt}}\ ; \quad M_C \text{ là momen của lực nhớt}$$

Ta có: $\quad M_C = \frac{\pi\eta a^4}{2d}\omega = \frac{\pi\eta a^4}{2d}\frac{d\phi}{dt}$

Do đó ta có: $\varepsilon = \frac{\pi\eta a^4}{4Id}$

Theo định nghĩa về giảm lượng loga:

$$\Lambda = \ln\frac{A(t)}{A(t+\tau)} = \varepsilon\tau \Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{\Lambda}{\tau} = \frac{\pi\eta a^4}{4Id}$$

Từ đó công thức để tính $\eta$: $\eta = \frac{4Id}{\pi a^4}\frac{\Lambda}{\tau}$.

**Bài 3.** Xét chuyển động của một lớp chất lỏng bất kì:

$$\left(\rho l 2\pi r dr\right) r^2 \frac{\partial\omega_0}{\partial t} = \left(\eta S \operatorname{grad} v\big|_{r+dr}\left(r+dr\right) - \eta S \operatorname{grad} v\big|_r r\right)$$

Trong sự chảy ổn định các lớp chất lỏng chuyển động với vận tốc không đổi nên

$$\eta S \operatorname{grad} v\big|_{r+dr}\left(r+dr\right) - \eta S' \operatorname{grad} v\big|_r r = 0$$

Tức là:

$$2\pi l\left(r+dr\right)^3 \operatorname{grad}\omega_0\Big|_{r+dr} - 2\pi\ell r^3 \operatorname{grad}\omega_0\Big|_r = 0$$

Hay:

$$r^3\left(\operatorname{grad}\omega_0\Big|_{r+dr} - \operatorname{grad}\omega_0\Big|_r\right) \approx -3r^2 \operatorname{grad}\omega_0\Big|_{r+dr} dr$$

Do đó;

$$r\left(\operatorname{grad}\omega_0\Big|_{r+dr} - \operatorname{grad}\omega_0\Big|_r\right) \approx -3 \operatorname{grad}\omega_0\Big|_{r+dr} dr$$

Rút gọn phương trình trên ta được

$$\frac{d\left(\operatorname{grad}\omega_0\right)}{\operatorname{grad}\omega_0} = -\frac{3dr}{r} \qquad (*)$$

(Thực ra sự khác biệt giữa $\operatorname{grad}\omega_0\Big|_{r+dr}$ và $\operatorname{grad}\omega_0\Big|_r$ là không nhiều nên khi không cần thiết phải quá chính xác ta có thể dùng lẫn.)

Tích phân hai vế của (*) ta được: $\operatorname{grad}\omega_0 = \frac{C}{r^3}$ ($C$ là một hằng số nào đó)

Ta có thể suy ra điều này bằng một lập luận hết sức đơn giản sau: khi hệ thống là ổn định vận tốc góc của một phần tử bất kì của hệ thống là không đổi nên momen phát động lên phần tử bất kì (phần momen của vỏ tác động lên) phải bằng momen cản (phần momen của lõi tác động lên) do đó momen của lực nhớt phải có độ lớn không phụ thuộc vào bán kính. Nghĩa là:

$$dN = \left[\rho\left(2\pi r l\right)\eta r \operatorname{grad}\omega_0\right] r \sim \operatorname{grad}\omega_0 r^3$$

Không phụ thuộc r $\Rightarrow$ grad$\omega_0 \sim r^{-3}$)

Từ đó ta có: $\omega_0(r) = A - \dfrac{C}{2r^2}$

Vì trụ ngoài quay với vận tốc góc $\Omega$ trụ trong đứng yên nên ta có:

$$\begin{cases} A - \dfrac{C}{2r_1^2} = 0 \\ A - \dfrac{C}{2r_2^2} = \omega_0 \end{cases}$$

Hay

$$\begin{cases} C = \dfrac{2\omega_0 r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \\ A = \dfrac{2\omega_0 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \end{cases}$$

Từ đó ta có: momen lực tác dụng lên một đơn vị chiều dài của hình trụ trong:

$$N = 2\pi\eta r_1^3 \frac{C}{r_1^3} = 2\pi\eta \frac{2\omega_0 r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}$$

Từ đó ta có:

a)Hệ số nhớt của chất khí: $\eta = \dfrac{N}{4\pi\omega_0} \dfrac{\left(r_2^2 - r_1^2\right)}{r_1^2 r_2^2}$

b)Gradient của vận tốc góc $\dfrac{d\omega_0}{dr}$ theo $r$ $\dfrac{d\omega_0}{dr} = \dfrac{2\omega_0 r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \dfrac{1}{r^3}$.

**Bài 4.** Vận tốc của vật: $v = x'(t) = -a\omega \sin(\omega t - \varphi)$

- Công suất tức thời: $P = Fv = -F_0 a\omega\cos(\omega t)\sin(\omega t - \varphi)$

1- Công suất trung bình trong một chu kỳ:

$$P_{tb} = \frac{1}{T}\int_0^T\left[-F_0 a\omega\cos(\omega t)\sin(\omega t-\varphi)\right]dt = -\frac{F_0 a\omega}{2T}\int_0^T\left[\sin(2\omega t-\varphi)-\sin\varphi\right]dt$$

$$\Rightarrow P_{tb} = \frac{F_0 a\omega}{2}\sin\varphi$$

Công của lực F trong một chu kỳ: $A = P_{tb}T = \frac{F_0 a\omega}{2}\sin\varphi \times \frac{2\pi}{\omega} = \pi F_0 a\sin\varphi$

2- Công lực cản trong 1 chu kỳ

- Công suất trung bình của lực cản trong một chu kỳ:

$$P_{ctb} = \frac{1}{T}\int_0^T \overrightarrow{F_c}\vec{v}dt = -\frac{\alpha}{T}\int_0^T v^2 dt \Leftrightarrow P_{ctb} = -\frac{\alpha a^2\omega^2}{T}\int_0^T\left[\sin(\omega t-\varphi)\right]^2 dt$$

$$= -\frac{\alpha a^2\omega^2}{2T}\int_0^T\left[1-\cos(2\omega t-\varphi)\right]dt \Rightarrow P_{ctb} = -\frac{\alpha a^2\omega^2}{2}$$

Công của lực cản trong một chu kỳ:

$$A_c = P_{ctb}T = -\frac{\alpha a^2\omega^2}{2}\times\frac{2\pi}{\omega} = -\pi\alpha a^2\omega = -2\pi m\beta a^2\omega \quad (1)$$

Ta biến đổi công của lực F: Vì $a = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\beta^2\omega^2}}$

$$\tan\varphi = -\frac{2\beta\omega}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)} \Rightarrow \sin\varphi = \frac{2\beta\omega}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\beta^2\omega^2}} = \frac{2m\beta\omega a}{F_0}$$

Vậy: $A = \pi F_0 a\sin\varphi = \pi F_0 a \times \frac{2m\beta\omega a}{F_0} = 2\pi m\beta a^2\omega \quad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow A = - A_c$

**Bài 5.** Chọn trục Ox trùng phương chuyển động. Phương trình chuyển động của vật chiếu theo phương Ox là

$$-kx + F_0\cos\omega t = mx'' \text{ hay } x'' + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$$

Đặt : $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$. thì phương trình có thể viết: $x'' + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$ (1)

Đây là phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất (có vế phải). Nghiệm tổng quát của nó bằng tổng của hai nghiệm :

+ Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất ( không có vế phải ) tương ứng là $x_1 = A_1\cos(\omega_0 t + \varphi_1)$ (2).

+ Nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất (1). Ta sẽ tìm nghiệm riêng dưới dạng : $x_2 = A_2 cos(\omega t + \varphi_2)$, trong đó $A_2$ và $\varphi_2$ là các giá trị mà ta phải tìm.

Ta có: $x' = -A_2\omega\sin(\omega t + \varphi_2)$; $x'' = -A_2\omega^2\cos(\omega t + \varphi_2)$. Thay vào (1) được:

$$-A_2\omega^2\cos(\omega t + \varphi_2) + \omega_0^2 A_2\cos(\omega t + \varphi_2) = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$$

$$\Leftrightarrow A_2\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\cos(\omega t + \varphi) = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$$

Dùng phương pháp đồng nhất hệ thức được : $A_2 = \frac{F_0}{m\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}$; $\varphi_2 = 0$.

Nghiệm tổng quát của phương trình dao động cưỡng bức là :

$$x = A_1\cos(\omega_0 t + \varphi_1) + \frac{F_0}{m\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}cos\omega t \quad (3)$$

- Điều kiện ban đầu:

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ v(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1\cos\varphi_1 + \dfrac{F_0}{m\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)} = 0 \\ -\omega_0 A_1 \sin\varphi_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi_1 = \pi \\ A_1 = \dfrac{F_0}{m\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)} \end{cases}$$

Vậy : $x = \dfrac{F_0}{m\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}\left(\cos\omega t - \cos\omega_0 t\right)$

**Bài 6.** Phương trình dao động $x = A\cos\left(\omega t + \varphi\right)$ với $\begin{cases} A = \dfrac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \\ \tan\varphi = -\dfrac{2\beta\omega}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)} \end{cases}$

- Vận tốc của vật: $v = x'(t) = -A\omega\sin\left(\omega t + \varphi\right)$

- Công suất tức thời: $P = Fv = -F_0 A\omega\cos\left(\omega t\right)\sin\left(\omega t + \varphi\right)$

1. Công suất trung bình trong một chu kỳ:

$$P_{tb} = \frac{1}{T}\int_0^T\left[-F_0 A\omega\cos\left(\omega t\right)\sin\left(\omega t + \varphi\right)\right]dt = -\frac{F_0 A\omega}{2T}\int_0^T\left[\sin\left(2\omega t + \varphi\right) + \sin\varphi\right]dt$$

$$\Rightarrow P_{tb} = \frac{F_0 A\omega}{2}\sin\varphi = \frac{F_0^2\omega^2\beta}{m\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2\right]}$$

2. Ta viết lại :

$$P_{tb} = \frac{F_0^2\beta}{m\left[\left(\dfrac{\omega_0^2}{\omega} - \omega\right)^2 + 4\beta^2\right]} \to P_{tb}\max \Leftrightarrow \left(\frac{\omega_0^2}{\omega} - \omega\right) = 0 \Rightarrow \omega = \omega_0$$

Và $P_{tb}\max = \dfrac{F_0^2}{4m\beta}$

3. Khi có cộng hưởng thì $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ . Khi đó $P_{ch} = \dfrac{F_0^2\left(\omega_0^2 - 2\beta^2\right)}{4m\beta\left(\omega_0^2 - \beta^2\right)}$

$$\Rightarrow P_{ch} = P_{tb}\max\left[1 - \frac{\beta^2}{\left(\omega_0^2 - \beta^2\right)}\right] = P_{tb}\max\left[1 - \frac{1}{\left(\eta^2 - 1\right)}\right]$$

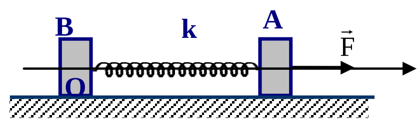
Từ đó: $\dfrac{P_{tb}\max - P_{ch}}{P_{tb}\max} = \dfrac{1}{\left(\eta^2 - 1\right)}$

**Bài 7.** 1. Chọn trục Ox như hình vẽ, Gốc O trùng với vị trí ban đầu của vật B.

Khi vật A có tọa độ x ( vật B nằm yên). Phương trình ĐLH được viết:

$$mx'' = F - \mu mg - k\left(x - l_0\right) \quad (1)$$

Trong đó $l_0$ là chiều dài tự nhiên của lò xo




Thay $F = \mu mg$ vào phương trình (1) và biến đổi ta được

$$x'' + \frac{k}{m}(x - l_0 - \frac{\mu mg}{k}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - l_0 - \frac{\mu mg}{k})'' + \frac{k}{m}(x - l_0 - \frac{\mu mg}{k}) = 0$$

Đặt $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$. Nghiệm phương trình: $x = A\cos\left(\omega t + \varphi\right) + \dfrac{\mu mg}{k} + l_0$ (2)

Điều kiện ban đầu: $x\left(0\right) = l_0; v\left(0\right) = 0$ tìm được $A = \dfrac{\mu mg}{k}, \varphi = \pi$ .

Cuối cùng : $x = \dfrac{\mu mg}{k}\left[1 - \cos\sqrt{\dfrac{k}{m}}t\right] + l_0$

2. Vật B sẽ bắt đầu chuyển động khi lực đàn hồi của lò xo tác dụng vào B bằng lực ma sát nghỉ cực đại. Gọi $t_0$ là thời điểm mà B bắt đầu chuyển động. Ta sẽ xác định $t_0$:

- Ta có $k\left(x-l_0\right)=\dfrac{3\mu mg}{2} \Leftrightarrow \mu mg\left[1-\cos\sqrt{\dfrac{k}{m}}t_0\right]=\dfrac{3\mu mg}{2} \Rightarrow t_0=\dfrac{2\pi}{3}\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

- Vận tốc của vật A (ngay trước khi B chuyển động) là

$$v=\mu g\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t_0=\mu g\sqrt{\frac{3m}{4k}}=v_0=\text{const}$$

Tại thời điểm $t \geq t_0$, vật A chuyển động với tốc độ $v_0$ không đổi. Ta nghiên cứu bài toán trong hệ quy chiếu chuyển động với tốc độ $\overrightarrow{v_0}$ không đổi. Trong hệ quy chiếu này, tạo thời điểm $t_0$, vật B có vận tốc là $-\overrightarrow{v_0}$ còn lò xo dãn một đoạn $v_0t_0$. Phương trình chuyển động của vật B là:

$$x=-\frac{\mu mg}{k}+A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\varphi_1\right)$$

Từ điều kiện $x\left(t_0\right)=-\dfrac{3\mu mg}{2k}; v\left(t_0\right)=-v_0$ ta tìm được:

Giải hệ: $\varphi=0; A=\dfrac{\mu mg}{k}; v_{\max}=\mu g\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ Vậy

$$x=-\frac{\mu mg}{k}\left[\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t-1\right]; v=\mu g\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t \quad \text{với } t \geq \frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Đối với mặt sàn B có vận tốc:

$$v_B=v+v_0=\mu g\sqrt{\frac{m}{k}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t-\frac{3\pi}{2}\right)+v_0=\mu g\sqrt{\frac{m}{k}}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t\right]$$

Đến thời điểm $t=t_1$ thì B có vận tốc bằng 0 đối với đất:

$$\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow t_1 = \frac{7\pi}{3}\sqrt{\frac{m}{k}} \ .$$

Vậy lò xo giãn $\frac{\mu mg}{2k}$, lực đàn hồi nhỏ hơn lực ma sát tĩnh và B đứng yên, chỉ có A chuyển động đều cho đến thời điểm $t_2$ sao cho $v_0\left(t_2 - t_1\right) = \frac{\mu mg}{k}$ thì lò xo giãn $\frac{3\mu mg}{2k}$, B lại chuyển động. Quá trình là tuần hoàn với chu kỳ T.

Ta xác định $t_2$:

$$t_2 = t_1 + \frac{\mu mg}{kv_0} = \left(\frac{7\pi}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Chu kỳ chuyển động tuần hoàn của vật B là

$$T = t_2 - t_0 = \left(\frac{5\pi}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{\frac{m}{k}}$$

**<u>Tóm lại</u>**

$$\begin{cases} 0 \le t < t_0 : v_B = 0; \\ t_0 + nT \le t < t_1 + nT : v_B = \mu g\sqrt{\frac{m}{k}}\left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin\sqrt{\frac{k}{m}}t\right] \quad (n \in N) \\ t_1 + nT \le t < t_2 + nT : v_0 = 0 \end{cases}$$

**Bài 8.**

a. Momen quán tính của con lắc $I = \frac{ml^2}{3} + Ml^2 = l^2\left(M + \frac{m}{3}\right)$

Momen lực $\mathrm{M} = mg\frac{l}{2}\sin\theta + Mgl\sin\theta - c\theta \approx \theta\left[gl\left(M + \frac{m}{2}\right) - c\right]$

Phương trình $J\ddot{\theta} = \mathrm{M}$

$$l^2(M+\frac{m}{3})\ddot{\theta} = \theta\left[gl(M+\frac{m}{2})-c\right] \quad \text{hay} \quad \ddot{\theta}+\frac{c-gl(M+\frac{m}{2})}{l^2(M+\frac{m}{3})}\theta = 0$$

Giả thiết $c > gl(M+\frac{m}{2})$, con lắc dao động nhỏ với chu kì: T = $2\pi\sqrt{\dfrac{l^2(M+\frac{m}{3})}{c-gl(M+\frac{m}{2})}}$ (1)

b. Điều kiện $c > gl(M+\frac{m}{2})$, với $g_{\max} = 9{,}9 m/s^2$ cho $c > 9{,}9.0{,}2.0{,}105$ hay $c > 0{,}2079$.

c. Đặt $a = l^2(M+\frac{m}{3}) = 0{,}004132$, $b = l(M+\frac{m}{2}) = 0{,}021$ (đơn vị SI).

(1) $\to T = 2\pi\sqrt{\dfrac{a}{c-bg}}$ (2), hay $\dfrac{T^2}{4\pi^2} = \dfrac{a}{c-bg}$, với T = 10 s tính được $g = 9{,}83 m/s^2$.

d. Lấy ln hai vế của (2) $\ln T = \ln 2\pi + \frac{1}{2}\ln a - \frac{1}{2}\ln(c-bg)$

Lấy đạo hàm đối với $g$, với $T$ là hàm của $g$ :

$\dfrac{1}{T}\dfrac{dT}{dg} = \dfrac{b}{2(c-bg)}$ $\to$ độ nhạy $\dfrac{dT}{dg} = \dfrac{bT}{2(c-bg)}$ (3)

Với $b = 0{,}021$, $c = 0{,}208$ thì với $g \approx g = 9{,}8\ m/s^2$ và $T \approx 10s$, ta có $\dfrac{dT}{dg} \approx 48$.

$g$ tăng $0{,}01 m/s^2$ thì $T$ tăng $0{,}48s$, dễ dàng đo được.

***Chú ý:*** Nếu tính trực tiếp $\dfrac{dT}{dg}$ từ (2), không qua ln thì phức tạp. Cũng không cần thay $T$ trong (3) bằng (2), vì ta đã biết với $g \approx g_0$ thì $T \approx 10s$.

e. Với con lắc đơn $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$, làm tương tự: $\ln T = \ln 2\pi + \frac{1}{2}\ln L - \frac{1}{2}\ln g$. Lấy đạo hàm đối với $g$ $\dfrac{1}{T}\dfrac{dT}{dg} = -\dfrac{1}{2g}$ $\to$ $\dfrac{dT}{dg} = -\dfrac{T}{2g}$ .

Con lắc đơn có $L = 1m$ thì $T \approx 2s$. Với $g \approx 9{,}8 m/s^2$ thì $\frac{dT}{dg} \approx -0{,}1$; $g$ tăng $0{,}01 m/s^2$ thì $T$ giảm $0{,}001s$, không đo được. Vậy con lắc rung nhạy hơn con lắc đơn là:

$$\theta = \frac{3mv_0}{(M+3m)\omega l}\sin(\omega t) \quad \text{với} \quad \omega = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{g(M+2m)}{l(M+3m)}}, \text{ tần số } T = \frac{2\pi}{\omega}$$

và góc lệch cực đại $\theta_{\max} = \theta_0 = \dfrac{3mv_0}{(M+3m)\omega l}$

**Bài 9.**

1- Gọi $\Delta l$ : độ biến dạng lò xo khi vật nằm cân bằng.

Có: $mg.na = k\Delta l.a \Rightarrow \Delta l = n\dfrac{mg}{k}$ (1)

- Khi thanh có li độ góc $\alpha$. Phương trình ĐLH:

$$mg.na\cos\alpha + Fa\cos\alpha - k(\Delta l + a\alpha).a\cos\alpha = m(na)^2\alpha'' \qquad (2)$$

Vì $\alpha$ nhỏ, lấy $\cos\alpha \approx 1$. Từ (1) và (2) có

$$\alpha'' + \frac{k}{n^2m}\alpha = \frac{F_0}{n^2ma}\cos\omega t$$

Ta đặt $\omega_0 = \dfrac{1}{n}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ được phương trình: $\alpha'' + \omega_0^2\alpha = F_0\cos\omega t$ (3). Đây là phương trình vi phân của dao động cưỡng bức.

+ Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất ( không có vế phải ) tương ứng là $\alpha_1 = \alpha_{01}\cos(\omega_0 t + \varphi_1)$ (4).

+ Nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất (3). Ta sẽ tìm nghiệm riêng dưới dạng : $\alpha_2 = \alpha_{02}\cos(\omega t + \varphi_2)$, trong đó $\alpha_{02}$ và $\varphi_2$ là các giá trị mà ta phải tìm.

Ta có: $\alpha_2' = -\alpha_{02}\omega\sin(\omega t + \varphi_2)$; $\alpha_2'' = -\alpha_{02}\omega^2\cos(\omega t + \varphi_2)$. Thay vào (3) được:

$$-\alpha_{02}\omega^2\cos(\omega t+\varphi_2)+\omega_0^2\alpha_{02}\cos(\omega t+\varphi_2)=\frac{F_0}{n^2ma}\cos\omega t$$

$$\Leftrightarrow\alpha_{02}\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\cos(\omega t+\varphi)=\frac{F_0}{n^2ma}\cos\omega t$$

Dùng phương pháp đồng nhất hệ thức được : $\alpha_{02}=\dfrac{F_0}{n^2ma\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}$; $\varphi_2=0$.

Nghiệm tổng quát của phương trình dao động cưỡng bức là :

$$\alpha=\alpha_{01}\cos(\omega_0t+\varphi_1)+\frac{F_0}{n^2ma\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}\cos\omega t \qquad (5)$$

- Điều kiện ban đầu:

$$\begin{cases}\alpha(0)=0\\ v(0)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_{01}\cos\varphi_1+\dfrac{F_0}{n^2ma\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}=0\\ -\omega_0\alpha_{01}\sin\varphi_1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\varphi_1=\pi\\ A_1=\dfrac{F_0}{n^2ma\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}\end{cases}$$

Vậy : $\alpha=\dfrac{F_0}{n^2ma\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}\left(\cos\omega t-\cos\omega_0t\right)$ (6)

**2.** Thay $\omega=\omega_0+\Delta\omega$ ta có

$$+\ \omega_0^2-\omega^2=\omega_0^2-(\omega_0+\Delta\omega)^2=\omega_0^2-\omega_0^2\left(1+\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)^2\approx-2\omega_0\Delta\omega$$

$$+\ \cos\omega t-\cos\omega_0t=\cos(\omega_0+\Delta\omega)t-\cos\omega_0t=-2\sin\left(\omega_0+\frac{\Delta\omega}{2}\right)t\sin\frac{\Delta\omega}{2}t$$

$$\approx-(\Delta\omega t)\sin\omega_0t$$

Thay vào (6) : $\alpha=\dfrac{F_0}{2n^2ma\omega_0}\left(t\sin\omega_0t\right)$

**Bài 10.** Phương trình dao động $x=A\cos(\omega t+\varphi)$

với $A=\dfrac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\beta^2\omega^2}}$ ; $\tan\varphi=-\dfrac{2\beta\omega}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}$

- Vận tốc của vật: $v=x'(t)=-A\omega\sin(\omega t+\varphi)$

- Biên độ của vận tốc:

$$V_0=A\omega=\frac{F_0\omega}{m\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\beta^2\omega^2}}=\frac{F_0}{m\sqrt{\left(\dfrac{\omega_0^2}{\omega}-\omega\right)^2+4\beta^2}} \quad (1)$$

$$\rightarrow V_0\max=\frac{F_0}{2m\beta}\Leftrightarrow \omega_{ch}=\omega_0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta viết lại: $V_0=\dfrac{2\beta V_0\max}{\sqrt{\left(\dfrac{\omega_0^2}{\omega}-\omega\right)^2+4\beta^2}}$.

Theo giả thiết $V_0=\dfrac{V_0\max}{2}\Rightarrow 4\beta=\sqrt{\left(\dfrac{\omega_0^2}{\omega}-\omega\right)^2+4\beta^2}$

$$\Leftrightarrow 12\beta^2=\left(\frac{\omega_0^2}{\omega}-\omega\right)^2=\frac{\omega_0^4-2\omega_0^2\omega^2+\omega^4}{\omega^2}\rightarrow \omega^4-2\left(\omega_0^2+6\beta^2\right)+\omega_0^4=0$$

- Theo Định Lý Viet: $\begin{cases}\omega_1^2\omega_2^2=\omega_0^4\\ \omega_1^2+\omega_2^2=2\left(\omega_0^2+6\beta^2\right)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\omega_{ch}=\omega_0=\sqrt{\omega_1\omega_2}\\ \beta=\dfrac{\sqrt{3}\left|\omega_1+\omega_2\right|}{6}\end{cases}$

**Bài 11.** 1. Công thực hiện bởi lực cản trong mỗi chu kỳ chuyển động xác định bởi định lý biến thiên động năng:

$$\frac{1}{2}kA^2(t+T)-\frac{1}{2}kA^2(t)=A_C$$

Thay $A(t+T)=A_0e^{-\beta(t+T)}=A_0e^{-\beta t}e^{-\beta T}=A(t)e^{-\beta T}$ ta được:

$$A_C = \frac{1}{2}kA^2(t)\left(e^{-2\beta T} - 1\right)$$

Vì $\beta T << 1$. Sử dụng công thức gần đúng $e^{-2\beta T} \approx 1 - 2\beta T$ thay vào ta có

$$A_C = -kA^2(t)\beta T$$

Chú ý rằng $\beta = \frac{\alpha}{2m}, T \approx T_0 = \frac{1}{f_0}$ và $k = m\omega_0^2 \approx 4\pi^2 f_0^2 m$. Thay vào ta được:

$$A_C = -2\pi^2\alpha f_0 A^2(t)$$

*Chú ý: ta cũng có thể tính công của lực cản theo công thức*

$A_C = \int_0^T P(t)dt = \int_0^T \vec{F}\vec{v}dt = -\int_0^T \alpha v^2 dt$. *Tuy nhiên phép biến đổi là khá dài.*

2. Phần năng lượng bị mất sau mỗi chu kỳ chuyển thành công sinh ra để thắng công của lực cản $\Delta W = -A_C = 2\pi^2\alpha f_0 A^2(t)$

Ta viết lại: $\Delta W = \frac{1}{2}kA^2(t)\frac{4\pi^2\alpha f_0}{k} = W(t)\frac{4\pi^2\alpha f_0}{k}$

$$\Rightarrow \frac{\Delta W}{W(t)} = \frac{4\pi^2\alpha f_0}{k}$$

3. Năng lượng của hệ tại thời điểm t là:

$$W(t) = \frac{1}{2}kA^2(t) = \frac{1}{2}kA_0^2 e^{-2\beta t} = W_0 e^{-2\beta t}.$$

Khi $W(t) = \frac{W_0}{e^{2\pi}}$ thì $e^{-2\beta t} = e^{-2\pi} \Rightarrow t = \frac{\pi}{\beta}$.

Gọi N là số chu kỳ cần thiết thì t = NT $\Rightarrow N = \frac{\pi}{\beta T}$. Như vậy N = Q (hệ số phẩm chất của hệ dao động).

**Bài 12.**

1. Ban đầu: $\delta_0 = \beta T = \beta \dfrac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$, trong đó $\beta = \dfrac{\alpha}{2m}$ (1)

Khi $\alpha' = n\alpha \Rightarrow \beta' = n\beta$. Giảm lượng loga khi đó :

$$\delta = \beta' T' = n\beta \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - n^2\beta^2}} \quad (2)$$

Ta biến đổi phương trình (3.3.1) và (3.3.2)

$$\Leftrightarrow \frac{4\pi^2}{\delta_0^2} = \frac{\omega_0^2 - \beta^2}{\beta^2} = \frac{\omega_0^2}{\beta^2} - 1 \quad (3)$$

Và $\dfrac{4n^2\pi^2}{\delta^2} = \dfrac{\omega_0^2 - n^2\beta^2}{\beta^2} = \dfrac{\omega_0^2}{\beta^2} - n^2$ (4)

Từ (3) và (4)

$$\Rightarrow \frac{4n^2\pi^2}{\delta^2} = \frac{4\pi^2}{\delta_0^2} + \left(1 - n^2\right) \Rightarrow \frac{n^2}{\delta^2} = \frac{1}{\delta_0^2}\left[1 + \left(1 - n^2\right)\frac{\delta_0^2}{4\pi^2}\right]$$

Từ đó: $\delta = \dfrac{n\delta_0}{\sqrt{1 + \left(1 - n^2\right)\dfrac{\delta_0^2}{4\pi^2}}} \approx 3{,}3$

2. Để dao động không thể thực hiện được thì $\beta' \geq \omega_0 \Leftrightarrow n\beta \geq \omega_0 \Rightarrow n \geq \dfrac{\omega_0}{\beta}$

Từ (3) $\Rightarrow \dfrac{\omega_0^2}{\beta^2} = \dfrac{4\pi^2}{\delta_0^2} + 1$. Vậy $n \geq \sqrt{\dfrac{4\pi^2}{\delta_0^2} + 1} = 4{,}3$ lần.

**Bài 13.**

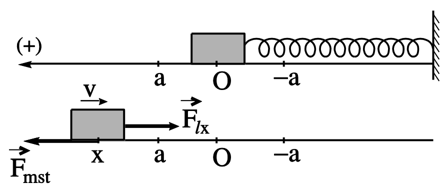
$$F_{mst} = F_{msn(max)} = ka$$

a) Chọn gốc toạ độ tại vị trí của vật khi lò xo chưa biến dạng. Chọn chiều dương là chiều dãn của lò xo.

- Ở lượt đi vật chuyển động theo chiều âm. Tại toạ độ x ta có:

$$F_{hl} = -kx + ka = mx''$$

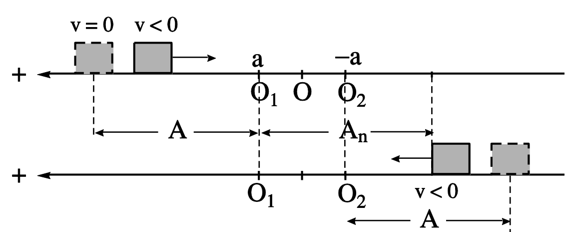
hay $$(x - a)'' + \frac{k}{m}(x - a) = 0$$




Suy ra: $$\begin{cases} x = A\cos(\omega t + \varphi) + a \\ \omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}},\ T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} \\ \text{VTCB ë } O_1 \text{ cã to¹ ®é } x = a \end{cases}$$

- Ở lượt về vật chuyển động theo chiều dương. Tại toạ độ x ta có:

$$F_{hl} = -kx - ka = mx''$$




hay $$(x + a)'' + \frac{k}{m}(x + a) = 0$$

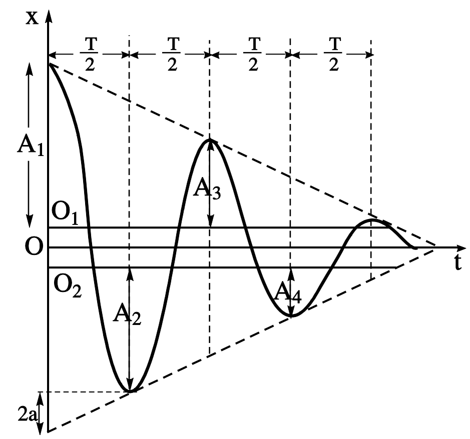
Suy ra: $$\begin{cases} x = A\cos(\omega t + \varphi) - a \\ \omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}},\quad T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} \\ \text{VTCB ë } O_2 \text{ cã to¹ ®é } x = -a \end{cases}$$

b) Ta thấy cứ sau $\frac{1}{2}T$, vật lại đổi VTCB, mà hai VTCB này cách nhau 2a, nên sau $\frac{1}{2}T$ biên độ dao động giảm đi 2a, tức là giảm theo cấp số cộng lùi:

$A_2 = A_1 - 2a$ ; $A_3 = A_1 - 4a$, ....

Vật sẽ dừng lại hẳn ở vị trí biên nằm trong miền nghỉ.

Hình 2.30 là đồ thị dao động của vật.



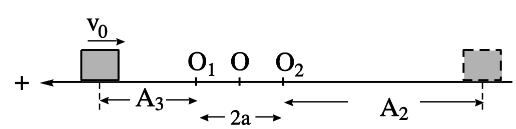

c) Giả sử lúc đầu ta thả vật ở vị trí biên trái cách $O_1$ một đoạn là $A_1$. Sau $\frac{1}{2}T$, vật sang đến vị trí biên phải cách $O_2$ một đoạn $A_2 = A_1 - 2a$. Sau một chu kì vật ở vị trí biên trái cách $O_1$ một đoạn $A_3 = A_1 - 4a$. Muốn duy trì dao động, ta truyền cho vật một động năng sao cho nó tới được vị trí biên phải cách $O_2$ một đoạn vẫn là $A_2$ như trước.

Bằng cách như vậy ta được một dao động duy trì có hai biên độ không đổi là $A_2$ và $A_3$.

Công của lực ma sát trượt ở lượt đi và lượt về bằng độ biến thiên cơ năng.

Lượt đi: $-F_{mst}(A_3 + A_2) = \frac{1}{2}kA_2^2 - \left(\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kA_3^2\right)$

Lượt về: $-F_{mst}(A_2 + A_3) = \frac{1}{2}kA_3^2 - \frac{1}{2}kA_2^2$




Suy ra: $\frac{1}{2}kA_2^2 - \left(\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kA_3^2\right) = \frac{1}{2}kA_3^2 - \frac{1}{2}kA_2^2$

hay $(A_2 - A_3)(A_2 + A_3) = \frac{mv_0^2}{2k}$

Thay: $A_2 - A_3 = 2a$ vào ta được:

$$\begin{cases} A_2 + A_3 = \dfrac{mv_0^2}{4ka} \\ A_2 - A_3 = 2a \end{cases}$$

Cuối cùng ta được: $A_2 = \frac{mv_0^2}{8ka} + a$ ; $A_3 = \frac{mv_0^2}{8ka} - a$

d) Khi kéo vật đến vị trí có biên độ dao động là $A_1$ rồi buông tay, thì sau $\frac{1}{2}T$ vật sẽ sang được vị trí biên trái có biên độ dao động là $A_2$. Từ đó ta suy ra khi vật đến vị trí có biên độ $A_3$ thì nó có vận tốc là $v_0$. Gọi $\tau$ là thời gian để đi đoạn đường đó, ta có:

$$x = A_3 = A_1\cos\omega\tau$$

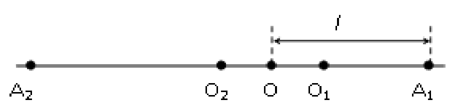
$$v = -v_0 = -A_1\omega\sin\omega\tau$$

Suy ra: $\tan\omega\tau = \dfrac{v_0}{\omega A_3}$. Vì $\tau \ll T$ và $a \ll A_3$

nên $\omega\tau \approx \dfrac{v_0 8ka}{\omega m v_0^2}$ hay $\tau \approx \dfrac{8a}{v_0}$.

Như vậy chu kì của dao động duy trì nhỏ hơn chu kì dao động tắt dần một lượng bằng $\tau \approx \dfrac{8a}{v_0}$.

**Bài 14**a) Giả sử O là vị trí mà lò xo không bị biến dạng, thì miền nghỉ có độ rộng là $O_1O_2 = 2\mu mg/k$ đối xứng nhau quanh O: tại $O_1$ lò xo giãn $a = \mu mg/k$, còn tại $O_2$ thì lò xo bị nén cũng một đoạn bằng *a*. Khi lò xo giãn cực đại, tức là khi vận tốc của vật giảm về không, đó là một vị trí biên ta ký hiệu bằng $A_1$ trên hình vẽ, vị trí biên khi lò xo nén cực đại ký hiệu là $A_2$. Khi vật chuyển động từ $A_2$ đến $A_1$ thì chuyển động của nó có tính điều hòa: vị trí cân bằng là điểm $O_2$, thời gian chuyển động giữa hai vị trí biên bằng nửa chu kỳ dao động $T = 2\pi\sqrt{m/k}$.




Trong hình vẽ ta có: $OA_1 = l; OO_1 = OO_2 = a = \mu mg/k; O_2A_1 = O_2A_2 = l + a$

Sau khi được truyền vận tốc $v_0$ tại $A_1$ thì chuyển động của vật từ $A_1$ đến $A_2$ cũng có tính điều hòa: vị trí cân bằng là điểm $O_1$, vận tốc tại $A_1$ bằng $v_0$, còn $A_2$ là vị trí biên có vận tốc bằng 0. Ta dễ dàng tính được từ hình vẽ: $O_1A_1 = l - a; O_1A_2 = O_2A_2 + O_1O_2 = l + 3a$.

Sử dụng định luật bảo toàn năng lượng cho dao động xung quanh $O_1$, giữa $A_1$ và $A_2$:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}k(l-a)^2 = \frac{1}{2}k(l+a)^2$$

Suy ra: $v_0 = \sqrt{8\mu g(l+a)} = \sqrt{8\mu g\left(l + \frac{\mu mg}{k}\right)}$

b) Chu kỳ dao động là thời gian chuyển động từ $A_1$ đến $A_2$ rồi quay lại $A_1$.

- Thời gian chuyển động từ $A_2$ đến $A_1$ là nửa chu kỳ dao động quanh $O_2$: $t_1 = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

- Thời gian chuyển động từ $O_1$ đến $A_2$ là 1/4 chu kỳ dao động quanh $O_1$: $t_2 = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}$

- Thời gian chuyển động từ $A_1$ về $O_1$ là $t_3$ được xác định theo phương trình:

$$O_1A_1 = l - a = O_1A_2\sin(\omega t_3) = (l+3a)\sin(\omega t_3)$$

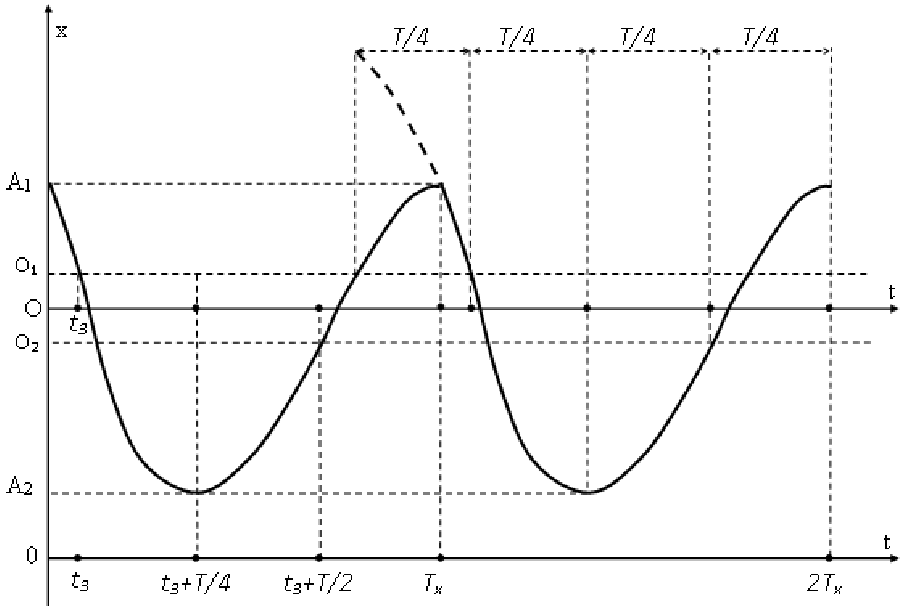
(Hoặc: $v_0 = v_{max}\cos(\omega t_3) = \omega(l+3a)\cos(\omega t_3)$)

Ta được: $t_3 = \sqrt{\frac{m}{k}}\arcsin\left(\frac{l-\mu mg/k}{l+3\mu mg/k}\right)$

(Xin lưu ý là thời gian chuyển động từ $A_1$ về $O_1$ khác thời gian chuyển động từ $O_1$ đến $A_1$).

Như vậy chu kỳ dao động cần tìm là: $T_x = t_1 + t_2 + t_3 = \left[\frac{3\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{l-\mu mg/k}{l+3\mu mg/k}\right)\right]\sqrt{\frac{m}{k}}$

Đồ thị dao động có dạng như hình vẽ. Các thời điểm được ghi rõ trên trục thời gian đã tịnh tiến xuống dưới cho dễ nhìn.




**Bài 15.**

Vật dao động tắt dần theo phương trình: $x = Ae^{-\lambda t}\cos\omega t$,

với $\lambda = \dfrac{b}{2m}$ và $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \dfrac{b^2}{4m^2}}$, trong đó $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

Ở thời điểm $t_1$: $\cos\omega t_1 = 1$ và $x_1$ cực đại.

Sau 20 dao động toàn phần, tức là sau 20T, $\cos\omega(t_1 + 20T) = 1$ và $x_2$ lại cực đại.

Theo đầu bài ta có: $\dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{1}{10} \Rightarrow \dfrac{e^{-\lambda(t_1+20T)}}{e^{-\lambda t_1}} = \dfrac{1}{10} \Rightarrow e^{-40\lambda} = \dfrac{1}{10}$

$$\Rightarrow \quad \lambda = \frac{ln10}{40} = 5{,}76.10^{-2}\ s^{-1}$$

$$b = 2m\lambda = 2.0{,}500.5{,}76.10^{-2} = 5{,}76.10^{-2}\ N.s/m$$

$\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \pi$ rad/s ; $\omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2 \Rightarrow \dfrac{\omega_0}{\omega} = \sqrt{1 + \dfrac{\lambda^2}{\omega^2}} = 1{,}0002 \approx 1$

$\Rightarrow T_0 \approx T$ ; $k = m\omega_0^2 = m\omega^2 = 4{,}93$ N/m.

**Bài 16.** a) Khi giá đỡ và vật m đứng yên: mg = k$\Delta l$

Khi giá đỡ dao động: $x_1 = a_1\cos\omega t \Rightarrow x_1'' = -\omega^2 a_1\cos\omega t$

Chọn HQC gắn với giá đỡ. Trong HQC này giá đỡ đứng yên, còn vật m chịu thêm lực quán tính $F_{qt} = -mx_1''$.

Chọn gốc toạ độ tại vị trí cách giá đỡ một đoạn bằng $l_0 + \Delta l$ và xét vật ở li độ x. Ta có phương trình:

$$mx'' = mg - k(\Delta l + x) - bx' + m\omega^2 a_1\cos\omega t$$

Kết hợp với (1), ta được: $x'' + \dfrac{b}{m}x' + \dfrac{k}{m}x = \omega^2 a_1\cos\omega t$ (2)

b) Trong chế độ ổn định, vật m dao động điều hoà theo phương trình:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

với: $$A = \frac{m\omega a_1}{\sqrt{\left(\dfrac{k}{\omega} - m\omega\right)^2 + b^2}} \qquad (3)$$

$$\tan\varphi = \frac{b}{m\omega - \dfrac{k}{\omega}} \qquad (4)$$

c) $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \ll \omega \Rightarrow \dfrac{k}{m} \ll \omega^2 \Rightarrow \dfrac{k}{\omega} \ll m\omega$.

Mặt khác, b lại rất bé nên (3), (4) trở thành A = $a_1$ và $\tan\varphi = 0$.

Vật m dao động theo phương trình: x = $a_1$conωt.

Suy ra biên độ và tần số dao động của vật m bằng biên độ và tần số của sóng địa chấn.

# CHƯƠNG V.
# SÓNG CƠ- SÓNG ÂM
## V.1 SÓNG CƠ

**Bài 1.** a.Ta có: $\lambda = \frac{v}{f} = 0,1$ (m)

Độ lệch pha giữa hai điểm Q và I là:

$$\Delta\varphi = 2\pi\frac{(d - AB/2)}{\lambda}$$

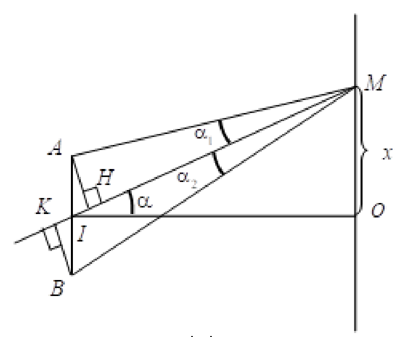
Vì Q dao động ngược pha với I, ta có:

$$\Delta\varphi = (2k+1)\pi \Rightarrow d = (2k+1)\frac{\lambda}{2} + \frac{AB}{2}$$

Do d > $\frac{AB}{2} \Rightarrow (2k+1)\frac{\lambda}{2} > 0 \Leftrightarrow k > -1/2$

Vì k $\in$ ¢ , nên $d_{min} \Leftrightarrow k = 0 \Rightarrow d_{min} = 0,55$(m)

b.



Hình 4

$d_1 \approx d_1\cos\alpha_1 = HM$ ; $d_2 \approx d_2\cos\alpha_2 = KM$

$$d_2 - d_1 = KH = AB\sin\alpha \approx AB\tan\alpha = AB\frac{x}{OI}$$

Tại M nhận được âm to nhất khi :

$d_2 - d_1 = k\lambda = \lambda$ ( k = 1, vì điểm M gần O nhất) $\Rightarrow x = \frac{OI.\lambda}{AB} = 10m$

**Bài 2.** a. Tìm tốc độ truyền sóng và số cực đại trên AB.

* Điều kiện để tại M dao động cực đại: $d_2 - d_1 = k.\lambda \Rightarrow k\lambda = 25 - 20,5 = 4,5$ (cm)

Vì giữa M và đường trung trực của AB có 2 vân giao thoa cực đại. Tại M là vân dao thoa cực đại thứ 3 nên k = 3. Từ đó $\lambda = 1,5$ (cm) $\Rightarrow$ v = $\lambda$.f = 20.1,5 = 30 (cm/s).

* Điều kiện để tại M' trên AB có dao động cực đại:

$d_2 - d_1 = k.\ \lambda$ (với k = 0; $\pm 1$; $\pm 2$..) và $d_1 + d_2$ = AB nên: $d_1 = (k\lambda + AB)/2$

Điều kiện $0 < d_1; d_2 < AB$ hay $0 < (k\lambda + AB)/2 < AB$

Thay số vào tìm được: - $\frac{AB}{\lambda} < k < \frac{AB}{\lambda}$ hay: -5,33 < k < 5,33.

Suy ra: k = - 5; - 4; - 3; - 2; - 1; 0; 1; 2; 3; 4; 5. $\Rightarrow$ 11 điểm dao động cực đại.

b. Tìm đoạn QO:

* Phương trình dao động của hai nguồn: $u_1 = u_2 = A\cos2\pi ft$

Điểm Q nằm trên trung trực của AB cách A khoảng d dao động theo phương trình: u = $2A\cos(2\pi ft - 2\pi\frac{d}{\lambda})$ $\Rightarrow$ Độ lệch pha của điểm này so với O: $\Delta\varphi = 2\pi\frac{d-d_O}{\lambda}$

* Điều kiện để điểm này dao động cùng pha với O: $\Delta\varphi = k2\pi$ (k nguyên)

Ta có: $d - d_O = k\lambda \Leftrightarrow d = d_O + k\lambda = 4 + 1,5k$ (cm)

* Q nằm trên đoạn NP: $d_N \le 4 + 1,5k \le d_P$

$$\sqrt{d_O^2 + ON^2} \le 4 + 1,5k \le \sqrt{d_O^2 + OP^2} \rightarrow 0,31 \le k \le 1,60 \Rightarrow k = 1$$

Suy ra: d = 5,5cm $\Rightarrow OQ = \sqrt{d^2 - d_O^2} = \sqrt{5,5^2 - 4^2} \approx 3,775$ cm.

**Bài 3**a. Lấy M' đối xứng với M qua đường trung trực $S_1S_2$. Vẽ đường cực đại cắt $MS_2$ tại tại M''. Như vậy, số điểm cực đại trên M''$S_2$ bằng số điểm cực đại trên $MS_1$, còn số cực đại trên MM'' chính là số cực đại mà $MS_2$ nhiều hơn $MS_1$ (nhiều hơn 6 điểm ). Từ hình vẽ ta thấy M thuộc cực đại k = 3

Đặt: $MS_1 = d_1$; $MS_2 = d_2$

ta có: $d_2 - d_1 = k\lambda \rightarrow 25 - 16 = 3.\lambda \rightarrow \lambda = 3cm$

tần số sóng: $f = \frac{v}{\lambda} = \frac{1,5}{0,03} = 50Hz$

b. Theo định lí hàm số cosin cho tam giác $MS_1S_2$ và tam giác $MS_1S'_2$ ta có

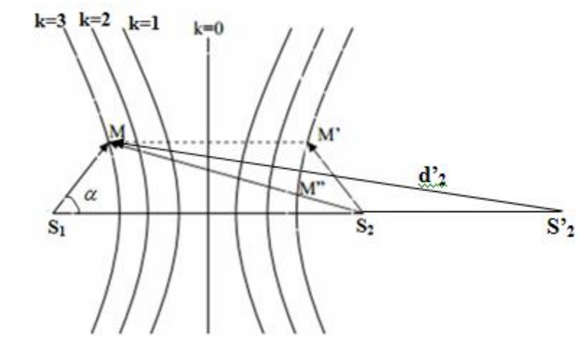
$$\cos\alpha = \frac{d_1^2 + (S_1S_2)^2 - d_2^2}{2.d_1.S_1S_2} = \frac{d_1^2 + (S_1S_2^{'})^2 - (MS_2^{'})^2}{2.d_1.S_1S_2^{'}} \rightarrow MS_2^{'} = 33,3cm$$

Gọi M thuộc vân cực đại bậc k khi nguồn $S_2$ dịch chuyển. Gọi $d'_2$ là khoảng cách từ M tới $S'_2$ trong quá trình $S_2$ dịch chuyển. Ta có:

$$d_2^{'} - d_1 = k\lambda \rightarrow d_2^{'} = d_1 + k\lambda = 16 + 3.k$$

Vì $MS_2 \le d_2^{'} \le MS_2^{'} \leftrightarrow 25 \le d_2^{'} \le 33,3 \leftrightarrow 25 \le 16 + 3.k \le 33,3 \leftrightarrow 3 \le k \le 5,8$

Vì k là số nguyên, nên k = ( 3,4,5 ). Nhưng k = 3 là khi nguồn ở $S_2$. Suy ra, trong quá trình $S_2$ dịch chuyển thì M chuyển thành điểm dao động cực đại 2 lần




**Bài 4.** Độ lệch pha của hai sóng tại một điểm M cách A, B những đoạn $d_1$ và $d_2$ là :

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(d_1 - d_2) + \frac{\pi}{2} \text{ với } \lambda = \frac{v}{f} = \frac{30}{10} = 3(cm)$$

+ Tại M là cực đại giao thoa nếu : $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(d_1 - d_2) + \frac{\pi}{2} = 2k\pi \to d_1 - d_2 = (k - \frac{1}{4})\lambda$

M thuộc AB nên: $-AB < d_1 - d_2 = (k - \frac{1}{4})\lambda < AB \to k = -6;...;6$ :

Trên đoạn AB có 13 điểm cực đại

+ Tại M là cực tiểu giao thoa: $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(d_1 - d_2) + \frac{\pi}{2} = (2k+1)\pi \to d_1 - d_2 = (k + \frac{1}{4})\lambda$

M thuộc đoạn AB : $-AB < d_1 - d_2 = (k + \frac{1}{4})\lambda < AB \to k = -6;...;6$ :

Trên đoạn AB có13 điểm cực tiểu

2. Tại điểm M thuộc đoan AB cách trung điểm H một đoạn x, có hiệu đường đi của hai sóng là : $d_1 - d_2 = 2x$

+ Điểm M thuộc đoạn AB đứng yên thoả mãn :

$$d_1 - d_2 = 2x = (k + \frac{1}{4})\lambda \to x = (k + \frac{1}{4}).\frac{\lambda}{2} \text{ ( 1) với } k = -6;...;6$$

+ Do đó $\begin{cases} |x_{max}| = (6 + \frac{1}{4}).\frac{3}{2} = 9,375(cm) \\ |x_{\min}| = (0 + \frac{1}{4}).\frac{3}{2} = 0,375(cm) \end{cases}$

3. Phương trình dao động tổng hợp tại M cách A,B những đoạn $d_1$ và $d_2$ là:

$$u_M = 12.\cos\left[\frac{\pi}{\lambda}(d_1 - d_2) + \frac{\pi}{4}\right].\cos\left[\omega t + \frac{\pi}{\lambda}(d_1 + d_2) + \frac{\pi}{4}\right](mm)$$

+ Hai điểm $M_1$ và $M_2$ đều thuộc một elip nhận A,B làm tiêu điểm nên:

$$AM_1 + BM_1 = AM_2 + BM_2 = b$$

Suy ra pt dao động của $M_1$ và $M_2$ là:

$$\begin{cases} u_{M_1} = 12.\cos\left[\frac{\pi}{3}.3 + \frac{\pi}{4}\right].\cos\left[\omega t + \frac{\pi.b}{\lambda} + \frac{\pi}{4}\right] \\ u_{M_2} = 12.\cos\left[\frac{\pi}{3}.4,5 + \frac{\pi}{4}\right].\cos\left[\omega t + \frac{\pi.b}{\lambda} + \frac{\pi}{4}\right] \end{cases} \rightarrow \frac{u_{M_1}}{u_{M_2}} = -1$$

Tại thời điểm $t_1$ : $u_{M_1} = 2(mm) \rightarrow u_{M_2} = -2(mm)$

**Bài 5.** 1a. + Bước sóng $\lambda = \frac{v}{f} = 4cm$

+ Phương trình sóng tại O do các nguồn gửi đến là

$$u_{AO} = 6\cos\left(20\pi t - \frac{2\pi.10}{4}\right)mm$$

và $u_{BO} = 6\sqrt{3}\cos\left(20\pi t + \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi.10}{4}\right)mm$

+ Phương trình sóng tổng hợp tại O

$$u = u_{AO} + u_{BO} = 12\cos\left(20\pi t - \frac{14\pi}{3}\right)mm$$

1b. Xét điểm M trên AB: $MA = d_1,\ MB = d_2$

+ $\Delta\Phi = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi(d_1 - d_2)}{\lambda} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi(d_1 - d_2)}{2}$

+ Để M dao động với biên độ cực đại: $\Delta\Phi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi(d_1 - d_2)}{2} = 2k\pi \Rightarrow d_1 - d_2 = 4k - 1\,(cm)$

+ M trên AB: $-AB \le d_1 - d_2 \le AB \Rightarrow -19/4 \le k \le 21/4$ --> Có 10 điểm dao động với biên độ cực đại trên AB.

2. Xét điểm N trên CD: $NA = d_1,\ NB = d_2$

+ Phương trình sóng tại N do các nguồn gửi đến:

$$u_{AN} = a\cos\left(20\pi t - \frac{2\pi.d_1}{\lambda}\right)mm$$

$$u_{BN} = a\cos\left(20\pi t + \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi.d_2}{\lambda}\right)mm$$

+ Phương trình sóng tổng hợp tại N

$$u_N = 2a\cos\left[\frac{\pi}{\lambda}(d_1 - d_2) + \frac{\pi}{4}\right]\cos\left(20\pi t - \frac{\pi}{\lambda}(d_1 + d_2) + \frac{\pi}{4}\right)mm$$

Có $d_1 + d_2 = AB = 6{,}75\lambda$

Nên: $u_N = 2a\cos\left[\frac{\pi}{\lambda}(d_1 - d_2) + \frac{\pi}{4}\right]\cos\left(20\pi t - 7\pi + \frac{\pi}{2}\right)mm$

+ N trên CD:

$$AM - BM \le d_1 - d_2 \le AN - BN \Rightarrow -1{,}375 \le k \le 2{,}125$$

+ Vậy có 4 điểm dao động với biên độ cực đại và cùng pha với B trên đoạn CD.

Có $\begin{cases} d_1 - d_2 = (2k+1)\lambda - \dfrac{\lambda}{4} \\ d_1 + d_2 = AB \end{cases}$

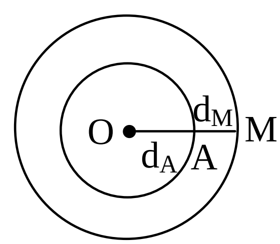
$$\Rightarrow d_2 = \frac{AB}{2} + \frac{\lambda}{8} - (2k+1)\frac{\lambda}{2}$$

$$\Rightarrow d_{2\min} = \lambda = 4cm$$

**Bài 6. a)** - Sóng trên mặt nước coi gần đúng là sóng ngang, các gợn sóng là những vòng tròn đồng tâm cách nhau 1 bước sóng.

Vậy : $\lambda = 6$ cm

$\Rightarrow v = \lambda.f$ = 120cm/s




**b)** – Năng lượng sóng phân bố đều trên mặt sóng, nên theo mỗi phương truyền sóng, càng xa O, năng lượng sóng càng giảm. Gọi $d_A$ là bán kính mặt sóng tại A, d là bán kính mặt sóng tại M , W là năng lượng sóng cung cấp bởi nguồn O trong 1s, thì mỗi đơn vị dài trên mặt sóng sẽ nhận được một năng lượng $W_0 = \dfrac{W}{2\pi d}$.

- Nếu a là biên độ sóng tại điểm khảo sát ở cách O một khoảng d, thì $W_0 \sim a^2$ hay $W_0 = ka^2$ suy ra $ka^2 = \dfrac{W}{2\pi d} \Rightarrow a^2 = \dfrac{W}{2\pi k}.\dfrac{1}{d}$ ; đặt $K = \dfrac{W}{2\pi k}$ thì $a^2 = \dfrac{K}{d}$

- Với $d = d_A = 0{,}1$ m thì $a_A = 3$cm, ta có : $3^2 = \dfrac{K}{0{,}1}$

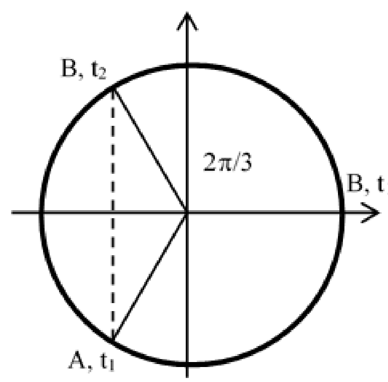
- tương tự tại M cách O khoảng d thì $a^2 = \dfrac{K}{d_M}$

- Kết hợp lại ta có:

$\left(\dfrac{a}{3}\right)^2 = \dfrac{0{,}1}{d_M} \Rightarrow a = 3\sqrt{\dfrac{0{,}1}{d_M}}$ cm $\approx \dfrac{0{,}95}{\sqrt{d_M}}$ (cm) (biên độ sóng tại M)

**c)** – Biên độ sóng tại B: $\left(\dfrac{a_B}{a_A}\right)^2 = \dfrac{d_A}{d_B} \Rightarrow a_B = 3\sqrt{\dfrac{0{,}1}{0{,}2}} = \dfrac{3}{\sqrt{2}}cm$

- Do B cách A $10cm = \dfrac{5}{3}\lambda$




Nên A sớm pha hơn B là $\dfrac{10\pi}{3}$, pha của B ở thời điểm $t_1$ được biểu diễn trên dường tròn.

Sau đó $\dfrac{1}{60}(s)$ tức là $\dfrac{T}{3}$ pha của B được biểu diễn trên đường tròn như hình vẽ.

Ta được li độ của B là $-\dfrac{3}{2\sqrt{2}}cm$ và đang đi xuống.

**Bài 7a.** Bước sóng $\lambda = \dfrac{v}{f} = 10(cm)$

- PT sóng tại C do nguồn A và B truyền tới : $u_{AC} = 5\cos\left(10\pi t - \dfrac{22\pi}{5}\right)(cm)$

$u_{BC} = 5\cos\left(10\pi t - \dfrac{7\pi}{5}\right)(cm)$

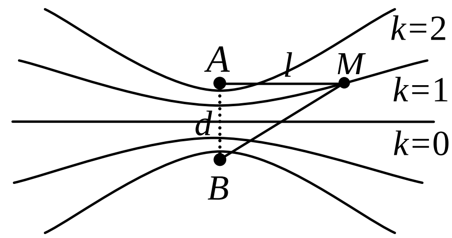
- PT sóng tổng hợp tại C: $u_C = u_{AC} + u_{BC} = 5\cos\left(10\pi t - \dfrac{22\pi}{5}\right) + 5\cos\left(10\pi t - \dfrac{7\pi}{5}\right) = 0$

**b.**

- Xét điểm M trong khoảng AB cách A, B lần lượt những đoạn $d_1$, $d_2$. Để M là điểm dao động cực đại thì $\begin{cases} d_1 + d_2 = AB = 32 & (1) \\ d_1 - d_2 = \left(k + \dfrac{1}{2}\right)\lambda = \left(k + \dfrac{1}{2}\right)10 & (2) \end{cases}$

- Từ (1) và (2) suy ra $d_1 = 16 + 5\left(k + \frac{1}{2}\right)$. Do $0 < d_1 < 32$

$\Rightarrow k = -3, -2, -1, 0, 1, 2$ tức là có 6 điểm dao động cực đại trên AB




**Bài 8.a)** Ta có $\lambda = v.T = 1cm$

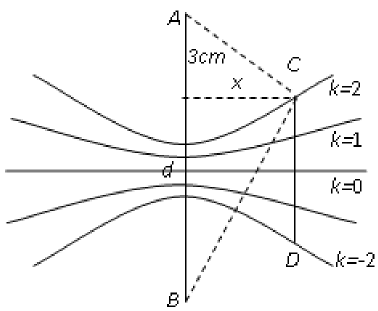
Điều kiện để tại M có cực đại giao thoa là:

MB – MA = k$\lambda$ $\Leftrightarrow \sqrt{l^2 + d^2} - l = k\lambda$ với k =1, 2, 3

Khi $l$ càng lớn đường thẳng AM cắt các vân cực đại giao thoa có bậc càng nhỏ (k càng bé), vậy ứng với giá trị lớn nhất của $l$ để tại M có cực đại là khi M là giao của đường AM và vân cực đại bậc 1 (k=1).

Thay các giá trị đã cho ta nhận được: $\sqrt{l^2 + d^2} - l = 1 \Rightarrow l = 71,5(cm)$

**b)** Để trên CD chỉ có 5 điểm dao động với biên độ cực đại mà khoảng cách từ AB đến CD lớn nhất thì C, D phải nằm trên hai vân cực đại bậc 2 (k = $\pm$ 2) (do trung điểm của CD là một cực




đại), xem hình vẽ.

Gọi khoảng cách từ AB đến CD bằng x. Xét điểm C nằm trên vân cực đại bậc 2 ứng với k=2.Từ hình vẽ ta có:

$CA = d_1 = \sqrt{x^2 + 9}$ và $CB = d_2 = \sqrt{x^2 + 81}$

Suy ra $d_2 - d_1 = \sqrt{x^2 + 81} - \sqrt{x^2 + 9} = 2\lambda = 2 \Rightarrow x = 16,73(cm)$

**Bài 9.** a) - Giả sử tại $M_1$ và $M_2$ đều là vân cực đại ta có :

$d_1 - d_2 = k\lambda = 12$ mm (1)

và $d_1' - d_2' = (k+3)\lambda = 36$ mm (2)

Với k là số nguyên, dương. Từ (1) và (2) ta có $3\lambda = 24 \Rightarrow \lambda = 8$ mm

Thay vào (1) ta được: $k = \frac{12}{\lambda} = \frac{12}{8} = 1,5$

k = 1,5 không phải là số nguyên, nên $M_1$ và $M_2$ không phải là cực đại giao thoa

- Giả sử tại $M_1$ và $M_2$ đều là vân cực tiểu ta có :

$d_1 - d_2 = (2k+1)\frac{\lambda}{2} = 12$ mm (3)

và $d_1' - d_2' = [2(k+3)+1]\frac{\lambda}{2} = 36$ mm (4)

Với k là số nguyên, dương. Từ (3) và (4) ta có $3\lambda = 24 \Rightarrow \lambda = 8$ mm

Thay vào (3) = > k = 1 ( là số nguyên ) , Vậy $M_1$ và $M_2$ là cực tiểu giao thoa

Theo đề bài $\omega = 200\pi \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = 100Hz$

Vậy vận tốc truyền sóng là v = $\lambda f$ = 8.100 = 800 mm/s = 0,8 m/s

b. Tìm số điểm dao động với biên độ cực đại trên đoạn $S_1S_2$

$d_1 - d_2 = k\lambda = 8k$ (5)

$d_1 + d_2 = S_1S_2 = 50$ (6)

Từ (5) và (6) ta có $d_1 = \frac{8k+50}{2} = 4k + 25$

Mặt khác $0 < d_1 < 50$

<=> $0 < 4k + 25 < 50$

<=> $-6,25 < k < 6,25$

Vậy k chỉ có thể nhận các giá trị k = 0 $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5, \pm6$, tức là trên đoạn $S_1S_2$ có 13 cực đại

c. Các điểm nằm trên đường trung trực của đoạn $S_1S_2$ đều có $d_1 = d_2 = d$, => $d_1 - d_2 = 0$ => các điểm này đều là cực đại giao thoa. Độ lệch pha của các điểm này so với nguồn là :

$\Delta\varphi = \frac{\pi(d_1 + d_2)}{\lambda} = \frac{2\pi d}{\lambda}$

Để dao động tại những điểm này cùng pha với nguồn, ta có:

$$\Delta\varphi = 2k\pi \Rightarrow \frac{2\pi d}{\lambda} = 2k\pi \Rightarrow d = k\lambda$$

Do điểm đang xét nằm trên đường trung trực của $S_1S_2$ , ta có

$$d \geq \frac{S_1S_2}{2} = \frac{50}{2} = 25 \Rightarrow k\lambda \geq 25 \Rightarrow k \geq \frac{25}{\lambda} = \frac{25}{8} = 3{,}125$$

Vậy $k_{min} = 4 \Rightarrow d_{min} = 4\lambda = 4.8 = 32$ mm

**Bài 10**a.Tại M sóng có biên độ cực đại nên: $d_1 - d_2 = k\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{d_1 - d_2}{k}$

Giữa M và trung trực của AB có hai dãy cực đại khác $\rightarrow$ k=3

Từ đó $\Rightarrow \lambda = 1{,}5cm$ , vận tốc truyền sóng: v = λf = 30 cm/s.

b. Số điểm dao động cực đại trên đoạn $AS_2$ là:

$$\frac{S_1A - S_2A}{\lambda} \leq k < \frac{S_1S_2 - 0}{\lambda} \rightarrow -2{,}7 \leq k < 5{,}3 \rightarrow k = \{-2, -1, ......4, 5\}$$

$\rightarrow$ Có 8 điểm dao động cực đại.

* Số điểm dao động cực tiểu trên đoạn $AS_2$ là:

$$\frac{S_1A - S_2A}{\lambda} \leq k + \frac{1}{2} < \frac{S_1S_2 - 0}{\lambda} \rightarrow -3{,}2 \leq k < 4{,}8 \rightarrow k = \{-3, -2, -1, ......3, 4\}$$

$\rightarrow$ Có 8 điểm dao động cực tiểu.

c.Giả sử $u_1 = u_2 = a\cos\omega t$ , phương trình sóng tại N: $u_N = 2a\cos\left(\omega t - \frac{2\pi d}{\lambda}\right)$

Độ lệch pha giữa sóng tại N và tại nguồn: $\Delta\varphi = \frac{2\pi d}{\lambda}$

Để dao động tại N ngược pha với dao động tại nguồn thì

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi d}{\lambda} = (2k+1)\pi \Rightarrow d = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$$

Do d ≥ $S_1S_2/2 \Rightarrow (2k+1)\frac{\lambda}{2} \geq S_1S_2/2 \Rightarrow$ k ≥2,16. Để $d_{min}$ thì k=3.

$$\Rightarrow d_{min} = \sqrt{x_{min}^2 + \left(\frac{S_1S_2}{2}\right)^2} \Rightarrow x_{min} \approx 3{,}4cm$$

**Bài 11.** 5 điểm dao động với biên độ cực đại mà khoảng cách từ CD đến AB là lớn nhất thì C, D phải nằm trên đường cực đại $k = \pm 2$ (do trung điểm của CD là một cực đại).

Bước sóng: $\lambda = \frac{v}{f} = \frac{20}{20} = 1cm$.

Gọi khoảng cách từ AB đến CD bằng x.

Từ hình vẽ ta có:

$$\begin{cases} d_1^2 = x^2 + 9 \\ d_2^2 = x^2 + 81 \end{cases} \rightarrow d_2 - d_1 = \sqrt{x^2 + 81} - \sqrt{x^2 + 9} = 2\lambda = 2 \rightarrow x = 16,73Cm$$

**Bài 12**. 1.Tính tốc độ sóng.

+ Khoảng cách giữa hai điểm đứng yên liên tiếp trên đoạn AB là:

$$\lambda / 2 = 3cm \rightarrow \lambda = 6cm$$

+ Tốc độ sóng: $v = \lambda f = 60cm/s$

2.Tính số điểm cực đại trên đoạn AB

+ Khoảng cách giữa hai điểm đứng yên liên tiếp trên đoạn AB là $\lambda / 2$, khoảng cách giữa một điểm cực đại và một điểm đứng yên liên tiếp trên đoạn AB là $\lambda / 4$

+ Hai nguồn cùng pha thì trung điểm của AB là một điểm cực đại giao thoa

+ Trên đoạn AB có số điểm đứng yên là: $N_{A\min} = 2\left[\frac{AB}{\lambda} + \frac{1}{2}\right] = 10$ điểm

.Tính li độ của $M_1$ tại thời điểm $t_1$

+ Pt dao động của M trên đoạn AB cách trung điểm H của AB một đoạn x:

$$u_M = 2a.\cos\frac{2\pi x}{\lambda}.\cos(\omega t - \frac{\pi.AB}{\lambda})$$

+ Từ pt dao động của M trên đoạn AB ta thấy hai điểm trên đoạn AB dao động cùng pha hoặc ngược pha, nên tỷ số li độ cũng chính là tỷ số vận tốc

$$\frac{u'_{M_1}}{u'_{M_2}} = \frac{u_{M_1}}{u_{M_2}} = \frac{\cos\frac{2\pi x_1}{\lambda}}{\cos\frac{2\pi x_2}{\lambda}} = \frac{\cos\frac{2\pi.0,5}{6}}{\cos\frac{2\pi.2}{6}} = \frac{\sqrt{3}/2}{-1/2} = -\sqrt{3} \rightarrow v_{M_2} = u'_{M2} = -\frac{u'_{M_1}}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}(cm/s)$$

4. Tính số điểm dao động với biên độ cực đại cùng pha với nguồn trên đoạn AB

+ Theo trên pt dao động của một điểm trên đoạn AB có biên độ cực đại :

$$u_M = 2a.\cos\frac{2\pi x}{\lambda}.\cos(\omega t - \frac{\pi.AB}{\lambda}) = 2a.\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\cos(\omega t\text{-}5\pi)$$

+ Các điểm dao động với biên độ cực trên đoạn AB cùng pha với nguồn thoả mãn:

$$\cos\frac{2\pi x}{\lambda} = -1 \rightarrow \frac{2\pi x}{\lambda} = (2k+1)\pi \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2k+1}{2}.\lambda \\ -AB/2 < x < AB/2 \end{cases} \rightarrow k = -2;-1;0;1$$

Vậy trên đoạn AB có 4 điểm dao động với biên độ cực đại cùng pha với nguồn.

**Bài 13.** a.Phương trình sóng do A,B truyền tới M lần lượt là:

$$\begin{cases} u_1 = a.\cos(\omega t - \dfrac{2\pi d_1}{\lambda}) \\ u_2 = a.\cos(\omega t - \dfrac{2\pi d_2}{\lambda} + \pi) \end{cases} \quad \text{với } \lambda = \frac{V}{f} = \frac{60}{10} = 6(cm)$$

+ Phương trình dao động tổng hợp tại M là:

$$u_M = u_1 + u_2 = 2a.\cos\left[\frac{\pi}{\lambda}(d_1 - d_2) + \frac{\pi}{2}\right].\cos\left[\omega t - \frac{\pi}{\lambda}(d_1 + d_2) + \frac{\pi}{2}\right]$$

$$u_M = 10.\cos(20\pi t - \pi/11)(cm).$$

b. + Vị trí điểm dao động với biên độ cực đại thoả mãn: $\cos\left[\frac{\pi}{\lambda}(d_1 - d_2) + \frac{\pi}{2}\right] = \pm 1$

$$\Rightarrow d_1 - d_2 = \left(k - \frac{1}{2}\right)\lambda$$

+ Các điểm trên đoạn AB dao động với biên độ cực đại thoả mãn:

$$\begin{cases} d_1 - d_2 = \left(k - \dfrac{1}{2}\right)\lambda \\ d_1 + d_2 = AB \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{AB}{\lambda} + \dfrac{1}{2} \le k \le \dfrac{AB}{\lambda} + \dfrac{1}{2} \Rightarrow k = -2;....;3 \\ k \in Z \end{cases}$$

Suy ra trên đoạn AB có 6 điểm cực đại giao thoa

+ Các điểm trên đoạn AC dao động với biên độ cực đại thoả mãn:

$$AD - BD \le d_1 - d_2 = \left(k - \frac{1}{2}\lambda\right) \le AB - 0 \quad \text{với } k \in Z$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 15-25 \le \left(k-\dfrac{1}{2}\right).6 \le 20 \\ k \in Z \end{cases} \Rightarrow k=-1;0;1;2;3$$ suy ra trên AC có 5 điểm cực đại

c. + $M_1$ cách A,B những đoạn $d_1 = 12cm; d_2 = 8cm$;

$M_2$ cách A,B những đoạn $d_1 = 14cm; d_2 = 6cm$

+ Phương trình dao động tổng hợp của $M_1$ và $M_2$ tương ứng là:

$$\begin{cases} u_{M1} = 10.\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{\pi}{2}\right).\cos\left(\omega t-\dfrac{5\pi}{6}\right) = -10.\sin\dfrac{2\pi}{3}.\cos(\omega t-\dfrac{5\pi}{6}) = -5\sqrt{3}.\cos(\omega t-\dfrac{11\pi}{6})(cm) \\ u_{M2} = 10.\cos\left(\dfrac{4\pi}{3}+\dfrac{\pi}{2}\right).\cos\left(\omega t-\dfrac{5\pi}{6}\right) = -10.\sin\dfrac{4\pi}{3}.\cos(\omega t-\dfrac{5\pi}{6}) = 5\sqrt{3}.\cos(\omega t-\dfrac{11\pi}{6})(cm) \end{cases}$$ chứng

tỏ hai điểm $M_1$ và $M_2$ dao động cùng biên độ ngược pha nhau, nên lúc vận tốc của $M_1$ có giá trị đại số là - 40cm/s thì vận tốc của $M_2$ là 40cm/s.

**Bài 14.** a. Bước sóng : $\lambda = vT = 2cm$.

- Phương trình sóng từ các nguồn truyền tới điểm M :

$$u_{1M} = 2\cos(50\pi t - \frac{2\pi d_1}{\lambda}); \qquad u_{2M} = 2\cos(50\pi t - \frac{2\pi d_2}{\lambda}).$$

- Phương trình sóng tổng hợp tại M : $u_M = 4\cos\left[\dfrac{\pi}{\lambda}(d_2-d_1)\right]\cos\left[50\pi t - \dfrac{\pi}{\lambda}(d_1+d_2)\right](cm)$.

b. Độ lệch pha : $\Delta\varphi = \dfrac{2\pi}{\lambda}(d_2-d_1)$.

- Điểm đứng yên khi : $\Delta\varphi = \dfrac{2\pi}{\lambda}(d_2-d_1) = (2k+1)\pi \Rightarrow d_2-d_1 = (2k+1)\dfrac{\lambda}{2}$.

- Số điểm đứng yên trên AB : $\left|(2k+1)\dfrac{\lambda}{2}\right| \le AB \quad \Rightarrow -9,5 \le k \le 8,5$ với k nguyên

=> k nhận các giá trị từ : - 9, -8.............7, 8.   có 18 điểm

c. Phương trình sóng : $u_M = 4\cos\left[\dfrac{\pi}{\lambda}(d_2-d_1)\right]\cos[50\pi t - \pi](cm)$.

Hay : $u_M = -4\cos\left[\dfrac{\pi}{\lambda}(d_2-d_1)\right]\cos 50\pi t(cm)$.

- Các điểm dao động cực đại cùng pha với nguồn khi :

$$\cos\left[\frac{\pi}{2}(d_2-d_1)\right]=-1 \Rightarrow d_2-d_1=4k+2 \text{. Khi đó : } |(4k+2)|<AB$$

=> -5 < k <4 với k nguyên, nên k nhận các giá trị từ : - 4, -3, .... 3. Vậy có 8 điểm.

d. Ta có : OA = 9cm = 4,5$\lambda$ => điểm O dao động ngược pha với nguồn do đó điểm M cũng dao động ngược pha với nguồn.

- Điểm M dao động ngược pha với nguồn khi : AM = (2k + 1)$\frac{\lambda}{2}$.

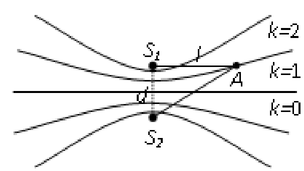
- Để điểm M nằm trên đường trung trực AB thì : (2k + 1)$\frac{\lambda}{2}$>9 => k > 4.

- Điểm M gần nhất khi $k_{min}$ : $k_{min}$ = 5. Khi đó : AM = 11cm

- Khoảng cách MO là : $MO=\sqrt{AM^2-AO^2}=2\sqrt{10}(cm)$.

**Bài 15.**

a) Điều kiện để tại A có cực đại giao thoa là hiệu đường đi từ A đến hai nguồn sóng phải bằng số nguyên lần bước sóng (xem hình 2):



Hình 2

$$\sqrt{l^2+d^2}-l=k\lambda.$$

Với k=1, 2, 3...

Khi l càng lớn đường $S_1$A cắt các cực đại giao thoa có bậc càng nhỏ (k càng bé), vậy ứng với giá trị lớn nhất của l để tại A có cực đại nghĩa là tại A đường $S_1$A cắt cực đại bậc 1 (k=1).

Thay các giá trị đã cho vào biểu thức trên ta nhận được:

$$\sqrt{l^2+4}-l=1 \quad \Rightarrow \quad l=1{,}5(m).$$

b) Điều kiện để tại A có cực tiểu giao thoa là:

$$\sqrt{l^2+d^2}-l=(2k+1)\frac{\lambda}{2}.$$

Trong biểu thức này k=0, 1, 2, 3, ...

Ta suy ra : $l=\dfrac{d^2-\left[(2k+1)\frac{\lambda}{2}\right]^2}{(2k+1)\lambda}$ .

Vì l > 0 nên k = 0 hoặc k = 1.

Từ đó ta có giá trị của l là :

* Với k =0 thì l = 3,75 (m ).

* Với k= 1 thì l ≈ 0,58 (m).

**Bài 16.** a. Xác định b:

- Phương trình sóng dừng trên dây: u = [a.sin(bx)].cos(ωt) = A.cos(ωt)

- Tại điểm nút thứ k có tọa độ $x_k$: A = 0 => sin($bx_k$) = 0 $\Rightarrow bx_k = k\pi \Rightarrow x_k = \frac{k\pi}{b}$

Khoảng cách giữa hai nút liên tiếp của một sóng dừng bằng $\frac{\lambda}{2}$ nên $x_{k+1}$ - $x_k$= $\frac{\pi}{b} = \frac{\lambda}{2}$.

Vậy b = $\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{20}$ $cm^{-1}$

* Xác định a:

- Tọa độ các điểm nút là $x_k$ = $k\frac{\pi}{b}$ = 20k(cm) với k = 0, $\pm1$, $\pm2$...

- Xét phần tử M cách nút thứ k 5cm có $A_M$ = 5mm => $a\left|\sin b(x_k + 5)\right| = 5mm$

$\Rightarrow a\left|\sin bx_k.\cos 5b + \cos bx_k.\sin 5b)\right| = a\left|\sin 5b\right| = 5$

Thay b = $\frac{\pi}{20}$ được a = $5\sqrt{2}$ (mm)

b/ Chiều dài dây: l = $k_{max}\frac{\lambda}{2}$ => $k_{max}$ = 11 => có 11 bụng sóng, 12 nút sóng.

Giữa 2 nút có 2 điểm dđ với biên độ 5mm => Số điểm cần tìm 11.2 = 22 điểm.

**Bài 17. a**. + $\lambda = \frac{v}{f}$ = 0,8cm và $d_1 = d_2 = d$ = 8cm

+ Ta có phương trình dao động sóng tổng hợp tại $M_1$

$$u_{M1} = 2A\cos\frac{\pi(d_2 - d_1)}{\lambda}\cos\left[200\pi t - \frac{\pi(d_1 + d_2)}{\lambda}\right]$$

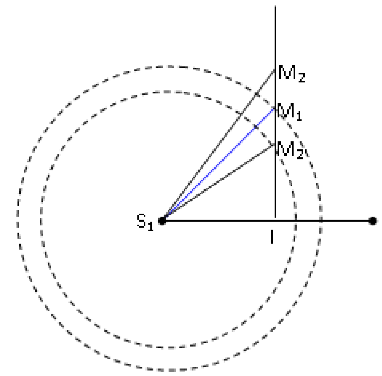
với $d_1 + d_2$ = 16cm = 20λ và $d_2 - d_1$ = 0,

ta được: $u_{M1}$ = 2Acos(200πt - 20π)

**b**. Hai điểm $M_2$ và $M_{2'}$ gần $M_1$ ta có:

$$S_1M_2 = d + \lambda = 8 + 0,8 = 8,8 \text{ cm}$$

$S_1M_{2'} = d - \lambda = 8 - 0{,}8 = 7{,}2$ cm




Do đó: $IM_2 = \sqrt{S_1M_2^2 - S_1I^2} = \sqrt{8{,}8^2 - 4^2} = 7{,}84(\text{cm})$

$IM_1 = S_1I\sqrt{3} = 4\sqrt{3} = 6{,}93(\text{cm})$

Suy ra $M_1M_2 = 7{,}84 - 6{,}93 = 0{,}91$ (cm)

Tương tự: $IM_2' = \sqrt{S_1M_2'^2 - S_1I^2} = \sqrt{7{,}2^2 - 4^2} = 5{,}99(\text{cm})$

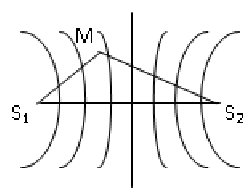
⇨ $M_1M_2' = 6{,}93 - 5{,}99 = 0{,}94$ (cm)

**c**. Khi hệ sóng đã ổn định thì hai điểm $S_1$, $S_2$ là hai tiêu điểm của các hypecbol và ở rất gần chúng xem gần đúng là đứng yên, còn trung điểm I của $S_1S_2$ luôn nằm trên vân giao thoa cực đại. Do đó ta có: $S_1I = S_2I = k\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} = (2k+1)\frac{\lambda}{4}$ => $S_1S_2 = 2S_1I = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$

Ban đầu ta đã có: $S_1S_2 = 8\text{cm} = 10\lambda = 20\frac{\lambda}{2}$ => chỉ cần tăng $S_1S_2$ một khoảng $\frac{\lambda}{2} = 0{,}4$cm.

Khi đó trên $S_1S_2$ có 21 điểm có biên độ cực đại

**Bài 18.**




1, $\lambda = \frac{v.2\pi}{\omega} = 8\text{cm}$

$A_M = 2A\left|\cos\frac{\pi(d_2 - d_1)}{\lambda}\right| = 2\sqrt{2}\text{cm}$

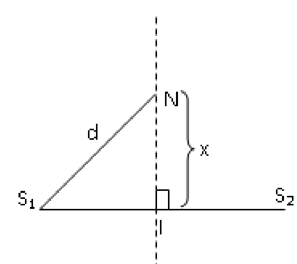
$\frac{S_1S_2}{\lambda} = 3{,}75$ có tổng 7 cực đại, 8 cực tiểu trên vùng giao thoa.

M nằm giữa cực đại bậc 1 và cực tiểu thứ 2 nên trên đoạn $MS_2$ có 05 cực đại, 05 cực tiểu.

2, Các điểm nằm trên trung trực của $S_1S_2$ nên $d_1 = d_2 = d$.

Các điểm nằm trên trung trực của $S_1S_2$ có cùng pha với nguồn thì:

$\frac{\pi}{\lambda}(d_1 + d_2) = 2k\pi \rightarrow d = k\lambda = 8k$




Đặt x = IN=>$x^2 = d^2 - \frac{S_1S_1^2}{4}$ => $x = \sqrt{64k^2 - 225}$

Điều kiện: $d = k\lambda > \frac{S_1S_2}{2} \rightarrow k > 1{,}875\ (k \in Z) \rightarrow k \geq 2$.

**Vậy** $x = \sqrt{64k^2 - 225}$ **(k ≥ 2)**

3. Pha ban đầu của I: $\varphi_I = \frac{-\pi S_1S_2}{\lambda} = \frac{-\pi 30}{8} = -3,75\pi$

Pha ban đầu của P: $\varphi_P = \frac{-\pi(d_1+d_2)}{\lambda} = \frac{-\pi(d_1+d_2)}{8}$

P và I dao động cùng pha khi $\varphi_I - \varphi_P = 2n\pi$

$$hay\ -3,75\pi + \frac{\pi}{8}(d_1+d_2) = 2n\pi \Rightarrow d_1+d_2 = 16n+30\ (n\in N^*)$$

**Bài 19.** a.Tính bước sóng $\lambda = \frac{v}{f} = 2cm$

- Số cực tiểu trên AB là số giá trị nguyên của k thỏa mãn $-AB < \Delta d = (k+0,5)\lambda < AB$

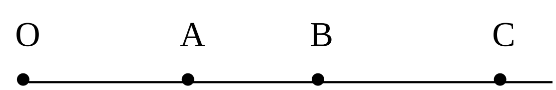
Suy ra $-9 < k+0,5 < 9 \Rightarrow k = -9,-8,....,8$ tức là có 18 cực tiểu trên AB

b. Tính $\frac{AB}{\lambda} = 9 = n$ là số nguyên lẻ

Vậy số điểm dao động với biên độ cực đại và cùng pha với nguồn trên AB là n-1=8.

# V.2. SÓNG ÂM

**Bài 1.** - Gọi P là công suất của nguồn âm tại O thì cường độ âm tại một điểm cách nguồn một khoảng r là $I = \frac{P}{4\pi r^2}$




- Ta có: $I_A = \frac{P}{4\pi OA^2}; I_B = \frac{P}{4\pi OB^2}; I_C = \frac{P}{4\pi OC^2}$

- Mức cường độ âm tại A, B, C là: $L_A = 10\lg\frac{I_A}{I_0}; L_B = 10\lg\frac{I_B}{I_0}; L_C = 10\lg\frac{I_C}{I_0}$

$$\Rightarrow L_A - L_B = 10\lg\frac{I_A}{I_0} - 10\lg\frac{I_B}{I_0} = 10\lg\frac{I_A}{I_B} = 10\lg\left(\frac{OB}{OA}\right)^2 = 20\lg\frac{OB}{OA} = 4,1$$

$$\Rightarrow OB = 10^{0,205}OA\ (1)$$

- Tương tự: $\Rightarrow L_A - L_C = 10\lg\frac{I_A}{I_0} - 10\lg\frac{I_C}{I_0} = 10\lg\frac{I_A}{I_C} = 10\lg\left(\frac{OC}{OA}\right)^2 = 20\lg\frac{OC}{OA} = 10$

$\Rightarrow OC = 10^{0,5}OA$ (2)

- Theo giả thiết: AB = OB – OA = 30m$\Rightarrow \left(10^{0,205}-1\right)OA = 30 \Rightarrow OA = 49,73m$

- Có BC = OC – OB = $\Rightarrow \left(10^{0,5}-10^{0,205}\right)OA = 77,53m$

**Bài 2.**

Gọi P là công suất của nguồn âm

1. Khi nguồn âm đặt tại O:

$L_M = 10\lg\frac{I_M}{I_0}$ $\quad L_N = 10\lg\frac{I_N}{I_0}$

$L_M - L_N = 10\lg\frac{I_M}{I_N} = 20$ dB ------> $\frac{I_M}{I_N} = 10^2 = 100$

$I_M = \frac{P}{4\pi R_M^2}$; $I_N = \frac{P}{4\pi R_N^2}$; -----> $\frac{I_M}{I_N} = \frac{R_N^2}{R_M^2} = 100$------> $\frac{R_N}{R_M} = 10$-----> $R_M = 0,1R_N$

$R_{NM} = R_N - R_M = 0,9R_N$

2. Khi nguồn âm đặt tại M

$L'_N = 10\lg\frac{I'_N}{I_0}$ với $I'_N = \frac{P}{4\pi R_{NM}^2} = \frac{P}{4\pi.0,81.R_N^2} = \frac{I_N}{0,81}$

$L'_N = 10\lg\frac{I'_N}{I_0} = 10\lg(\frac{1}{0,81}\frac{I_N}{I_0}) = 10\lg\frac{1}{0,81} + L_N = 0,915 + 10 = 10,915 \approx 11$ dB.

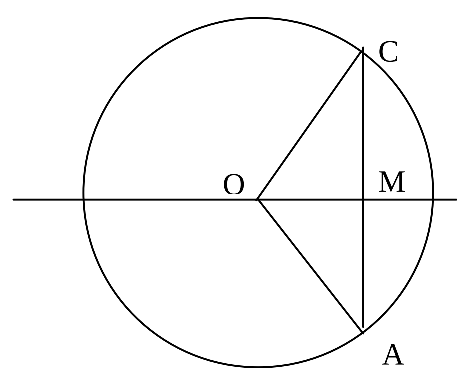
**Bài 3.** Do nguồn phát âm thanh đẳng hướng

Cường độ âm tại điểm cách nguồn âm R

$I = \frac{P}{4\pi R^2}$. Giả sử người đi bộ từ A qua M tới C

-----> $I_A = I_C = I$----> OA = OC

$I_M = 4I$ ------> OA = 2. OM. Trên đường thẳng qua AC $I_M$ đạt giá trị lớn nhất, nên M gần O nhất



----> OM vuông góc với AC và là trung điểm của AC

$AO^2 = OM^2 + AM^2 = \dfrac{AO^2}{4} + \dfrac{AC^2}{4}$ -----> $3AO^2 = AC^2$

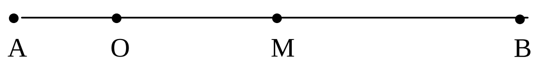
-------->**AO =** $\dfrac{AC\sqrt{3}}{3}$

**Bài 4.** $L_1 = \lg\dfrac{I_1}{I_0}$ ----> $I_1 = 10^{L1}I_0 = 10^{7,6}I_0$; $L_1 = \lg\dfrac{I_2}{I_0}$ ----> $I_2 = 10^{L2}I_0 = 10^{8}I_0$

$L = \lg\dfrac{I_1 + I_2}{I_0} = \lg(10^{7,6} + 10^{8}) = \lg139810717,1 = 8,1455\text{ B} = 81,46\text{dB}$

**Bài 5.** Cường độ âm tại điểm cách nguồn âm khoảng

R: $I = \dfrac{P}{4\pi R^2}$ ; Với P là công suất của nguồn




$\dfrac{I_A}{I_M} = \dfrac{R_M^2}{R_A^2}$**;** $L_A – L_M = 10\lg\dfrac{I_A}{I_M} = 10\lg\dfrac{R_M^2}{R_A^2} = 6$ ------> $\dfrac{R_M^2}{R_A^2} = 10^{0,6}$ ---> $\dfrac{R_M}{R_A} = 10^{0,3}$

M là trung điểm của AB, nằm hai phía của gốc O nên: $R_M = OM = \dfrac{R_B - R_A}{2}$

$R_B = R_A + 2R_M = (1+2.10^{0,3})R_A$ -----> $\dfrac{R_B^2}{R_A^2} = (1+2.10^{0,3})^2$

$\dfrac{I_A}{I_B} = \dfrac{R_B^2}{R_A^2}$**;** $L_A - L_B = 10\lg\dfrac{I_A}{I_B} = 10\lg\dfrac{R_B^2}{R_A^2} = 20\lg(1+2.10^{0,3}) = 20.\ 0,698 = 13,963$ dB

$L_B = L_A – 13,963 = 36,037$ dB ≈ 36 dB.

**Bài 6.**

1. $\dfrac{f(fa)}{f(mi)} = \sqrt[12]{2} \rightarrow f(mi) = \dfrac{f(fa)}{\sqrt[12]{2}} = \dfrac{349}{\sqrt[12]{2}} \approx 329Hz$

2. Dễ thấy $\dfrac{f(la_3)}{f(la_1)} = 4 \rightarrow f(la_1) = 110Hz$

Mặt khác: âm $la_2$ hơn âm $do_2$ 9 quãng nửa cung, do đó:

$\dfrac{f(la_1)}{f(do_1)} = (\sqrt[12]{2})^9 \longrightarrow f(do_1) = \dfrac{f(la_1)}{(\sqrt[12]{2})^9} = \dfrac{110}{(\sqrt[12]{2})^9} \approx 65Hz$

**Bài 7.**

**a.** Gọi I là cường độ âm tại M, I' là cường độ âm tại điểm gần hơn

Ta có:

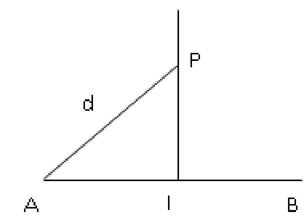
$I = \frac{P}{4\pi R^2}$; I'= $\frac{P}{4\pi (R-D)^2} \to \Delta L = 10.\lg\frac{I'}{I}$ Do đó

$\Delta L = 10.\lg\frac{R^2}{(R-D)} = 20\lg\frac{R}{R-D}$ với $\Delta L = 7dB, D = 62m \Rightarrow \lg\frac{R}{R-D} = \frac{7}{20} \approx \lg 2,24 \Rightarrow R = \frac{2,24}{1,24}D = 112$

**b.** Ta có: L=10lg$\frac{I}{I_0}$ Với $I_0=10^{-12}$; L=73 nên

$\lg\frac{I}{I_0} = 7,3 = 7 + 0,3 = \lg 10^7 + \lg 2 = \lg 2.10^7 \Rightarrow I = 2.10^7.I_0 = 2.10^{-5} w/m^2$

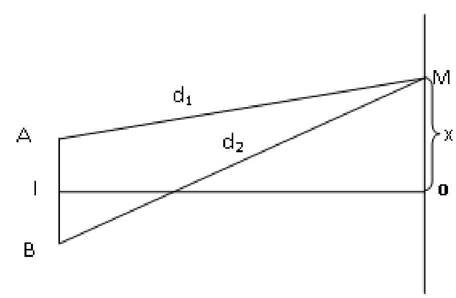
**Và** P= $4\pi R^2 I \approx 3,15w$




**Bài 8. 1.** Ta có: λ = $\frac{v}{f}$ = 0,5(m/s)

Độ lệch pha giữa hai điểm P và I là: $\Delta\varphi = 2\pi\frac{(d - AB/2)}{\lambda}$

Vì P dao động ngược pha với I, ta có:




Δφ = (2k + 1)π

$\Rightarrow$ d = (2k+ 1)$\frac{\lambda}{2}$ + $\frac{AB}{2}$

Do d > $\frac{AB}{2}$ $\Rightarrow (2k+1)\frac{\lambda}{2} > 0 \Leftrightarrow$ k > - ½

Vì k ∈ Z, nên $d_{min} \Leftrightarrow k = 0 \Rightarrow d_{min}$ = 0,75(m).

2.Học sinh phải chứng minh công thức sau: $d_2 - d_1 = \frac{AB.x}{OI}$.

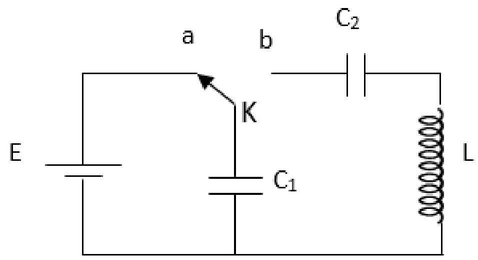
Tại M nhận được âm to nhất, ta có: $d_2 - d_1 = k\lambda = \lambda$ ( k = 1, vì điểm M gần O nhất)

$\Rightarrow$ x = $\frac{OI.\lambda}{AB} = 50m$.

# CHƯƠNG VI
# DAO ĐỘNG ĐIỆN TỪ

**Bài 1.**

- Khi K đóng vào chốt a tụ $C_1$ được tích điện đến điện tích $q_0$ = CE và bản dương của tụ được nối với K.




- Khi đóng K vào chốt b, tụ $C_1$ phóng điện vào trong mạch $C_2L$, trong mạch có dòng điện $i = -q_1'$. Dòng điện chạy qua cuộn dây, làm cho trong cuộn dây xuất hiện suất điện động tự cảm $e_c = Li' = -Lq_1''$. Xét thời điểm tụ $C_1$ đang phóng điện và suất điện động tự cảm đóng vai trò suất phản điện: $e_c = u_1 + u_2$

$$\Rightarrow -Lq_1'' = \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2} = \frac{q_1 + q_2}{C}$$

Tại nút b: $q_1 - q_2 = q_0 \Rightarrow q_2 = q_1 - q_0$ thay vào phương trình trên ta được: $q_1'' = -\frac{2}{LC}(q_1 - \frac{q_0}{2})$

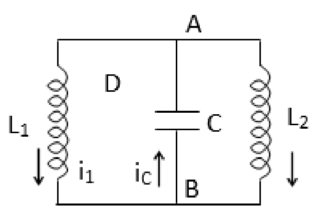
- Phương trình có nghiệm:

$$q_1 = \frac{q_0}{2}\left[\cos\left(\sqrt{\frac{2}{LC}}t\right) + 1\right] \Rightarrow q_2 = \frac{q_0}{2}\left[\cos\left(\sqrt{\frac{2}{LC}}t\right) - 1\right]$$

Vậy chu kỳ dao động: $T = 2\pi\sqrt{\frac{LC}{2}}$

**Bài 2.**

a. Kí hiệu và quy ước chiều dương của các dòng như hình vẽ và gọi q là điện tích bản tụ nối với B. Lập hệ:




$i_C = i_1 + i_2$ (1)

$Li_1' - 2Li_2' = 0$ (2)

$Li_1' = q/C$ (3)

$i = -q'$ (4)

Đạo hàm hai vế của (1), (2) và (3):

$i''_C = i''_1 + i''_2$ (1')

$Li''_1 - 2Li''_2 = 0$ (2')

$Li''_1 = -i_C/C$ (3') $\Rightarrow$ $i''_C = -\frac{3}{2LC}i_C$.

Phương trình chứng tỏ $i_C$ dao động điều hoà với $\omega = \sqrt{\frac{3}{2LC}}$

Vậy chu kỳ dao động: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{2LC}{3}}$

b. $i_C = I_0\cos(\omega t + \varphi)$ (5) Từ (2) $\Rightarrow$ $(Li_1 - 2Li_2)' = const$

$i_1 - 2i_2 = const$. Tại t = 0 thì $i_1 = I_1$, $i_2 = 0$ $\Rightarrow$ $i_1 - 2i_2 = I_1$ (6)

$i_1 + i_2 = i_C = I_{0C}\cos(\omega t + \varphi)$. Giải hệ: $i_1 = \dfrac{I_1}{3} + \dfrac{2I_{0C}}{3}\cos(\omega t + \varphi)$.

$i_2 = \dfrac{I_{0C}}{3}\cos(\omega t + \varphi) - \dfrac{I_1}{3}$ ; $u_{AB} = q/C = L i_1' = -\dfrac{2I_{0C}}{3} LC\omega\sin(\omega t + \varphi)$.

Tại thời điểm t = 0: $i_1 = I_1$; $i_2 = 0$; $u_{AB} = 0$: Giải hệ: $I_{0C} = I_1$; $\varphi = 0$;

=> $i_1 = \dfrac{I_1}{3} + \dfrac{2I_1}{3}\cos\sqrt{\dfrac{3}{2LC}}\,t$ ; $i_2 = \dfrac{I_1}{3}\cos\sqrt{\dfrac{3}{2LC}}\,t - \dfrac{I_1}{3}$

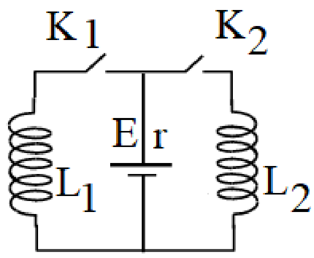
**Bài 3.**

a. Khi $t = t_0 \rightarrow i_1 = I_0$ Lúc $t > t_0$ có dòng điện qua 2 cuộn dây là $i_1$; $i_2$

$\Rightarrow L_1\dfrac{di_1}{dt} = L_2\dfrac{di_2}{dt}$ hay $L_1\dfrac{di_1}{dt} - L_2\dfrac{di_2}{dt} = 0 \Leftrightarrow L_1i_1 - L_2i_2 = const$

+ Với $t = t_0 \rightarrow L_1i_1 = L_1I_0 = const$ $\Rightarrow L_1i_1 - L_2i_2 = L_1I_0$

+ Khi ổn định $L_1I_1 - L_2I_2 = L_1I_0$ và $I_1 + I_2 = \dfrac{E}{r}$




$\Rightarrow$ $I_1 = \dfrac{L_2E}{r(L_1 + L_2)} + \dfrac{L_1I_0}{L_1 + L_2}$ ; $I_2 = \dfrac{L_1E}{r(L_1 + L_2)} - \dfrac{L_1I_0}{L_1 + L_2}$

b. Nếu đồng thời đóng cả 2 khóa thì $I_0 = 0$

$$\Rightarrow \quad I_1 = \frac{L_2E}{r(L_1 + L_2)};\ I_2 = \frac{L_1E}{r(L_1 + L_2)}$$

**Bài 4.**

+$K_1$ đóng, $K_2$ ngắt, dòng điện ổn định qua $L_1$: $I_0 = \dfrac{E}{R}$

$K_1$ ngắt, $K_2$ đóng: Vì 2 cuộn mắc song song

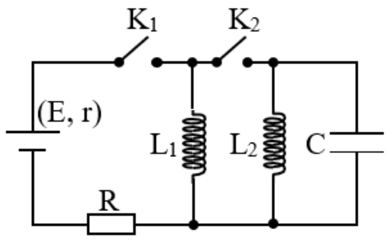
$u_{L1} = u_{L2} = u_{AB}$ ==> $-2L(i_1 - I_0) = Li_2$ $\Leftrightarrow$ $2L(I_0 - i_1) = Li_2$ (1)

$$\frac{2LI_0^2}{2} = \frac{2Li_1^2}{2} + \frac{Li_2^2}{2} + \frac{CU^2}{2} \qquad (2)$$

$I_C = i_1 - i_2 \Rightarrow U_{Cmax} \Leftrightarrow I_C = 0 \Leftrightarrow i_1 = i_2 = I$ (3)

(2) và (3) $\Rightarrow CU_0^2 = 2LI_0^2 - 2Li_1^2 - Li_2^2 = 2LI_0^2 - 3LI^2$

(1) $\Rightarrow 2LI_0 = Li_2 + 2Li_1 = 3LI$ $\Rightarrow I = \dfrac{2I_0}{3}$




$\Rightarrow CU_0^2 = \dfrac{2}{3}LI_0^2 \Rightarrow U_0 = I_0\sqrt{\dfrac{2L}{3C}} = \dfrac{E}{R}\sqrt{\dfrac{2L}{3C}}$

+ Khi tụ điện phóng hết điện thì $I_1$ và $I_2$ cực đại

$\dfrac{2LI_0^2}{2} = \dfrac{2LI_{1max}^2}{2} + \dfrac{LI_{2max}^2}{2}$ (4)

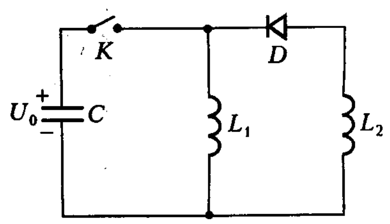
(1) $\Rightarrow$ 2L ($I_0 - I_{1max}$) = $LI_{2max}$ $\Rightarrow$ $I_0 - I_{1max} = \frac{1}{2} I_{2max}$ (5) (4)

$$\Rightarrow 2LI_0^2 = 2LI_{1max}^2 + LI_{2max}^2 \Rightarrow 2I_0^2 = 2I_{1max}^2 + I_{2max}^2$$

$$\Rightarrow 2(I_0 - I_{1max})(I_0 + I_{1max}) = I_{2max}^2 \quad \Rightarrow I_0 + I_{1max} = I_{2max} \quad (6)$$

(5)(6) $\Rightarrow I_{2max} = \frac{4}{3} I_0 = \frac{4E}{3R}$

**Bài 5.** Sau khi đóng khoá $K$ ta có một mạch dao động bao gồm tụ điện với điện dung C và cuộn cảm với độ tự cảm $L_1$. Tụ điện bắt đầu phóng điện, và khi hiệu điện thế của nó trở nên bằng không thì năng lượng ban đầu của tụ điện được chuyển hoàn toàn sang năng lượng từ trường của cuộn cảm. Nếu tại thời điểm này dòng điện chạy qua




cuộn cảm bằng $I_L$ thì: $\frac{CU_0^2}{2} = \frac{L_1 I_L^2}{2}$.

Từ đây ta nhận được dòng điện phải tìm $I_L = U_0\sqrt{\frac{C}{L_1}}$.

Đó là dòng điện cực đại chạy qua cuộn cảm $L_1$, sau đó nó bắt đầu giảm, một phần của nó được tích điện cho tụ, một phần chạy qua cuộn cảm $L_2$. Giả sử tại một thời điểm nào đó dòng điện $I_1$ chạy qua cuộn cảm ứng thứ nhất còn dòng điện $I_2$ chạy qua cuộn cảm ứng thứ hai. Khi đó theo định luật Ohm đối với mạch chứa cả hai cuộn cảm ta có thể viết: $L_1\frac{dI_1}{dt} + L_2\frac{dI_2}{dt} = 0$.

Nghiệm của phương trình này có dạng $L_1 I_1 + L_2 I_2 = A$.

với A là một hằng số. Ta có thể tìm A từ các điều kiện ban đầu. Tại thời điểm khi dòng điện chạy qua cuộn cảm $L_1$ đã đạt giá trị cực đại và bằng $U_0\sqrt{C/L_1}$ thì dòng điện qua cuộn $L_2$ bằng không, do đó $A = U_0\sqrt{L_1 C}$.

Khi đó nghiệm có dạng $L_1 I_1 + L_2 I_2 = U_0\sqrt{L_1 C}$.

Khi hiệu điện thế của tụ điện đạt giá trị cực đại, dòng qua tụ điện sẽ bằng không, còn dòng chung đi qua hai cuộn cảm ta sẽ ký hiệu là $I_{12}$. Sử dụng mối liên hệ như trên ta có thể viết $(L_1 + L_2)I_{12} = U_0\sqrt{L_1 C}$

khi đó $I_{12} = \frac{U_0\sqrt{L_1 C}}{L_1 + L_2}$.

Giả sử hiệu điện thế cực đại trên tụ điện bằng $U_m$. Vì trong mạch không có mất mát năng lượng nên tại thời điểm bất kỳ ta đều có thể sử dụng định luật bảo toàn năng lượng. Năng lượng toàn phần của mạch điện bằng $CU_0^2/2$. Tại thời điểm khi tụ điện tích điện lại và hiệu điện thế của nó đạt giá trị cực đại, phần năng lượng tập trung trong tụ điện bằng: $W_c = \frac{1}{2}CU_m^2$,

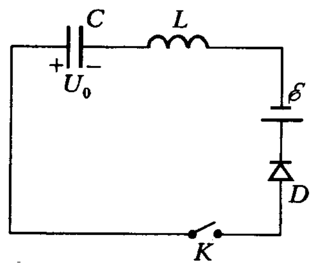
phần còn lại sẽ tập trung trong các cuộn cảm:

$$W_L = \frac{1}{2}(L_1 + L_2)I_{12}^2 = \frac{1}{2}\frac{L_1 CU_0^2}{L_1 + L_2}.$$

Theo định luật bảo toàn năng lượng:

$$\frac{1}{2}CU_0^2 = \frac{1}{2}CU_m^2 + \frac{1}{2}\frac{L_1CU_0^2}{L_1+L_2} \quad => \quad U_m = U_0\sqrt{\frac{L_2}{L_1+L_2}}.$$

**Bài 6.** a. Do trong mạch có cuộn cảm nên ngay sau khi đóng khoá K dòng điện sẽ bằng không, sau đó dòng điện sẽ tăng dần, và tại một thời điểm nào đó, nó sẽ đạt cực đại. Khi dòng điện trong mạch cực đại suất điện động cảm ứng trong cuộn cảm sẽ bằng không, và theo định luật Ohm đối với mạch kín hiệu điện thế của tụ điện trong trường hợp này phải bằng suất điện động của nguồn. Ta ký hiệu hiệu điện thế này bằng $U_1 (U_1 = \mathcal{E})$ và sẽ tìm giá trị của dòng điện cực đại. Để làm điều đó ta sử dụng định luật bảo toàn năng lượng. Trong thời gian thiết lập dòng điện cực đại, điện lượng đã chạy qua mạch bằng:




$$\Delta q = CU_0 - CU_1 = C(U_0 - U_1).$$

Để dịch chuyển điện lượng này ngược với s.đ.đ. của nguồn, phải thực hiện một công:

$$A = \Delta q\mathcal{E} = C\mathcal{E}(U_0 - U_1).$$

Sự có mặt dòng điện cực đại $I_m$ trong cuộn cảm dẫn đến xuất hiện năng lượng của từ trường

$$W_L = \frac{1}{2}LI_m^2.$$

Hiệu năng lượng của tụ điện tại trạng thái đầu và trạng thái cuối bằng tổng của công đã thực hiện và năng lượng của cuộn cảm:

$$\frac{1}{2}CU_0^2 - \frac{1}{2}CU_1^2 = A + W_L = C\mathcal{E}(U_0 - U_1) + \frac{1}{2}LI_m^2.$$

$$=> \quad I_m = (U_0 - \mathcal{E})\sqrt{\frac{C}{L}} \approx 0{,}022\,A.$$

b. Sau khi đạt giá trị cực đại, dòng điện trong mạch sẽ giảm và cuối cùng sẽ bằng không. Do dòng điện không thể chạy theo chiều ngược lại (do điôt cản trở) nên một trạng thái dừng sẽ được thiết lập: Dòng điện bằng không, còn trên tụ điện hiệu điện thế có giá trị không đổi nào đó được ký hiệu bởi $U_K$. Ta có thể tìm hiệu điện thế này theo định luật bảo toàn năng lượng. Trong suốt thời gian từ lúc đóng khoá K đến lúc thiết lập trạng thái dừng, sự biến đổi năng lượng của tụ điện đã được dùng để làm dịch chuyển toàn bộ điện lượng chạy ngược với suất điện động của nguồn điện:

$$\frac{1}{2}CU_0^2 - \frac{1}{2}CU_K^2 = C\mathcal{E}(U_0 - U_K).$$

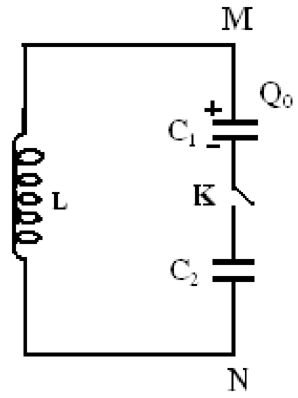
Biến đổi phương trình trên, thu được: $(U_0 - U_K)(U_0 - 2\mathcal{E} + U_K) = 0$.

Phương trình này có hai nghiệm. Nghiệm thứ nhất: $U_K = U_0$ ứng với trạng thái ban đầu ngay sau khi đóng khoá K. Nghiệm thứ hai bằng:

$$U_K = 2\mathcal{E} - U_0 = -2V,$$

trong đó dấu trừ cho biết tụ điện được nạp điện lại và hiệu điện thế được thiết lập sẽ ngược dấu với hiệu điện thế ban đầu.

**Bài 7.**




- Xét tại thời điểm t, giả sử dòng điện có chiều và các tụ tích điện như hình vẽ.

$$i = - q_1' = q_2' \qquad (1)$$

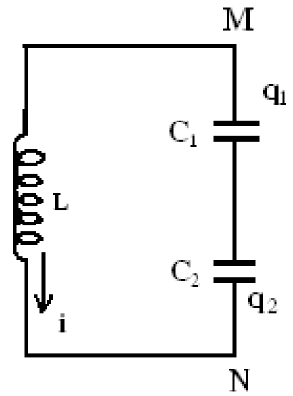
$$e = - L\frac{di}{dt} = - Li' \qquad (2)$$

$$+ q_1 + q_2 = Q_0 \qquad (3)$$

- Áp dụng định luật Ôm :

$$\frac{q_1}{C} - \frac{q_2}{C} - Li' = 0 \quad \Rightarrow \frac{2q_1}{C} + Lq_1'' - \frac{Q_0}{C} = 0$$

$$\Rightarrow q_1'' + \frac{q_1}{\frac{LC}{2}} - \frac{Q_0}{LC} = 0 \qquad (4)$$




Đặt $x = \frac{q_1}{\frac{LC}{2}} - \frac{Q_0}{LC} \quad \Rightarrow x'' = \frac{q_1''}{\frac{LC}{2}} \quad \Rightarrow q_1'' = \frac{LC}{2}x''$ thay vào (4) :

$$\frac{LC}{2}.x'' + x = 0$$

Hay $x'' + \frac{2}{LC}x = 0 \quad \Rightarrow x = X_0.\cos(\sqrt{\frac{2}{LC}}.t + \varphi)$

=> $q_1 = \frac{Q_0}{2} + \frac{LC}{2}X_0.\cos(\sqrt{\frac{2}{LC}}.t+\varphi)$ => $i = - q_1' = \sqrt{\frac{LC}{2}}X_0.\sin(\sqrt{\frac{2}{LC}}.t+\varphi)$

Áp dụng điều kiện ban đầu: t = 0 $\Rightarrow \begin{cases} q_1(0) = Q_0 \\ i = 0 \end{cases}$

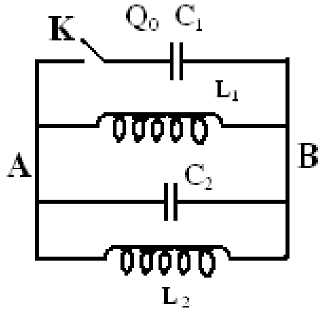
=> $Q_0 = \frac{Q_0}{2} + \frac{LC}{2}X_0.\cos\varphi$ ; $0 = \sqrt{\frac{LC}{2}}X_0.\sin\varphi$

$\Rightarrow$ $\varphi = 0$; $X_0 = \frac{Q_0}{LC}$

Vậy: $q_1 = \frac{Q_0}{2} + \frac{Q_0}{2}.\cos\sqrt{\frac{2}{LC}}.t \quad \Rightarrow i = \frac{Q_0}{\sqrt{2LC}}\sin(\sqrt{\frac{2}{LC}}.t)$

**Bài 8.** Xét tại thời điểm t, bộ tụ được vẽ lại và dòng điện qua các cuộn dây có chiều như hình vẽ.

$$\begin{cases} u_{AB} = -e_1 = +L_1 i_1^{/} & (1) \\ u_{AB} = -e_2 = +L_2 i_2^{/} & (2) \\ u_{AB} = \dfrac{q}{C_b} & (3) \\ i = -q^{/} & (4) \end{cases}$$




- Áp dụng định luật KiếcSốp cho các mạch vòng và nút:

$$\begin{cases} \dfrac{q}{C_b} = L_1.i_1^{'} = L_2.i_2^{'} (5) \\ i = i_1 + i_2 (6) \end{cases}$$

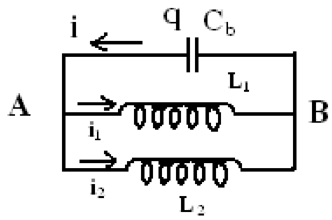
Từ (6) ta suy ra: $i^{/} = i_1^{/} + i_2^{/}$ $\Leftrightarrow$ $-q^{//} = +\dfrac{q}{L_1C_b} + \dfrac{q}{L_2C_b}$

$$\Rightarrow q^{//} + \frac{1}{C_b}\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right)q = 0$$

Hay $q^{//} + \dfrac{(L_1+L_2)}{(C_1+C_2)L_1L_2}q = 0$ $\Rightarrow$ $q = Q_0.\cos\left[\sqrt{\dfrac{(L_1+L_2)}{(C_1+C_2)L_1L_2}}.t + \varphi\right]$

Tại t = 0 $\Rightarrow$ $q(0) = C_1U_0$ ; i(0) = 0

$\Rightarrow C_1U_0 = Q_0\cos\varphi$ ; $0 = \sin\varphi$ $\Rightarrow$ $C_1U_0 = Q_0$ ; $\varphi = 0$




Vậy $q = C_1U_0.\cos\left[\sqrt{\dfrac{(L_1+L_2)}{(C_1+C_2)L_1L_2}}.t\right]$ (7)

$\Rightarrow i = C_1U_0\sqrt{\dfrac{(L_1+L_2)}{(C_1+C_2)L_1L_2}}.\sin\left(\sqrt{\dfrac{(L_1+L_2)}{(C_1+C_2)L_1L_2}}.t\right)$ (8)

Từ (5) $L_1i_1^{/} = L_2i_2^{/}$ $\Rightarrow L_1i_1 = L_2i_2$ và $i_2 = \dfrac{L_1}{L_2}.i_1$ (9)

Thay vào (6) ta được:

$$i_1 = \frac{L_2}{L_1+L_2}i = C_1U_0\sqrt{\frac{L_2}{(L_1+L_2)(C_1+C_2)L_1}}.\sin\left(\sqrt{\frac{L_1+L_2}{(C_1+C_2)L_1L_2}}.t\right)$$

$$i_2 = \frac{L_1}{L_1+L_2}i = C_1U_0\sqrt{\frac{L_1}{(L_1+L_2)(C_1+C_2)L_2}}.\sin\left(\sqrt{\frac{L_1+L_2}{(C_1+C_2)L_1L_2}}.t\right)$$

Thay số ta được: $i_1 = \dfrac{2}{3}.10^{-3}.\sin10^5t$ (A) $= \dfrac{2}{3}.\sin10^5t$ (mA)

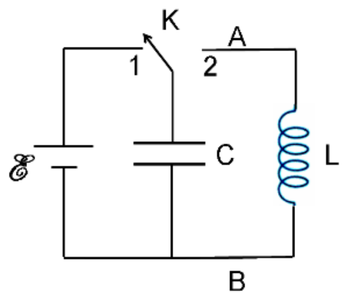
$i_2 = \dfrac{1}{3}.\sin10^5t$ (mA)

**Bài 9.** a) Khi K ở vị trí 1, nguồn điện tích điện cho tụ điện và trong mạch không có dòng điện. Khi đó hiệu điện thế giữa hai bản tụ điện là

$U_0 = E = 6$ V

Điện tích của tụ điện là

$Q_0 = C.U_0 = \frac{6}{\pi}(\mu C)$




Năng lượng của tụ điện là năng lượng điện trường trong tụ điện:

$W_0 = \frac{1}{2}Q_0U_0 = \frac{18}{\pi}(\mu J)$

b) Khi K chuyển sang 2, trong mạch hình thành một dao động điện từ xoay chiều.

Ở thời điểm ban đầu, i = 0, u = $U_0$, năng lượng của mạch chỉ gồm năng lượng điện trường trong tụ điện.

$$W_0 = \frac{1}{2}CU_0^2$$

Vì cuộn dây thuần cảm nên tại một thời điểm bất kì ta luôn có: tổng năng lượng của mạch được bảo toàn:

$$W_0 = \frac{1}{2}Cu^2 + \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}CU_0^2 = \text{hằng số.} \qquad (2.1)$$

Từ (2.1) ta thấy: i đạt cực đại khi u = 0

Từ đó ta có: $\frac{1}{2}Li_{max}^2 = \frac{1}{2}CU_0^2$

$$\Rightarrow i_{max} = I_0 = U_0\sqrt{\frac{C}{L}} \qquad (2.2)$$

Thay số ta được: $I_0$ = 6 A

c) Khi năng lượng điện trường trong tụ điện bằng 3 lần năng lượng từ trường trong cuộn dây, ta có:

$$\frac{1}{2}Cu^2 = 3.\frac{1}{2}Li^2 \qquad (2.3)$$

Thay (2.3) vào (2.1) ta được:

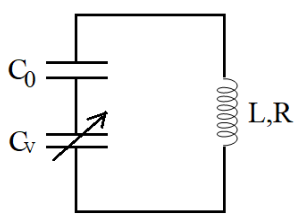
$$4.\frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}CU_0^2$$

$$\Rightarrow \quad i = \frac{1}{2}U_0\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{2}I_0 = 3 \text{ A}$$

Từ (2.3) $\Rightarrow$ $u = i\sqrt{\frac{3L}{C}} = 3\sqrt{3}$ V

Nhận xét: Trong bài toán này ban đầu năng lượng của hệ được dự trữ dưới dạng năng lượng điện trường của tụ điện, sau đó năng lượng này được chuyển hoá thành năng lượng từ trường trong cuộn dây và ngược lại.

**Bài 10.** a) Có $C_0$nt$C_v$ nên C = $\frac{C_0C_v}{C_0 + C_v} = 10\,pF$




$\Rightarrow$ Mạch trên có thể thu được sóng điện từ có bước sóng

$\lambda = 2\pi c\sqrt{LC} = 11{,}915m$

Khi đó phải có: $Z_L = Z_C = 2\lambda Lf = 2\lambda L\dfrac{c}{\lambda} = ..... = 632{,}48\Omega$

$\Rightarrow$ Dòng điện cực đại trong mạch: $I_{max} = \dfrac{e}{\sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2}} = \dfrac{e}{R}$

b) Để dòng điện trong mạch có giá trị $I=10^{-3}I_{max}$ phải chỉnh $C_v$. Giả sử khi đó điện dung tương đương của mạch có dung kháng là $Z_C$*.

Có $I = \dfrac{e}{\sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2}} = \dfrac{e}{10^3 R}$

$\Rightarrow R^2 + (Z_L - Z_c^\bullet)^2 = 10^6 R^2 \Rightarrow (Z_L - Z_c^\bullet)^2 \approx 10^6 R^2$. Vì $R^2 \approx 0$

$\Rightarrow \left|Z_L - Z_c^\bullet\right| \approx 10^3 R = 1$.        (1)

Thay $Z_L = Z_C$: $\Delta Z_C = Z_C - Z_C^* = \pm 1$

$\Rightarrow \Delta_C$ rất nhỏ $\Rightarrow$ coi là vi phân $dZ_C \Rightarrow \dfrac{dZ_C}{Z_C} = \pm 1{,}58.10^{-3}$

Vì $\Delta Z_C$ rất nhỏ $\Rightarrow$ coi là viphaan $dZ_C \Rightarrow \dfrac{dZ_C}{Z_C} = \pm 1{,}58.10^{-3}$

Mặt khác: $Z_{C.} = \dfrac{1}{C\omega} \Rightarrow \ln Z_C = \ln 1 - \ln C - \ln \omega$

Vi phân 2 vế: $\dfrac{dZ_C}{Z_C} = -\dfrac{dC}{C} = \pm 1{,}58.10^{-3}$

Mặt khác: $\dfrac{1}{C} = \dfrac{1}{C_0} + \dfrac{1}{C_v} \Rightarrow \dfrac{dZ_C}{C^2} = -\dfrac{dC_v}{Z_v^2}$

$\Rightarrow dC_v = \dfrac{dC}{C}\dfrac{C_v^2}{C} + \dfrac{1}{C_v} = \pm 1{,}58.10^{-3}\dfrac{20^2}{10} = \pm 0{,}0632\text{pF}$

Khi đó: $\lambda = 2\pi c\sqrt{LC} \Rightarrow \ln\lambda = \ln(2\pi c\sqrt{L}) + \ln C^{1/2}$

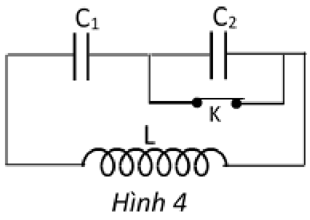
$\Rightarrow \dfrac{d\lambda}{\lambda} \pm \dfrac{1}{2}\dfrac{dC}{C} = \pm\dfrac{1}{2}.1{,}58.10^{-3} \Rightarrow d\lambda = \pm\dfrac{1}{2}.1{,}58.10^{-3}.\lambda = \pm\dfrac{1}{2}.1{,}58.10^{-3}.11{,}915$

$\Rightarrow d\lambda = \pm 9{,}413.10^{-3} m$

Bước sóng điện từ máy thu được $\lambda_x = \lambda + d\lambda = (11{,}915 \pm 9{,}413.10^{-3})$ (m)

**Bài 11.** a. Xác định chu kỳ T và cường độ $I_0$ của mạch:
* Do khóa K đóng nên tụ $C_2$ bị nối tắt, mạch dao động gồm L nối kín với $C_1$. Chu kỳ dao động của mạch được tính theo công thức: $T = 2\pi\sqrt{L.C_1}$. Thay số ta được

T= $8\pi.10^{-5}$s hay T ≈ 0,25ms



Hình 4

* Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng điện từ của mạch :

$$\frac{q_0^2}{2C_1} = \frac{L.I_0^2}{2} \Rightarrow I_0 = q_0\omega = \frac{2\pi.q_0}{T} = 0,3\,A$$

b. Xác định cường độ i khi khóa K mở và $u_1$=0.

* Khi điện áp giữa hai tấm của tụ $C_1$ đạt giá trị cực đại $U_0$ thì cường độ dòng điện trong mạch bằng 0 , vậy lúc đó sự mở khóa K không gây ra hiệu ứng gì. Vào lúc vừa mở K, điện tích tụ $C_1$ là $q_1 = q_0$, điện tích tụ $C_2$ là $q_2 = 0$ . Cụ thể lúc đó điện tích tấm bên phải của $C_1$ là $q_0$ và điện tích tấm bên trái của $C_2$ là $q_2 = 0$ .

* Vì tổng điện tích của hai tấm này không đổi nên đến thời điểm điện tích tụ $C_1$ bằng 0 thì điện tích trên tấm trái của $C_2$ là $q_0$ đồng thời lúc đó trong mạch có dòng điện cường độ i. Năng lượng mạch lúc đầu bằng năng lượng tụ $C_1$: $W_0 = \frac{q_0^2}{2C_1}$ ; lúc sau năng lượng mạch gồm năng lượng điện trường trên tụ $C_2$ và năng lượng từ trường trên cuộn cảm, theo ĐLBT năng lượng của mạch $W = \frac{1}{2}\frac{q_1^2}{C_2} + \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}\frac{q_0^2}{C_2} + \frac{1}{2}Li^2$

* Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng đối với mạch điện:

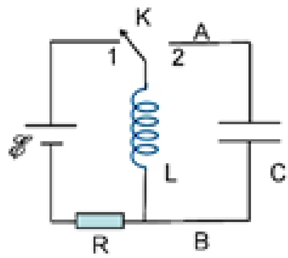
$$\frac{q_0^2}{2C_1} = \frac{1}{2}\frac{q_0^2}{C_2} + \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}\frac{C_1^2U_0^2}{C_2} + \frac{1}{2}Li^2 \Rightarrow i = q_0\sqrt{\frac{C_2 - C_1}{C_1C_2L}}$$

Thay số ta được $i = \frac{0,3}{\sqrt{2}}(A) = 0,15\sqrt{2}(A)$

**Bài 12.**

a) Khi khoá K ở vị trí 1: dòng điện qua cuộn dây là dòng điện không đổi, cuộn cảm không cản trở dòng điện. Do đó dòng điện qua cuộn dây là:

$$I_0 = \frac{E}{r+R} \qquad (3.1)$$




b) Khi K chuyển sang vị trí 2, cuộn dây và tụ điện tạo thành một mạch dao động: trong mạch hình thành một dao động điện từ xoay chiều. Vì cuộn dây thuần cảm nên tổng năng lượng của mạch bảo toàn:

$$W = \frac{1}{2}LI_0^2 = \frac{1}{2}CU_0^2 \qquad (3.2)$$

$U_0$ là hiệu điện thế cực đại giữa hai đầu tụ điện.

$$\text{-->}\ U_0 = I_0\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{E}{r+R}\sqrt{\frac{L}{C}} \qquad (3.3)$$

c) Ta luôn có: $W = \frac{1}{2}LI_0^2 = \frac{1}{2}CU_0^2 = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}Cu^2$ (3.4)

Thay $i = \frac{1}{2}I_0$ vào biểu thức trên ta được:

$$W = \frac{1}{2}LI_0^2 = \frac{1}{2}CU_0^2 = \frac{1}{2}L\frac{I_0^2}{4} + \frac{1}{2}Cu^2$$

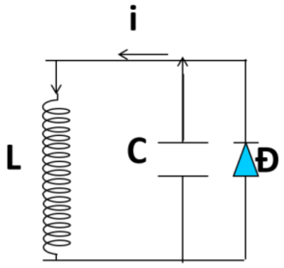
$$\text{-->}\ \frac{1}{2}Cu^2 = \frac{3}{4}.\frac{1}{2}LI_0^2 = \frac{3}{4}.\frac{1}{2}CU_0^2$$

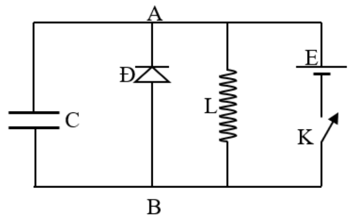
--> $u=\frac{\sqrt{3}}{2}U_0=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{E}{R+r}\sqrt{\frac{L}{C}}$

**Bài 13.** a.K đóng. E = Li’ = L $\frac{di}{dt}$ $\rightarrow di=\frac{E}{L}dt\rightarrow\int_0^{I_0}di=\frac{E}{L}\int_0^{\tau}dt\rightarrow I_0=\frac{E}{L}\tau(*)$

*** K mở** - điện tích trên tụ $q_0$ = CE

- Ở thời điểm t giả sử dòng qua L và điển tích trên tụ như (hV)




i = -q’ (1); u = Li’ = $-\frac{q}{C}$(2).

Từ (1)&(2) đạo hàm 2 vế ta có:

q’’ = $\frac{1}{LC}q=0$; Đặt $\omega^2=\frac{1}{LC}$ phương trình có nghiệm:

$q=A\cos(\omega t+\varphi)$ và $i=-q'=A\omega\sin(\omega t+\varphi)$

*Chọn t = 0 lúc K mở: $\begin{cases}q=q_0=A\cos\varphi & (3)\\ \mathrm{i}=\mathrm{I}_0=A\omega\sin\varphi(4)\end{cases}$

* ĐLBTNL có : $\frac{1}{2}LI_0^2+\frac{1}{2}CE^2=\frac{1}{2}L(2I_0)^2$. Luc $i_L$ max thì q = 0. $\Rightarrow I_0=E\sqrt{\frac{C}{3L}}$ (5)

Thế q = CE và $I_0$ vào (3); (4) $\begin{cases}CE=A\cos\varphi\\ \mathrm{E}\sqrt{\frac{\mathrm{C}}{3\mathrm{L}}}=A\frac{1}{LC}\sin\varphi\end{cases}$

$\Rightarrow\left\{\tan\varphi=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow\varphi=\frac{\pi}{6};A=\frac{2CE}{\sqrt{3}}\right.$

Vậy: $\begin{cases}q=\frac{2CE}{\sqrt{3}}\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{6}\right)\\ i=2E\sqrt{\frac{C}{3L}}\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{6}\right)\end{cases}$.i max bằng $2I_0$ khi sin$\left(\omega t+\frac{\pi}{6}\right)=1$ $\rightarrow\left(\omega t+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

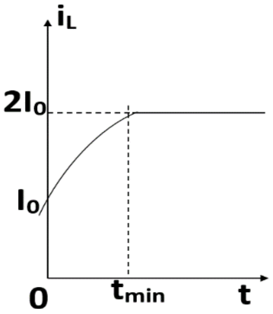
$\rightarrow t=t_1$ khi k = 0 $\Rightarrow t_{\min}=\frac{\pi}{3\omega}=\frac{\pi}{3}\sqrt{LC}$ . Từ trên có $I_0$ = E$\sqrt{\frac{C}{3L}}=\frac{E}{L}\tau\rightarrow\tau=\sqrt{\frac{LC}{3}}$

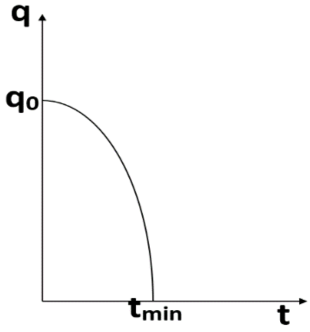
$t_{\min}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\tau=\frac{\pi\tau\sqrt{3}}{3}$.

b) Khi t >> $t_{min}$ thì $i_{max}$ = $2I_0$;

q = 0, lúc này điốt mở toàn bộ dòng qua điốt.

Dạng đồ thị



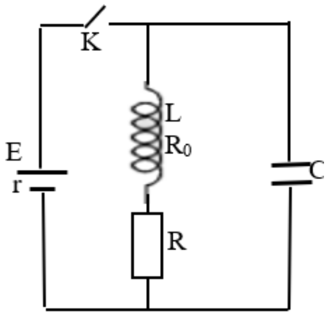




**Bài 14.** a. Khi trạng thái trong mạch đã ổn định :

- Cường độ dòng điện trong mạch $I = \dfrac{E}{r + R_0 + R} = 2(A)$

- Hiệu điện thế hai đầu tụ là: U=I(R+$R_0$)=30(V)

Năng lượng điện từ của mạch là $W = \frac{1}{2}LI^2 + \frac{1}{2}CU^2 = 0{,}245(J)$



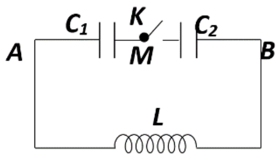

b.- Khi dao động trong mạch tắt hẳn thì toàn bộ năng lượng điện từ của mạch đã chuyển hết thành nhiệt tỏa ra trên hai điện trở

$Q_R + Q_{R_0} = 0{,}245$ (1)

- Nhiệt lượng tỏa ra trên các điện trở thuần trong cùng một thời gian tỉ lệ thuận với điện trở của chúng $\dfrac{Q_R}{Q_{R_0}} = \dfrac{R}{R_0} = \dfrac{10}{5} = 2$ (2) Suy ra

$Q_R \approx 0{,}163(J)$

**Bài 15.a**.Tính tần số biến thiên của năng lượng từ trường.



Hình 2

+ Tần số dao động riêng của mạch:

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L\dfrac{C_1C_2}{C_1+C_2}}} \approx 159155(Hz) \ldots\ldots.$$

**+ Tần số biến thiên của năng lượng từ trường là:** $f_1 = 2f \approx 318310(Hz)$

b.Tính điện áp cực đại hai đầu mỗi tụ điện (1điểm)

+ Điện áp cực đại hai đầu bộ tụ điện: $\dfrac{C_bU_0^2}{2} = \dfrac{LI_0^2}{2} \to U_0 = \sqrt{\dfrac{L}{C_b}}.I_0 = 15(V)$

+ Điện áp $u_{AM}$ và $u_{MB}$ cùng pha nhau, nên điện áp cực đại giữa hai bản của mỗi tụ điện là:

$$\begin{cases} U_{01} + U_{02} = 15V \\ \dfrac{U_{01}}{U_{02}} = \dfrac{C_2}{C_1} = 2 \end{cases} \to \begin{cases} U_{01} = 10(V) \\ U_{02} = 5(V) \end{cases}$$

c.Tính cường độ dòng điện (1điểm)

+ Lúc điện áp hai đầu tụ $C_1$ là $u_1$= 6V, thì điện áp giữa hai đầu tụ $C_2$ là $u_2$:

$$\frac{u_1}{u_2}=\frac{C_2}{C_1}=2\rightarrow u_2=\frac{u_1}{2}=3V$$

+ Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng:

$$W=\frac{C_1u_1^2}{2}+\frac{C_2u_2^2}{2}+\frac{Li^2}{2}=\frac{LI_0^2}{2}\rightarrow |i|=\sqrt{I_0^2-\frac{C_1u_1^2+C_2u_2^2}{L}}=0,024(A)$$

Tính cường độ dòng điện cực đại và viết biểu thức điện tích (1điểm)

+ Theo định luật bảo toàn điện tích: $q_1+q_2=C_1U_{01}=3.10^{-9}.10=3.10^{-8}(C)=q_0$ (1)

+ Theo định luật bảo toàn năng lượng: $\frac{q_1^2}{2C_1}+\frac{q_2^2}{2C_2}+\frac{Li^2}{2}=\frac{q_0^2}{2C_1}$ (2)

+ Rút $q_2$ từ (1) thay vào (2) ta được pt:

$\frac{q_1^2}{2C_1}+\frac{(q_0-q_1)^2}{2C_2}+\frac{Li^2}{2}=\frac{q_0^2}{2C_1}\rightarrow C_2q_1^2+C_1(q_0-q_1)^2+LC_1C_2.i^2-C_2.q_0^2=0$, thay số:

$3q_1^2-2q_0.q_1-q_0^2+3.10^{-12}.i^2=0$ (3)+ Điều kiện tồn tại nghiệm của pt (3):

$\Delta'=q_0^2-3.(3.10^{-12}.i^2-q_0^2)=4q_0^2-9.10^{-12}.i^2\geq 0\Rightarrow i\leq\frac{2q_0}{3.10^{-6}}=0,02(A)$, suy ra cường độdòng điện cực đại trong mạch là $I_0$=0,02A

Bài 16. Sau thời gian t kể từ thời điểm t=0 thì năng lượng từ trường của mạch bằng:

$$W_t=\frac{1}{2}Li^2=\frac{1}{2}LI_0^2\cos^2\omega t.$$

Tổng năng lượng dao động của mạch:

$$W=W_{t\max}=\frac{1}{2}LI_0^2.$$

Nên vào thời điểm t, năng lượng điện trường của mạch là:

$$W_đ=W-W_t=\frac{1}{2}LI_0^2\sin^2\omega t.$$

Vì vậy, tỷ số giữa năng lượng từ trường và năng lượng điện trường bằng:

$$\frac{W_t}{W_đ}=\frac{\cos^2\omega t}{\sin^2\omega t}=\cot g^2\omega t.$$

Vào thời điểm $t=\frac{T}{8}$ thì: $\frac{W_t}{W_đ}=\cot g^2\left(\frac{2\pi}{T}.\frac{T}{8}\right)=\cot g^2\frac{\pi}{4}=1.$

Như vậy sau 1/8 chu kỳ thì năng lượng từ trường bằng năng lượng điện trường.

b.Khi năng lượng từ trường lớn gấp 3 năng lượng điện trường thì:

$$\frac{W_t}{W_đ}=\cot g^2\left(\frac{2\pi}{T}.t\right)=3.$$

Từ đó suy ra:

$$\cot g\left(\frac{2\pi}{T}t\right)=\sqrt{3}\quad\Rightarrow\quad\frac{2\pi}{T}t=\frac{\pi}{6}\quad\Rightarrow\quad t=\frac{T}{12}.$$

**Bài 17**. Trong mạch dao động ta có

$$q=Q_o\cos(\omega t+\varphi)$$
$$i=q'=-Q_o\omega\sin(\omega t+\varphi)$$
$$i'=-Q_o\omega^2\cos(\omega t+\varphi)=-\omega^2q$$

Vì trong mạch dao động i vuông pha với q nên ta có:

$$\frac{i^2}{I_o^2}+\frac{q^2}{Q_o^2}=1\leftrightarrow\frac{i^2}{Q_o^2\omega^2}+\frac{q^2}{Q_o^2}=1\leftrightarrow i^2+q^2\omega^2=Q_o^2\omega^2=I_o^2$$

Ta có đạo hàm của: $(\frac{q}{i})'=\frac{q'i-i'q}{i^2}=\frac{i^2+\omega^2q^2}{i^2}=\frac{I_o^2}{i^2}$

Mà $\frac{i^2}{I_o^2}+\frac{q^2}{Q_o^2}=1\rightarrow\frac{I_o^2}{i^2}=\frac{Q_o^2}{Q_o^2-q^2}$

Vậy đạo hàm của: $(\frac{q}{i})'=\frac{Q_o^2}{Q_o^2-q^2}$

Từ phương trình bài toán cho : $\frac{q_1}{i_1}+\frac{q_2}{i_2}=\frac{q_3}{i_3}$. Ta đạo hàm 2 vế của phương trình, ta có:

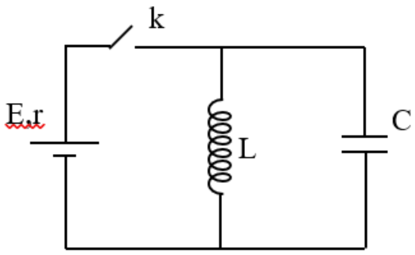
$$(\frac{q_1}{i_1})'+(\frac{q_2}{i_2})'=(\frac{q_3}{i_3})'\leftrightarrow\frac{Q_o^2}{Q_o^2-q_1^2}+\frac{Q_o^2}{Q_o^2-q_2^2}=\frac{Q_o^2}{Q_o^2-q_3^2}$$

Thay các giá trị $Q_o$; $q_1$; $q_2$; vào phương trình trên, ta tìm được $q_3 = 4.10^{-6}$ (C)

**Bài 18.**

+ Dòng điện qua cuộn cảm khi K đóng: $I_0=E/r$

+ Năng lượng từ trường ở cuộn cảm khi K đóng:




$$W_{t_{Max}}=\frac{1}{2}LI_0^2=\frac{1}{2}L\left(\frac{E}{r}\right)^2$$

+ Khi K ngắt năng lượng điện từ trường của mạch là:

$$W=\frac{1}{2}CU_0^2=\frac{1}{2}Cn^2E^2=W_{t_{Max}}\Rightarrow L=Cr^2n^2$$

+ Ta có: $T=2\pi\sqrt{LC}\Rightarrow LC=\frac{T^2}{4\pi^2}\Rightarrow L=\frac{nrT}{2\pi};C=\frac{T}{2\pi nr}$

**+ Thay số** $L=\frac{nrT}{2\pi}\approx 0,398mH$ **;** $C=\frac{T}{2.\pi.r.n}\approx 63,7(\mu F)$

**Bài 19.** a. Tính L và $C_0$

• Bước sóng của sóng điện từ mà mạch chọn sóng thu được: $\lambda = 2\pi c\sqrt{LC}$

$\Rightarrow \quad \lambda_1 = 2\pi c\sqrt{L(C_0 + C_1)} = 10m \quad ; \quad \lambda_2 = 2\pi c\sqrt{L(C_0 + C_2)} = 30m$

• $\Rightarrow \dfrac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} = \dfrac{C_0 + 10}{C_0 + 250} = \dfrac{1}{9} \qquad \Rightarrow \quad C_0 = 20pF$

• $\Rightarrow L = \dfrac{\lambda_1^2}{4\pi^2 c^2 (C_0 + C)} = 9{,}4.10^{-7}(H)$

b. Góc xoay của bản tụ.

• Vì điện dung của tụ là hàm bậc nhất của góc xoay $\Rightarrow C_x = a\alpha + b$

Khi $\alpha = 0^0$: $C_1 = 0 + b \quad \Rightarrow b = C_1 = 10pF$

Khi $\alpha = 120^0$: $C_2 = 10 + a.120 \Rightarrow a = 2$ pF/độ

Vậy: $C_x = 2a + 10$ (pF) (1)

• Để thu được sóng có bước sóng $\lambda_3$ thì: $\lambda_3 = 2\pi c\sqrt{L(C_0 + C_x)}$

$\Rightarrow \dfrac{\lambda_1^2}{\lambda_3^2} = \dfrac{C_0 + C_1}{C_0 + C_x} = \dfrac{1}{4} \quad \Rightarrow C_x = 100$ pF

• Thay vào (1): $2\alpha + 10 = 100 \Rightarrow \alpha = 45^0$

*Bài 20.*

*a) Mạch dao động trên có thể bắt được sóng điện từ có bước sóng tính theo công thức:*

$\lambda = c.2\pi\sqrt{LC_0} = 3.10^8.2\pi\sqrt{\dfrac{1}{\pi^2}.10^{-6}.100.10^{-12}} = 6\,(m)$ ,

*b) Gọi* $C_b$ *là điện dung của bộ tụ* $C_0$ *ghép với* $C_x$ .

*Bước sóng mà mạch thu được tính theo công thức:* $\lambda = c.2\pi\sqrt{LC_b} = 6\pi.10^8.\sqrt{LC_b}$ .

*Theo yêu cầu của bài toán:* $12\,(m) \le \lambda \le 18\,(m)$ *, bước sóng mà mạch thu được tăng nên điện dung của bộ tụ tăng. Do đó, tụ* $C_0$ *ghép song song với tụ* $C_x \Rightarrow C_b = C_0 + C_x \Rightarrow C_x = C_b - C_0$

*+ Từ công thức* $\lambda = 2\pi c\sqrt{LC_b} \Rightarrow C_b = \dfrac{\lambda^2}{4\pi^2 c^2 L}$

• *Với* $\lambda = \lambda_1 = 12\,(m)$ $\Rightarrow C_{b1} = \dfrac{12^2}{4\pi^2 9.10^{16}.\dfrac{1}{\pi^2}.10^{-6}} = 400\,(pF)$ $\Rightarrow C_{x1} = C_{b1} - C_0 = 300\,(pF)$

$$\Rightarrow C_{b2} = \frac{18^2}{4\pi^2 9.10^{16}.\frac{1}{\pi^2}.10^{-6}} = 900\left(pF\right)$$

• Với $\lambda = \lambda_2 = 18\left(m\right)$ $\Rightarrow C_{x2} = C_{b2} - C_0 = 800\left(pF\right)$

+ Vậy: $300\left(pF\right) \le C_x \le 800\left(pF\right)$

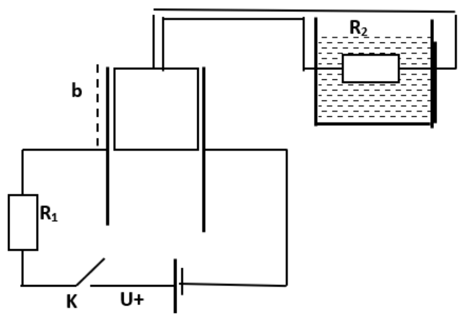
**Bài 21.**

**1.** Tìm biểu thức dòng điện đi qua R1 sau khi đóng khoá K

Từ phương trình U= iR1+ $\frac{q}{C}$ mà i= $\frac{dq}{dt}$ thay vào ta có i = $\frac{U}{R_1}e^{-\frac{1}{R_1C}t}$ (1)

Điện dung của tụ C = $\frac{\varepsilon_0 \pi b^2}{a}$

Áp dụng công thức Măcxoen- Parađay. Tính lưu thông cảm ứng từ theo đường tròn bán kính r tính từ tâm của tụ điện ta có cảm ứng từ tại điểm bất kỳ trong tụ cách tâm một khoảng r:




B(r).2π r= µ0. jdịch.πr2

mà mật độ dòng điện dịch jdịch.= $\frac{I_{dich}}{\pi.b^2}$ mà trong tụ điện thì Idẫn = Idịch do đó

Cảm ứng từ do điện trường biến thiên gây ra tại điểm cách tâm tụ r là

B(r) = $\frac{\mu_0}{2\pi b^2}r.\frac{U}{R_1}e^{-\frac{1}{R_1C}t}$ (2)

Từ thông xuyên qua vòng dây siêu dẫn có diện tích S = ba là:

$\Phi = \int_0^b B(r)a.dr = \frac{\mu_0}{4\pi R_1}Uae^{-\frac{1}{R_1C}t}$ (3)

Suất điện động cảm ứng xuất hiện trong vòng dây siêu dẫn:

ξ = - $\frac{d\Phi}{dt}$ ta có ξ= $\frac{\mu_0}{4\pi R^2{}_1C}Uae^{-\frac{1}{R_1C}t}$ (4)

Công suất toả nhiệt trên điện trở R2 sẽ là : P2= $\frac{\xi^2}{R_2}$

Nhiệt toả ra trên điện trở R2 là : Q2= $\int_0^\infty P_2dt = \frac{\mu^2{}_0}{32\pi^2 R^3{}_1R_2C}U^2a^2$ (5)

Toàn bộ nhiệt toả ra trên điện trở R2 chuyển thành nhiệt làm bay hơi nước khối lượng nước bay hơi là : Q2=λ m hay $\frac{\mu^2{}_0}{32\pi^2 R^3{}_1 R_2 C} U^2 a^2$ = λ m (6)

từ đó ta rút ra khối lượng nước hoá hơi

m = $\frac{\mu^2{}_0}{32\pi^2 R^3{}_1 R_2 C\lambda} U^2 a^2$ thay điện dung tụ C = $\frac{\varepsilon_0 S}{a} = \frac{\varepsilon_0 \pi b^2}{a}$ ta có

m = $\frac{\mu^2{}_0}{32\pi^3 R^3{}_1 R_2 \varepsilon_0 b^2 \lambda} U^2 a^3$ (7)

2. Chọn chiều dương của các dòng điện như hình vẽ, ta có:

$$i_2 = \frac{dq_2}{dt} = q_2'$$

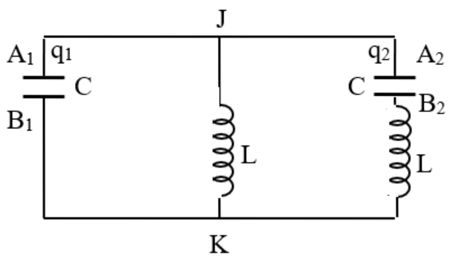
$$i_1 = \frac{dq_1}{dt} = q_1'.$$

ở nút J ta có: i3 = i1+ i2.

1) Xét mạch kín JA1B1KJ và JA2B2KJ

$$-\frac{q_1}{C} - L(i_1' + i_2') = 0$$

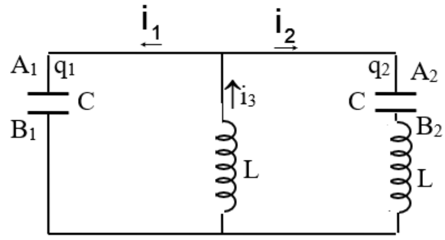
$$-Li_2' - \frac{q_2}{C} - L(i_1' + i_2') = 0,$$




hay

$$q_1'' + q_2'' + \frac{q_1}{LC} = 0 \quad (1)$$

$$q_1'' + 2q_2'' + \frac{q_2}{LC} = 0 \quad (2)$$




Hệ phương trình này mô tả sự biến thiên của $q_1$ và $q_2$ theo thời gian.

2) Đặt

$$q_1 = A\cos(\omega t + \varphi); q_2 = B\cos(\omega t + \varphi),$$

trong đó A và B là các hằng số. Khi đó (1) và (2) cho:

$$LC\omega^2 A + (2LC\omega^2 - 1)B = 0 \quad (3)$$

$$(LC\omega^2 - 1)A + LC\omega^2 B = 0 \quad (4)$$

Để hệ cho nghiệm không tầm thường là:

$$L^2C^2\ L^2C^2\omega^4 - 3LC\omega^2 + 1 = 0 \quad (5)$$

Giải (5) ta có $\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{LC} \pm \frac{\sqrt{5}}{LC}\right)$

tức là có hai giá trị khả dĩ của tầng số góc:

$\omega_1 = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2LC}}$ (6) và $\omega_1 = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2LC}}$ (7)

Với ω1 thì

$\frac{A}{B} = \frac{LC\omega_1^2}{1-LC\omega_1^2} = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, tỷ số hai biên độ là $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ và q1, q2 dao động ngược pha nhau.

Với ω2 thì

$\frac{A}{B} = \frac{LC\omega_2^2}{1-LC\omega_2^2} = -\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, tỷ số hai biên độ là $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ và q1, q2 dao động cùng pha.

3) Hệ (1) và (2) là tuyến tính, nên có thể viết (chọn gốc thời gian để φ = 0 là phù hợp với điều kiện ban đầu)

$q_2 = B_1\cos\omega_1 t + B_2\cos\omega_2 t$ (8)

$q_1 = A_1\cos\omega_1 t + A_2\cos\omega_2 t$ (9)

với $\frac{A_1}{B_1} = -\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ và $\frac{A_2}{B_2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

Điều kiện ban đầu q1(0) = Q0; q1'(0) = 0

q2(0) = 0; q2'(0) = 0

cho

A1 + A2 = Q0 và B1 + B2 = 0

Từ đó có

$B_1 = -B_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}Q_0; A_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}}\right)Q_0; A_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}}\right)$.

Nên:

$q_1 = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)Q_0\cos\omega_1 t + \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)Q_0\cos\omega_2 t$

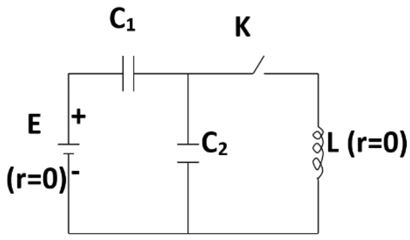
$$q_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}Q_0\cos\omega_1 t + \frac{1}{\sqrt{5}}Q_0\cos\omega_2 t$$

**Bài 22.** 1. Ta tìm imax:

Khi K mở: $q_{o1} = q_{o2} = \frac{C_1C_2}{C_1+C_2}.E$

Năng lượng: $W_1 = \frac{1}{2}\frac{q_{o1}^2}{C_1} + \frac{1}{2}\frac{q_{o2}^2}{C_2} = \frac{1}{2}\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}.E^2$ (1)

Khi K đóng: cường độ dòng điện qua cuộn dây tăng và đạt giá trị imax khi:



Hình 3

$$\frac{di_L}{dt} = 0 \Rightarrow U_L = L\frac{di_L}{dt} = 0 \Rightarrow U_{C_2} = 0; U_{C_1} = E$$

Năng lượng điện từ của mạch là: $W_2 = \frac{1}{2}C_1E^2 + \frac{1}{2}Li_{max}^2$ (2)

Điện lượng của tụ điện C1 trong thời gian t kể từ lúc đóng khóa K là:

$$\Delta q = C_1E - q_{o1} = C_1E - \frac{C_1C_2}{C_1+C_2}.E = \frac{C_1^2}{C_1+C_2}E > 0$$

Công của lực điện là: A = E Δq = $\frac{C_1^2}{C_1+C_2}.E^2$

Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng, ta có:

A = ΔW = W2 – W1 (coi nhiệt lượng tỏa ra Q = 0)

$$\Rightarrow \frac{C_1^2}{C_1+C_2}.E^2 = (\frac{1}{2}C_1E^2 + \frac{1}{2}Li_{max}^2) - \frac{1}{2}\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}.E^2 \Rightarrow i_{max} = \frac{C_1}{\sqrt{L(C_1+C_2)}}E$$

Tìm U1max :

Khi U1max thì $q_{1max} \Rightarrow i_1 = \frac{dq_1}{dt} = 0$ (3)

Mặt khác: U1 = E + U2

Khi U1max → U2max thì $q_{2max} \Rightarrow \frac{dq_2}{dt} = 0 \Rightarrow i_2 = 0$ (4)

Từ (3) và (4) → iL = 0.

Khi đó năng lượng điện từ trong mạch là: $W_2^{'} = \frac{1}{2}C_1U_{1\max}^2 + \frac{1}{2}C_2(U_{1\max} - E)^2$

Điện lượng Δq qua mạch là: $\Delta q' = C_1U_{1\max} - \frac{C_1C_1}{C_1 + C_2}E$

→ A'= E Δq' = C1EU1max $\Rightarrow A' = E\Delta q' = C_1EU_{1\max} - \frac{C_1C_2}{C_1+C_2}E^2$

Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng, ta có:

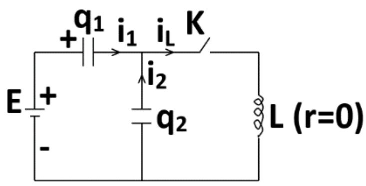
$$A' = W_2' - W_1' = C_1\ E\ U_{1\max} - \frac{C_1C_2}{C_1+C_2}E^2 = \frac{1}{2}C_1U^2_{1\max} + C_2(U^2_{1\max} + E^2 - 2U_{1\max}E) - \frac{1}{2}\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}E^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(C_1 + C_2)U^2_{1\max} - (C_1 + C_2)EU_{1\max} + \frac{1}{2}\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}E^2 = 0$$

Giải ra ta được: $U_{1\max} = \frac{2C_1 + C_2}{C_1 + C_2}E$

2. Ta khảo sát sự biến thiên điện tích q1 và q2:

Giả sử các dòng điện có chiều như hình 3':



Hình

i1 + i2 = iL với $\begin{cases} i_1 = \frac{dq_1}{dt} = q'_1 \\ i_2 = \frac{dq_2}{dt} = q'_2 \end{cases} \Rightarrow i'_L = q'_1 - q'_2$ (5)

$\frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2} = E = const$ (6)

$\Rightarrow \frac{q'_1}{C_1} + \frac{q'_2}{C_2} = 0 \Rightarrow q'_1 = -\frac{C_1}{C_2}q'_2 = -\frac{C_1}{C_2}q''_2$ (7)

$U_L = U_2 \Rightarrow Li_L^{'} = \frac{q_2}{C_2} \Rightarrow L(q_1^{''} - q_2^{''}) = \frac{q_2}{C_2}$

Từ đó (chú ý đến (7)), ta có:

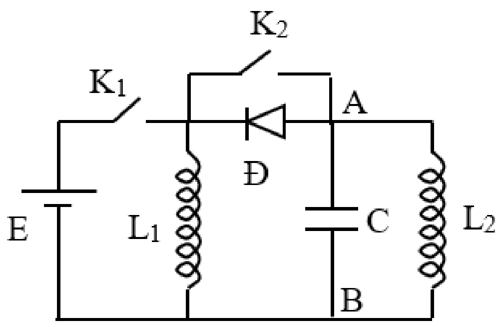
$$-q_2''L\left(\frac{C_1+C_2}{C_2}\right)=\frac{q_2}{C_2} \qquad q_2''+\left(\frac{1}{L(C_1+C_2)}\right)q_2=0$$

→ q2 = q02cosωt với $\omega'=\dfrac{1}{\sqrt{L(C_1+C_2)}}$ $\qquad q_2=\dfrac{C_1C_2}{C_1+C_2}E\cos\omega t$

q1 = C1 E - $\dfrac{C_1}{C_2}q_2$ = C1 E - $\dfrac{C_1}{C_2}\left(\dfrac{C_1C_2}{C_1+C_2}\right.$ E cosωt). $=C_1E-\dfrac{C_1^2E}{C_1+C_2}\cos\omega t$

**Bài 23.**

Kí hiệu và quy ước chiều dương của các dòng như hình vẽ và gọi q là điện tích bản tụ nối với B. Lập hệ:




Hình 4

$i_C = i_1 + i_2$ (1)

$L i_1' - 2L i_2' = 0$ (2)

$L i_1' = q/C$ (3)

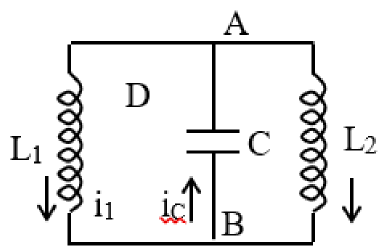
$i = -q'$ (4)

Đạo hàm hai vế của (1) và (3):

$i''_C = i''_1 + i''_2$ (1')

$Li''_1 - 2Li''_2 = 0$ (2')

$Li''_1 = -i_C/C$ (3') $\Rightarrow$ ; $i''_C = -\dfrac{3}{2LC}i_C$.




Phương trình chứng tỏ $i_C$ dao động điều hoà với $\omega=\sqrt{\dfrac{3}{2LC}}$ :

$i_C = I_0\sin(\omega t+\varphi)$ (5) Từ (2) $\Rightarrow$ $(Li_1 - 2Li_2)'=hs$

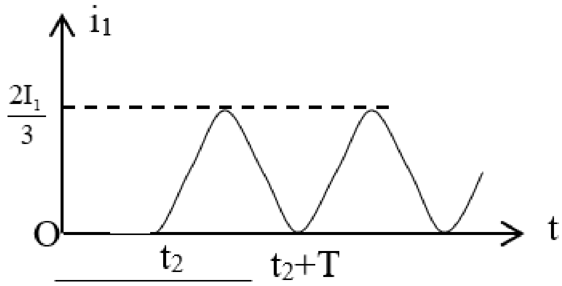
$i_1 - 2i_2 = hs$. Tại t = 0 thì $i_1 = I_1$, $i_2 = 0$ $\Rightarrow$ $i_1 - 2i_2 = I_1$(6)

$i_1 + i_2 = i_C = I_{0C}\sin(\omega t+\varphi)$. Giải hệ: $i_1 = \dfrac{I_1}{3} + \dfrac{2I_{0C}}{3}\sin(\omega t+\varphi)$.

$i_2 = \dfrac{I_{0C}}{3}\sin(\omega t+\varphi) - \dfrac{I_1}{3}$ ; $u_{AB} = q/C = L i_1' = \dfrac{2I_{0C}}{3}LC\omega\cos(\omega t+\varphi)$.

Tại thời điểm t = 0 $i_1 = I_1$; $i_2 = 0$ ; $u_{AB} = 0$ : Giải hệ: $I_{0C} = I_1$; $\varphi = \pi/2$;

Đáp số: $i_1 = \frac{I_1}{3} + \frac{2I_1}{3}\cos\sqrt{\frac{3}{2LC}}t$ .




$i_2 = \frac{I_1}{3}\cos\sqrt{\frac{3}{2LC}}t - \frac{I_1}{3}$

**2.** ở thời điểm $t_1$ mở $K_2$: $i_1 = 0$ , từ (6) $\Rightarrow i_2 = -0,5I_1$ . Vì $V_A < V_B$ nên không có dòng

qua Đ, chỉ có dao động trong mạch $L_2C$ với $T' = 2\pi\sqrt{2LC}$ và năng lượng $L\frac{I_1^2}{2}$ . Biên độ dao

động là $I_0$: $2L\frac{I_0^2}{2} = L\frac{I_1^2}{2} \Rightarrow I_0 = \frac{I_1}{\sqrt{2}}$ . Chọn mốc tính thời gian từ $t_1$:

Khi $t = t_1 = 0$ $i_1 = 0$ , từ (6) $\Rightarrow$ $i_2 = -0,5I_1$ ; $i = \frac{I_1}{\sqrt{2}}\sin(\frac{t}{\sqrt{2LC}} + \varphi)$

$u_{AB} = -2Li' = -2L\frac{I_1}{2\sqrt{LC}}\cos(\frac{t}{\sqrt{2LC}} + \varphi) < 0$. Giải hệ: $\varphi = -\pi/4$

$i = \frac{I_1}{\sqrt{2}}\sin(\frac{t}{\sqrt{2LC}} - \pi/4)$

Đến thời điểm $t_2$ tiếp theo thì $u_{AB}$ bằng 0 và đổi sang dấu dương.

$u_{AB} = -2L\frac{I_1}{2\sqrt{LC}}\cos(\frac{t_2}{\sqrt{2LC}} - -\pi/4) = 0 \Rightarrow t_2 = \frac{\pi\sqrt{2LC}}{4}$.

Từ thời điểm này có dòng qua cả hai cuộn dây, trong mạch có dao động điện từ với T= $2\pi\sqrt{2LC/3}$. Ta sẽ chứng minh được từ thời điểm $t_2$ luôn có dòng qua điôt. Tương tự như trên, trong hệ có dao động điện từ với $\omega = \sqrt{\frac{3}{2LC}}$ ; $i_1 - 2i_2 = I_1$

$i_1 + i_2 = i_C = I'_{0C}\sin\{\omega(t-t_2) + \varphi\}$.

$i_1 = \frac{1}{3}I_1 + \frac{2}{3}I'_{0C}\sin\{\omega(t-t_2) + \varphi\}$

$i_2 = \frac{1}{3}I'_{0C}\sin\{\omega(t-t_2) + \varphi\} - \frac{1}{3}I_1$; $u_{AB} = q/C = Li_1' = \frac{2}{3}I'_{0C}LC\omega\cos\{\omega(t-t_2) + \varphi\}$.

Với điều kiện ban đầu: $t = t_2$; $i_1 = 0$ ; $u = 0$ suy ra: $\varphi = -\pi/2$; $I'_{0C} = I_1/2$

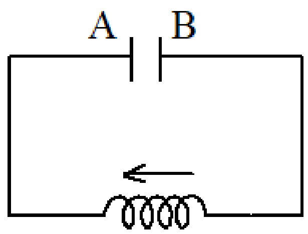
$i_1 = \frac{2I_1}{3}\{1-\text{co}\omega(t-t_2)\} = \frac{2I_1}{3}\{1-\cos(\sqrt{\frac{2}{3LC}}t-\pi\frac{\sqrt{3}}{4})\} \geq 0$ (đpcm)

Kết luận: với $0 < t < \frac{\pi\sqrt{2LC}}{4}$

thì $i_1 = 0$; với $t \geq \frac{\pi\sqrt{2LC}}{4}$ thì

$$i = \frac{2I_1}{3}\{1-\cos(\sqrt{\frac{2}{3LC}}t-\pi\frac{\sqrt{3}}{4})\}$$

**Bài 24.** a, (2đ) Áp dụng ĐL Ohm: $-L\frac{di}{dt} = \frac{q_B}{C}$ (1)




Theo đề ra: $i - I_0 = -at^2 \rightarrow \frac{di}{dt} = -2at$.

Mặt khác: $\frac{dq_B}{dt} = i = I_0 - at^2$

$\rightarrow q_B = I_0 t - \frac{at^3}{3}$ (vì $q_B(0) = 0$).

Thay vào (1) : $2aLt - \frac{1}{C}\left(I_0 t - \frac{at^3}{3}\right) = 0 \rightarrow C = \frac{1}{2aL}\left(I_0 - \frac{at^2}{3}\right)$ (2)

Xét lúc t = $t_1$ thì i = 0, ta có : $I_0 = at_1^2$. (3)

Mặt khác theo (2), lúc t = 0 (chưa điều chỉnh tụ): $C_0 = \frac{I_0}{2aL}$ (4)

Từ (3) và (4) : $t_1 = \sqrt{2C_0 L}$. Biết $T_0 = 2\pi\sqrt{LC_0}$ , ta có $t_1 = \frac{T_0}{\pi\sqrt{2}}$ (s).

b, (2đ) Năng lượng điện từ khi chưa điều chỉnh: $W_0 = \frac{Q_0^2}{2C_0}$, với $Q_0 = I_0\sqrt{LC_0}$ ;

- Điện tích của tụ khi ngừng điều chỉnh: $q_B(t_1) = I_0 t_1 - \frac{at_1^3}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}I_0\sqrt{LC_0} = \frac{2\sqrt{2}}{3}Q_0$ ;

- Điện dung của tụ khi ngừng điều chỉnh :

$C = \frac{1}{2aL}\left(I_0 - \frac{at_1^2}{3}\right) = C_0 - \frac{1}{6L}.\frac{1}{2\pi^2}.4\pi^2 LC_0 \rightarrow C = \frac{2C_0}{3}$ ;

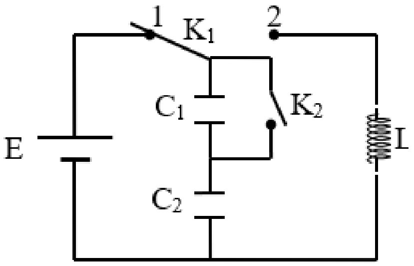
- Năng lượng điện từ sau khi ngừng điều chỉnh : $W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}Q_0\right)^2}{2.\frac{2}{3}C_0} = \frac{4}{3}.\frac{Q_0^2}{2C_0} = \frac{4}{3}W_0 > W_0$

Sở dĩ $W > W_0$ vì đã thực hiện công kéo các bản tụ ra xa nhanh hơn lúc đầu.

**Bài 25. 1. Xác định cường độ cực đại trong cuộn dây.**

\+ Gọi C là điện dung tương đương của mạch

$W_0=\frac{1}{2}CE^2$ do đó C = $\frac{2W_0}{E^2}=\frac{2.10^{-6}}{4^2}$ = 0,125.10$^{-6}$F




+ T=2$\pi\sqrt{LC}$ nên L=$\frac{T^2}{4\pi^2 C}$ thay số vào ta được L =3,24.10$^{-6}$H; $I_0$ = 0,79A

**2. Điện áp cực đại giữa hai đầu cuộn dây.**

+ Vì nối tiếp nên: $C_1=C_2$=2C =0,25.10$^{-6}$F

+ Khi đóng $K_1$ tụ $C_1$ bị loại khỏi hệ dao động

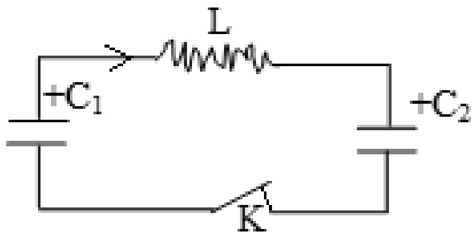
Ta có $\frac{1}{2}C_2U_0^2=W_0 \Rightarrow U_0=\sqrt{\frac{2W_0}{C_2}}$ thay số được $U_0$=2,83V

**Bài 26.**Chọn $q_1$ và $q_2$ là điện tích 2 bản trên của 2 tụ.

$$i=-q_1'=q_2'$$

$$u_{AB}+u_{BC}+u_{CA}=0$$

$$L.i'+\frac{q_2}{C_2}+\frac{q_1}{C_1}=0$$




-Lấy đạo hàm theo thời gian: $i''+\omega^2.i=0$;

với $\omega=\sqrt{\frac{C_1+C_2}{L.C_1.C_2}}$ và $i=A.\cos(\omega.t+\varphi)$

-Khi t = 0:
$$i=A.\cos\varphi=0$$
$$i'=-A.\omega.\sin\varphi$$
$$L.i'=-L.A.\omega.\sin\varphi=U_{AB}=U_1-U_2\Rightarrow\sin\varphi\langle 0$$

Suy ra: $\varphi=-\frac{\pi}{2}$ và $A=\frac{U_1-U_2}{L.\omega}$

Vậy: $i=\frac{U_1-U_2}{L.\omega}.Cos\left(\omega.t-\frac{\pi}{2}\right)$ với $\omega=\sqrt{\frac{C_1+C_2}{L.C_1.C_2}}$

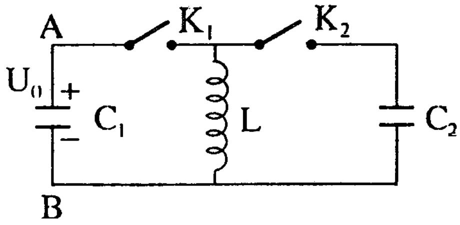
**Bài 27.**

**1. a)** Chu kỳ dao động của mạch $LC_1: T_0=2\pi/\omega_0=2\pi\sqrt{LC}$

Điện tích q của bản A của tụ điện $C_1$ vào thời điểm t = 0 là $q(0)=Q_0=CU_0$ và $i(0)=0$

Vào thời điểm t ta có: $i=-dq/dt=U_0\sqrt{C/L}\sin(t/\sqrt{LC})$.

**b)** $q(t)=Q_0\cos(t/\sqrt{LC})=CU_0\cos(t/\sqrt{LC})$




**2. a)** Tại thời điểm $t_1=3T_0/4=3\pi\sqrt{LC}/2$ thì

$q(3T_0/4)=0$ (3)

và $i(3T_0/4)=U_0\sqrt{C/L}\sin 3\pi/2=-U_0\sqrt{C/L}$ (4)

Từ thời điểm này dao động điện từ có tần số góc $\omega_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2LC}}$. (Hai tụ điện mắc song song coi như một tụ ghép có điện dung 2C và có điện tích bằng 0 vào thời điểm $t = 3T_0/4$). Với điều kiện ban đầu (3) và (4) ta có:

$$i_1 = -I_1\cos\omega_1(t - 3T_0/4),\ \text{với}\ I_1 = U_0\sqrt{C/L}.$$

hay
$$i_1 = -U_0\sqrt{C/L}\cos\left(\frac{t}{\sqrt{2LC}} - \frac{3\sqrt{2}\pi}{4}\right)\ (5)$$

Ký hiệu $q_{12}$ là điện tích của tụ ghép và $q'$ là điện tích của tụ $C_2$, ta có

$$q_{12} = 2q' = Q'\sin\omega_1(t - 3T_0/4)$$

Để tính $Q'$ ta áp dụng định luật bảo toàn năng lượng:

$$\frac{Q_0^2}{2C} = \frac{1}{2}LI_1^2 = \frac{Q'^2}{2(2C)} \rightarrow Q' = \sqrt{2Q_0} = CU_0\sqrt{2}$$

Từ đây suy ra:
$$q' = \frac{CU_0}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{2LC}} - \frac{3\sqrt{2}\pi}{4}\right)\ (6)$$

**2.b)** Nếu đóng $K_2$ vào thời điểm $t_2 = T_0$ thì ta có:

$$q(T_0) = CU_0\cos(2\pi) = CU_0 = Q_0\ \ (7)\quad \text{và}\quad i(T_0) = 0\ \ (8)$$

Tại thời điểm này hai tụ $C_1$ và $C_2$ mắc song song, tụ $C_1$ tích điện tích $Q_0$ còn tụ điện $C_2$ thì không tích điện, dòng trong mạch bằng không. Do vậy, ngay sau đó lượng điện tích $Q_0$ này trên tụ $C_1$ sẽ phân bố lại cho cả hai tụ điện. Quá trình phân bố này xảy ra rất nhanh trong khi điện tích chưa kịp dịch chuyển qua cuộn dây, vì tại thời điểm này $i = 0$ và sự thay đổi cường độ dòng điện qua cuộn cảm bị cản trở do hệ số tự cảm (gây ra cảm kháng), điện tích hầu như chỉ truyền qua các khoá và dây nối. Vì hai tụ điện có điện dung như nhau nên điện tích $Q_0$ được phân bố đều cho hai tụ điện.

Sau khi điện tích được phân bố đều trên hai tụ điện, trong mạch lại có dao động điện từ với tần số góc $\omega_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2LC}} = \omega_1$, với điều kiện ban đầu (7) và (8).

Vì vậy ta có:

$$i_2 = I_2\sin\omega_2(t - T) = I_2\sin\left(\frac{t}{\sqrt{2LC}} - \sqrt{2}\pi\right)$$

$$q_{12} = 2q_2 = Q_0\cos\omega_2(t - T) = Q_0\cos\left(\frac{t}{\sqrt{2LC}} - \sqrt{2}\pi\right)$$

Từ $i_2 = -\dfrac{dq_{12}}{dt} \quad\Rightarrow\quad I_2 = \dfrac{Q_0}{\sqrt{2LC}} = U_0\sqrt{\dfrac{C}{2L}}$, cuối cùng ta có:

$$i_2 = U_0\sqrt{\frac{C}{2L}}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{2LC}} - \sqrt{2}\pi\right)\quad \text{và}\quad q_2 = \frac{CU_0}{2}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{2LC}} - \sqrt{2}\pi\right).$$

**3.** Sự phân bố lại điện tích làm giảm năng lượng điện từ, từ giá trị $Q_0^2/2C$ đến $2\left(\dfrac{Q}{2}\right)^2\cdot\dfrac{1}{2C} = \dfrac{Q_0^2}{4C}$. Độ giảm năng lượng này chuyển thành năng lượng sóng điện từ truyền đi trong không gian.

# CHƯƠNG VII.
# DÒNG ĐIỆN XOAY CHIỀU
## VII.1. MẠCH ĐIỆN XOAY CHIỀU MẮC NỐI TIẾP.

**Bài 1.** Tính từ thời điểm có i = 0 ($t_0$ = 0) đến thời điểm T/2 điện lượng chuyển qua tiết diện của mạch bằng

$$q = \int_0^{T/2} idt = \int_0^{T/2} I\sqrt{2}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)dt = -\left.\frac{I\sqrt{2}\cos(2\pi t/T)}{2\pi/T}\right|_0^{T/2}$$

$$q = -\frac{IT\sqrt{2}}{2\pi}(\cos\pi - \cos 0) = \frac{I\sqrt{2}}{\pi f}$$

**Bài 2.**

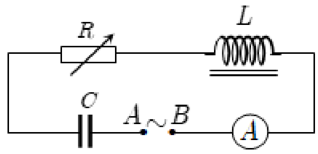
a.Tính điện dung $C$ và giá trị $R_1$ của biến trở.

Ta có: $Z_{L1} = L_1\omega = 450\Omega$; $Z_{L2} = L_2\omega = 550\Omega$

Tổng trở ở hai vị trí lần lượt là $Z_1 = \sqrt{R_1^2 + (Z_{L1} - Z_C)^2}$ ; $Z_2 = \sqrt{R_1^2 + (Z_{L2} - Z_C)^2}$

Theo đề: $I_1 = I_2 \Rightarrow Z_1 = Z_2 \Rightarrow Z_{L1} - Z_C = Z_C - Z_{L2} \Rightarrow Z_C = \dfrac{Z_{L1}+Z_{L2}}{2} = 500\Omega$

$\Rightarrow C = \dfrac{10^{-4}}{5\pi}F \approx 6,4\mu F$




$I_1 = \dfrac{U}{\sqrt{R_1^2 + (Z_{L1}-Z_C)^2}} = \dfrac{I_{Max}}{\sqrt{2}}; I_{Max} = \dfrac{U}{R_1} \Rightarrow \sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{R_1^2+(Z_{L1}-Z_C)^2}}{R_1}$

$\Leftrightarrow 2R_1^2 = R_1^2 + (450-500)^2 \Rightarrow R_1 = 50\Omega$

b. Tính giá trị cực đại này của công suất

$P = \dfrac{U^2}{(R+r)^2+(Z_L-Z_C)^2}(R+r) \Leftrightarrow P(R+r)^2 - U^2(R+r) + P(Z_L-Z_C)^2 = 0$

Áp dụng định lý Vie-ét: $(R_2+r)(R_3+r) = (Z_L-Z_C)^2 \Rightarrow (Z_L-Z_C)^2 = 16.36 = 576$

$R_2 + r + R_3 + r = \dfrac{U^2}{P} \Rightarrow U = \sqrt{P(R_2+r+R_3+r)} = 104V$

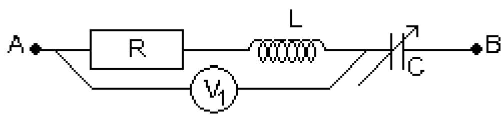
$P_{R0} = \dfrac{U^2R_0}{(R_0+r)^2+(Z_L-Z_C)^2} = \dfrac{U^2}{R_0 + \dfrac{r^2+(Z_L-Z_C)^2}{R_0} + 2r}$

Theo bất đẳng thức Cauchy thì: $P_{R0} = P_{Rmax} \Leftrightarrow R_0 = \dfrac{r^2+(Z_L-Z_C)^2}{R_0} \Rightarrow R_0 = \sqrt{r^2+(Z_L-Z_C)^2} = 26\Omega$

Nên $P_{Rmax} = \dfrac{U^2}{2R_0+2r} \approx 150,2W$

**Bài 3.** Số chỉ $V_1$ chỉ $U_1 = I.\ Z_1$ $U_1 = \dfrac{U\sqrt{R^2+Z_L^2}}{\sqrt{R^2+(Z_L-Z_C)^2}}$

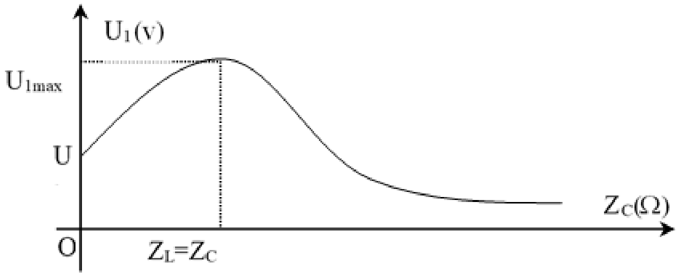
$U_{1max} = \dfrac{U\sqrt{R^2+Z_L^2}}{R}$ khi $Z_L - Z_C = 0$; $C = \dfrac{1}{Lw^2}$




Ta khảo sát $U_1$ theo $Z_C$ và để ý $Z_C = \dfrac{1}{Cw}$ $Z_C$ và C nghịch biến.

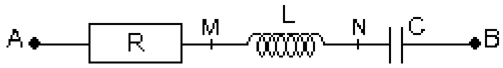
Bảng biến thiên:

| $Z_C$ | 0 | | $Z_C=Z_L$ | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $U_1$ | U | ↗ | $\dfrac{U\sqrt{R^2+Z_L^2}}{R}$ | ↘ | 0 |

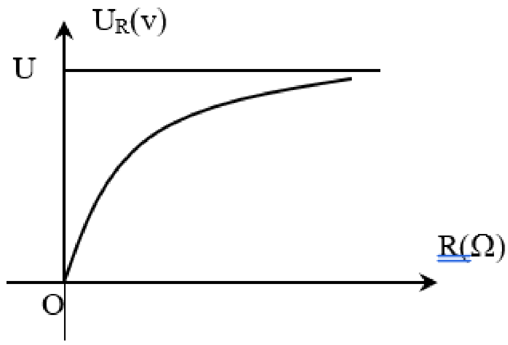



**Bài 4.** 1.Trường hợp câu 1: $U_R = I.R = \dfrac{U.R}{\sqrt{R^2+(Z_L-Z_C)^2}}$

$U_R = \dfrac{U}{\sqrt{1+\dfrac{(Z_L-Z_C)^2}{R^2}}}$




$U_{Rmax} = U$ khi $R = \infty$




2.Định L để $U_L$ cực đại:

Cách 1: $U_L = I.Z_L = \dfrac{U.Z_L}{\sqrt{R^2+(Z_L-Z_C)^2}} = \dfrac{U.Z_L}{\sqrt{R^2+Z_L^2-2Z_LZ_C+Z_C^2}}$

Chia tử và mẫu cho $Z_L$ và thu gọn: $U_L = \dfrac{U}{\sqrt{(R^2+Z_C^2)\dfrac{1}{Z_L^2}-\dfrac{2Z_C}{Z_L}+1}}$

Đặt $x = \dfrac{1}{Z_L}$

Hàm $y=ax^2+bx+1$ với $\begin{cases} a = R^2+Z_C^2 \\ b = -2Z_C \end{cases}$ $U_L = \dfrac{U}{\sqrt{y}}$

Để $U_{Lmax}$ thì $y_{min}$

Vì a>0 nên $y_{min} = -\dfrac{\Delta}{4a}$ khi $x = -\dfrac{b}{2a}$

Thay a, b vào: $\dfrac{1}{Z_L} = \dfrac{2Z_C}{2(R^2+Z_C^2)}$

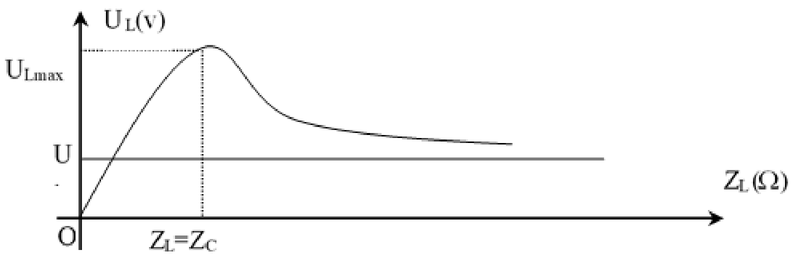
$+Z_L = \dfrac{R^2+Z_C^2}{Z_C} \Rightarrow L$

$+y_{min} = \dfrac{4ac-b^2}{4a} = \dfrac{R^2}{R^2+Z_C^2} \Rightarrow U_{Lmax} = \dfrac{U\sqrt{R^2+Z_C^2}}{R}$

Bảng biến thiên:

| $Z_L$ | 0 | | ∞ |
|---|---|---|---|
| $U_L$ | 0 ↗ | $\dfrac{U\sqrt{R^2+Z_C^2}}{R}$ | ↘ U |

Đồ thị:




Cách 2: dùng giản đồ vectơ rồi dựa vào phép tính hình học:

$u_{AB} = u_{AM} + u_{MN} + u_{NB}$

Dạng vectơ: $\overrightarrow{U_{AB}} = \overrightarrow{U_{AM}} + \overrightarrow{U_{MN}} + \overrightarrow{U_{NB}}$

$\vec{U} = \overrightarrow{U_R} + \overrightarrow{U_L} + \overrightarrow{U_C}$

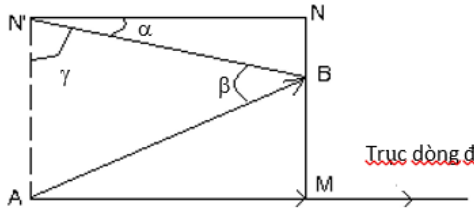
Vẽ giản đồ theo cách nối tiếp vectơ:

AB= $U_{AB}$ = U

AM = $U_R$

MN = AN' = $U_L$

NB = $U_C$




Kẻ AN' song song MN và bằng MN để tạo thành tam giác ABN'

Dùng định lý hàm số sin: $\frac{AB}{\sin\gamma} = \frac{AN'}{\sin\beta} \Leftrightarrow \frac{U}{\sin\gamma} = \frac{U_L}{\sin\beta}$ $U_L = \frac{U.\sin\beta}{\sin\gamma}$

Khi L thay đổi góc α không đổi với tgα = $\frac{NB}{N'N} = \frac{Z_C}{R}$

sinγ= sin($90^0$ - α) = cosα = $\frac{1}{\sqrt{1+tg_\alpha^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2+Z_C^2}}$

Còn góc β thay đổi

$U_{Lmax} = \frac{U}{\sin\gamma}$ khi sinβ = 1 → β = $90^0$ tam giác ABN' vuông tại B

$U_{Lmax} = \frac{U\sqrt{R^2+Z_C^2}}{R}$ lúc này góc $BAM = \gamma$

tgγ = $\frac{MB}{AM} = \frac{Z_L - Z_C}{R}$ ⇔ cotgα = $\frac{Z_L - Z_C}{R}$

$\frac{R}{Z_C} = \frac{Z_L - Z_C}{R}$ $\Rightarrow Z_L = \frac{R^2+Z_C^2}{Z_C}$

Cách 3: dùng đạo hàm để tìm cực trị có tính tổng quát cho mọi bài toán

✎Nhận xét: +Ở cách 2 và 3 phức tạp và công phu nên dùng kiến thức toán đơn giản như cách 1

+Đối với mạch xoay chiều phức tạp phương pháp hình học ở cách 2 có lợi hơn.

3.Định C để $U_C$ cực đại: $U_C = I.Z_C = \frac{UZ_C}{\sqrt{R^2+(Z_L-Z_C)^2}}$

Dùng cách 1 giải như câu 2 chỉ cần thay đổi đại lượng $Z_C = Z_L$ được kết quả.

$U_{Cmax}= \dfrac{U.\sqrt{R^2+Z_L^2}}{R}$ khi $Z_C = \dfrac{R^2+Z_L^2}{R} \Rightarrow C$

Đồ thị có dạng như câu 2

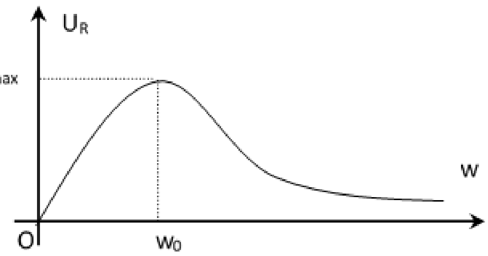
4.Thay đổi lần lượt w để

a.$U_R$ cực đại: $U_R = I.R = \dfrac{U.R}{\sqrt{R^2+(Z_L-Z_C)^2}} = \dfrac{U.R}{\sqrt{R^2+(L\omega-\dfrac{1}{C\omega})^2}}$

$U_{Rmax} = U$ khi $Lw - \dfrac{1}{c\omega} = 0$ $w_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ mạch có cộng hưởng điện

Bảng biến thiên:

| w | 0 | | $w_0=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $U_R$ | 0 | ↗ | U | ↘ | 0 |




b. Định w để $U_{Lmax}$

$U_L=I.Z_L = \dfrac{U.Z_L}{\sqrt{R^2+(Z_L-Z_C)^2}} = \dfrac{U.Z_L}{\sqrt{R^2+Z_L^2+Z_C^2-2Z_LZ_C}}$

$U_L= \dfrac{U.L.\omega}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2+\dfrac{1}{C^2\omega^2}-2\dfrac{L}{C}}}$ chia tử và mẫu cho w và thu gọn lại

$U_L= \dfrac{U.L}{\sqrt{\dfrac{1}{C^2\omega^4}+(R^2-\dfrac{2L}{C})\dfrac{1}{\omega^2}+L^2}}$

Đặt $x = \dfrac{1}{\omega^2}$ $y= ax^2 + bx + d$ với $\begin{cases} a=\dfrac{1}{C^2} \\ b=R^2-\dfrac{2L}{C} \\ d=L^2 \end{cases}$ $U_L = \dfrac{U.L}{\sqrt{y}}$

$U_{Lmax}$ khi $y_{min}$

Vì $a > 0$ nên $y_{min} = \dfrac{-\Delta}{4a}$ khi $x= \dfrac{-b}{2a}$

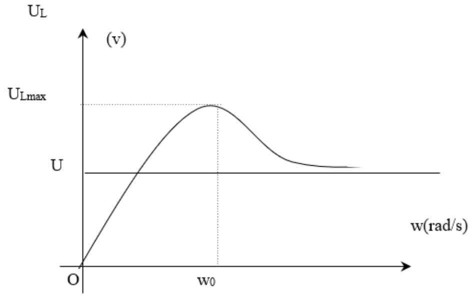
Thay các hằng số a,b,d vào ta tính được

$U_{Lmax}= \dfrac{2U.L}{R\sqrt{4LC-C^2R^2}}$ khi $w_0= \dfrac{1}{C}\sqrt{\dfrac{2}{\dfrac{2L}{C}-R^2}}$ với điều kiện $\dfrac{2L}{C}>R^2$

Bảng biến thiên:

| w | 0 | | $w_0$ | | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| $U_L$ | 0 | ↗ | $U_{Lmax}$ | ↘ | U |

Đồ thị:




c. Định w để $U_{Cmax}$:

$$U_C=I.Z_C = \frac{U.Z_C}{\sqrt{R^2+(Z_L-Z_C)^2}} = \frac{U}{C.\omega.\sqrt{R^2+L^2\omega^2+\dfrac{1}{C^2\omega^2}-\dfrac{2L}{C}}}$$

$U_C= \dfrac{U}{C\sqrt{L^2\omega^4+(R^2-2\dfrac{L}{C})\omega^2+\dfrac{1}{C^2}}}$ Đặt $w^2 = x$ $y= ax^2 + bx + d$ với $\begin{cases} a=L^2 \\ b=R^2-\dfrac{2L}{C} \\ d=\dfrac{1}{C^2} \end{cases}$

$U_C = \dfrac{U}{C\sqrt{y}}$; $U_{Cmax}$ khi $y_{min;}$ Vì a>0 nên $y_{min} = \dfrac{-\Delta}{4a}$ khi $x= \dfrac{-b}{2a}$

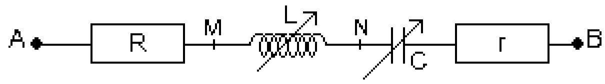
Thay các hằng số a,b,d vào và biến đổi ta được: $U_{Cmax}= \dfrac{2U.L}{R\sqrt{4LC-C^2R^2}}$ khi $w_0= \dfrac{1}{L}\sqrt{\dfrac{\dfrac{2L}{C}-R^2}{2}}$ với

điều kiện $\dfrac{2L}{C}>R^2$

Đồ thị có dạng như câu b.

✎Nhận xét: có thể dùng đạo hàm để tính $U_{Cmax}$ khi w thay đổi.

**Bài 5.** 1.Tìm C để $U_{MB}$ cực tiểu.




$Z_L = 150\ \Omega$, R= 70Ω, r = 80Ω

$$U_{MB} = I.Z_{MB} = \frac{U\sqrt{r^2+(Z_L-Z_C)^2}}{\sqrt{(R+r)^2+(Z_L-Z_C)^2}} = U\sqrt{\frac{r^2+(Z_L-Z_C)^2}{(R+r)^2+(Z_L-Z_C)^2}}$$

Ở bài toán này biểu thức phức tạp nên thay số vào rồi đặt ẩn số cho giống biểu thức toán

Đặt x = $(Z_L - Z_C)^2$ (x>0)

$$y = \frac{r^2 + (Z_L - Z_C)^2}{(R+r)^2 + (Z_L - Z_C)^2} = \frac{80^2 + x}{150^2 + x}$$

$U_{MB} = U\sqrt{y}$

$U_{MB}$ min khi $y_{min}$

Khảo sát hàm $y = \frac{80^2 + x}{150^2 + x} = 1 - \frac{150^2 - 80^2}{150^2 + x}$

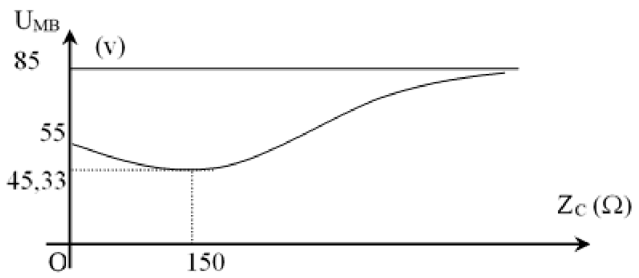
$y_{min}$= 0.2845 khi x= 0⇔ $(Z_L - Z_C)^2 = 0$ ⇔ $Z_C = Z_L = 150\ \Omega$⇔ C= $\frac{1}{15\pi}.10^{-3}$F

$U_{MBmin} = U\sqrt{y_{min}} = 85\sqrt{0,2845} = 45,33$ (v)

Bảng biến thiên:

| $Z_C$ | 0 | 150 | ∞ |
|---|---|---|---|
| $U_{MB}$ | 55 ↘ | 45,33 ↗ | U=85 |

Đồ thị:




2.Tìm L để $U_{AN}$ max:

$$U_{AN} = I.Z_{AN} = \frac{U\sqrt{R^2 + Z_L^2}}{\sqrt{(R+r)^2 + (Z_L - Z_C)^2}} = U\sqrt{\frac{R^2 + Z_L^2}{(R+r)^2 + (Z_L - Z_C)^2}}$$

Đặt x= $Z_L$ (x>0)

$$y = \frac{R^2 + Z_L^2}{(R+r)^2 + (Z_L - Z_C)^2} = \frac{70^2 + x^2}{150^2 + (x-150)^2}$$

$U_{AN} = U\sqrt{y}$

Để $U_{AN}$ max thì $y_{max}$

Khảo sát: $y = \dfrac{70^2 + x^2}{150^2 + (x-150)^2}$

Lấy đạo hàm rồi thu gọn: $y' = \dfrac{-300x^2 + 80200x + 70^2.300}{\left[150^2 + (x-150)^2\right]}$

$$y' = 0 \Leftrightarrow -300x^2 + 80200x + 1470000 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -17,22 \\ x = 284,55 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

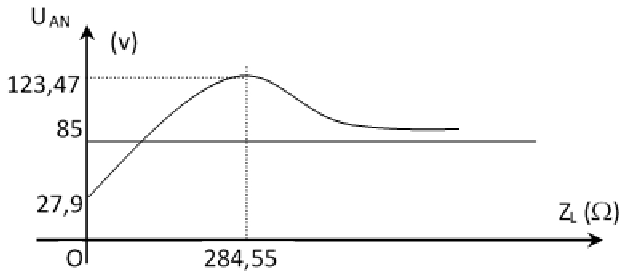
| x | | -17,22 | | 0 | | 284,55 | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | – | 0 | + | | + | 0 | – | |
| y | | | | 0,108 | ↗ | 2,11 | ↘ | 1 |

$y_{max} = 2,11$ khi $x = 284,55$

$Z_L = 284,55\ \Omega$ thì $U_{AMmax} = U\sqrt{y}_{\ max} = 85\sqrt{2,11} = 123,47$ v

Vậy khi $L = \dfrac{Z_L}{\omega} = 0,906$H thì $U_{AMmax} = 123,47$ (v)

Đồ thị:




**Bài 6.**

a. Tính các giá trị R, $L_1$ và $C_1$.

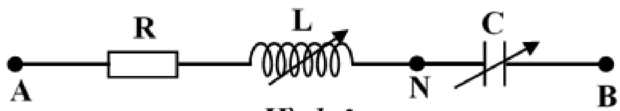
* Ta vẽ giản đồ véc tơ như hình bên:

+ Áp dụng định lý cosin ta có:

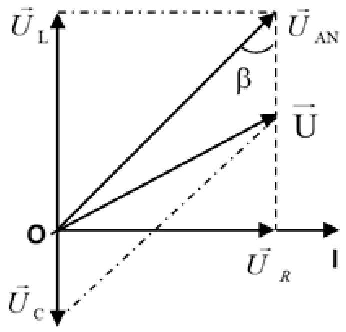
$U^2 = U_{AN}^2 + U_{NB}^2 - 2U_{AN}.U_{NB}.\cos\beta$

$\Leftrightarrow \cos\beta = \dfrac{U_{AN}^2 + U_{NB}^2 - U^2}{2U_{AN}.U_{NB}}$.

+ Thay số: $\cos\beta = 0,8 \Rightarrow \sin\beta = 0,6$




*Hình 3*




Từ đó $U_R = U_{AN}\sin\beta = 96$ V Lại có: $P = U_R I \Leftrightarrow I = \dfrac{P}{U_R} = 0{,}2\text{ A} \Rightarrow R = \dfrac{U_R}{I} = 480\ \Omega$

$\text{tg}\beta = \dfrac{U_R}{U_{L_1}} = \dfrac{0{,}6}{0{,}8} = \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow \dfrac{R}{Z_{L_1}} = \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow Z_{L_1} = \dfrac{4R}{3} = 640\ \Omega \Rightarrow L_1 = \dfrac{Z_{L_1}}{\omega} = \dfrac{640}{100\pi} \approx 2{,}04\text{ H}$

$+\ Z_{C_1} = \dfrac{U_{NB}}{I} = \dfrac{56}{0{,}2} = 280\ \Omega \Leftrightarrow C_1 = \dfrac{1}{\omega Z_{C_1}} \approx 11{,}37\ \mu\text{F}$

b. Tìm giá trị của $C_2$ và $U_{L\,max}$:

* Khi $L_2 = \dfrac{9{,}6}{\pi}\text{ H} \Rightarrow Z_{L2} = 960\ \Omega$ thì $U_L$ đạt cực tại

Ta có: $U_L = I.Z_L = \dfrac{U.Z_L}{\sqrt{R^2 + (Z_L - Z_{C2})^2}} = \dfrac{U}{\sqrt{\dfrac{R^2 + Z_{C2}^2}{Z_L^2} - \dfrac{2Z_{C2}}{Z_L} + 1}}$ (*)

Đặt $y = \dfrac{R^2 + Z_{C_2}^2}{Z_L^2} - 2\dfrac{Z_{C2}}{Z_L} + 1$

Dễ thấy $U_L$ đạt cực đại khi y cực tiểu. Khi đó $\dfrac{1}{Z_{L2}} = \dfrac{Z_{C2}}{R^2 + Z_{C2}^2} \Leftrightarrow Z_{L2} = \dfrac{R^2 + Z_{C2}^2}{Z_{C2}}$

$\Leftrightarrow Z_{C2}^2 - 960Z_{C2} + 480^2 = 0 \Rightarrow Z_{C2} = 480\ \Omega \Rightarrow C_2 \approx 6{,}63\ \mu\text{F}$ và thay số vào biểu thức (*) ta được: $U_{Lmax} = 120\sqrt{2}$ (V)

**Bài 7.** a. Số chỉ vôn kế chính là $u_{AM} = I\sqrt{R^2 + Z_C^2}$

Để $u_{AM}$ cực đại thì I phải cực đại nên đoạn mạch xãy ra hiện tượng cộng hưởng

$Z_L = Z_C \Rightarrow L = \dfrac{3R}{100\pi} \approx 0{,}38(H)$.

Khi có cộng hưởng thì i cùng pha với u, do đó $u_{AM}$ trễ pha hơn u một góc 1,25rad.

$U_{0AM} = I_0\sqrt{R^2 + Z_C^2} = \dfrac{U_0}{R}\sqrt{R^2 + Z_C^2} = U_0\sqrt{10} = 1000\sqrt{2}(V)$

$u_{AM} = 1000\sqrt{2}\sin(100\pi t - 1{,}25)(V)$.

b. $Z_C = \dfrac{1}{C\omega} = 3R$

+ Khi $L = L_1$, ta có:

$U_1 = I_1\sqrt{R^2 + Z_C^2} = I_1 R\sqrt{10}$ (1)

$\tan\varphi_1 = \dfrac{L_1\omega}{R} - 3$ (2)

$$I_1 = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (L_1\omega - 3R)^2}} \quad (3)$$

+ Khi $L = L_2 = 2L_1$, ta có: $Z_{L2} = 2Z_{L1}$

$$U_2 = I_2\sqrt{R^2 + Z_C^2} = I_2 R\sqrt{10} \quad (4)$$

$$\tan\varphi_1 = \frac{2L_1\omega}{R} - 3 \quad (5)$$

$$I_2 = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (2L_1\omega - 3R)^2}} \quad (6)$$

Theo bài ra $U_2 = \frac{U_1}{2}$, từ (1) và (4), ta có: $I_2 = \frac{I_1}{2}$ (7)

Từ (2), (6) và (7), ta có: $L_1\omega = \frac{5R}{2}$ (8)

Thay (8) vào (3) và (5), ta có: $|\varphi_1| = 0{,}46rad$,

$|\varphi_2| = 1{,}11rad$

+ Xét trường hợp $L = L_2 = 2L_1$

$u_{AM}$ trễ pha hơn i một góc 1,25rad nên $u_{AM}$ trễ pha hơn u một góc 2,36rad

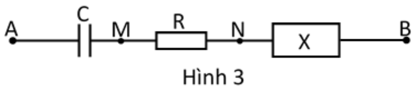
$$U_{0AM} = I_0\sqrt{R^2 + Z_C^2} = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (2L_1\omega - Z_C)^2}}\sqrt{R^2 + Z_C^2} = 200\sqrt{10}(V)$$

$$u_{AM} = 200\sqrt{10}\sin(100\pi t - 2{,}36)(V)$$

**Bài 8.** 1.Ta có hiệu điện thế giữa 2 điểm A B xác định bởi :

$u_{AB}(t) = u_{AN} + u_{NB} = 180\sqrt{2}\cos(100\pi t - \frac{\pi}{2}) + 60\sqrt{2}\cos 100\pi t(V)$

$= 190\sqrt{2}\cos(100\pi t - 0{,}4\pi)$ (V ).

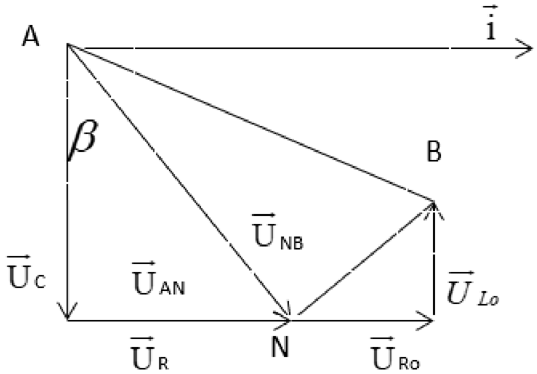


Hình 3

2 Giản đồ véc tơ cho mạch :

+ Vì $u_{NB}$ nhanh pha hơn $u_{AN}$

$\Rightarrow$ nên X chứa $R_0$ và $L_0$




+ Dòng điện trong mạch:

$\tan\beta = \frac{R}{Z_c} = 1 \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow U_c = U_{AN}\cos\beta = 90\sqrt{2}$ (V)

$\Rightarrow I = \frac{U_c}{Z_c} = \frac{90\sqrt{2}}{90} = \sqrt{2}$ (A)

+ Điện trở của X là:

Từ giản đồ : $U_{R_0} = U_{NB}\cos 45^0 = 30\sqrt{2}$ V $\Rightarrow R_0 = \frac{U_{R_0}}{I} = 30\Omega$.

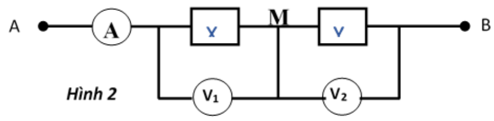
+ Độ tự cảm của cuận dây trong X là :

Từ giản đồ : $U_{L_0} = U_{NB}\cos 45^0 = 30\sqrt{2}$ V

$$\Rightarrow Z_{L_0} = \frac{U_{L_0}}{I} = 30\Omega. \Rightarrow L_0 = \frac{0,3}{\pi}H.$$

**Bài 9.**

1)- Hộp X không chứa tụ điện vì nó cho dòng điện không đổi chạy qua. Vậy hộp X chứa cuộn cảm L




và điện trở thuần $R_1$ có độ lớn: $R_1 = 45/1,5 = 30$ Ω

- Hộp Y chứa tụ điện và điện trở thuần $R_2$ vì $u_{AM}$ lệch pha với $u_{MB}$ góc ð/2.

- Vẽ được giản đồ véctơ :

$$U_{AM} = U_{MB} = \frac{U_{AB}}{\sqrt{2}} = \frac{120/\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 60(V) \text{ và } U_{R_1} = IR_1 = 30(V)$$

$$\Rightarrow \sin\varphi_2 = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1\right) = \frac{U_{R_1}}{U_{AM}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi_2 = \frac{\pi}{6}; \varphi_1 = \frac{\pi}{3}$$

- Từ đó:

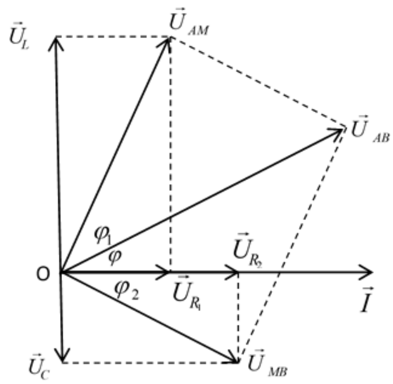
$U_L = U_{AM}\sin\varphi_1 = 30\sqrt{3}(V) \Rightarrow Z_L = 30\sqrt{3}(\Omega) \Rightarrow L = 0,165(H)$

$U_{R_2} = U_{MB}\cos\varphi_2 = 30\sqrt{3}(V) \Rightarrow R_2 = U_{R_2}/I = 30\sqrt{3}(\Omega)$

$U_C = U_{MB}\sin\varphi_2 = 30(V) \Rightarrow Z_C = 30(\Omega) \Rightarrow C = 106\mu F$

- Ta có: $\varphi = \varphi_1 - \pi/4 = \pi/12$

- Biểu thức cường độ dòng điện: $i = \sqrt{2}\sin(100\pi t - \pi/12)(A)$




2)- Đặt $Z_{C'} = x$ ta có: với

$Z_2 = \sqrt{R_2^2 + x^2}; Z = \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (Z_L - x)^2}$

hay $U_{2\max} = \dfrac{U_{MB}}{\sqrt{1 + \dfrac{a - bx}{c + x^2}}}$ với: $a = R_1^2 + 2R_1R_2 + Z_L^2; b = 2Z_L; c = R_2^2$

Dễ thấy $\dfrac{a - bx}{c + x^2}$ cực tiểu khi $x = \dfrac{a + \sqrt{a^2 + b^2c}}{b}$ (x>0)

$\Rightarrow Z_{C'} = 123(\Omega) \Rightarrow C' = 25,9\mu F$

Khi đó $U_{2max}$=103(V) và Z'=110(Ù) suy ra I'= $U_{AB}$ /Z'=0,77(A)

Công suất tiêu thụ của mạch: P=($R_1$+$R_2$)I'$^2$ = 48,6(W)

**Bài 10.**

**1.** $Z_C = 160\Omega$; $Z_L = 100\Omega$

**a.** $P = \dfrac{U^2R}{R^2+(Z_L-Z_C)^2} = \dfrac{U^2}{R+\dfrac{(Z_L-Z_C)^2}{R}}$

Áp dụng bất đẳng thức Cosi được: $R = |Z_L - Z_C| = 60\Omega$

=> $P_{max}$ = 120W

**b.** Chứng minh được với hai giá trị khác nhau của R mà cho cùng một công suất thì góc lệch pha của u và i tương ứng là $\varphi_1$, $\varphi_2$ thỏa mãn $\varphi_1+\varphi_2 = -\dfrac{\pi}{2}$ (HS phải chứng minh điều này)

Mà giải thiết cho: $\varphi_1 = 2\varphi_2 \Rightarrow \varphi_1 = -\dfrac{\pi}{3}$

Khi R = $R_1$ : $\tan\varphi_1 = \dfrac{Z_L - Z_C}{R_1} = -\sqrt{3} \Rightarrow R_1 = 20\sqrt{3}\ \Omega$

Khi R = $R_2$ : $\tan\varphi_2 = \dfrac{Z_L - Z_C}{R_2} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow R_2 = 60\sqrt{3}\ \Omega$

Công suất : $P = \dfrac{U^2}{R_1+R_2} = 60\sqrt{3}$ W

**2.**

- Rô to có 4 cực, nên số cặp cực từ p = 2.

* Khi $n_2 = 1500$ (vòng/phút) thì tần số dòng điện: $f_2 = \dfrac{n_2 p}{60} = \dfrac{1500.2}{60} = 50Hz \Rightarrow \omega_2 = 2\pi f_2 = 314$ (rad/s)

- Vì bỏ qua điện trở trong của máy nên: $U_2 = E_2 = 200V$
- Cường độ dòng điện hiệu dụng qua tụ: $I_2 = \dfrac{U_2}{Z_C} = U_2 C\omega_2 = 200.10^{-5}.314 = 0,628A$

* Với vận tốc quay rôto là n vòng/phút thì hiệu điện thế hiệu dụng được xác định một cách tổng quát là : $U = E = \dfrac{NBS\omega}{\sqrt{2}}$ (vì điện trở trong bằng 0)

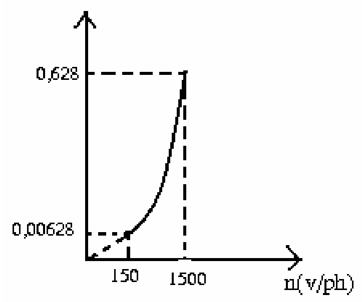
- Cường độ dòng điện hiệu dụng qua tụ : $I = \dfrac{U}{Z_C} = UC\omega = \dfrac{NBSC}{\sqrt{2}}\omega^2$. Với $\omega = 2\pi f = 2\pi\dfrac{np}{60}$
- Suy ra $I = \dfrac{NBSC}{\sqrt{2}}.\left(\dfrac{2\pi np}{60}\right)^2 = \dfrac{NBSC4\pi^2p^2}{3600\sqrt{2}}.n^2 = K.n^2$
- Với $K = \dfrac{NBSC4\pi^2p^2}{3600\sqrt{2}}$ là hằng số $\rightarrow I = K.n^2$

đường biểu diễn sự phụ thuộc của I với n - tốc độ quay của rô to, có dạng một nhánh của parabol có bề lõm hướng lên chiều dương của toạ độ.

- Với $n = 0$ : I = 0
- Với $n_1 = 150$ v/ph : $I_1 = K(150)^2$

$n_2 = 1500$ v/ph: $I_2 = K(1500)^2 = 0,628$ A

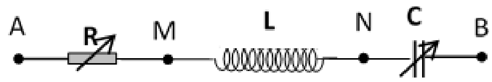
$\Rightarrow \dfrac{I_1}{I_2} = \left(\dfrac{150}{1500}\right)^2 = \dfrac{1}{100} \Leftrightarrow I_1 = \dfrac{I_2}{100} = 0,00628$ A




- Đồ thị của I = $K.n^2$ là một nhánh parabol có dạng như hình vẽ.

**Bài 11.** a.Tính $Z_L = \omega L = 200\Omega; Z_C = \dfrac{1}{\omega C} = 50\Omega$.

Tổng trở : $Z = \sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2} = 100\sqrt{3}(\Omega)$.




Cường độ dòng điện : $I_0 = \dfrac{U_0}{Z} \approx 1{,}8A$..

Độ lệch pha : $\tan\varphi = \dfrac{Z_L - Z_C}{R} = \sqrt{3} \Rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{3}$ $\qquad \varphi_i = \varphi_u - \varphi = -\dfrac{\pi}{3}$..

- Biểu thức cường độ dòng điện : $i = 1{,}8\cos(100\pi t - \dfrac{\pi}{3})A$

- Biểu thức $u_{AN}$ :

$$Z_{AN} = \sqrt{R^2 + Z_L^2} \approx 218\Omega \qquad U_{0AN} = I_0 Z_{AN} \approx 392{,}4V$$

$$\tan\varphi_{AN} = \frac{Z_L}{R} = \frac{200}{50\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi_{AN} \approx 1{,}16rad = \varphi_{uAN} - \varphi_i \Rightarrow \quad \varphi_{uAN} \approx 0{,}11rad.$$

$$u_{AN} = 392{,}4\cos(100\pi t + 0{,}11)(V)..$$

- Biểu thức $u_{MB}$ :

$$Z_{AN} = Z_L - Z_C = 150\Omega \qquad U_{0MB} = I_0 Z_{MB} = 1{,}8.150 = 270(V)$$

Vì $Z_L > Z_C$ nên $\varphi_{MB} = \dfrac{\pi}{2}$.

$$u_{MB} = 270\cos(100\pi t - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2})(V) = 270\cos(100\pi t + \frac{\pi}{6})(V)$$

b. Công suất trên đoạn mạch đạt cực đại khi : $Z_{C'} = Z_L = 200\Omega$

- Điện dung của tụ : $C' = \dfrac{1}{\omega . Z_{C'}} = \dfrac{10^{-4}}{2\pi}F$.

- Công suất cực đại là : $P_{\max} = I_{\max}^2 . R = \left(\dfrac{220}{50\sqrt{3}}\right)^2 .50\sqrt{3} \approx 558{,}7(W)$.

c.Điện áp hiệu dụng giữa hai bản tụ:

$$U_{C1} = I.Z_{C1} = \frac{U.Z_{C1}}{\sqrt{R_1^2 + (Z_L - Z_C)^2}} = \frac{U}{\sqrt{\dfrac{R_1^2}{Z_{C1}^2} + \left(\dfrac{Z_L}{Z_{C1}} - 1\right)^2}}$$

- Ta thấy $U_{C1}$ đạt cực đại khi mẫu số cực tiểu. Biến đổi biểu thức ở mẫu số ta được:

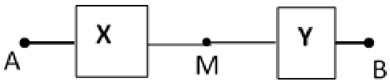
$$\text{MS} = \sqrt{L^2C_1^2\omega^4 + (C_1^2R_1^2 - 2LC_1)\omega^2 + 1}$$

-Mẫu số cực tiểu khi: $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{2C_1L - C_1^2R_1^2}{2C_1^2L^2}} = 1000\pi(rad/s) \Rightarrow f_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi} = 500Hz.$

- Giá trị cực đại của $U_{C1}$ là: $U_{C1Max} = \dfrac{U.\dfrac{1}{\omega_0 C_1}}{\sqrt{R_1^2 + \left(\omega_0 L - \dfrac{1}{\omega_0 C_1}\right)^2}} = 480,2(V).$

**Bài 12.**

* Khi tần số $f = 50Hz$: ta thấy $U_{AM}^2 = U_{AB}^2 + U_{MB}^2$ chứng tỏ $U_{AB}$ vuông pha với $U_{MB}$ nên đoạn AB không thể chứa :



H.3

+ R và C, vì khi đó $U_{AM}$ vuông pha $U_{MB}$
+ R và cuộn thuần cảm L, vì khi đó $U_{AM}$ vuông pha $U_{MB}$.
+ Cuộn thuần cảm L và tụ điện C, vì khi đó $U_{AM}$ ngược pha $U_{MB}$.
+ Cuộn cảm có điện trở thuần và điện trở thuần R, vì khi đó góc lệch pha giữa $U_{AB}$ và $U_{MB}$ là góc nhọn.

Do đó, đoạn AB có thể chứa cuộn cảm có điện trở thuần r, độ tự cảm L và tụ điện C.

* Khả năng 1: hộp X chứa tụ điện, Y chứa cuộn cảm(r,L).

Khi $f = 50Hz$, ta thấy $U_C = 200V; U_{MB}^2 = U_r^2 + U_L^2 = (100\sqrt{3})^2 \rightarrow U_L < U_C \rightarrow Z_L < Z_C$

dễ thấy khi tăng tần số lên quá 50Hz thì $Z_L$ tăng $Z_C$ giảm, đến lúc $Z_L = Z_C$ thì dòng điện hiệu dụng mới đạt cực đại, nghĩa là tăng tần số lên quá 50Hz thì I tăng, trái gt.
Do đó, khả năng này bị loại.

* Khả năng 2 : hộp X chứa cuộn cảm(r,L) và hộp Y chứa tụ C.

+ Khi $f = 50Hz$, ta có hệ: $\begin{cases} U_C = 100\sqrt{3}V \\ U_{AM}^2 = U_r^2 + U_L^2 = 200^2 \\ U_{AB}^2 = U_r^2 + (U_L - U_C)^2 = 100^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} U_C = 100\sqrt{3}V \\ U_L = 100\sqrt{3}V \\ U_r = 100V \end{cases}$

$$\rightarrow \begin{cases} Z_C = 50\sqrt{3}\Omega \\ Z_L = 50\sqrt{3}\Omega \\ r = 50\Omega \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C = 10^{-3}/5\sqrt{3}\pi(F) \\ L = 0,5\sqrt{3}/\pi(H) \\ r = 50(\Omega) \end{cases}$$

+ Dễ thấy lúc $f = 50Hz$ thì xảy ra cộng hưởng, $I_{max}$= U/R nên nếu tăng f lên quá 50Hz thì I giảm thoả mãn gt.

Vậy: hộp X chứa cuộn cảm có $r = 50(\Omega); L = 0,5\sqrt{3}/\pi(H)$ và hộp Y chứa tụ $C = 10^{-3}/5\sqrt{3}(F)$

**Bài 13.**

+ $U_C = I.Z_C = \dfrac{U}{\omega C\sqrt{R^2+(\omega L-\dfrac{1}{\omega C})^2}} = \dfrac{U}{C\sqrt{\omega^2(R^2+\omega^2L^2+\dfrac{1}{\omega^2C^2}-2\dfrac{L}{C})}} = \dfrac{U}{\sqrt{y}}$

$U_C$ cực đại ↔ khi y = $L^2\omega^4 + (R^2 - 2\dfrac{L}{C})\omega^2 + \dfrac{1}{C^2}$ cực tiểu

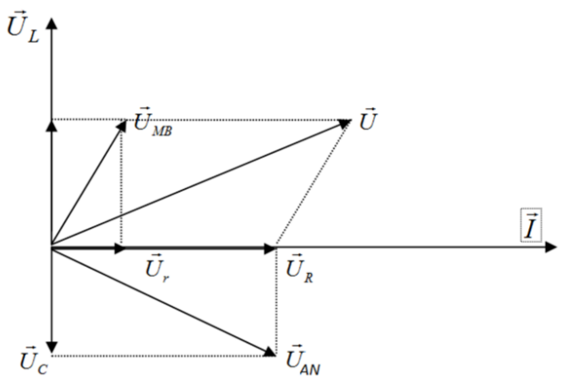
$$\leftrightarrow \omega^2 = \frac{2\dfrac{L}{C}-R^2}{2L^2} = \frac{1}{L^2}\left(\frac{L}{C}-\frac{R^2}{2}\right)\ (1)$$

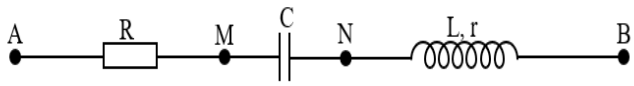
+ Từ (1) $\longrightarrow (\omega L)^2 = \dfrac{\omega L}{\omega C} - \dfrac{R^2}{2}$

$\longrightarrow \tan\varphi = \dfrac{Z_L - Z_C}{R} = -\dfrac{1}{2}.\dfrac{R}{Z_L} = -\dfrac{1}{2}.\dfrac{U_R}{U_L} = -\dfrac{3}{2}$

$\longrightarrow \cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}} = \dfrac{2}{\sqrt{13}} \approx 0,55$

**Bài 14.** Từ giản đồ ta có




$U_R^2 = U_{MB}^2 + U^2 - 2U_{MB}U\cos\dfrac{\pi}{6} = 120^2$ Suy ra $U_{MB} = 120(V)$( loại nghiệm $U_{MB} = 240(V)$ )

- Từ giản đồ suy ra độ lệch pha giữa u và i là $\dfrac{\pi}{6}$, giữa $u_{MB}$ so với i là $\dfrac{\pi}{3}$. Nên

$U_r = U_{MB}.\cos\dfrac{\pi}{3} = 60(V)$, $U_L - U_C = U_{MB}.\sin\dfrac{\pi}{3} = 60\sqrt{3}(V)$

$$U_C = U_R\tan\frac{\pi}{6} = 40\sqrt{3}\text{ (V) suy ra } U_L = 100\sqrt{3}(V).$$

- Mặt khác $P = I^2(R+r) = I(U_R+U_r) \Rightarrow I = \dfrac{P}{U_R+U_r} = 2(A)$

- Vậy $R = \dfrac{U_R}{I} = 60(\Omega)$; $r = \dfrac{U_r}{I} = 30(\Omega), Z_L = \dfrac{U_L}{I} = 50\sqrt{3}(\Omega) \Rightarrow L = \dfrac{0,5\sqrt{3}}{\pi}(H)$

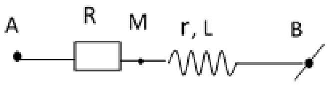
$$Z_C = \frac{U_C}{I} = 20\sqrt{3}(\Omega) \Rightarrow C = \frac{10^{-3}}{2\pi\sqrt{3}}(F).$$

b. $U_{MB} = \dfrac{U\sqrt{r^2+(Z_L-Z_C)^2}}{\sqrt{(R+r)^2+(Z_L-Z_C)^2}} = \dfrac{U}{\sqrt{1+\dfrac{R^2+2Rr}{r^2+(Z_L-Z_C)^2}}}$

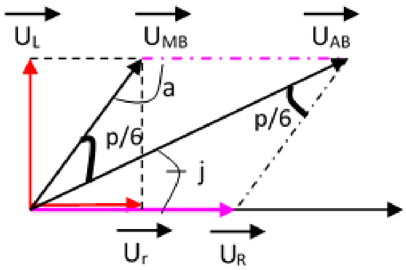
- Để $U_{MB}$ đạt cực tiểu thì $\dfrac{R^2+2Rr}{r^2+(Z_L-Z_C)^2}$ đạt cực đại tức là $r^2+(Z_L-Z_C)^2$ đạt cực tiểu nghĩa là $Z_L-Z_C=0 \Leftrightarrow Z_L=Z_C \Rightarrow f_2=\dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}=31{,}6(Hz)$

- Khi đó $U_{MB\min}=\dfrac{U}{\sqrt{1+\dfrac{R^2+2Rr}{r^2}}}=40\sqrt{3}(V)$

**Bài 15.** a. Khi k đóng mạch dạng.




ta cú giản đồ vec to:




Theo gian đồ ta được:

$\dfrac{U_{AB}}{\sin\alpha}=\dfrac{U_R}{\sin\pi/6}\rightarrow \sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\rightarrow \alpha=2\pi/3\rightarrow \varphi=\pi/6$

Và $U_L=U_{AB}\sin\varphi=60V$

$U_R+U_r=U_{AB}\cos\varphi \rightarrow U_r=20\sqrt{3}$ V

Do đoạn mạch AM thì u và i cựng pha nờn : $u_{AM}=40\sqrt{6}\cos(100\pi t-\pi/6)$

b. Khi k mở mạch có dạng đầy đủ.

Khi k đúng ta được : $\begin{cases}\dfrac{U_r}{U_L}=\dfrac{r}{Z_L}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\rightarrow Z_L=\sqrt{3}r \\ \dfrac{U_R}{Ur}=\dfrac{R}{r}=2\rightarrow R=2r\end{cases}$ (1)

Khi k mở ta được: $(\dfrac{U_{AB}}{U_{AM}})^2=\dfrac{9}{7}=\dfrac{(R+r)^2+(Z_L-Z_C)^2}{R^2+Z_C^2}$ (2)

Trong đó $Z_c=30\ \Omega$ (3)

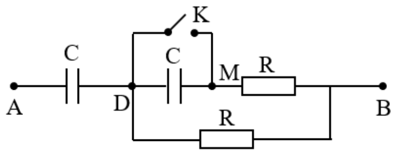
Giải hệ 1 ; 2 và 3 ta được $r=10\sqrt{3}\ \Omega$; $Z_L=30\ \Omega$; $R=20\sqrt{3}\ \Omega$

**Bài 16.**

a)Tính m để $\cos\varphi = 0{,}5$

+Vì khi K đóng : mạch điện cấu tạo : C nt (R // R) .

+Lúc đó : $\cos\varphi = \dfrac{\frac{R}{2}}{\sqrt{(\frac{R}{2})^2+Z_C^2}}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow R^2=\dfrac{R^2}{4}+Z_C^2$

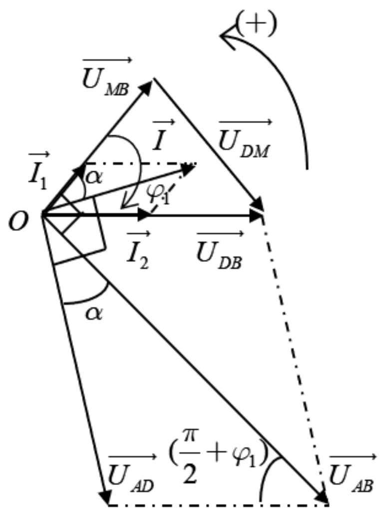



+Suy ra : $Z_C^2=\dfrac{3}{4}R^2\Rightarrow Z_C=\dfrac{\sqrt{3}}{2}R\Rightarrow mR=\dfrac{\sqrt{3}}{2}R\Rightarrow m=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b)+Nhánh (1) :

$\sin\varphi_1=\dfrac{-Z_C}{\sqrt{R^2+Z_C^2}};\cos\varphi_1=\dfrac{R}{\sqrt{R^2+Z_C^2}};\varphi_1<0$ (1)

$\varphi_1$ là góc lệch pha của $\vec{U}_{DB}$ so với $\vec{I}_1$




+Trong tam giác vectơ dòng ta có :

$I^2 = I_1^2 + I_2^2 + 2I_1I_2\cos\varphi_1$ (2)

Và $U_{DB} = I_1\sqrt{R^2+Z_C^2} = I_2R$ (3)

+Suy ra $I_1 = \dfrac{RI_2}{\sqrt{R^2+Z_C^2}}$

+Thay vào (2) được :

$$I^2 = I_2^2\frac{R^2}{R^2+Z_C^2} + I_2^2 + 2\frac{RI_2^2}{\sqrt{R^2+Z_C^2}}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2+Z_C^2}}$$

$$\Leftrightarrow I^2 = I_2^2\left(\frac{4R^2+Z_C^2}{R^2+Z_C^2}\right) \Rightarrow I = I_2\sqrt{\frac{4R^2+Z_C^2}{R^2+Z_C^2}} \quad (4)$$

+Áp dụng định lý hình sin cho tam giác dòng, ta có: $\dfrac{I_2}{\sin\alpha} = \dfrac{I}{\sin(-\varphi_1)}$ (5)

+Áp dụng định lý hình sin cho tam giác thế, ta có:

$$\frac{U_{DB}}{\sin\alpha} = \frac{U_{AD}}{\sin(\frac{\pi}{2}+\varphi_1)} = \frac{U_{AD}}{\cos\varphi_1} \quad (6)$$

+Từ (5) và (6), suy ra: $\sin\alpha = \dfrac{I_2}{I}\cdot\sin(-\varphi_1) = \dfrac{U_{DB}}{U_{AD}}\cdot\cos\varphi_1$

$$\Rightarrow \frac{I_2}{I}\cdot\frac{Z_C}{\sqrt{R^2+Z_C^2}} = \frac{I_2R}{IZ_C}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2+Z_C^2}}$$

+Suy ra: $Z_C = R \Rightarrow mR = R \Rightarrow m = 1$

+Khi m = 1 thì $Z_C$ = R, ta có:

$$\begin{cases} U_{MB} = I_1R \\ U_{AB} = U_{AD}\cdot\cos\alpha + U_{DB}\cdot\cos(\frac{\pi}{2}+\varphi_1) = IZ_C\cdot\cos\alpha + I_2R\cdot\cos(\frac{\pi}{2}+\varphi_1) \end{cases}$$

+Vì: $\begin{cases} I = I_2\sqrt{\frac{5}{2}};\ I_1 = \frac{I_2}{\sqrt{2}};\ \sin\alpha = \frac{I_2}{I}\sin(-\varphi_1) = \sqrt{\frac{2}{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \cos\alpha = \sqrt{1-\frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}};\ \cos(\frac{\pi}{2}+\varphi_1) = -\sin\varphi_1 = \sin(-\varphi_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

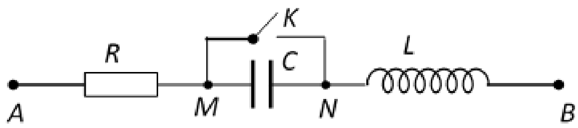
+Suy ra: $\dfrac{U_{MB}}{U_{AB}} = \dfrac{I_1}{I_2\sqrt{\frac{5}{2}}\cdot\cos\alpha + I_2\cos(\frac{\pi}{2}+\varphi_1)} = \dfrac{\frac{I_2}{\sqrt{2}}}{I_2\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \dfrac{1}{3}$

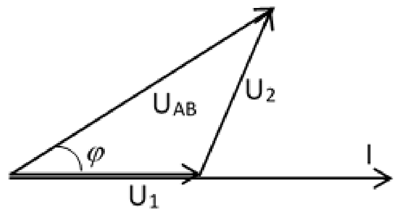
$$\Rightarrow U_{MB} = U_{AB}\cdot\frac{1}{3} = \frac{120}{3} = 40(V)$$

**Bài 17.**

1. Tính hệ số công suất và viết biểu thức của điện áp hai đầu R

+ Khi khoá K đóng, tụ C bị nối tắt




Áp dụng định lí hàm số cosin: hệ số công suất của đoạn mạch: $\cos\varphi = \frac{U_1^2 + U_{AB}^2 - U_2^2}{2.U_1.U_{AB}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Suy ra $u_{AM}$ trễ pha $\pi/4$ so với $u_{AB}$ nên:

$u_{AM} = 40\sqrt{2}\cos(100\pi t - \pi/4)(V)$

2. Tính R; L

+ Dung kháng của tụ điện: $Z_C = \frac{1}{\omega C} = 10(\Omega)$

+ Từ giản đồ véc tơ, ta còn có: $U_R + U_r = U_{AB}.\cos(\pi/4) = 60 \rightarrow U_r = 20V$

$U_L = U_{AB}.\sin\pi/4 = 60V$, suy ra:

$R = 2r; Z_L = 3r$ ……

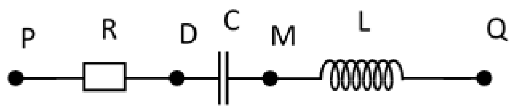
+ Khi khoá K mở, mạch có thêm tụ điện, lúc này điện áp hiệu dụng giữa hai điểm M, B:

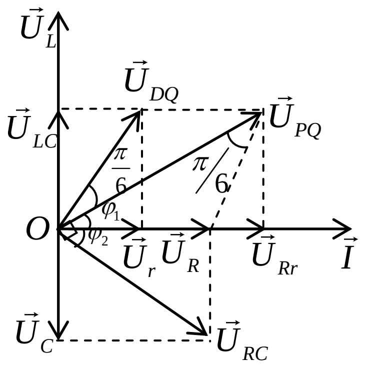
$U_{MB} = I.\sqrt{r^2 + (Z_L - Z_C)^2} = \frac{U_{AB}.\sqrt{r^2 + (Z_L - Z_C)^2}}{\sqrt{(R+r)^2 + (Z_L - Z_C)^2}} = 12\sqrt{10}(V)$, thay R=2r; $Z_L$=3r

vào ta được: $\frac{60\sqrt{2}.\sqrt{r^2 + (3r-10)^2}}{\sqrt{(3r)^2 + (3r-10)^2}} = 12\sqrt{10} \rightarrow r = 5(\Omega)$

Từ đó suy ra: $R = 10\Omega; Z_L = 15\Omega \rightarrow L = 0{,}15/\pi(H)$

**Bài 18.** a. Từ bài ra có giản đồ véc tơ và mạch này có tính cảm kháng.




+ Từ giản đồ véc tơ ta có:

$\vec{U}_R = \vec{U}_{PQ} - \vec{U}_{DQ}$

$\Rightarrow U_R^2 = U_{PQ}^2 + U_{DQ}^2 - 2U_{PQ}.U_{DQ}.Cos\frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow R^2 = Z_{PQ}^2 + Z_{DQ}^2 - Z_{PQ}^2.Z_{DQ}^2.\sqrt{3}$

+ Thay số: $R = 80\Omega;\ Z_{PQ} = \frac{U_{PQ}}{I} = 80\sqrt{3}\Omega$

Ta được: $Z_{DQ} = 80\,\Omega$ = R hoặc $Z_{DQ} = 160\,\Omega$

Loại nghiệm $Z_{DQ} = 160\,\Omega$ (vì $\varphi_1 < \frac{\pi}{2}$ nên $U_{QD} < U_{QP}$)

+ Vì $Z_{DQ} = 80\,\Omega$ = R nên $\varphi_1 = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \varphi_2 = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \tan\varphi_2 = \frac{Z_C}{R} = \sqrt{3} \Rightarrow Z_C = 80\sqrt{3}\Omega$

Suy ra: C = $\frac{1}{100\pi.80\sqrt{3}} \approx 23.10^{-6}(F) = 23(\mu F)$

+ Mặt khác : $Sin(\frac{\pi}{6}+\varphi_1)=Sin\frac{\pi}{3}=\frac{Z_L-Z_C}{Z_{DQ}}\Rightarrow Z_L=120\sqrt{3}\Omega\Rightarrow L=\frac{120\sqrt{3}}{100\pi}\approx 0,562(H)$

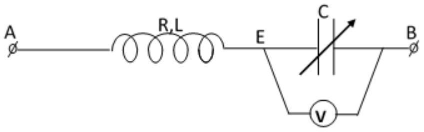
+ $\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}=\frac{Z_L-Z_C}{r}\Rightarrow r=40\Omega$

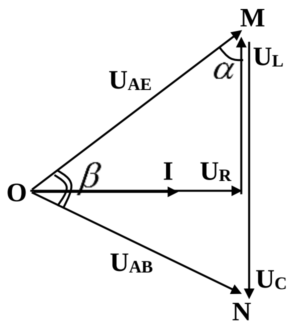
b.

$$P_{PM}=RI^2=\frac{U^2}{\frac{r^2+(Z_L-Z_C)^2}{R}+R+2r}$$

$$\Rightarrow P_{PM_{Max}}\Leftrightarrow\left[\frac{r^2+(Z_L-Z_C)^2}{R}+R+2r\right]_{Min}\Rightarrow R=\sqrt{r^2+(Z_L-Z_C)^2}=80\Omega$$

**Bài 19.**




Vẽ giản đồ véc tơ biểu diễn phương trình

$\vec{U}_{AB}=\vec{U}_R+\vec{U}_L+\vec{U}_C$ trục gốc là $\vec{I}$

Trên giản đồ véc tơ ta có $\tan\alpha=\frac{U_R}{U_L}=\frac{IR}{IZ_L}=\frac{R}{Z_L}=const$

Áp dụng định lý hàm sin với $\Delta OMN$ ta được

$$\frac{ON}{\sin\alpha}=\frac{MN}{\sin\beta}\ \text{hay}\ \frac{U_{AB}}{\sin\alpha}=\frac{U_C}{\sin\beta}$$

$$\Rightarrow U_C=\frac{U_{AB}}{\sin\alpha}.\sin\beta$$

$\Rightarrow$ $U_C$ max khi $\sin\beta=1\Rightarrow\beta=90^0$ : tam giác MON vuông tại O

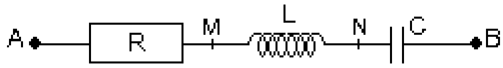
Áp dụng định lý pitago cho $\Delta OMN$ ta được

$U_{AE}=\sqrt{U_{Cmax}^2-U_{AB}^2}=\sqrt{100^2-60^2}=80V$ và $U_{AE}$ nhanh pha hơn $U_{AB}$ 1 góc $90^0$

Vậy biểu thức $U_{AE}$ là

$$u_{AE}=80\sqrt{2}\cos\left(100\pi t+\frac{\pi}{3}\right)\ (V)$$

**Bài 20.**




Đặt U, $U_1$, $\Delta U$, $I_1$, $\Delta P_1$ là điện áp nguồn, điện áp ở tải tiêu thụ, độ giảm điện áp trên đường dây, dòng điện hiệu dụng và công suất hao phí trên đường dây lúc đầu.

U', $U_2$, $\Delta U'$, $I_2$, $\Delta P_2$ là điện áp nguồn, điện áp ở tải tiêu thụ, độ giảm điện áp trên đường dây, dòng điện hiệu dụng và công suất hao phí trên đường dây lúc sau.

Ta có: $\frac{\Delta P_2}{\Delta P_1}=\left(\frac{I_2}{I_1}\right)^2=\frac{1}{100}\Rightarrow\frac{I_2}{I_1}=\frac{1}{10}\Rightarrow\frac{\Delta U'}{\Delta U}=\frac{1}{10}$

Theo đề ra: $\Delta U=0,15.U_1\Rightarrow\Delta U'=\frac{0,15U_1}{10}$ (1)

• Vì u và i cùng pha và công suất nơi tiêu thụ nhận được không đổi nên:

$U_1.I_1 = U_2.I_2 \Rightarrow \frac{U_2}{U_1} = \frac{I_1}{I_2} = 10 \Rightarrow U_2 = 10U_1$ (2)

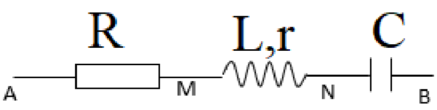
• (1) và (2):

$$\begin{cases} U = U_1 + \Delta U = (0,15 + 1).U_1 \\ U' = U_2 + \Delta U' = 10.U_1 + \frac{0,15.U_1}{10} = (10 + \frac{0,15}{10}).U_1 \end{cases}$$

• Do đó: $\frac{U'}{U} = \frac{10+\frac{0,15}{10}}{0,15+1} = 8,7$

**Bài 21.**

1) Tính r :




- Ta có : $\varphi_{AN} + \varphi_{MB} = \pi/2$ . Suy ra : $tg\varphi_{AN} = -\frac{1}{tg\varphi_{MB}}$ , từ đó

: $\frac{Z_L}{R+r} = \frac{r}{Z_C - Z_L}$ .

Vậy : $Z_L(Z_C - Z_L) = r(R + r)$, hay : $U_L^2(U_C - U_L) = U_r(U_R + U_r)$ (1)

Mặt khác : $U_{AN}^2 = (U_r + U_R)^2 + U_L^2$ (2)

Và : $U_{MB}^2 = U_r^2 + (U_L - U_C)^2$ (3)

Từ (1), ta rút ra : $(U_R + U_r)^2 = \frac{U_L^2}{U_r^2}(U_C - U_L)^2$ (4)

Thay (4) vào (2) : $U_{AN}^2 = \frac{U_L^2}{U_r^2}(U_C - U_L)^2 + U_L^2 = \frac{U_L^2}{U_r^2}\left[(U_C - U_L)^2 + U_r^2\right]$ (5)

Thay (3) vào (5), ta được : $U_{AN}^2 = \left(\frac{U_L}{U_r}\right)^2 .U_{MB}^2$

Biến đổi ta có : $\frac{U_L}{U_r} = \frac{300}{60\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}}$ , suy ra : r = $Z_L.\frac{\sqrt{3}}{5} = \frac{100\sqrt{3}}{5\sqrt{3}} = 20\Omega$ (6)

**2) Biểu thức $u_{AN}$ : (1,0điểm)**

- Ta có : $u_{AN} = U_{0AN}\sin(100\pi t + \phi_{u_{AN}})$.

+ Biên độ : $U_{0AN} = 300\sqrt{2}$ (V)

+ Pha ban đầu : $\varphi_{u_{AN}} = \varphi_i + \varphi_{AN} = \varphi_u - \varphi + \varphi_{AN} = -\varphi + \varphi_{AN}$ (7)

Do đó : $tg\varphi = \frac{Z_L - Z_C}{R+r}$ (8)

Từ mục 1), ta có : R + r = $Z_L(Z_C - Z_L)/r$ = $\frac{\frac{100}{\sqrt{3}}\left(\frac{160}{\sqrt{3}} - \frac{100}{\sqrt{3}}\right)}{20} = 100\Omega$

Suy ra : R = 80Ω (9)

Thay vào (8), ta tính được : tgφ = - 0,346 → φ = $-19^0$ (10)

Ta lại có : $tg\phi_{AN} = \frac{Z_L}{R+r} = \frac{100}{\sqrt{3100}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \phi_{AN} = 30^0$ (11)

Vậy : $\phi_{u_{AN}} = 19^0 + 30^0 = 49^0 = \frac{49\pi}{180}(rad)$ (12)

- Biểu thức : $u_{AN} = 300\sqrt{2}\sin(100\pi t + \frac{49\pi}{180})(V)$ (13)

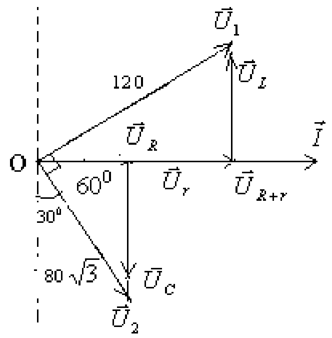
**Bài 22.** a. Xác định giá trị R ; L ;C

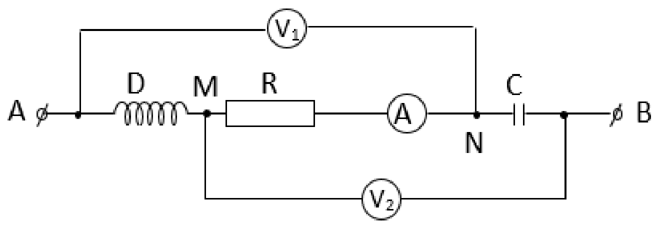
•Vẽ giãn đồ véc tơ đúng

• R = $U_R$/I = $U_2\cos 60^0$ / I = 40Ω

• $Z_C = U_C/I = U_2\cos 30^0/I = 40\sqrt{3}\,\Omega \Rightarrow C \approx 4{,}59.10^{-5} F$

• $Z_L = U_L/I = U_1\sin 30^0/I = 20\sqrt{3}\,\Omega \Rightarrow L \approx 0{,}11H$




b. Xác định $U_0$ và viết biểu thức i

• Từ GĐVT : $\vec{U} = \vec{U}_1 + \vec{U}_C$ . Áp dụng định lý hàm số cosin ta được :

$$U^2 = U_1^2 + U_C^2 + 2U_1.U_C.\cos 120^0$$

Thay số và tính toán ta được: U = 120V => $U_0 = 120\sqrt{2}$ (V)

• Lập luận để ⇒ φ = -π/6

⇒ i = $\sqrt{6}\cos(100\pi t + \pi/6)$ (A)

**Bài 23.** Dòng điện ban đầu:

$$I_1 = \frac{U}{Z_C} = U\omega C.$$

Khi nối tiếp thêm cuộn dây có độ tự cảm L thì số chỉ của ampe kế là:

$$I_2 = \frac{U}{|Z_C - Z_L|} = \frac{U}{|1/(\omega C) - \omega L|}.$$

Để tăng cường độ dòng điện lên hai lần, tức là giảm tổng trở của mạch xuống còn một nửa giá trị ban đầu thì có thể có hai khả năng:

* Khả năng thứ nhất ứng với độ tự cảm $L_1$:

$$\frac{1}{\omega C} - \omega L_1 = \frac{1}{2\omega C}.$$

Khí đó:

$$\omega^2 L_1 C = 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad L_1 = \frac{1}{2\omega^2 C} \approx 0{,}5(H).$$

* Khả năng thứ hai ứng với độ tự cảm $L_2$:

$$\omega L_2 - \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\omega C}.$$

Khí đó:

$$\omega^2 L_2 C = 1{,}5 \quad \Rightarrow \quad L_2 = 3L_1 = 1{,}5(H).$$

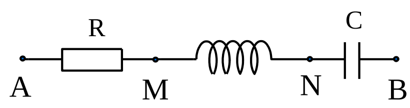
Để giảm cường độ dòng điện xuống còn một nửa ban đầu, tức là tăng tổng trở của mạch lên gấp đôi, ứng với độ tự cảm $L_3$:

$$\omega L_3 - \frac{1}{\omega C} = \frac{2}{\omega C}.$$

Ta tìm được: $\omega^2 L_3 C = 3 \quad \Rightarrow \quad L_3 = 6L_1 = 3(H)$.

**Bài 24.** Theo giả thiết có : $U_{AB} = \dfrac{175\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 175\,(V)$.

- Gọi r là điện trở nội của cuộn cảm. Giả sử r = 0, ta có :




$$U_{AB} = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} = \sqrt{25^2 + (25 - 175)^2} = 25\sqrt{37} \neq 175 \Rightarrow r > 0.$$

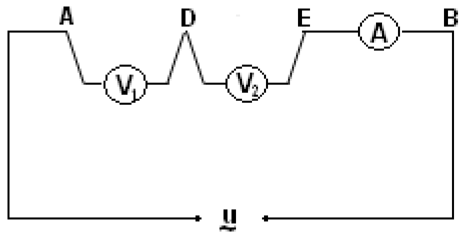
- Ta có : $U_{MN}^2 = U_L^2 + U_r^2 = 25^2 \quad (1)$
- Mặt khác ta có : $U_{AB}^2 = (U_R + U_r)^2 + (U_L - U_C)^2 = U_R^2 + 2U_R U_r + U_r^2 + U_L^2 + U_C^2 - 2U_L U_C$

$$= U_R^2 + 2U_R U_r + U_{MN}^2 + U_C^2 - 2U_L U_C = 175^2$$

$$\Rightarrow 7U_L - U_r = 25 \qquad (2)$$

- Giải hệ phương trình (1) và (2) : $U_L = 7\,(V)$ và $U_r = 24\,(V)$
- Hệ số công suất của đoạn mạch : $\cos\varphi = \dfrac{U_R + U_r}{U_{AB}} = \dfrac{25 + 24}{175} = 0{,}28$

**Bài 25.** 1. Ta có giãn đồ véc tơ như hình vẽ :




* Nhận xét :

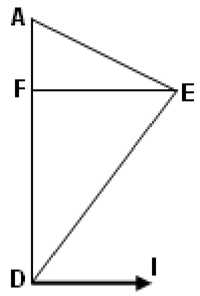
- Dòng i nhanh pha $\frac{\pi}{2}$ so với $u_{AD}$ và chậm pha $\frac{\pi}{2}$ so với $u_{DF}$.
- Tam giác ADE có các cạnh 200 (V), $100\sqrt{3}$ (V) và 100 (V) nên ADE là nửa tam giác đều

+ $U_{AE}$ = I.Z = 1.Z $\Rightarrow$ Z = 100 ($\Omega$).

+ $\sin\hat{A} = \dfrac{U_{EF}}{U_{AE}} \Rightarrow U_{EF} = U_{AE}.\sin\hat{A} = 100.\sin 60^0 = 100.\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow$ I.R = $100.\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow R = 50\sqrt{3}$ ($\Omega$).

+ Ta có : $\cos\hat{D} = \dfrac{U_{DF}}{U_{DE}} \Rightarrow U_{DF} = U_{DE}\cos\hat{D} = 100\sqrt{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 150$ (V)




$\Leftrightarrow I.Z_L = 150 \Rightarrow Z_L = 150$ ($\Omega$).

$\Leftrightarrow L.2\pi f_0 = 150$

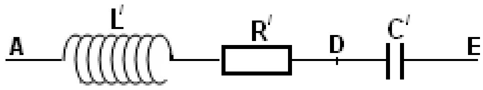
$\Rightarrow L = \dfrac{150}{500\pi} = \dfrac{0,3}{\pi}$ (H).

+ $U_{AD} = I.Z_C \Rightarrow Z_C = 200$ ($\Omega$

Mà $C = \dfrac{1}{Z_C 2\pi f_0} = \dfrac{1}{200.500\pi} = \dfrac{10^{-5}}{\pi}$ (F).

2. a :Tìm các giá trị $R'$, $L'$, $C'$ (nếu có) của mạch và độ lệch pha giữa $u_{AD}$ và $u_{DE}$.

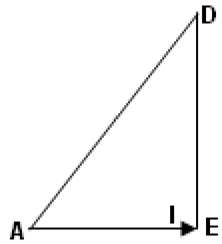
* Khi tăng hoặc giảm tần số f thì dòng điện đều giảm, chứng tỏ dòng điện cực đại ở tần số $f_0$, ngĩa là có cộng hưởng. Vậy phải mắc cuộn cảm vào hai chốt A, D và mắc tụ điện vào hai chốt D, E để có cộng hưởng thì tổng trở rút về điện trở $R'$.




- Ta có giản đồ véctơ như hình bên :

+ $R' = \dfrac{U_{AE}}{I} = \dfrac{100}{1} = 100$ ($\Omega$).

+ $Z_{L'} = Z_{C'} = \dfrac{U_2}{I} = \dfrac{100\sqrt{3}}{1} = 100\sqrt{3}$ ($\Omega$).




+ $L' = \dfrac{Z_{L'}}{2\pi f_0} = \dfrac{100\sqrt{3}}{500\pi} = \dfrac{\sqrt{3}}{5\pi}$ (H).

+ $C' = \dfrac{1}{Z_{C'} 2\pi f_0} = \dfrac{1}{100\sqrt{3}.500\pi} = \dfrac{10^{-4}}{5\sqrt{3}.\pi}$ (F)

* Độ lệch pha giữa $u_{AD}$ và $u_{DE}$ :

- Dòng điện nhanh pha $\dfrac{\pi}{2}$ so với $u_{DE}$ và chậm pha $\dfrac{\pi}{3}$ so với $u_{AD}$ nên độ lệch pha giữa $u_{AD}$ và $u_{DE}$ là $\dfrac{5\pi}{6}$.

* Nếu đổi vị trí cuộn cảm và tụ điện thì ta trở lại sơ đồ ở câu 1(không có hiện tượng cộng hưởng xãy ra).

2.b.Giữ nguyên tần số $f = f_0 = 250$ Hz và mắc thêm hai linh kiện nữa giống hệt hai linh kiện của câu **2a** vào mạch. Hỏi phải mắc thế nào để thỏa mãn; số chỉ của các vôn kế vẫn như trước, nhưng số chỉ của ampe kế giảm đi một nửa. Trong trường hợp đó, nếu thay đổi tần số f của nguồn điện thì số chỉ của ampe kế thay đổi như thế nào ?

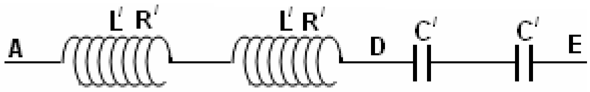
* Để dòng điện giảm đi một nửa ta mắc các linh kiện theo sơ đồ như hình vẽ : 0.5 điểm

Theo sơ đồ này ta có :

$R = 2R'$

$L = 2L' \Rightarrow Z_L = 2L' 2\pi f_0$

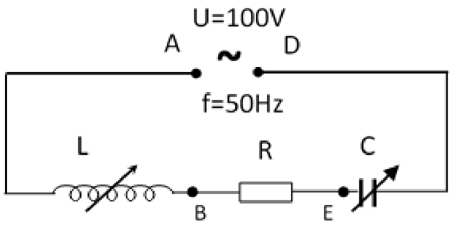
$C = \dfrac{C'}{2} \Rightarrow Z_C = \dfrac{2}{C' 2\pi f_0}$




Vì $Z_L{}' = Z_C{}'$ nên trong mạch xãy ra cộng hưởng $\Rightarrow$ Nếu thay đổi tần số f thì dòng điện sẽ giảm.

## Bài 26.

**a)**+ Ta có : $Z_L = L.2\pi.f = \dfrac{1}{\pi}\cdot 2\pi \cdot 50 = 100\Omega$ + Khi $K^2 = 4 \Rightarrow P = 4\sqrt{Z_L \cdot Z_C}$ (1)




+ Vì mạch RLC nối tiếp có $I_{max}$ nên cộng hưởng xảy ra

$\Rightarrow Z_L = Z_C = 100\Omega$ (2)

Do đó : $C = \dfrac{1}{Z_C \cdot \omega} = \dfrac{1}{100 \cdot 100\pi} = \dfrac{10^{-4}}{\pi}(F)$

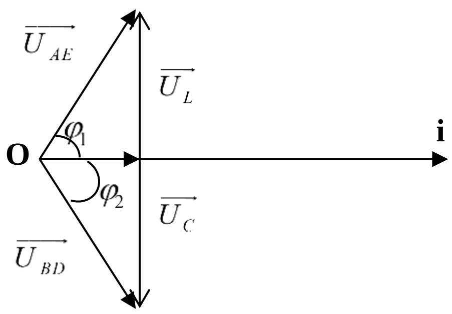
+Từ (1) và (2), được : $P = 4Z_L = 400(W)$

+ Mặt khác : $P = R \cdot I^2$, với $I = I_{max} = \dfrac{U}{Z_{min}} = \dfrac{U}{R}$ nên $P = \dfrac{U^2}{R} \Rightarrow R = \dfrac{U^2}{P} = \dfrac{100^2}{400} = 25\Omega$

**b)**+ Giản đồ véc tơ vẽ được :

+Suy ra : $\varphi_{u_{AE}} - \varphi_{u_{BD}} = \varphi_1 + |\varphi_2| = 152^0 = \dfrac{38\pi}{45}$

$R = \sqrt{Z_L \cdot Z_C} \Leftrightarrow R^2 = Z_L \cdot Z_C \Leftrightarrow R^2 = \dfrac{L}{C}$




+Từ giản đồ véc tơ suy ra : $\varphi_1 = |\varphi_2|$

Với : $\tan\varphi_1 = \dfrac{U_L}{U_R} = \dfrac{Z_L}{R} = \dfrac{100}{25} = 4 \Rightarrow \varphi_1 \approx 76^0$

+ Ta biết : $\begin{cases} P = R \cdot I^2 \\ P = K^2 \cdot \sqrt{Z_L \cdot Z_C} \end{cases}$ nên khi I = K, ta suy ra :

+Lúc này có: $\begin{cases} \tan\varphi_1 = \dfrac{Z_L}{R} \\ \tan|\varphi_2| = \dfrac{Z_C}{R} \end{cases} \Rightarrow \tan\varphi_1 \cdot \tan|\varphi_2| = \dfrac{Z_L \cdot Z_C}{R^2} = 1$

+Suy ra: $\varphi = \varphi_{u_{AE}} - \varphi_{u_{BD}} = \varphi_1 + |\varphi_2| = \dfrac{\pi}{2}$

## Bài 27.

Ta có: Z = U/I = 130 $\Omega$.

Mặt khác: $r^2 + (Z_{L1} + Z_{L2})^2 = Z^2 \Rightarrow (L_1 + L_2)^2 = \dfrac{Z^2 - r^2}{\omega^2}$

→ $L_1 + L_2 = \dfrac{1{,}2}{\pi}$

Khi mắc thêm tụ C vào mạch, lúc này:

$U_{day2} = I.Z_{day2} = \dfrac{U}{Z}.Z_{day2} = \dfrac{U}{\sqrt{r^2 + (Z_L^* - Z_C)^2}} Z_{day2}$

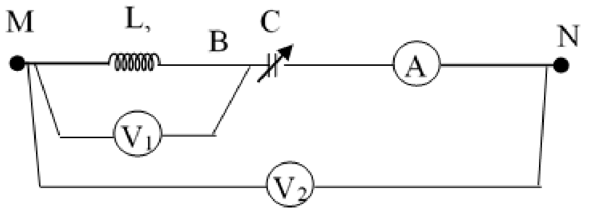
Để điện áp giữa hai đầu cuộn dây 2 đạt cực tiểu, tức là trong mạch có cộng hưởng

$Z_L^* = Z_C \Rightarrow \dfrac{1}{C\omega} = (L_1 + L_2)\omega$

Thay số tìm được C=$\dfrac{10^{-3}}{12\pi}$F

## Bài 28.

Mạch điện được vẽ lại :




Ta có : $Z_L = L\omega = 90(\Omega)$

+ Gianr đồ véc tơ:

Từ giản đồ véc tơ ta có:

+ $tg\varphi_1 = \dfrac{U_L}{U_r} = \dfrac{Z_L}{r} = 1 \Rightarrow \varphi_1 = \dfrac{\pi}{4}$.

+ $\dfrac{U_{MN}}{\sin\alpha} = \dfrac{U_C}{\sin(\varphi_1 + \varphi)} \Rightarrow U_C = \dfrac{U_{MN}.\sin(\varphi_1 + \varphi)}{\sin\alpha}$

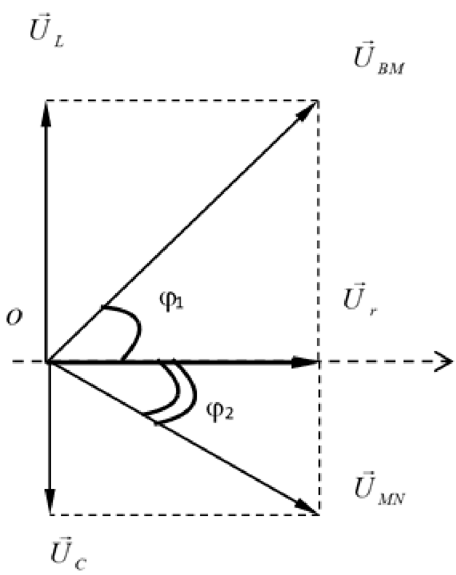
Mà $\alpha = \dfrac{\pi}{2} - \varphi_1 = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4}$

$\Rightarrow U_C = \dfrac{U_{MN}\sin(\varphi_1 + \varphi)}{\sin\dfrac{\pi}{4}} = \sqrt{2}U_{MN}\sin(\varphi_1 + \varphi)$

Nhận xét: $U_C$ cực đại khi $\sin(\varphi_1 + \varphi) = 1 \Rightarrow \varphi_1 + \varphi = \dfrac{\pi}{2}$=1

Theo bài ra: Hiệu điện thế trên các vôn kế lệch pha nhau $\dfrac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow (\vec{U}_{BM}, \vec{U}_{MN}) = \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow \varphi_1 + \varphi_2 = \dfrac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$Điều phải chứng minh

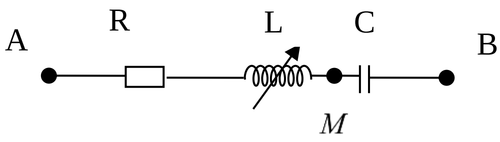



## Bài 29.

Dung kháng: $Z_C = \dfrac{1}{\omega C} = 200(\Omega)$

Tổng trở : $Z=\sqrt{R^2+(Z_L-Z_C)^2}; Z_{AM}=\sqrt{R^2+Z_L^{\ 2}}$

Ta có : $U_{AM}=I.Z_{AM}=\dfrac{U}{Z}.Z_{AM}$




$$\Leftrightarrow U_{AM}=\frac{U}{\sqrt{\dfrac{R^2+Z_L^{\ 2}-2Z_CZ_L+Z_C^{\ 2}}{R^2+Z_L^{\ 2}}}}=\frac{U}{\sqrt{1+\dfrac{Z_C^{\ 2}-2Z_CZ_L}{R^2+Z_L^{\ 2}}}}$$

Đặt y = $1+\dfrac{Z_C^{\ 2}-2Z_CZ_L}{R^2+Z_L^{\ 2}}$

Nhận xét: $U_{AM}$ cực đại $\Leftrightarrow y=y_{\min}$

$y'=\dfrac{2Z_C(Z_L^{\ 2}-Z_CZ_L-R^2}{(R^2+Z_L^{\ 2})^2}$. $y'=0\Leftrightarrow Z_L^{\ 2}-Z_CZ_L-R^2=0$

$\Leftrightarrow Z_L=\dfrac{Z_C+\sqrt{Z_C^{\ 2}+4R^2}}{2}=241(\Omega)$ hoặc $Z_L=\dfrac{Z_C-\sqrt{Z_C^{\ 2}+4R^2}}{2}<0$ (loại).

Bảng biến thiên:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $Z_L$ | 0 | 241 | $+\infty$ |
| y' | - | 0 | + |
| y | ↘ | $y_{\min}$ | ↗ |

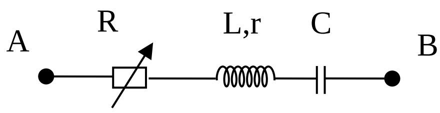
Vậy, khi $Z_L$ = 241($\Omega$) $\Rightarrow$ L = 0,767(H) thì $y_{\min}$ $\Rightarrow U_{AM}$ cực đại.

$$U_{AM\max}=\frac{U(\sqrt{4R^2+Z_C^{\ 2}}+Z_C)}{2R}=482(\Omega).$$

**Bài 30.** a. + Cảm kháng $Z_L=L\omega=100(\Omega)$.

+ Dung kháng: $Z_C=\dfrac{1}{\omega C}=200(\Omega)$.

+ Tổng trở: $Z=\sqrt{R^2+(Z_L-Z_C)^2}$.




+ Công suất : P = $I^2$.R = $\dfrac{U^2}{Z^2}.R=\dfrac{U^2}{R^2+(Z_L-Z_C)^2}.R$

$\Rightarrow P=\dfrac{U^2}{R+\dfrac{(Z_L-Z_C)^2}{R}}$ Đặt $y=R+\dfrac{(Z_L-Z_C)^2}{R}$ $\Rightarrow P=\dfrac{U^2}{y}$

+ Nhận xét: Theo bất đẳng thức côsi $y_{\min}$ $\Leftrightarrow R=|Z_L-Z_C|=100(\Omega)$, lúc đó

$$P_{\max}=\frac{U^2}{2|Z_L-Z_C|}=\frac{U^2}{2.100}=\frac{200^2}{200}=200(W).$$

Vậy $P_{\max}$ = 200(W) khi R = 100 ($\Omega$)

b. + Tổng trở $Z=\sqrt{(R+r)^2+(Z_L-Z_C)^2}$

+ Công suất $P = I^2.R = \frac{U^2}{Z^2}.R = \frac{U^2}{(R+r)^2 + (Z_L - Z_C)^2}.R$

$\Leftrightarrow P = \frac{U^2}{R^2 + 2Rr + r^2 + (Z_L - Z_C)^2}.R = \frac{U^2}{R + 2r + \frac{r^2 + (Z_L - Z_C)^2}{R}}$

Đặt $y = R + 2r + \frac{r^2 + (Z_L - Z_C)^2}{R} \Rightarrow P = \frac{U^2}{y}$.

+Nhận xét: Để $P_{max} \Leftrightarrow y_{min}$.

Theo bất đẳng thức Côsi $y_{min} \Leftrightarrow R = \frac{r^2 + (Z_L - Z_C)^2}{R} \Rightarrow R = \sqrt{r^2 + (Z_L - Z_C)^2}$

$\Rightarrow P_{max} = \frac{U^2}{\sqrt{r^2 + (Z_L - Z_C)^2} + \frac{r^2 + (Z_L - Z_C)^2}{\sqrt{r^2 + (Z_C - Z_C)^2}} + 2r}$

$\Leftrightarrow P_{max} = \frac{U^2}{\sqrt{r^2 + (Z_L - Z_C)^2} + \frac{r^2 + (Z_L - Z_C)^2.\sqrt{r^2 + (Z_L - Z_C)^2}}{\sqrt{r^2 + (Z_L - Z_C)^2}.\sqrt{r^2 + (Z_L - Z_C)^2}} + 2r}$

$\Rightarrow P_{max} = \frac{U^2}{2.\sqrt{r^2 + (Z_L - Z_C)^2} + 2r} \Rightarrow P_{max} = \frac{200^2}{2.(\sqrt{50^2 + (100 - 200)^2} + 50)} = 124(W)$

Vậy để $P_{max}$ = 124(W) thì $R = \sqrt{r^2 + (Z_L - Z_C)^2} = 100(\Omega)$.

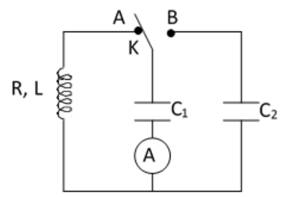
***Mở rộng:** Khi tính P của mạch:

+ Nếu $|Z_L - Z_C| > r$ thì $P_{max}$ khi $R = |Z_L - Z_C| - r$.

+Nếu $|Z_L - Z_C| \le r$ thì $P_{max}$ khi R = 0.

# VII.2. MẠCH ĐIỆN XOAY CHIỀU MẮC HỖN HỢP.

**Bài 1.**



Hình 2

a. Khi K đóng vào A, ta có mạch: $((R,L)//C_1)ntC_2$.

Ta có: $\vec{I} = \vec{I}_A + \vec{I}_R; \vec{U}_{AD} = \vec{U}_{C_1} = \vec{U}_R + \vec{U}_L; \vec{U}_{AD} + \vec{U}_{DB} = \vec{U}_{AB}$

Từ đó ta có giản đồ véctơ:

$Z_L = 100\Omega$; $Z_{C1} = Z_{C2} = 200\ \Omega$

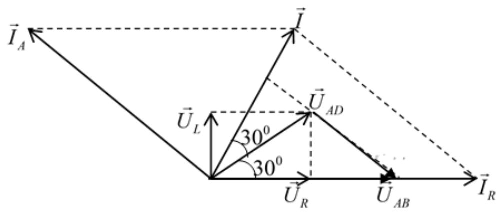
$U_{AD} = 0,5.200 = 100(V)$; $U_L = 100.I_R$

$I^2 = I_A^2 + I_R^2 - 2.I_A I_R.\cos(\vec{U}_L;\vec{U}_{AD}) = I_A^2 + I_R^2 - 2.I_A I_R.\frac{100.I_R}{100} = I_A^2 + I_R^2 - 2.0,5.I_R^2 = I_A^2$

Vì $\vec{U}_L \perp \vec{I}_R; \vec{U}_{AD} \perp \vec{I}_A; I_A = 0,5A;$ Suy ra: $I = I_A = 0,5(A)$ Suy ra $U_{AD} = U_{DB}$

Từ GĐVT, ta có: $(\vec{I};\vec{U}_{AB}) = 60^0 \Rightarrow (\vec{U}_{DB};\vec{U}_{AB}) = 30^0; (\vec{U}_L;\vec{I}) = 30^0$

$\begin{cases} I = I_A \\ (\vec{I};\vec{I}_A - \vec{I}) = 60^0 \end{cases} \Rightarrow (\vec{I};\vec{I}_A) = 60^0 \Rightarrow (\vec{U}_{AD};\vec{I}) = 30^0 \Rightarrow (\vec{U}_{AD};\vec{U}_{AB}) = 30^0 \Rightarrow (\vec{U}_{AD};\vec{U}_{DB}) = 120^0$




$$\Rightarrow \begin{cases} U = U_{AB} = 2.U_{AD}.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 100\sqrt{3}(V) \\ U_L = U_{AD}.\dfrac{1}{2} = 50(V) \Rightarrow I_R = 0,5(A) \\ U_R = U_{AD}.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3}(V) \Rightarrow R = \dfrac{U_R}{I_R} = 100\sqrt{3}(\Omega) \end{cases}$$

b.Đóng k sang B. Mạch gồm (R;L)nt($C_1$//$C_2$)

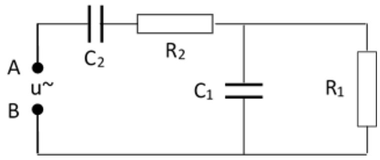
$Z_{C12}$=100 Ω=$Z_L$ nên trong mạch xảy ra cộng hưởng điện.

Do đó: $I = \dfrac{U}{R} = 1(A) \Rightarrow I_A = \dfrac{I}{2} = 0,5(A)$

**Bài 2.**

**a.** - Vẽ giản đồ vectơ (hình vẽ bên)

- Dòng qua $R_2$, $C_2$ là:

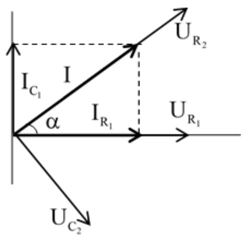



$$I = \sqrt{\left(\frac{U_1}{R_1}\right)^2 + \left(\frac{U_1}{Z_{C_1}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{U_1}{R}\right)^2 + \left(\frac{U_1}{Z_C}\right)^2},$$

$\vec{I}$ có phương trùng với phương của $\vec{U}_{R_2}$.

$\vec{U} = \vec{U}_1 + \vec{U}_{R_2} + \vec{U}_{C_2}$.

Chiếu $\vec{U}$ lên phương $\vec{U}_1$ và phươngvuông góc với $\vec{U}_1$:




$I_{R_1} = I\cos\alpha, I_{C_1} = I\sin\alpha;$

$Z_{C_1} = 2Z_{C_2} = Z_C$

$$U_x = U_1 + U_{R_2}\cos\alpha + U_{C_2}\sin\alpha = U_1 + 2RI\frac{I_{R_1}}{I} + \frac{1}{2}Z_C I\frac{I_{C_1}}{I} = \frac{7}{2}U_1$$

$$U_y = U_{R_2}\sin\alpha - U_{C_2}\cos\alpha = 2IR\sin\alpha - \frac{1}{2}Z_C I\cos\alpha =$$

$$= \frac{2I_{R_1}}{\cos\alpha}R\sin\alpha - \frac{I_{C_1}}{2\sin\alpha}Z_C\cos\alpha = U_1(2tg\alpha - \frac{1}{2}\cot g\alpha)$$

$$U = \frac{U_0}{\sqrt{2}} = \sqrt{U_x^2 + U_y^2} = U_1\sqrt{\frac{49}{4} + (2tg\alpha - \frac{1}{2}\cot g\alpha)^2}$$

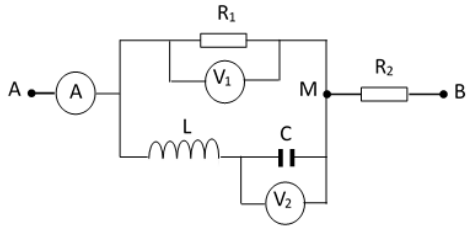
$$\rightarrow U_1 = \frac{U_0}{\sqrt{\dfrac{49}{2} + (8tg\alpha - 2\cot g\alpha)^2}}$$

$U_1$ max khi $4tg\alpha = \cot g\alpha \rightarrow tg\alpha = \dfrac{1}{2} \rightarrow U_{1max} = \dfrac{U_0\sqrt{2}}{7}$

**b.** Khi đó trên $R_2$ có độ giảm hiệu điện thế:

$$U_{R_2} = 2IR = \frac{2RI_{R_1}}{\cos\alpha} = 2RI_{R_1}\sqrt{1 + tg^2\alpha} = 2U_{1max}\sqrt{1 + tg^2\alpha} = \frac{\sqrt{10}}{7}U_0 \approx 0,45U_0$$

**Bài 3.**




1) $\vec{U}_{AB} = \vec{U}_{AM} + \vec{U}_{MB}$; (1)

$U_{MB} = IR_2$; (2)

$U_{AM} = I_{R1}.R_1 = I_L\left|L\omega - \frac{1}{C\omega}\right|$; (3)

Chiếu (1) lên 0x và 0y có:

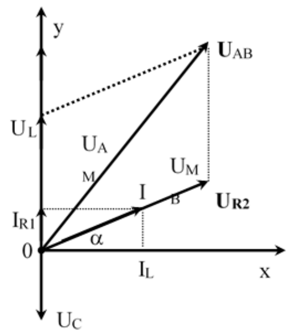
$U_{AB.X} = IR_2\cos\alpha = IR_2.I_L/I = R_2I_L$;

$U_{AB.y} = IR_2\sin\alpha + U_{AM}$

$U_{AB.y} = I_L\left|L\omega - \frac{1}{C\omega}\right|(R_1+R_2)/R_1$

Do đó $U^2 = U_{AB.X}^2 + U_{AB.y}^2 = I_L^2\left(\frac{R_1+R_2}{R_1}\right)^2\left[\left(\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}\right)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2\right]$

Đặt $R = \left(\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}\right)$ (*), chú ý tới (3) có




$$I_L = \frac{UR}{R_2}\frac{1}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}};$$

$$I_{R1} = \frac{UR}{R_1R_2}\frac{\left|L\omega - \frac{1}{C\omega}\right|}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

$$I = \sqrt{I_L^2 + I_{R1}^2} = \frac{UR}{R_1R_2}\sqrt{\frac{R_1^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \quad (4)$$

$$U_{R1} = I_{R1}R_1 = \frac{UR}{R_2}\frac{\left|L\omega - \frac{1}{C\omega}\right|}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \quad (5)$$

$$U_C = I_L/C\omega = \frac{UR}{R_2}\frac{1}{C\omega\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \quad (6)$$

Với R tính bởi (*)

2. Xét biểu thức của I, ta thấy biểu thức dưới dấu căn (kí hiệu là y) là

$$y = \frac{R_1^2 + (L\omega - 1/C\omega)^2}{R^2 + (L\omega - 1/C\omega)^2} = 1 + \frac{R_1^2 - R^2}{R^2 + (L\omega - 1/C\omega)^2}$$

Bởi $R_1 > R$, y đạt cực đại, tức là số chỉ ampe kế khả dĩ lớn nhất khi $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 10^4 rad/s$.

Khi đó theo (4), (5) và (6): $I_{max}=U/R_2=5/2=2,5(A)$

Số chỉ của $V_2$ là:

$U_C=U/R_2C\omega=\dfrac{5}{2.10^{-7}.10^4}=2500(V)$

3. Ta có

$U_{V1}=U_{V2}$--> $U_{R1}=U_C$ --> $L\omega-1/C\omega=1/(C\omega)$

--> $\omega=\sqrt{\dfrac{2}{LC}}=1,41.10^4\ rad/s.$

$$I=\frac{RU}{R_1R_2}\sqrt{\frac{R_1^2+0,25L^2\omega^2}{R^2+0,25L^2\omega^2}}\quad \text{với}\quad R=\frac{R_1+R_2}{R_1+R_2}=1,2(\Omega), L\omega=\sqrt{\frac{2L}{C}}=\sqrt{2}.10^3(\Omega)\rightarrow I\approx 1(A);$$

$$U_{R1}=U_C=\frac{UR}{2R_2}\frac{L\omega}{\sqrt{R^2+(0,5L\omega)^2}}\approx 3(V).$$

**Bài 4.**

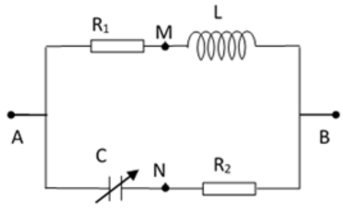
1.Giản đồ véc tơ được vẽ như hình bên.

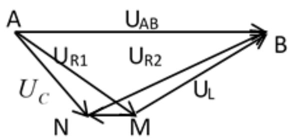
.Từ giản đồ suy ra $U_{MN}$ cực tiểu khi M trùng với N .

.Hay: $U_{MN}=0\rightarrow U_{R1}=U_C\rightarrow\ I_1R_1=I_2Z_C$ , $U_{R2}=U_L$

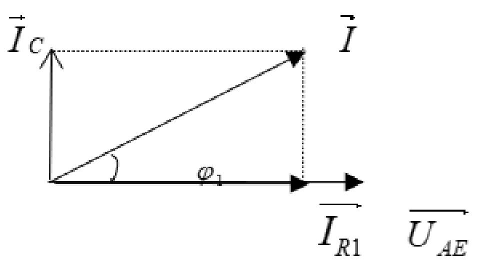
$\rightarrow = I_2R_2=I_1Z_L$

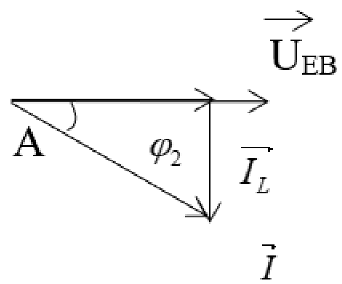
$\dfrac{R_1}{Z_L}=\dfrac{Z_C}{R_2}\leftrightarrow Z_C=\dfrac{R_1R_2}{Z_L}=\dfrac{100}{\sqrt{3}}\Omega\quad\rightarrow\ C=\dfrac{100\sqrt{3}}{\pi}\mu F\ =55(\mu F)$




2.Chập M và N thành điểm E.Tổng trở, độ lệch pha giữa hiệu điện thế và cường độ dòng điện trong mỗi nhánh :




$$\frac{1}{Z_1^2}=\frac{1}{R_1^2}+\frac{1}{Z_C^2}\rightarrow Z_1=50\sqrt{3}(\Omega).Tg\varphi_1=-\frac{I_C}{I_{R1}}=-\frac{R_1}{Z_C}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\rightarrow\varphi_1=-\frac{\pi}{6}$$

$$\frac{1}{Z_2^2}=\frac{1}{R_2^2}+\frac{1}{Z_L^2}\rightarrow Z_2=50\sqrt{3}(\Omega).\ Tg\varphi_2=\frac{I_L}{I_{R2}}=\frac{R_2}{Z_L}=\frac{1}{\sqrt{3}}\rightarrow\varphi_2=\frac{\pi}{6}$$

Vì $Z_1=Z_2$ và cường độ hiệu dụng trong mạch chính như nhau nên: $U_{AE}=U_{EB}=U$

.Mặt khác $\overrightarrow{U_{AE}}$ và $\overrightarrow{U_{EB}}$ đều lệch về hai phía trục $\vec{I}$ một góc $\frac{\pi}{6}$ nên:

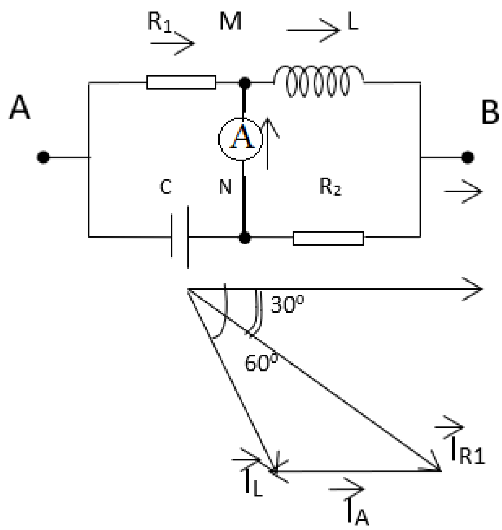
$$U_{AE} = U_{EB} = \frac{U_{AB}}{2\cos(\frac{\pi}{6})} = 60\sqrt{3}\ (V)\ ;$$

Chọn chiều dương qua các nhánh như hình vẽ.

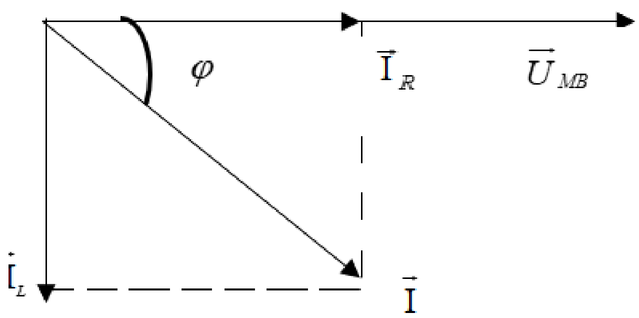
.Giản đồ véc tơ biểu diễn $\overrightarrow{I_{R1}} + \overrightarrow{I_A} = \overrightarrow{I_L}$ như hình bên.

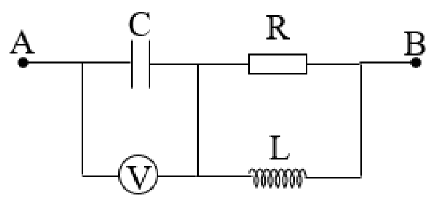
.Từ đó ta được:

$$I_A = \sqrt{I^2_{R1} + I_L^2 - 2I_{R1}I_L\cos\frac{\pi}{6}} = 0{,}6(A)$$




**Bài 5.** 1. Giản đồ véc tơ cho đoạn mạch MB :



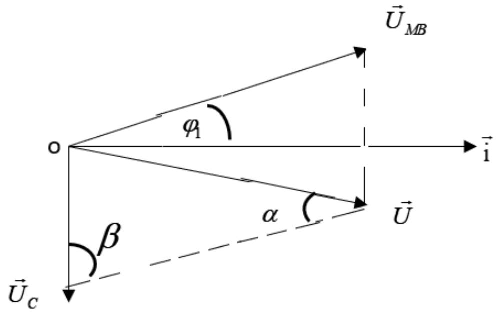




+ Từ giản đồ véc tơ ta có :

$$\frac{1}{Z_{MB}^2} = \frac{1}{R^2} + \frac{1}{Z_L^2} \Rightarrow Z_{MB} = 50\sqrt{3}\Omega$$ (vì $z_L = L\omega = 100\Omega$ ; **R =** $100\sqrt{3}\Omega$ **)**

$$\cos\varphi = \frac{I_R}{I} = \frac{Z_{MB}}{R} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{3}$$

+ Giản đồ véc tơ cho đoạn mạch AB :




+ Áp dụng định lí hàm số sin ta được:

$$\frac{U}{\sin\beta}=\frac{U_C}{\sin\alpha},\ \text{với}\ \sin\beta=\cos\varphi_1=\frac{1}{2}$$

$$=> U_C=\frac{U\sin\alpha}{\sin\beta}=2U\sin\alpha => U_{CMAX}=2U=200V.$$

+ Vôn kế đạt giá trị lớn nhất khi $\sin\alpha=1\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{2}\Rightarrow$

$$\cos\beta=\frac{U_{MB}}{U_C} => U_C=\frac{U_{MB}}{\cos\beta}\Leftrightarrow Z_C=\frac{Z_{MB}}{\cos\beta}=100\Omega\Rightarrow C=\frac{10^{-4}}{\pi}F.$$

2. Áp dụng định lí hàm số cosin cho giản đồ AB :

$$U^2=U_C^2+U_{MB}^2-2U_CU_{MB}\cos\beta\ (1)$$

$$\text{Với : }\cos\beta=\sin\varphi_1=\frac{I_L}{I}=\frac{U_{MB}Z_C}{Z_LU_C}.\ (2)$$

+ Thay (2) vào (1) :

$$U^2=U_C^2+U_{MB}^2-2U^2{}_{MB}\frac{Z_C}{Z_L}=U_C^2+U_{MB}^2\left(1-2\frac{Z_C}{Z_L}\right)\ (3)$$

+ Từ (3) Để U không đổi ,$U_C$ không phụ thuộc vào R thì

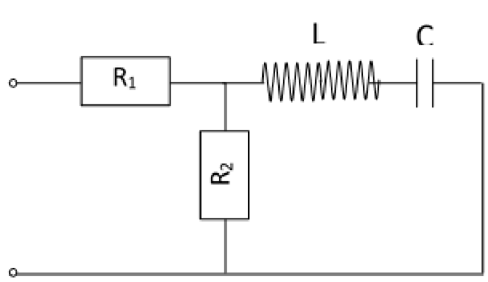
$$1-2\frac{Z_C}{Z_L}=0\Rightarrow Z_C=\frac{Z_L}{2}=50\Omega\Rightarrow C=\frac{2.10^{-4}}{\pi}F$$

**Bài 6.**

Ta có: $Z_{LC}=Z_L-Z_C;\ Z_{MB}=\dfrac{R_2Z_{LC}}{\sqrt{R_2^2+Z_{LC}^2}}$

$U_C=I_CZ_C;\ U_L=I_CZ_L$

$U_{MB}=U_L-U_C=I_CZ_{LC}=I_2R_2\ \Rightarrow\ I_2=I_C\dfrac{Z_{LC}}{R_2}$

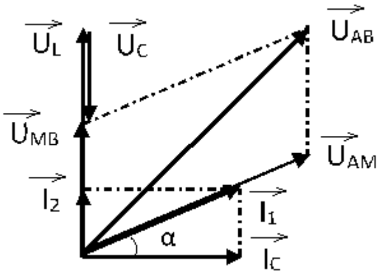



$U_{AM}=I_1R_1=I_C\dfrac{R_1}{\cos\alpha}=I_C\dfrac{R_1\sqrt{R_2^2+Z_{LC}^2}}{R_2}$

$U_{AB}^2=U_{AM}^2+U_{MB}^2+2U_{AM}U_{MB}.\sin\alpha$

$$U_{AB}^2=I_C^2\left[\frac{R_1^2}{R_2^2}(R_2^2+Z_{LC}^2)+Z_{LC}^2+2\frac{R_1}{R_2}\sqrt{R_2^2+Z_{LC}^2}.Z_{LC}\frac{Z_{LC}}{\sqrt{R_2^2+Z_{LC}^2}}\right]$$

$$=\frac{U_C^2}{Z_C^2}\left[R_1^2+\left(\frac{R_1+R_2}{R_2}\right)^2 Z_{LC}^2\right]$$




⇨ $U_C=\dfrac{U_{AB}}{\sqrt{R_1^2+\left(\dfrac{R_1+R_2}{R_2}\right)^2(Z_L-Z_C)}}.Z_C$

$$=U_{AB}.\frac{R_2}{R_1+R_2}.\frac{Z_C}{\sqrt{\left(\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}\right)^2+(Z_L-Z_C)^2}}$$

$$=U_{AB}.\frac{R_2}{R_1+R_2}.\frac{1}{\sqrt{(R)^2+(L\omega-\dfrac{1}{C\omega})^2}}.\frac{1}{C\omega}\ \ (\text{với } R=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2})$$

$$=U_{AB}.\frac{R_2}{R_1+R_2}.\frac{1}{\sqrt{L^2C^2\omega^4-(2LC-R^2C^2)\omega^2+1}}$$

Đặt: $y=L^2C^2\omega^4-(2LC-R^2C^2)\omega^2+1$

Để $U_C=U_{Cmax}$ ⇔ $y=y_{min}$

a) $R_2=400\Omega$ ⇨ $R=\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}=\dfrac{400}{3}\Omega$ ⇨ $(2LC-R^2C^2)<0$

Do đó: $y=y_{min}$ ⇔ $\omega^2=\dfrac{2LC-R^2C^2}{2L^2C^2}$

⇨ $\omega=\dfrac{\sqrt{2LC-R^2C^2}}{\sqrt{2}LC}\approx 165{,}6\text{rad/s}$

b) Thay $R_2$ bằng $R_3=500\Omega$, ta có: $R=\dfrac{R_1R_3}{R_1+R_3}=\dfrac{2000}{9}\Omega$

⇨ $2LC-R^2C^2>0$

⇨ Hàm $y=L^2C^2\omega^4-(2LC-R^2C^2)\omega^2+1\geq 1$ tăng đồng biến theo $\omega^2$. Do đó: $y=y_{min}=1$ ⇔ $\omega=0$ ⇨ $u_{AB}$ phải là điện áp không đổi.

⇨ $U_C=U_{AB}\dfrac{R_3}{R_1+R_3}=\dfrac{10}{9}V$

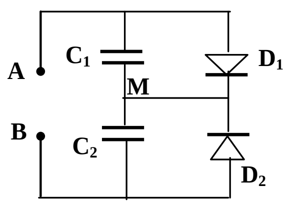
**Bài 7.** Tại t = 0: $u_{AB}=U_0\rightarrow D_1$ mở, còn $D_2$ đóng:

$\rightarrow u_1=u_{AM}=0; u_2=u_{MB}=U_0\rightarrow q_{2M}=C_2U_0$

+ Với $0<t<T/4: u_{MB}$ giảm từ $U_0\rightarrow 0$ nên $D_1$ mở: tụ $C_2$ phóng điện qua $C_1$ và nguồn nhưng không phóng điện qua $D_1$ được , ta có:

$$-q_1+q_2=C_2U_0\ (7)$$

+ Tại t = T/4: $u_{AB}=0\rightarrow u_{AM}+u_{MB}=0(8)$ ; kết hợp(1) và (2) thì tại t = T/4 ta được:



*H.2*

$$\begin{cases} u_{AM} = -\dfrac{C_2U_0}{C_1+C_2} < 0 \\ u_{Mb} = \dfrac{C_2U_0}{C_1+C_2} > 0 \end{cases} \quad (9)$$ nên hai điôt đều bị cấm

+ Sau t = T/4: ở chế độ ổn định, hai đi ôt đều bị cấm, ta có: dòng qua hai tụ là đồng nhất,

nên : $u_{AM} + u_{MB} = U_0\cos(\omega t) \rightarrow C_1C_2u_{AM} + C_1C_2u_{MB} = C_1C_2U_0\cos(\omega t)$

$\rightarrow C_2q_1' + C_1q_2' = -\omega C_1C_2U_0\sin(\omega t) \Leftrightarrow -(C_1+C_2)I_0\sin(\omega t+\varphi) = -\omega C_1C_2U_0\sin(\omega t)$

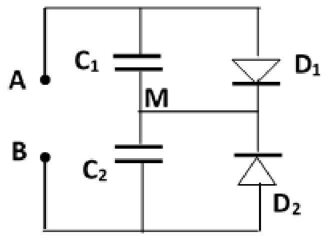
$$\rightarrow \begin{cases} I_0 = \dfrac{C_1C_2\omega U_0}{C_1+C_2} \\ \varphi = 0 \end{cases} \rightarrow i = \frac{-C_1C_2\omega U_0}{C_1+C_2}\sin\omega t \rightarrow \begin{cases} q_1 = q_{01}\cos\omega t + a_1 \\ q_2 = q_{02}\cos\omega t + a_2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} u_{AM} = \dfrac{q_1}{C_1} = \dfrac{C_2U_0}{C_1+C_2}.\cos\omega t + \dfrac{a_1}{C_1} \\ u_{MB} = \dfrac{q_2}{C_2} = \dfrac{C_1U_0}{C_1+C_2}.\cos\omega t + \dfrac{a_2}{C_2} \end{cases} (*)$$

Tại t = T/4: (*) thỏa mãn (9) nên ta được: $\begin{cases} -\dfrac{C_2U_0}{C_1+C_2} = \dfrac{a_1}{C_1} \\ \dfrac{C_2U_0}{C_1+C_2} = \dfrac{a_2}{C_2} \end{cases}$ thay vào (*) cho ta:

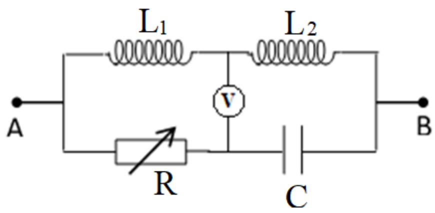
$$\begin{cases} u_{AM} = \dfrac{C_2U_0}{C_1+C_2}.(\cos\omega t - 1) \\ u_{Mb} = \dfrac{C_1U_0}{C_1+C_2}\cos\omega t + \dfrac{C_2U_0}{C_1+C_2} \end{cases}$$

(ta thấy $u_{AM} \le 0; u_{MB} \ge 0 \forall t$ nên khi ổn định hai đi ôt đều bị cấm)



H.2

**Bài 8.**



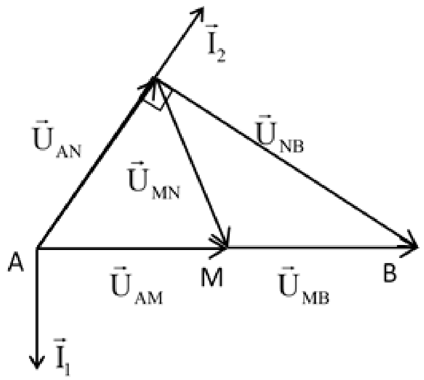

1. Giản đồ véc tơ như hình vẽ:

$L_1 = L_2 = L \longrightarrow \vec{U}_{AM} = \vec{U}_{MB}$

Mà $\vec{U}_{AN} \perp \vec{U}_{NB}$

$\rightarrow$ N nằm trên đường tròn đường kính AB

$\longrightarrow U_{MN} = U_{AM} = \dfrac{U_{AB}}{2} = \dfrac{U_0}{\sqrt{2}.2} = 50V$

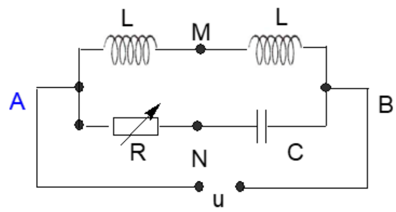



2. Từ giản đồ:

$\vec{U}_{MN} \perp \vec{U}_{AB} \longrightarrow$ MN là trung trực của AB

$\longrightarrow \vec{U}_{AN} = \vec{U}_{NB}$ , $R = Z_C = 100\Omega$

**Bài 9.**

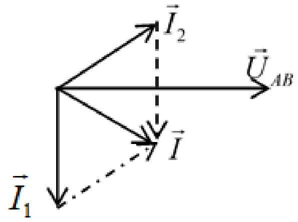



a1. Với $R = 50\Omega$ :Viết biểu thức i : Ta có $Z_L = L\omega = \dfrac{50\sqrt{3}}{3}\Omega$

* $Z_1 = 2Z_L = \dfrac{100\sqrt{3}}{3}\Omega$, $\varphi_1 = \dfrac{\pi}{2}$

* $Z_C = \dfrac{1}{C\omega} = \dfrac{50\sqrt{3}}{3}\Omega$ $\Rightarrow Z_2 = \sqrt{R^2 + Z_C^2} = \dfrac{100\sqrt{3}}{3}\Omega$, $\varphi_2 = \dfrac{-\pi}{6}$

*Giản đồ véc tơ




+ $\vec{I} = \vec{I_1} + \vec{I_2}$ Với : $I = I_1 = I_2 = 2\sqrt{3}$ (A)

$$\varphi = \frac{\pi}{6}$$

+ Biết : $u = U_0\sin100\pi t(V) \Rightarrow i = I_0\sin(100\pi t - \varphi)$

Vậy : $i = 2\sqrt{6}\sin(100\pi t - \dfrac{\pi}{6})$ (A).

a2) Công suất tiêu thụ trong mạch :

$$P = UI.\cos\varphi = 200.2\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6} = 600 \text{ (W)}$$

b. Chứng tỏ khi R thay đổi thì $U_{MN}$ không đổi :

+ $u_{MN} = u_{MA} + u_{AN} \Leftrightarrow \vec{U}_{MN} = \vec{U}_{MA} + \vec{U}_{AN} = \vec{U}_{AN} - \vec{U}_{MA}$

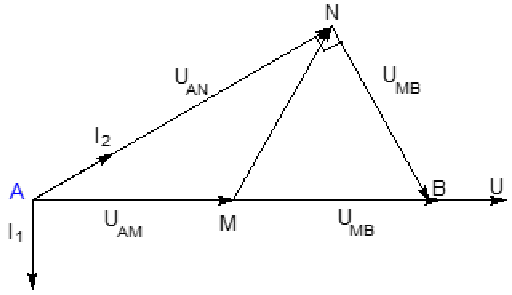
$\vec{U}_{MA}$ có: $U_{AM} = I_1.Z_L$, $\varphi_{AM} = \dfrac{\pi}{2}$;

$\vec{U}_{AN}$ có: $U_{AN} = I_2R$ , $\varphi_{AN} = 0$ ; $\vec{U} = \vec{U}_{AM} + \vec{U}_{MB} = \vec{U}_{AN} + \vec{U}_{NB}$

+ Với : $\vec{U}_{MB}$ có $U_{MB} = I_1.Z_L = U_{AM}$, $\varphi_{MB} = \dfrac{\pi}{2}$;

$\vec{U}_{NB}$ có $U_{NB} = I_2Z_C$, $\varphi_{NB} = -\dfrac{\pi}{2}$

+ Từ giản đồ vectơ ta thấy :

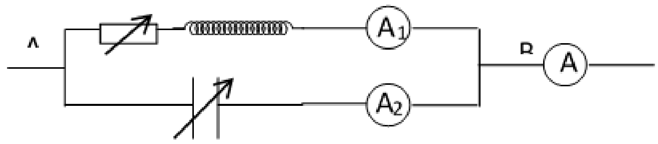



+ Khi R thay đổi nhưng $U_{AM}$ luôn luôn bằng $U_{MB}$, như thế (M) luôn là trung điểm của AB.

+ $U_{AN}$ luôn vuông góc với $U_{NB} \Rightarrow$ M là tâm đường tròn đường kính AB, MN là trung tuyến của tam giác ANB $\Rightarrow$ MN = $\dfrac{AB}{2} = \dfrac{U}{2}$ = 100(V) = const.

Khi R thay đổi thì $U_{MN}$ = const.

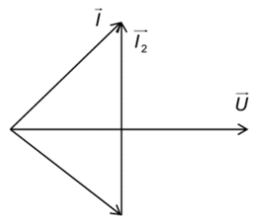
**Bài 10.**




a.Gọi $i_1$ , $i_2$ , i lần lượt là cường độ tức thời qua các ampe kế $A_1$ , $A_2$ , A ; $\varphi_1$ là độ lệch pha giữa $i_1$ và $u_{AB}$. Theo phương pháp vectơ quay , ta có giản đồ vectơ (1) như hình vẽ :

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 - 2I_1 I_2 \sin\varphi_1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{Z_C^2} + \frac{Z_C^2 - 2Z_L Z_C}{Z_C^2\left(R^2 + Z_L^2\right)}}$$




Theo giả thiết khi C = $C_1$ cường độ mạch chính không phụ thuộc vào R
Nghĩa là tổng trở Z không phụ thuộc vào R.
Vậy $Z_C^2 - 2Z_L Z_C = 0 \Leftrightarrow Z = Z_C = 2Z_L$ (1)
Mặt khác khi R = $R_1$ theo giả thiết $u_{AB}$ và i cùng pha nên từ giản đồ vectơ (2) ta có :

$$\sin\varphi_1 = \frac{I_2}{I_1} = \frac{\sqrt{R^2 + Z_L^2}}{Z_C} \quad \text{(a)}$$

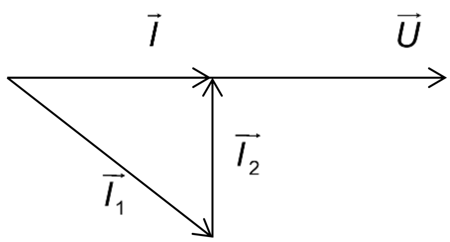
Mà $\sin\varphi_1 = \cos\varphi_1 . tg\varphi_1 = \dfrac{Z_L}{\sqrt{R^2 + Z_L^2}}$ (b)

Từ (a) và (b) ta có $Z_L^2 - Z_L Z_C + R_1^2 = 0$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $Z = Z_C = 2Z_L = 2R_1 = 200\Omega$

$$\Rightarrow \omega = \frac{Z_L}{L} = 100\pi rad/s$$

$$C_1 = \frac{1}{Z_C \omega} = \frac{10^{-4}}{2\pi} F$$




Do $Z = Z_C$ nên số chỉ của $A_2$ cũng là số chỉ của A
Hiệu điện thế hiệu dụng hai đầu đoạn mạch :

$$U_{AB} = I.Z = IZ_C = 200V$$

Số chỉ của ampe kế $A_1$ : $I_1 = \frac{U_{AB}}{Z_1} = \frac{U_{AB}}{R_1\sqrt{2}} = \sqrt{2}A$

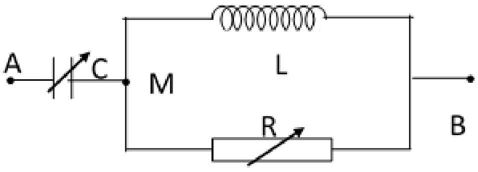
b.Nếu $u_{AB}$ cùng pha với i thì : $R^2 = (Z_C - Z_L)Z_L$

Để phương trình vô nghiệm với R thì $Z_C - Z_L < 0$

$\Leftrightarrow C > \frac{1}{Z_L\omega} = \frac{10^{-4}}{\pi}F$

**Bài 11.**

1a. Xét đoạn mạch MB ta thấy $i_R$ cùng pha với $u_{MB}$, $i_L$ trễ pha $\frac{\pi}{2}$ so với $u_{MB}$ nên ta có giản đồ véc tơ bên .



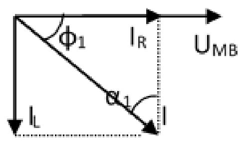

Hình 3

- Chọn $\vec{I}$ làm trục chuẩn ta có $u_C$ chậm pha $\frac{\pi}{2}$ so $i_{AB}$, $u_{MB}$ sớm pha $\varphi_1$ so với $i_{AB}$ ta có:

$\vec{U}_{AB} = \vec{U}_{AM} + \vec{U}_{MB} = \vec{U}_C + \vec{U}_{MB}$

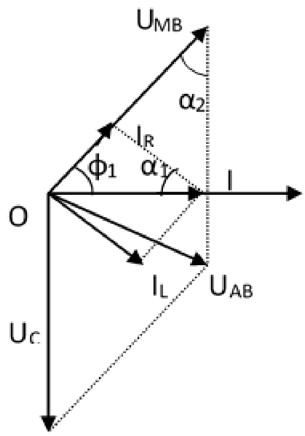
Ta có $U_{AM} = I.Z_C$, $U_{MB} = I_R.R = I_L.Z_L$ và

$\frac{U_{MB}}{U_{AM}} = \frac{I_R.R}{I_C Z_C} = \frac{I_L}{I}$ ($I_C = I$) lại có $\frac{U_{MB}}{U_{AM}} = \frac{I_L}{I} = \sin(\frac{\pi}{2} - \varphi_1) = \cos\varphi_1$ .




Mặt khác góc hợp bởi giữa $\vec{U}_{MB}$ và $\vec{U}_C$ là $\alpha_2 = \alpha_1 = (\frac{\pi}{2} - \varphi_1)$ nên $\vec{U}_{MB}$ vuông góc với $\vec{U}_{AB}$ vậy $i_R$ sớm pha hơn $u_{AB}$ góc $\frac{\pi}{2}$.

1b.Chứng minh $U_C = U_{Cmax}$ .




Xét tam giác ONP $\frac{U_C}{\sin(\varphi_1 + \varphi)} = \frac{U}{\sin\alpha_2}$ vì $\sin\alpha_2 = \frac{I_L}{I}$ = const và $\vec{U}_{MB}$ vuông góc với $\vec{U}_{AB}$ nên $U_{Cmax}$.

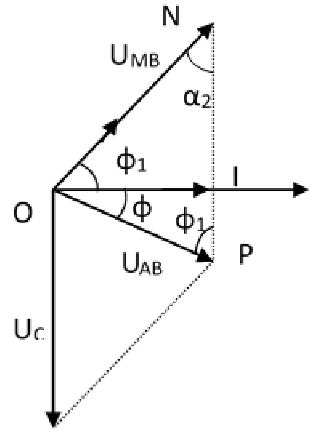
$\sin\alpha_2 = \frac{I_L}{I} = \frac{U_{MB}}{R}.\frac{Z_{MB}}{U_{MB}} = \frac{Z_{MB}}{R} = \frac{RZ_L}{R\sqrt{R^2 + Z_L^2}} = \frac{Z_L}{\sqrt{R^2 + Z_L^2}} = 8/17$.

Vậy $U_{Cmax} = \frac{80.17}{8} = 170V$ .

2. $P = I_R^2.R$ với $I_R = \frac{U_{MB}}{R}$ . Lại có $\tan\varphi_{MB} = \frac{I_L}{I_R}$ , $\tan\varphi_1 = \frac{U_{MB}}{U}$ .

Vì $\varphi_{MB} = \varphi_1$ nên $\frac{I_L}{I_R} = \frac{U_{MB}}{U}$ => $U_{MB} = U.\frac{I_L}{I_R} = U.\frac{R}{Z_L}$ => $I_R = \frac{U_{MB}}{R} = \frac{U}{Z_L}$ .

Vậy P = $(\frac{U}{Z_L})^2$ .R .= 4R.



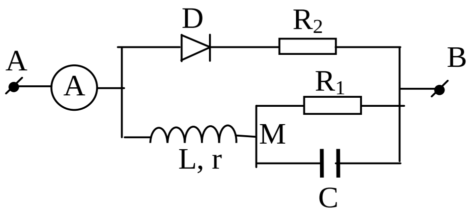

3.Để $u_{AB}$ và i cùng pha thì sinφ = $\frac{U_C}{U_{MB}} = \frac{Z_C}{Z_{MB}}$

$Z_C$ =sinφ.$Z_{MB}$

mà sin φ = cos$\alpha_2$ = $\sqrt{1-\sin^2\alpha_2}$ = 15/17.

$Z_C = \frac{15}{17}.\frac{R.Z_l}{\sqrt{R^2+Z_L^2}} = \frac{15.40.75}{85} = 31{,}14\Omega$ => C = $10^{-4}$F.

**Bài 12.** Tìm điện dung C của tụ




***Hình 3***

Vẽ giản đồ véctơ cho đoạn mạch AMB

+ $\overrightarrow{U_{AB}} = \overrightarrow{U_L} + \overrightarrow{U_r} + \overrightarrow{U_{R1}}$

+ Nhận xét: để $i_C$ cùng pha với $u_{AB}$ thì:

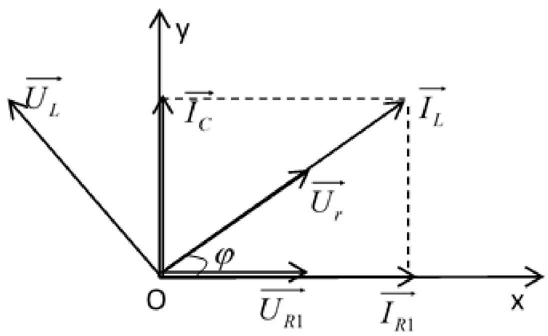
$U_{ABx}$ = 0

Chiếu lên phương $U_{R1}$ ta được $U_L \sin\phi = U_{R1} + U_r \cos\phi$

Suy ra $z_L.I_L.\sin\phi = R_1.I_{R1} + r.I_L.\cos\phi$

$\Leftrightarrow$ $z_L.I_C = (R_1 + r)I_{R1}$ => $\frac{z_L}{R_1+r} = \frac{I_{R1}}{I_C} = \frac{z_C}{R_1}$

=> $z_C = \frac{R_1.z_L}{R_1+r} = 75\Omega$ => $C = \frac{4.10^{-4}}{3\pi}F$




2. Chiếu lên phương vuông góc $U_{R1}$

+ $U_{AB} = U_{ABy} = U_L.\cos\phi + U_r.\sin\phi$

$= z_L I_L.\cos\phi + r.I_L.\sin\phi$

$= z_L.I_{R1} + r.\frac{R_1}{z_C}I_{R1}$

=> $I_{R1} = \frac{U_{AB}}{z_L + \frac{rR_1}{z_C}} = 1A$ => $I_C = 2A$ => $I_L = \sqrt{5}A$

+ Đoạn mạch $AR_2B$.

Trong ½ chu kì dòng điện trong đoạn mạch $I_{R2} = 1A$

Trong ½ chu kì tiếp theo không có dòng điện chạy qua $R_2$.

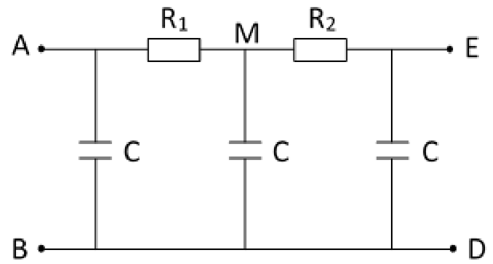
+ Đoạn mạch chính:

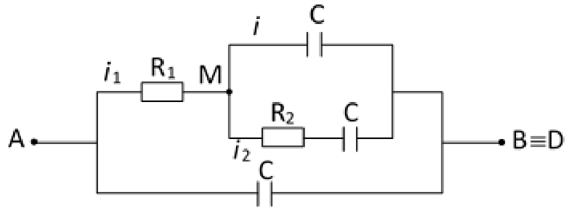
Trong ½ chu kì có dòng điện qua R₂: $I_1 = \sqrt{I_L^{\ 2} + I_{R2}^{\ 2} + 2I_L I_{R2}\sin\phi} = \sqrt{10}A$

Trong ½ chu kì không có dòng điện qua R₂: $I_2 = I_L = \sqrt{5}A$

Số chỉ của ampekế: $I_A = \sqrt{\frac{1}{2}I_1^{\ 2} + \frac{1}{2}I_2^{\ 2}} \approx 2,7A$

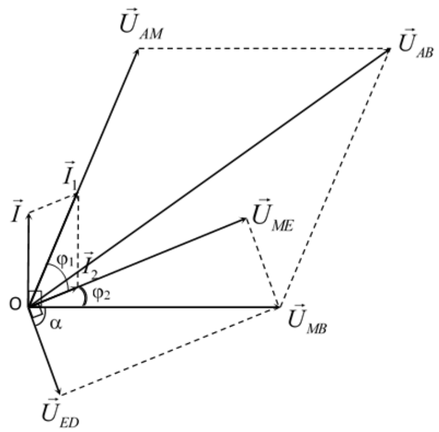
**Bài 13.** Goi I, $I_1$, $I_2$ lần lượt là cường độ hiệu dụng của dòng điện xoay chiều chạy qua tụ C giữa, $R_1$ và $R_2$.




Mạch điện vẽ lại:

Giản đồ vectơ:




`Áp dụng định lý hàm cosin, ta có:

$$U_{AB}^2 = U_{MB}^2 + U_{AM}^2 + 2U_{MB}U_{AM}\cos(\varphi_1 + \varphi_2) \qquad (1)$$

Vì $\omega = \dfrac{1}{R_0 C}$ nên $R_0 = \dfrac{1}{\omega C} = Z_C$

$$U_{ME} = I_2 R_2 = mR_0 I_2 = mU_{ED}$$

$$U_{MB}^2 = U_{ME}^2 + U_{ED}^2 = (m^2+1)U_{ED}^2 \qquad (2)$$

Áp dụng định lý hàm cosin, ta có:

$$I_1^2 = I_2^2 + I^2 + 2I_2 I\cos(I_2; I)$$

Suy ra: $R_0^2 I_1^2 = R_0^2 I_2^2 + R_0^2 I^2 + 2(R_0 I_2)(R_0 I)\cos(\vec{U}_{ED}; \vec{U}_{MB})$

$$U_{AM}^2 = U_{ED}^2 + U_{MB}^2 + 2U_{ED}U_{MB}\frac{U_{ED}}{U_{MB}}$$

$$U_{AM}^2 = U_{ED}^2 + (m^2+1)U_{ED}^2 + 2U_{ED}^2 = (m^2+4)U_{ED}^2 \qquad (3)$$

Đặt $(\vec{I}; \vec{I}_2) = (\vec{U}_{MB}; \vec{U}_{ED}) = \alpha$

Áp dụng định lý hàm sin, ta có:

$$\frac{I}{\sin\varphi_1} = \frac{I_1}{\sin\alpha} \Rightarrow \sin\varphi_1 = \frac{I}{I_1}\sin\alpha$$

$$\sin\varphi_1 = \frac{U_{MB}}{U_{AM}}.\frac{U_{ME}}{U_{MB}} = \frac{U_{ME}}{U_{AM}} = \frac{m}{\sqrt{m^2+4}}$$

$$\cos\varphi_1 = \sqrt{1 - \sin^2\varphi_1} = \frac{2}{\sqrt{m^2+4}}$$

$$\sin\varphi_2 = \frac{U_{ED}}{U_{MB}} = \frac{1}{\sqrt{m^2+1}} \Rightarrow \cos\varphi_2 = \frac{m}{\sqrt{m^2+1}}$$

Suy ra: $\cos(\varphi_1 + \varphi_2) = \cos\varphi_1.\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1.\sin\varphi_2 = \dfrac{m}{\sqrt{m^2+1}.\sqrt{m^2+4}} \qquad (4)$

Thay (2), (3) và (4) vào (1)

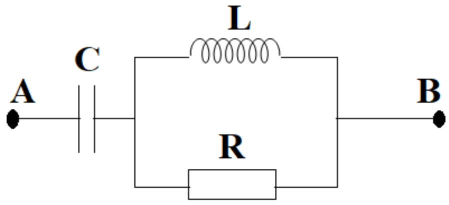
$$U_{AB}^2=\left(m^2+1\right)U_{ED}^2+\left(m^2+4\right)U_{ED}^2+2\sqrt{m^2+1}.\sqrt{m^2+4}.U_{ED}^2.\frac{m}{\sqrt{m^2+1}.\sqrt{m^2+4}}$$

$$U_{AB}^2=\left(2m^2+2m+5\right)U_{ED}^2$$

Suy r.

**Bài 14.** Giản đồ vectơ như hình vẽ:

Theo giản đồ ta có :




$$I^2=I_R^2+I_L^2\Rightarrow\left(\frac{U_{MB}}{Z_{MB}}\right)^2=\left(\frac{U_{MB}}{R}\right)^2+\left(\frac{U_{MB}}{Z_L}\right)^2$$

$$Z_{MB}=\frac{R.Z_L}{\sqrt{R^2+Z_L^2}}$$

Mặt khác ta có : $\frac{I_L}{I}=\frac{U_{MB}/Z_L}{U_{MB}/Z_{MB}}=\frac{Z_{MB}}{Z_L}=\frac{R}{\sqrt{R^2+Z_L^2}}$

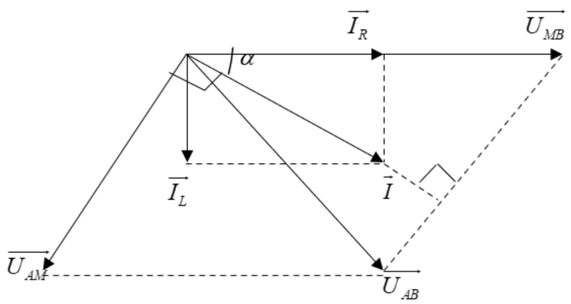
Mà:

$$U_{AB}^2=U_{AM}^2+U_{MB}^2-2U_{AM}U_{MB}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\Rightarrow U_{AB}^2=\left(I.Z_C\right)^2+\left(IZ_{MB}\right)^2-2I^2Z_CZ_{MB}\sin\alpha$$

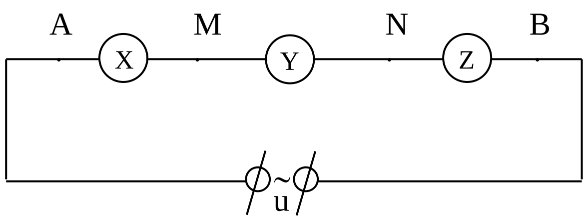
$$\Rightarrow U_{AB}^2=I^2\left(Z_C^2+\frac{R^2Z_L^2}{R^2+Z_L^2}-2Z_C.\frac{R.Z_L}{\sqrt{R^2+Z_L^2}}.\frac{R}{\sqrt{R^2+Z_L^2}}\right)\Rightarrow I=\frac{U_{AB}}{\sqrt{Z_C^2+\frac{R^2Z_L\left(Z_L-2Z_C\right)}{R^2+Z_L^2}}}$$

Ta thấy khi $Z_L-2Z_C=0$ thì I = $\frac{U_{AB}}{Z_C}$ tức I không phụ thuộc R. Lúc này :

$$Z_L=2Z_C\Rightarrow L\omega=2\frac{1}{C\omega}\Rightarrow C=\frac{2}{L\omega^2}$$




**Bài 15.**

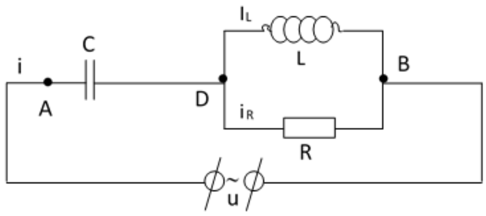



Do mạch có ba phần trở R, L, C mà $u_{AN}$ nhanh pha so với $u_{MB}$ thì đoạn mạch AN gồm có R, L và đoạn mạch MB gồm có R và C $\Rightarrow$ x là cuộn thuần cảm L, Y là điện trở thuần R và Z và tụ C.

Từ $\left|\tan\varphi_{AN}\right|=2\left|\tan\varphi_{MB}\right|\Rightarrow\frac{Z_L}{R}=\frac{2Z_C}{R}\Rightarrow Z_L=2Z_C$ (0,5đ)

- Hình (2) được vẽ lại như sau:

Giản đồ véc tơ cho mạch này là:




Ta có:

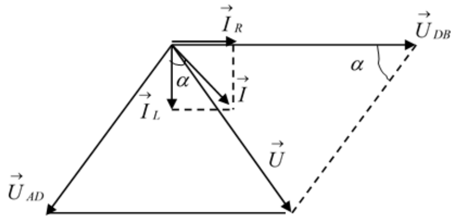
$$U^2 = U_{AD}^2 + U_{DB}^2 - 2U_{AD}U_{DB}\cos\alpha$$

$$U^2 = U_{AD}^2 + U_{DB}^2 - 2U_{AD}U_{DB}\frac{I_L}{I}$$

mà $\frac{U_{AD}}{I} = Z_C$ ; $2Z_C = Z_L$ ; $U_{DB} = I_L.Z_L$

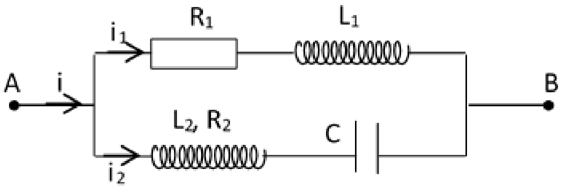
nên $U^2 = U_{AD}^2 + U_{DB}^2 - U_{DB}^2 = U_{AD}^2$

$\Rightarrow U = U_{AD} \Rightarrow I = \frac{U_{AD}}{Z_C} = \frac{U}{Z_C} = 2A$




**Bài 16.**

1/ Biểu thức dòng điện chính




Ta có: $i_1 = I_1\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_1)$

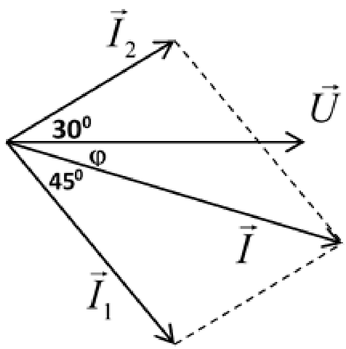
$i_2 = I_2\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_2)$

Với $R_1 = 10\Omega$ ; $Z_{L1} = 10\Omega$ Suy ra

$$Z_1 = \sqrt{R_1^2 + Z_{L1}^2} = 10\sqrt{2}\Omega$$

$$I_1 = \frac{U}{Z_1} = \frac{100}{10\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}A$$

$$tg\varphi_1 = -\frac{Z_{L1}}{R_1} = -1 \Rightarrow \varphi_1 = -\frac{\pi}{4}$$




$$R_2 = 10\sqrt{3}\Omega; Z_{L2} = 50\Omega; Z_C = 60\Omega$$

Suy ra $Z_2 = \sqrt{R_2^2 + (Z_{L2} - Z_C)^2} = 20\Omega$

$$I_2 = \frac{U}{Z_2} = \frac{100}{20} = 5A$$

$$tg\varphi_2 = \frac{Z_C - Z_{L2}}{R_2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \varphi_2 = \frac{\pi}{6}$$

Dòng điện chính cho bởi: $i = i_1 + i_2$. Giản đồ véctơ cho:

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + 2I_1I_2\cos 75^0} = 9{,}5A$$

$$tg\varphi = \frac{I_1\sin\varphi_1 + I_2\sin\varphi_2}{I_1\cos\varphi_1 + I_2\cos\varphi_2} = -0{,}268 \Rightarrow \varphi = -15^0 = -\frac{\pi}{12}$$

Biểu thức dòng chính:

$$i = 9{,}5\sqrt{2}\sin\left(100\pi t - \frac{\pi}{12}\right)(A)$$

2/ Tổng trở:

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{100}{9{,}5} = 10{,}5\Omega$$

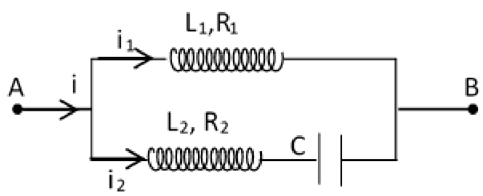
3/ Công suất và hệ số công suất:

$$P = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 = 932{,}5(W)$$

$$\cos\varphi = \cos 15^0 = 0{,}966$$

**Bài 17.**

1. Biểu thức dòng điện qua nhánh thứ nhất.




$$i_1 = I_1\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_1)$$

$Z_{L1} = \omega L_1 = 120\ \Omega$

$$Z_1 = \sqrt{R_1^2 + Z_{L1}^2} = 60\sqrt{5}\Omega$$

$$I_1 = \frac{U}{Z_1} = \frac{120}{60\sqrt{5}} = 0{,}4\sqrt{5}(A)$$

$$tg\varphi_1 = -\frac{Z_{L1}}{R_1} = -2 \Rightarrow \varphi_1 = -\frac{63\pi}{180}$$

Vậy $i_1 = 0{,}4\sqrt{10}\sin(100\pi t - \frac{63\pi}{180})(A)$

2/ Sự lệch pha giữa hai dòng điện rẽ $i_1$ và $i_2$. Giá trị của điện dung C.

Biểu thức dòng điện rẽ thứ 2:

$$i_2 = I_2\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_2)$$

$Z_{L2} = \omega L_2 = 100\Omega$

Vì $\varphi_1 < 0$ , mà $i_1$ lại vuông pha với $i_2$ nên ta phải có $\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$

Tức là $i_2$ nhanh pha hơn $i_1$.

$$tg\varphi_1 tg\varphi_2 = -1 \Rightarrow tg\varphi_2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{Z_C - 100}{50} = \frac{1}{2} \Rightarrow Z_C = 125\Omega$$

Suy ra $C = \frac{1}{\omega Z_C} = \frac{4}{5\pi}.10^{-4}F = 25{,}6\mu F$

$$Z_2 = \sqrt{R_2^2 + (Z_{L2} - Z_C)^2} = 25\sqrt{5}\Omega \Rightarrow I_2 = \frac{U}{Z_2} = \frac{24\sqrt{5}}{25}(A)$$

$$\varphi_2 = 27^0 = \frac{27\pi}{180}$$

Vậy $i_2 = \frac{24\sqrt{10}}{25}\sin\left(100\pi t + \frac{27\pi}{180}\right)(A)$

3/ Biểu thức dòng điện chính:

$i = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi)$

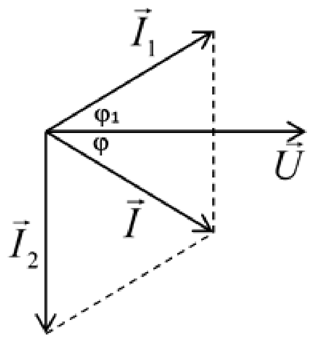
Với $I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2} = 2{,}3(A)$

$$tg\varphi = \frac{I_1\sin\varphi_1 + I_2\sin\varphi_2}{I_1\cos\varphi_1 + I_2\cos\varphi_2} = \frac{2}{29} = 0{,}07 \Rightarrow \varphi = 4^0 = \frac{4\pi}{180}$$

Vậy $i = 2{,}3\sqrt{2}\sin(100\pi t + \frac{4\pi}{180})(A)$

**Bài 18.** 1/ Từ P = UIcosφ $\Rightarrow U = \frac{P}{I\cos\varphi} = 150(V)$

$Z_L = \omega L = \frac{250}{3}(\Omega) \Rightarrow I_2 = \frac{U}{Z_L} = 1{,}8(A)$




2/ Giả sử $u = U\sqrt{2}\sin\omega t$

Thì $i_1 = I_1\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_1)$

với $tg\varphi_1 = \frac{Z_C}{R} > 0 \Rightarrow \varphi_1 > 0$

$i_2 = I_2\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_2)$ với $I_2$ = 1,8 (A)

Ta vẽ giản đồ véc tơ $\vec{I} = \vec{I_1} + \vec{I_2}$

cosφ = 0,8 , nhưng ta cần phân biệt φ dương hoặc âm.

*/ Trường hợp 1 : φ < 0 dòng chính chậm pha hơn u:

$I_1^2 = I^2 + I_2^2 - 2I.I_2\cos\alpha$

$\cos\alpha = \sin|\varphi| = \sqrt{1-\cos^2\varphi} = 0{,}6$

Suy ra $I_1$ = 1,5 (A)

3/ Trên giản đồ suy ra tam giác $OII_1$ cân ở O ⇒ $\varphi_1 = \varphi$ ⇒ $\cos\varphi_1$ = 0,8.

$Z_1 = \frac{U}{I_1} = \frac{100}{1{,}5} = 100(\Omega); \cos\varphi_1 = \frac{R}{Z_1} \Rightarrow R = Z_1\cos\varphi_1 = 80(\Omega)$

$Z_C = \sqrt{Z_1^2 - R^2} = 60(\Omega) \Rightarrow C = \frac{10^{-3}}{6\pi}F$

*/ Trường hợp2 : φ > 0 dòng chính nhanh pha hơn u:

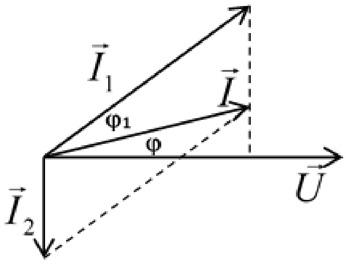
$I_1^2 = I^2 + I_2^2 + 2I.I_2\cos\alpha$

$I_1$ = 1,97 (A) ⇒ $Z_1$ = 76,1 (Ω)

$$P = RI_1^2 \Rightarrow R = \frac{P}{I_1^2} = 51,6(\Omega)$$

Suy ra $Z_C = \sqrt{Z_1^2 - R^2} = 55,9(\Omega)$ ;

$$\Rightarrow C = \frac{1}{\omega Z_C} = 56,9.10^{-6}F$$

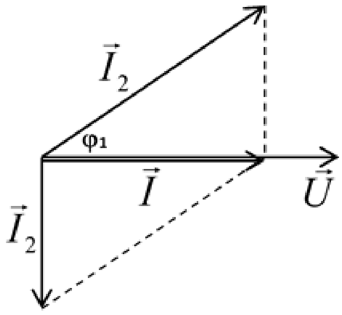



**Bài 19.** Vì $u = U\sqrt{2}\sin\omega t$

Nên biểu thức của hai dòng điện rẽ là:

$$i_1 = I_1\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_1)$$

$$i_2 = I_2\sqrt{2}\sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$$




Với $Z_1 = \sqrt{R^2 + Z_C^2}$ ; $I_1 = \frac{U}{Z_1}$ ;

$tg\varphi_1 = \frac{Z_C}{R}$ ; $I_2 = \frac{U}{Z_L}$

Cường độ dòng điện chính cho bởi: $i = i_1 + i_2$

Vì cosφ = 1 ⇒ φ = 0 ⇒ i cùng pha với u. Ta có giản đồ sau:

Theo giản đồ ta có: $I_2 = I_1\sin\varphi_1$

Với $\sin\varphi_1 = \frac{tg\varphi_1}{\sqrt{1+tg^2\varphi_1}} = \frac{Z_C}{\sqrt{R^2+Z_C^2}}$

Suy ra :

$$\frac{U}{Z_L} = \frac{U}{Z_1}.\frac{Z_C}{\sqrt{R^2+Z_C^2}} \Rightarrow Z_L = \frac{R^2}{Z_C} + Z_C$$

Vì $I_2 = \frac{U}{Z_L}$ nên $I_2$ cực đại khi $Z_L$ cực tiểu. Theo bất đẳng thức Côsi thì

$Z_{LMIN} = 2R = 200\Omega$

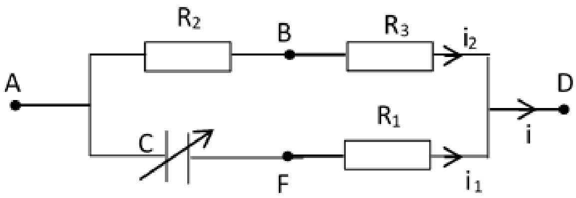
khi $\frac{R^2}{Z_C} = Z_C \Rightarrow Z_C = R = 100\Omega \Rightarrow C = \frac{1}{\pi}.10^{-4}F$

Và $L = \frac{2}{\pi}H$

Số chỉ của ampe kế là $I_{2\max} = \frac{U}{Z_L} = \frac{200}{200} = 1(A)$

**Bài 20.** 1/ Vẽ giản đồ véc tơ: $\left|\vec{AB}\right| = \left|\vec{BD}\right| = RI_2; \vec{AF} + \vec{FD} = \vec{AD}$; hiệu điện thế FD cùng pha với $I_1$ và hiệu điện thế AF trễ pha $\frac{\pi}{2}$ so với $I_1$, vậy $\vec{AF}$ và $\vec{FD}$ vuông góc. Ta thấy rằng trong giản đồ véc tơ của mạng, quỹ tích của các điểm biểu diễn điện thế của điểm F khi điện dung biến đổi từ 0 đến ∞ là một đường tròn đường kính AD bằng U.

2/ Nếu u' là $u_{BF} = V_F - V_B$ thì u' được biểu diễn trên giản đồ bằng véc tơ $\vec{BF}$ nên u' có biên độ là $\frac{U_0}{2}$ và trễ pha φ = 2α so với u. Có thể xác định được φ với




$$tg\alpha = \frac{FD}{AF} = \frac{RI_1}{I_1 \frac{1}{\omega C}} = RC\omega.$$

3/ u và u' cùng pha , φ = 0 , khi C = 0 ( nghĩa là khi bỏ tụ, điện thế $V_F = V_D$)

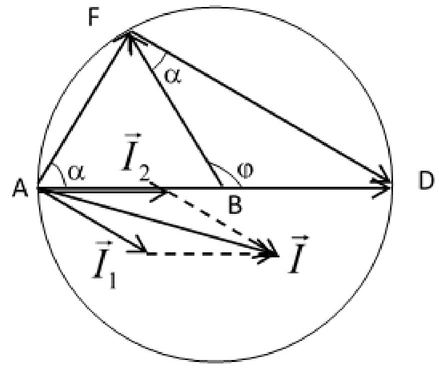
u và u' ngược pha , φ = π, khi α $\frac{\pi}{2}$ ⇒ C = ∞. nghĩa là ta nối tắt A và F, $V_F = V_A$

u và u' vuông pha , φ = $\frac{\pi}{2}$, khi α = $\frac{\pi}{4}$ ta có 1 = RCω

Suy ra $C = \frac{1}{R\omega} = 66{,}6\mu F$

4/ $I_1$ và $I_2$ bằng nhau thì ta có $Z_1 = Z_2$ hay :

Giản đồ 2




$$\frac{U}{2R} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}}}$$

Từ đó suy ra điều kiện là : $RC\omega = \frac{1}{\sqrt{3}}$

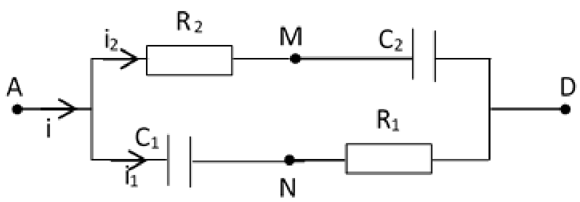
Như vậy $tg\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 30^0$

Dòng i sớm pha so với u góc $\frac{90^0 - \alpha}{2} = 30^0$

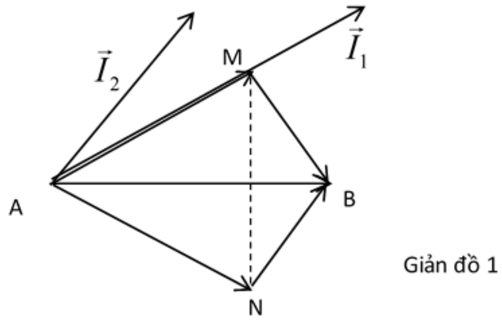
$$I = 2I_2 \cos 30^0 = \frac{U}{R}\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}(A)$$

**Bài 21.**

1/ Theo bài ra ta vẽ được giản đồ 1. Dễ thấy tứ giác AMBN nội tiếp đường tròn đường kính AB. Để $u_{MN}$ vuông pha với $u_{AB}$ tức là $MN \perp AB$ thì phải có AM = AN ; MB = NB suy ra $R_1I_1 = Z_{C2}I_2$ ; $Z_{C1}I_1 = R_2I_2$



Suy ra $R_1R_2C_1C_2\omega^2 = 1$

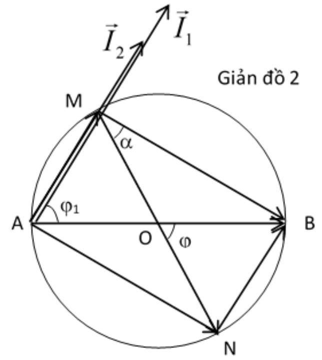



2/ Vì tứ giác AMBN nội tiếp đường tròn đường kính AB nên MN dài nhất bằng AB lúc đó AMBN là hình chữ nhật AM = NB ; AN = MB $\Leftrightarrow R_1I_1 = R_2I_2$; $Z_{c1}I_1 = Z_{C2}I_2$

Suy ra $R_1C_1 = R_2C_2$.

Khi đó $i_1$ và $i_2$ cùng pha : $\varphi_1 = \varphi_2$

$$tg\alpha = \cot g\varphi_1 = \frac{R_1}{Z_{C1}}$$



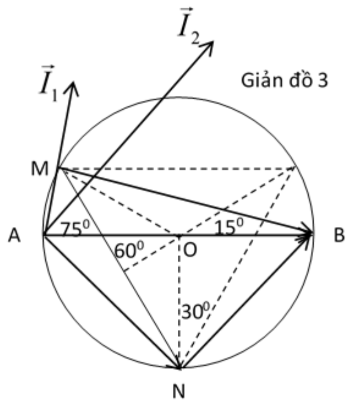

$$\varphi = 2\alpha \Rightarrow tg\varphi = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha} = \frac{\frac{2R_1}{Z_{C1}}}{1-\frac{R_1^2}{Z_{C1}^2}} = \frac{2R_1C_1\omega}{1-R_1^2C_1^2\omega^2}$$

*/ Nếu kết hợp cả điều kiện câu 1 thì AMBN là hình vuông:

$\varphi_1 = 45^0 \Rightarrow tg\varphi_1 = tg\varphi_2 = 1 \Leftrightarrow C_1R_1\omega = C_2R_2\omega = 1$

3/ Điều kiện để $u_{MN}$ có biên độ $\frac{U_0\sqrt{3}}{2}$ và lệch pha $60^0$ so với $u_{AB}$.

$U_{MN0} = \frac{U_0\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow MN = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = OA\sqrt{3}$. Như vậy MN là cạnh của tam giác đều , nội tiếp đường tròn đường kính AB. Thực vậy, từ M kẻ MD song song với AB cắt đường tròn ở D , nối DN thì thấy ngay ΔMDN là tam giác đều vì có góc $N\hat{M}D = 60^0$ và có cạnh MN = $r\sqrt{3}$.




Ta cũng dễ dàng xác định được trong tam giác AMB có góc $B\hat{A}M = 75^0; A\hat{B}M = 15^0$. Tam giác ANB là tam giác vuông cân tại N.

áp dụng định lý hàm số sin vào tam giác AMB có:

$$\frac{AM}{\sin 15^0} = \frac{MB}{\sin 75^0} \Leftrightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{\sin(45^0-30^0)}{\sin(45^0+30^0)} \Leftrightarrow \frac{R_1}{Z_{C1}} = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$$

Hay $R_1C_1\omega = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$ (1)

Mặt khác từ tam giác vuông cân ANB suy ra AN = NB $\Leftrightarrow R_2 = Z_{C2}$

Hay $R_2C_2\omega = 1$ (2)

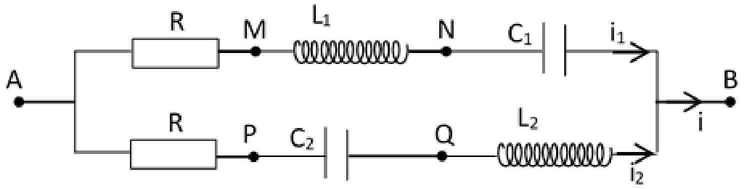
Từ (1) và (2) suy ra $\frac{R_2C_2}{R_1C_1} = 2+\sqrt{3}$

**Bài 22**

1/Giá trị của $U_{AB}$ và $U_{NQ}$ .

Giả sử

$$u_{AB} = U\sqrt{2}\sin\omega t(V)$$




Thì biểu thức dòng điện rẽ:

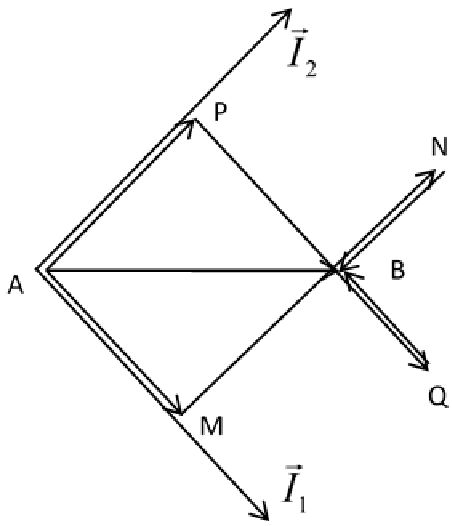
$$i_1 = I_1\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_1)$$

$$i_2 = I_2\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_2)$$

Với $Z_{L1} = L_1\omega = 200\Omega$ ; $Z_{C1} = \dfrac{1}{\omega C_1} = 100\Omega$

$$Z_1 = \sqrt{R^2 + (Z_{L1} - Z_{C1})^2} = 100\sqrt{2}(\Omega)$$

$$tg\varphi_1 = \frac{Z_{C1} - Z_{L1}}{R} = -1 \Rightarrow \varphi_1 = -\frac{\pi}{4}$$




$$I_1 = \frac{U}{Z_1}$$

$$\Rightarrow U_{AM} = RI_1 = \frac{U}{\sqrt{2}};$$

$$U_{MN} = Z_{L1}I_1 = U\sqrt{2};$$

$$U_{NB} = Z_{C1}I_1 = \frac{U}{\sqrt{2}}$$

Với dòng $i_2$ ta có:

$Z_{L2} = L_2\omega = 100\Omega$ ; $Z_{C2} = \dfrac{1}{\omega C_2} = 200\Omega$

$$Z_2 = \sqrt{R^2 + (Z_{L2} - Z_{C2})^2} = 100\sqrt{2}(\Omega)$$

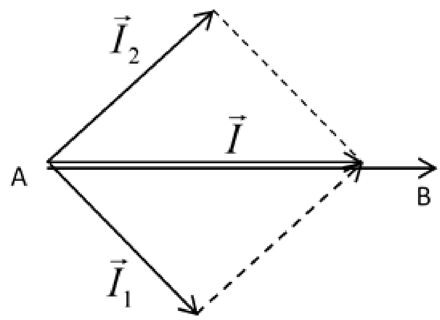
$$tg\varphi_2 = \frac{Z_{C2} - Z_{L2}}{R} = 1 \Rightarrow \varphi_2 = \frac{\pi}{4}$$

$$I_2 = \frac{U}{Z_2}$$

$$\Rightarrow U_{AP} = RI_2 = \frac{U}{\sqrt{2}};$$

$$U_{PQ} = Z_{C2}I_2 = U\sqrt{2};$$

$$U_{QB} = Z_{L2}I_2 = \frac{U}{\sqrt{2}}$$




Hiệu điện thế giữa A và B cho bởi:

$u_{AB} = u_{AM} + u_{MN} + u_{NB}$ (1)

$u_{AB} = u_{AP} + u_{PQ} + u_{QB}$ (2)

Ta có giản đồ sau:

$$\vec{U}_{AB} = \vec{U}_{AM} + \vec{U}_{MN} + \vec{U}_{NB}$$

$$\vec{U}_{AB} = \vec{U}_{AP} + \vec{U}_{PQ} + \vec{U}_{QB}$$

Trên giản đồ thấy ngay tứ giác APBM là hình vuông, do đó AB = MP

$\Rightarrow U_{AB} = U_{MP} = 200V$

2/ Biểu thức dòng điện chính

$U_{AB} = U = 200V \Rightarrow I_1 = \dfrac{U}{Z_1} = \sqrt{2}(A)\ ; I_2 = \dfrac{U}{Z_2} = \sqrt{2}(A)$

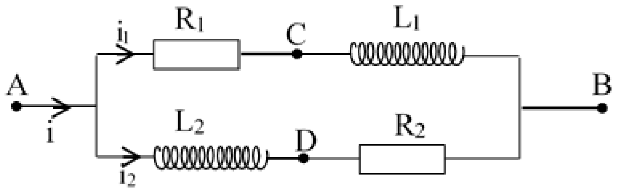
Dòng điện chính cho bởi : $i = i_1 + i_2$.

Ta có giản đồ sau :

Theo giản đồ ta thấy I = 2(A) và φ = 0. Vậy biểu thức dòng điện chính là:

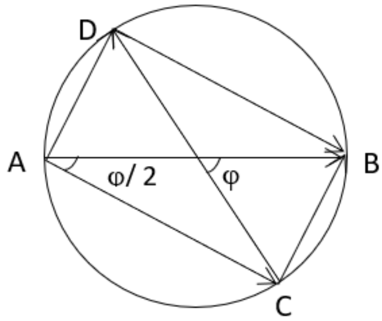
$$i = 2\sqrt{2}\sin 100\pi t(A)$$

**Bài 23.**




Trên giản đồ thấy tứ giác ADBC nội tiếp.

.




1. U' = U nếu tứ giác ADBC trở thành hình chữ nhật, khi đó ta có:

$U_{CB} = U_{AD} \Leftrightarrow I_1\omega L_1 = I_2\omega L_2$

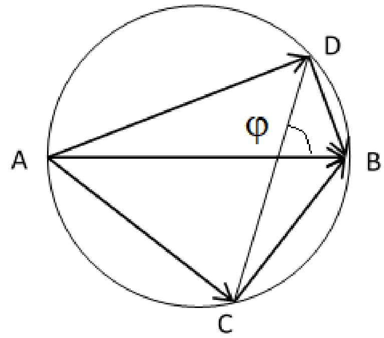
$U_{AC} = U_{DB} \Leftrightarrow I_1R_1 = I_2R_2$

Từ đó rút ra điều kiện để U' = U là $L_1R_2 = L_2R_1$ (1)

* Tính độ lệch pha :

$$tg\frac{\varphi}{2} = \frac{U_{CB}}{U_{AC}} = \frac{L_1\omega}{R_1}\ ;$$

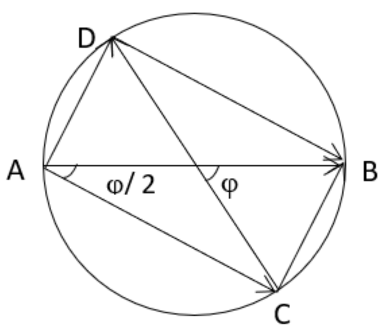
$$tg\varphi = \frac{2tg\dfrac{\varphi}{2}}{1 - tg^2\dfrac{\varphi}{2}} = \frac{2\omega L_1R_1}{R_1^2 - \omega^2L_1^2}$$




φ tăng nếu $\dfrac{L_1\omega}{R_1}$ tăng

Nếu $R_1 = L_1\omega$ (và do đó $R_2 = L_2\omega$) thì $\varphi = \pi/2$, $u_{CD}$ vuông pha so với $u_{AB}$

3. Mạng có công dụng làm thay đổi pha của dòng điện xoay chiều mà không làm thay đổi hiệu điện thế hiệu dụng nếu biểu thức (1) được thoả mãn.



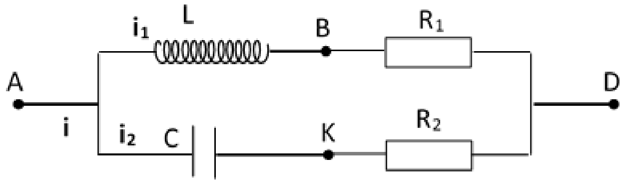

Một mạng khác có công dụng tương tự là mạng , trong đó hai cuộn dây được thay thế bằng hai tụ điện và phải thoả mãn điều kiện: $\dfrac{R_1}{C_2} = \dfrac{R_2}{C_1}$

**Bài 24.**

1. Tìm $i_1$ , $i_2$ và i ?

Giả sử $u_{AD} = U\sqrt{2}\sin\omega t(V)$

Thì biểu thức dòng điện rẽ:



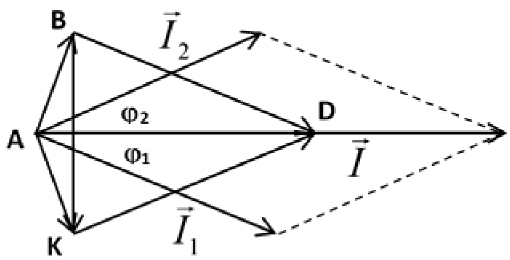

$$i_1 = I_1\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_1)$$

$$i_2 = I_2\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_2)$$

Với $Z_1 = \sqrt{R^2 + Z_L{}^2} = 50(\Omega)$

$$tg\varphi_1 = \frac{-Z_L}{R} = -\frac{3}{4} \Rightarrow \varphi_1 = -\frac{37\pi}{180}$$

$$I_1 = \frac{U}{Z_1} = 2(A)$$




Và $Z_2 = \sqrt{R^2 + Z_C{}^2} = 50(\Omega)$

$$tg\varphi_2 = \frac{Z_C}{R} = \frac{3}{4} \Rightarrow \varphi_2 = \frac{37\pi}{180}$$

$$I_2 = \frac{U}{Z_2} = 2(A)$$

Vậy $i_1 = 2\sqrt{2}\sin(100\pi t - \dfrac{37\pi}{180})(A)$

$$i_2 = 2\sqrt{2}\sin(100\pi t + \frac{37\pi}{180})(A)$$

Dòng điện trong mạch chính cho bởi $i = i_1 + i_2$. ta có giản đồ:

Trên giản đồ ta thấy $I = 2I_1\cos37^0 = 3{,}2(A)$ và $\varphi = 0$

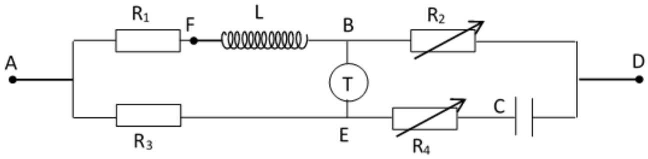
Vậy $i = 3{,}2\sqrt{2}\sin100\pi t(A)$

2. Tìm $U_{BK}$

Từ giản đồ ta thấy $U_{BK} = 2U_{AB}\sin53^0 = 2I_1Z_L\sin53^0 = 96(V)$

**Bài 25.** 1. Giản đồ véc tơ

AF// BD vì $R_1\vec{I}_1, R_2\vec{I}_1$ đều cùng pha với $\vec{I}_1$, $E\hat{D}G = A\hat{E}F$ (Vì hai góc có cạng tương ứng vuông góc). Hai tam giác AFE và EGD đồng dạng cho:




$$\frac{L\omega}{R_1} = \frac{1}{\omega C R_4} \quad (1)$$

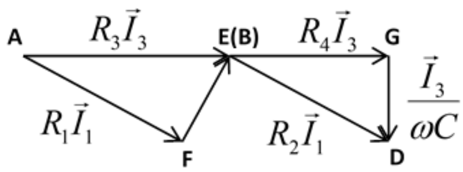
2/

$$Z_1 = \sqrt{R_1^{\ 2} + (L\omega)^2}; Z_2 = R_2; Z_3 = R_2; Z_4 = \sqrt{R_4^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}$$

$U_{AB} = U_{AE}$ cho $Z_1I_1 = Z_3I_3$ ; $U_{BD} = U_{AD}$ cho $Z_2I_1 = Z_4I_3$ (2)

Suy ra $Z_1Z_4 = Z_2Z_3$ . Thay bằng các biểu thức (2) và bình phương, ta có:

$$(R_1^{\ 2} + L^2\omega^2)\left(R_4^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}\right) = (R_2R_3)^2$$




Sau vài biến đổi ta có:

$$R_1R_4 + \frac{L}{C} = R_2R_3 \quad (3)$$

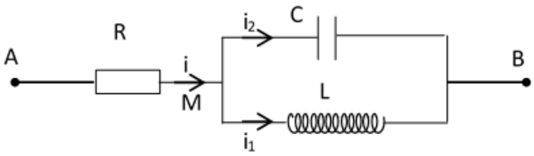
Hai phương trình (1) và (3) cho ta hai ẩn $R_1$ và L. Thay $R_1 = CLR_4\omega$ vào (3) ta có:

$$L(CR_4^2\omega^2 + \frac{1}{C}) = R_2R_3 \Rightarrow L = \frac{R_2R_3}{CR_4^2\omega^2 + \frac{1}{C}}; R_1 = \frac{C^2R_4\omega^2R_2R_3}{1 + C^2R_4^2\omega^2}$$

áp dụng số: L = 0,1(H) ; $R_1$ = 100(Ω)

**Bài 26.** 1. Hiệu điện thế $u_{AB}$.

*Giả sử $u_2 = U_2\sqrt{2}\sin\omega t(V)$



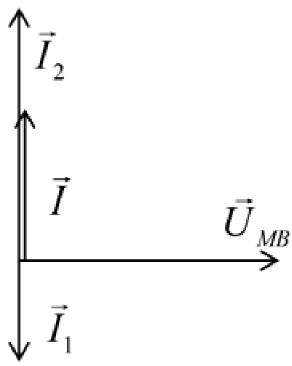

Thì biểu thức dòng điện rẽ:

$$i_1 = I_1\sqrt{2}\sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

$$i_2 = I_2\sqrt{2}\sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

Với $Z_L = \omega L = 12\Omega \Rightarrow I_1 = \frac{U_2}{Z_L} = \frac{U_2}{12}$

$$Z_C = \frac{1}{\omega C} = 3\Omega \Rightarrow I_2 = \frac{U_2}{Z_C} = \frac{U_2}{3}$$




Suy ra $I_2 = 4I_1$

* Giản đồ 1 : $i = i_1 + i_2$ $\Leftrightarrow I = I_2 - I_1 = 3I_1$

$u_2$ chậm pha $\frac{\pi}{2}$ so với i.

* $i = I\sqrt{2}\sin\omega t$ nên ta có:

$u_1 = U_1\sqrt{2}\sin\omega t$

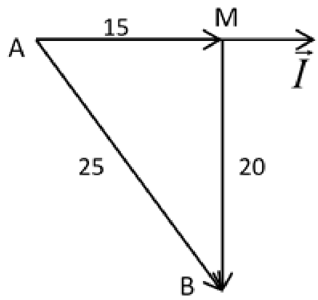
$$u_2 = U_2\sqrt{2}\sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

Với $U_1$ = RI = 15(V) ;

$U_2$ cho bởi : I = $I_2$ - $I_1$ $\Leftrightarrow 5 = \frac{U_2}{3} - \frac{U_2}{12} \Rightarrow U_2 = 20(V)$

* Giản đồ 2 u = $u_1$ + $u_2$ $\Leftrightarrow U = \sqrt{U_1^2 + U_2^2} = 25(V)$

$$tg\varphi = -\frac{U_2}{U_1} = -\frac{4}{3} \Rightarrow \varphi = -\frac{53\pi}{180}$$




Biểu thức hiệu điện thế:

$$u = 25\sqrt{2}\sin(100\pi t - \frac{53\pi}{180})(V)$$

2. Công suất tiêu thụ :

P = $RI^2$ = 3.25 = 75 W

Tổng trở của mạch : $Z = \frac{U}{I} = \frac{25}{5} = 5(\Omega)$

**Bài 27.**

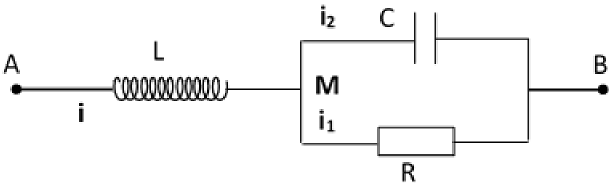
1. Biểu thức của i

Đặt $u_1 = u_{AM}$ ; $u_2 = u_{MB}$.

Giả sử biểu thức $u_2 = U_2\sqrt{2}\sin\omega t(V)$ thì dòng điện mạch rẽ:

$$i_1 = I_1\sqrt{2}\sin\omega t$$

$$i_2 = I_2\sqrt{2}\sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$




Với $I_1 = \frac{U_2}{R} = \frac{U_2\sqrt{3}}{200}$ ;

$$Z_C = \frac{1}{\omega C} = 200\Omega \Rightarrow I_2 = \frac{U_2}{Z_C} = \frac{U_2}{200}$$

Suy ra $I_1 = I_2\sqrt{3}$

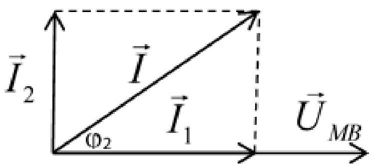
* Từ i = $i_1$ + $i_2$ . Giản đồ cho thấy $u_2$ chậm pha hơn i một góc $\varphi_2$

Với $tg\varphi_2 = \frac{I_2}{I_1} = \sqrt{3} \Rightarrow \varphi_2 = \frac{\pi}{6}$ ; và lưu ý I = $2I_2$.

*. Giả sử $i = I\sqrt{2}\sin\omega t$

thì $u_1 = U_1\sqrt{2}\sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$

$$u_2 = U_2\sqrt{2}\sin(\omega t - \frac{\pi}{6})$$



Với $U_1 = Z_L I = 50I$ ; $U_2 = Z_C I_2 = Z_C\dfrac{I}{2} = 100I$

Và $u = u_1 + u_2$.

Từ giản đồ cho thấy $\varphi = 0$

Và $U = U_2\cos 30^0 = \dfrac{100I\sqrt{3}}{2} \Rightarrow I = \dfrac{2U}{100\sqrt{3}} = 2(A)$

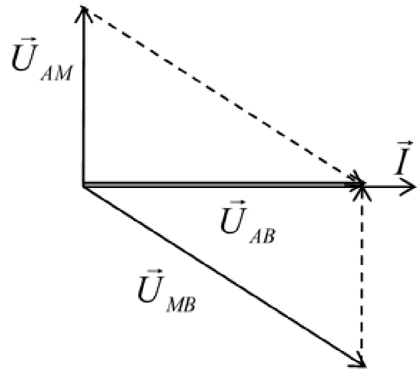
Vậy $i = 2\sqrt{2}\sin 100\pi t(A)$

2/ Công suất tiêu thụ:

$P = RI_1^2$

Với $R = \dfrac{200}{\sqrt{3}}(\Omega)$ ; $I_1 = \dfrac{I\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}(A)$

Suy ra $P = 200\sqrt{3}$ W

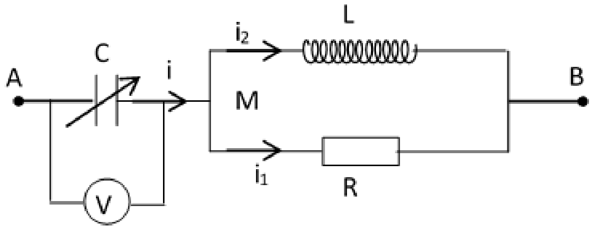



**Bài 28.** Giả sử $u_2 = U_2\sqrt{2}\sin\omega t(V)$

Thì biểu thức dòng điện rẽ:

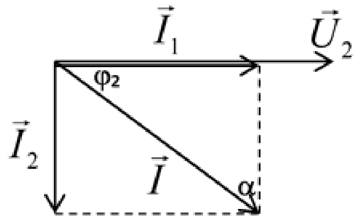
$i_1 = I_1\sqrt{2}\sin\omega t$

$i_2 = I_2\sqrt{2}\sin(\omega t - \dfrac{\pi}{2})$




Với $I_1 = \dfrac{U_2}{R} = \dfrac{U_2}{30}$ ;

$Z_L = L\omega = 40\Omega \Rightarrow I_2 = \dfrac{U_2}{Z_L} = \dfrac{U_2}{40}$




*/ Giản đồ 1: $i = i_1 + i_2 \Leftrightarrow i = I\sqrt{2}\sin(\omega t - \varphi_2)$

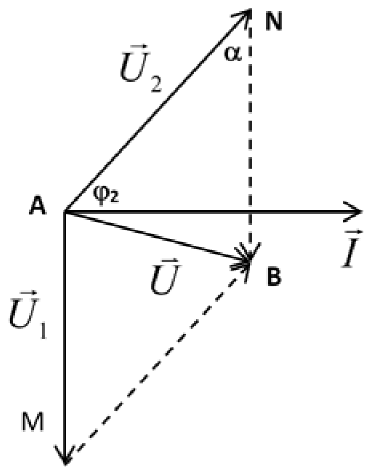
$tg\varphi_2 = \dfrac{I_2}{I_1} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow \varphi_2 = \dfrac{37\pi}{180}(rad)$

$\Rightarrow \cos\varphi_2 = 0{,}8$

Giả sử $i = I\sqrt{2}\sin\omega t$

Nên $u_1 = U_1\sqrt{2}\sin(\omega t - \dfrac{\pi}{2})$

$u_2 = U_2\sqrt{2}\sin(\omega t + \dfrac{37\pi}{180})$




Với $U_1 = Z_C I$

Giản đồ 2 : $u = u_1 + u_2 \Leftrightarrow \vec{U} = \vec{U}_1 + \vec{U}_2$

Trên giản đồ , áp dụng định lý hàm số sin cho tam giác ANB ta có:

$$U_C = \frac{U}{\sin\alpha}\sin B\hat{A}N \le \frac{U}{\sin\alpha} = \frac{U}{\cos\varphi_2}$$

$U_C$ cực đại khi $\sin B\hat{A}N = 1$

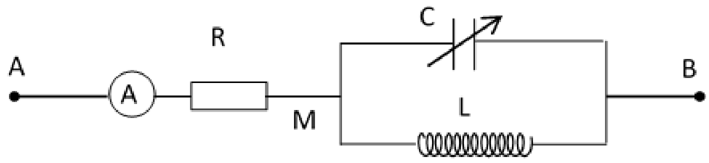
Vậy $U_{C\max} = \dfrac{U}{\cos\varphi_2} = 125(V)$

**Bài 29.** Giả sử $u_2 = U_2\sqrt{2}\sin\omega t(V)$

Thì biểu thức dòng điện rẽ:

$$i_1 = I_1\sqrt{2}\sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

$$i_2 = I_2\sqrt{2}\sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$




Với $I_1 = \dfrac{U_2}{Z_L}$ ; $I_2 = \dfrac{U_2}{Z_C}$

Giản đồ : i = $i_1 + i_2$ $\Leftrightarrow \vec{I} = \vec{I_1} + \vec{I_2}$

Muốn cho dòng điện chính bằng không thì $I_1 = I_2 \Leftrightarrow Z_L = Z_C$

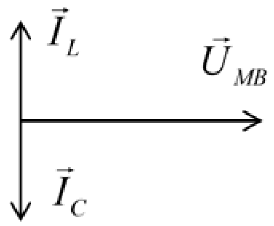
Vậy $Z_C = \dfrac{1}{2\pi}100\pi = 50(\Omega) \Rightarrow C = \dfrac{10^{-4}}{2\pi}F$

*/ Biểu thức các dòng điện:

I = 0 suy ra i = 0

Vì I = 0 nên $U_1 = 0$ ; $U_2 = U = 100(V)$ suy ra $I_1 = I_2 = 2(A)$

Vậy biểu thức các dòng điện rẽ là:



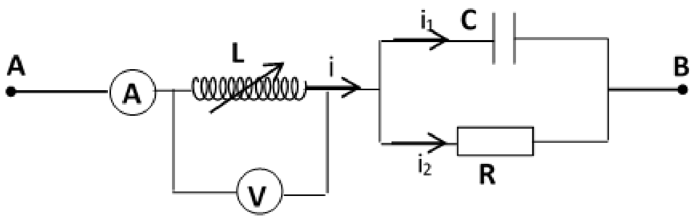

$$i_1 = 2\sqrt{2}\sin(100\pi t - \frac{\pi}{2})(A)$$

$$i_2 = 2\sqrt{2}\sin(100\pi t + \frac{\pi}{2})(A)$$

**Bài 30.** 1/ Số chỉ cực đại của ampe kế.

Giả sử $u_2 = U_2\sqrt{2}\sin\omega t(V)$

Thì biểu thức dòng điện rẽ:



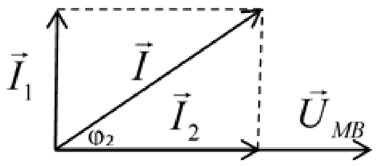

$$i_1 = I_1\sqrt{2}\sin\omega t$$

$$i_2 = I_2\sqrt{2}\sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

Với $I_1 = \dfrac{U_2}{R} = \dfrac{U_2}{15}$ ; $Z_C = \dfrac{1}{\omega C} = 20\Omega \Rightarrow I_2 = \dfrac{U_2}{Z_C} = \dfrac{U_2}{20}$

*/ Giản đồ 1: i = $i_1 + i_2$ $\Leftrightarrow$ $i = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_2)$

$$tg\varphi_2 = \frac{I_2}{I_1} = \frac{3}{4} \Rightarrow \varphi_2 = \frac{37\pi}{180}(rad)$$ ; $\sin\varphi_2 = 0,6$




Giả sử $i = I\sqrt{2}\sin\omega t$

Thì $u_1 = U_1\sqrt{2}\sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$

$$u_2 = U_2\sqrt{2}\sin(\omega t - \frac{37\pi}{180})$$

Với Với $U_1 = Z_L I$ ; $U_2 = RI_1 = Z_C I_2$

$$I = \frac{I_1}{\cos\varphi_2} \Leftrightarrow \frac{U_2}{Z_2} = \frac{U_2}{R\cos\varphi_2} \Rightarrow Z_2 = R\cos\varphi_2 = 12(\Omega)$$

Giản đồ 2 : $u = u_1 + u_2$ $\Leftrightarrow \vec{U} = \vec{U}_1 + \vec{U}_2 \Leftrightarrow \vec{Z} = \vec{Z}_1 + \vec{Z}_2$

Z là tổng trở của mạch AB ( $U = I.Z$ ; $U_1 = I.Z_L$ ; $U_2 = I.Z_2$)

Muốn cho dòng điện chính cực đại thì Z phải cực tiểu.

Vì $Z_2$ không đổi và $\varphi_2 = 37^0$ nên Z cực tiểu khi $\varphi = 0$ ($u_{AB}$ và i cùng pha).

Lúc đó $Z_{min} = Z_2\cos\varphi_2 = 9,6(\Omega)$

$$I_{max} = \frac{U}{Z_{min}} = \frac{120}{9,6} = 12,5(A)$$

2/ Giá trị của L và số chỉ của vôn kế.

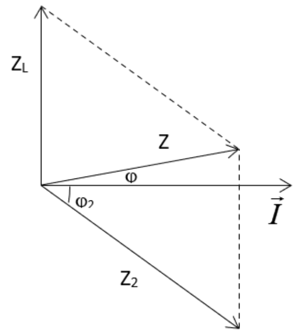
Theo giản đồ ta lại thấy $Z_{min}$ thì $Z_L = Z_2\sin\varphi_2 = 7,2(\Omega)$

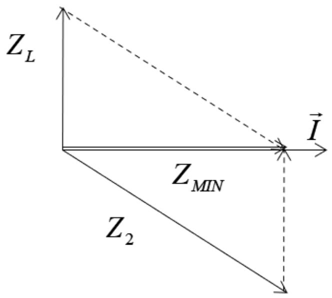
Độ tự cảm lúc đó:

$$L = \frac{Z_L}{\omega} = \frac{7,2}{100\pi}(H) = 23(mH)$$

Số chỉ của vôn kế:

$$U_1 = Z_L I_{max} = 7,2 .12,5 = 90(V)$$



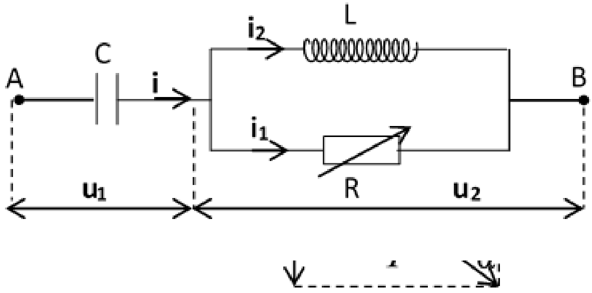

**Bài 31.**

1/ Cho $LC\omega^2 = 1$. Chứng minh rằng dòng điện qua R không phụ thuộc R?

Giả sử $u_2 = U_2\sqrt{2}\sin\omega t(V)$ thì biểu thức dòng điện rẽ:

$$i_1 = I_1\sqrt{2}\sin\omega t$$

$$i_2 = I_2\sqrt{2}\sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$$




Giản đồ 1: i = $i_1$ + $i_2$ $\Leftrightarrow \vec{I} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2$

$$i = I\sqrt{2}\sin(\omega t - \varphi_2)$$

Trên giản đồ: $\sin\alpha = \dfrac{I_1}{I}$ (1)

$$tg\varphi_2 = \frac{I_2}{I_1} = \frac{U_2}{Z_L}.\frac{R}{U_2} = \frac{R}{Z_L}$$

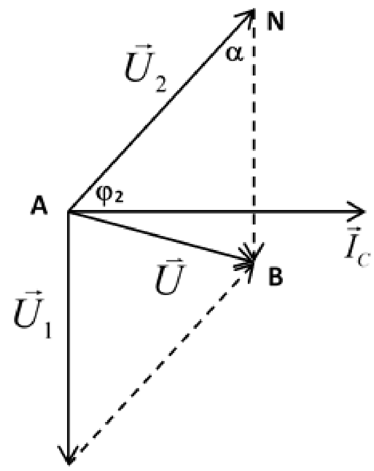
$$\cos\varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\varphi_2}} = \frac{Z_L}{\sqrt{R^2+Z_L^2}} \quad ; \quad \sin\varphi_2 = \frac{R}{\sqrt{R^2+Z_L^2}}$$

$$I = \frac{I_1}{\cos\varphi_2} = \frac{I_1\sqrt{R^2+Z_L^2}}{Z_L} \quad (2)$$

*Giả sử $i = I\sqrt{2}\sin\omega t$

Thì $u_1 = U_1\sqrt{2}\sin(\omega t - \dfrac{\pi}{2})$

$u_2 = U_2\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_2)$




Giản đồ 2 : u = $u_1$ + $u_2$ $\Leftrightarrow \vec{U} = \vec{U}_1 + \vec{U}_2$

Suy ra $U^2 = U_1^2 + U_2^2 - 2U_1U_2\cos\alpha$

$\Leftrightarrow U^2 = U_1^2 + U_2^2 - 2U_1U_2\sin\varphi_2$

$$\sin\varphi_2 = \frac{I_2}{I} = \frac{U_2}{Z_L}.\frac{Z_C}{U_1}$$

Suy ra $U^2 = U_1^2 + U_2^2\left(1 - 2\dfrac{Z_C}{Z_L}\right)$ (3)

Vì $LC\omega^2 = 1 \Rightarrow Z_L = Z_C \Rightarrow U^2 = U_1^2 - U_2^2 \Rightarrow U^2 + U_2^2 = U_1^2 \Rightarrow \Delta ABN$ trên giản đồ 2 vuông ở A.

$\Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{U}{U_1}$ (4)

Từ (1) và (4) $\Rightarrow \dfrac{I_1}{I} = \dfrac{U}{U_1} \Leftrightarrow \dfrac{I_1}{I} = \dfrac{U}{IZ_C} \Rightarrow I_1 = \dfrac{U}{Z_C} = U\omega C$ (5)

Biểu thức (5) chứng tỏ $I_R = I_1$ không phụ thuộc R

2/ Cho $LC\omega^2 = 2$. Chứng minh rằng dòng điện qua C không phụ thuộc R?

Từ biểu thức (3)

$$U^2 = U_1^2 + U_2^2\left(1 - 2\frac{Z_C}{Z_L}\right)$$

Do $LC\omega^2 = 2$ cho nên số hạng thứ hai của biểu thức trên trở thành:

$U = U_1 = I.Z_C \Rightarrow I = \dfrac{U}{Z_C} = U\omega C$.

Giá trị này chứng tỏ dòng điện qua C không phụ thuộc R

3/ điều kiện để $I_R$ tức là ($I_1$)không phụ thuộc R?

Từ biểu thức (3)

$$U^2 = U_1^2 + U_2^2\left(1 - 2\frac{Z_C}{Z_L}\right)$$

Với $U_2 = I_1R$ ; $U_1 = IZ_C = \dfrac{I_1Z_C\sqrt{R^2 + Z_L^2}}{Z_L}$

Suy ra $U^2 = \dfrac{I_1^2Z_C^2(R^2 + Z_L^2)}{Z_L^2} + I_1^2R^2\left(1 - 2\dfrac{Z_C}{Z_L}\right)$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{U}{\sqrt{Z_C^2 + R^2\left(\frac{Z_C^2}{Z_L^2} - 2\frac{Z_C}{Z_L} + 1\right)}} = \frac{U}{\sqrt{Z_C^2 + R^2\left(\frac{Z_C}{Z_L} - 1\right)^2}}$$

Để $I_1$ không phụ thuộc R thì hệ số của R phải bằng không

$\Rightarrow \dfrac{Z_C}{Z_L} = 1 \Leftrightarrow LC\omega^2 = 1$ và $I_1 = \dfrac{U}{Z_C} = U\omega C$s

4/ điều kiện để $I_C$ không phụ thuộc R?

Từ biểu thức (3)

$$U^2 = U_1^2 + U_2^2\left(1 - 2\frac{Z_C}{Z_L}\right)$$

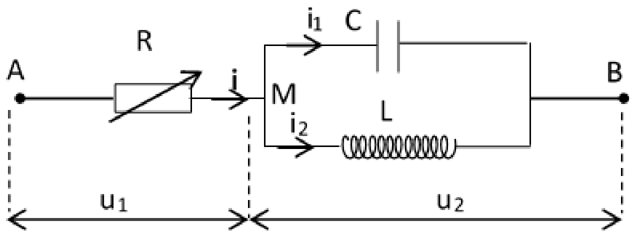
Vì $U_2$ phụ thuộc $Z_2$ mà $Z_2$ phụ thuộc R nên muốn cho I không phụ thuộc R thì số hạng thứ hai phải bằng không tức là:

$$1 = \frac{2Z_C}{Z_L} \Leftrightarrow LC\omega^2 = 2$$

Khi đó ta có $U = Z_CI \Rightarrow I = \dfrac{U}{Z_C} = U\omega C$ . Giả trị này chứng tỏ I không phụ thuộc R

**Bài 32.**

Giản đồ $i = i_1 + i_2 \Leftrightarrow \vec{I} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2$




$\Leftrightarrow I = I_1 - I_2 \Leftrightarrow \dfrac{U_2}{Z_2} = \dfrac{U_2}{Z_C} - \dfrac{U_2}{Z_L}$

$$\Rightarrow Z_2 = \frac{Z_C Z_L}{Z_C + Z_L} = 12(\Omega)$$

Công suất

$$P = I^2 R = \frac{U^2 R}{R^2 + Z_2^2} = \frac{U^2}{R + \dfrac{Z_2^2}{R}} \le \frac{U^2}{2Z_2} = 24(W)$$

$P_{max} = 24(W)$ khi $R = Z_2 = 12(\Omega)$

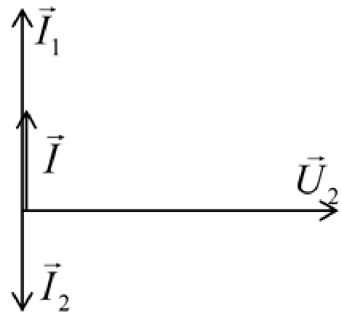
2. Xác định R khi $P = P_{max}/2 = 12(W)$

Có : $PR^2 - U^2R + PZ_2^2 = 0 \Leftrightarrow 12R^2 - 24^2R + 12.12^2 = 0$

$\Leftrightarrow R^2 - 288R + 144 = 0$

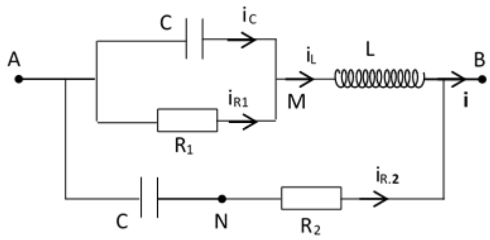
Suy ra $R = 287{,}5\ (\Omega)$

Và $R = 0{,}5\ (\Omega)$




**Bài 33** 1. Tìm $R_2$

*/ $i_L = i_{R1} + i_C$

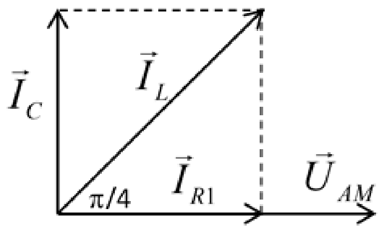



$$\Leftrightarrow \vec{I}_L = \vec{I}_{R1} + \vec{I}_C \Leftrightarrow I_L = \sqrt{I_{R1}^2 + I_C^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{U_{AM}}{Z_{AM}} = U_{AM}\sqrt{\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{Z_C^2}}$$

$$\Rightarrow Z_{AM} = \frac{R_1 Z_C}{\sqrt{R_1^2 + Z_C^2}} = 50\sqrt{2}(\Omega)$$

$$tg\varphi_{AM} = \frac{I_C}{I_{R1}} = \frac{R_1}{Z_C} = 1 \Rightarrow \varphi_{AM} = \frac{\pi}{4}$$




$i_L$ sớm pha $\dfrac{\pi}{4}$ so với $u_{AM}$

*/ $u_{AB} = u_{AM} + u_{MB}$

$$\Leftrightarrow \vec{U}_{AB} = \vec{U}_{AM} + \vec{U}_{MB}\ ;$$

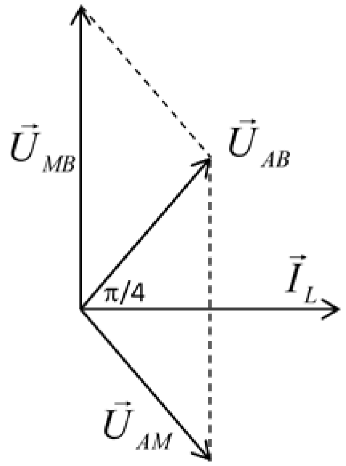
$U_{AM} = I_L Z_{AM} = 50I_L\sqrt{2}$ ; $U_{MB} = I_L Z_L = 100I_L$

Giản đồ cho thấy $i_L$ muộn pha $\pi/4$ so với

$u_{AB}$ . Suy ra $i_{R2}$ sớm pha $\pi/4$ so với $u_{AB}$

Gọi $\varphi_2$ là độ lệch pha của $i_{R2}$ so với $u_{AB}$ thì

$$tg\varphi_2 = \frac{Z_C}{R_2} = 1 \Rightarrow R_2 = Z_C = 100(\Omega)$$




2/ biểu thức các cường độ dòng điện qua L, qua $R_2$ và dòng chính?

*/ Giản đồ 2 cho thấy $U_{AM} = U_{AB} = 200$(V)

$$\Rightarrow I_L = \frac{U_{AM}}{Z_{AM}} = 2\sqrt{2}(A)$$

Biểu thức dòng điện qua L:

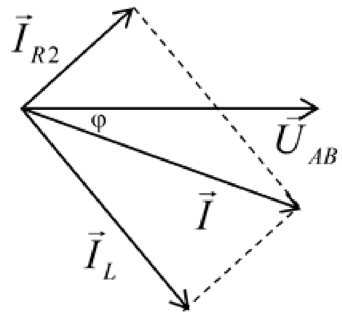
$$i_L = 4\sin(100\pi t - \frac{\pi}{4})(A)$$

*/ $Z_{ANB} = \sqrt{Z_C^2 + R_2^2} = 100\sqrt{2}(\Omega)$

$$I_{R2} = \frac{U_{AB}}{Z_{ANB}} = \sqrt{2}(A)$$

Biểu thức dòng điện qua $R_2$ là :

$$i_{R2} = 2\sin(100\pi t + \frac{\pi}{4})(A)$$



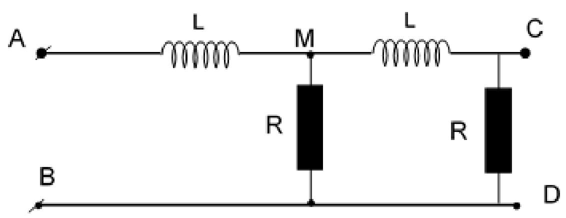

* Dòng điện chính cho bởi $i = i_L + i_{R2} \Leftrightarrow \vec{I} = \vec{I}_L + \vec{I}_{R2}$

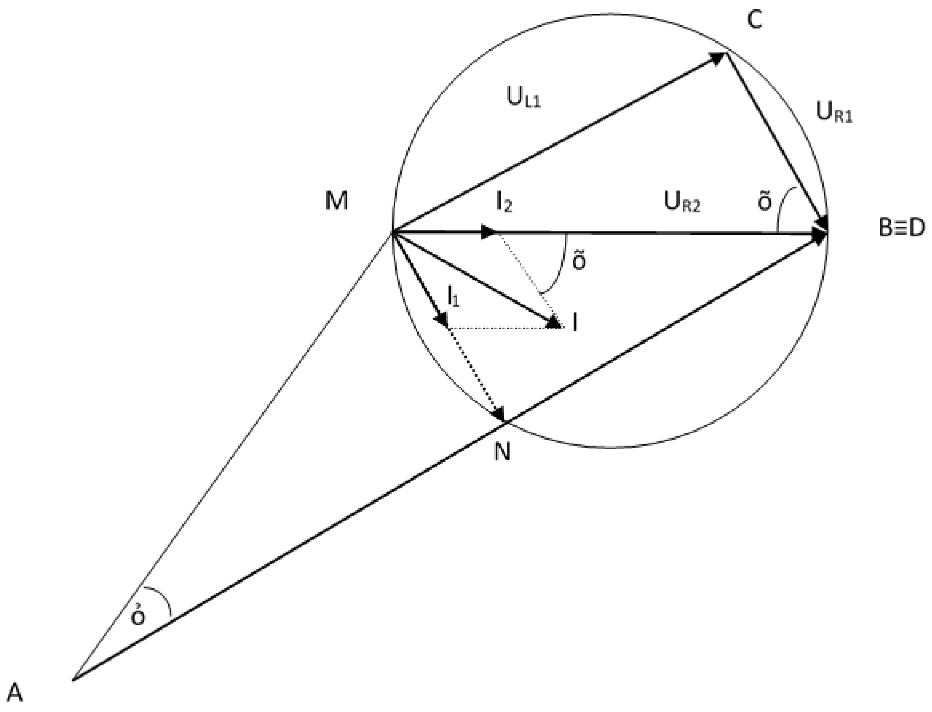
$$I = \sqrt{I_{R2}^2 + I_L^2} = \sqrt{10}(A)$$

$\varphi = 45^0$ - arctg(1/2) $\approx 19^0 = \dfrac{19\pi}{180}(rad)$

Vậy $i = 2\sqrt{5}\sin(100\pi t - \dfrac{19\pi}{180})(A)$

**Bài 34.** Giản đồ véc tơ






a. Vì $\overrightarrow{u_{AB}} \perp \overrightarrow{u_{CD}}$ , theo giản đồ véc tơ ta có:

$$\sin\alpha = \frac{MN}{AM} = \frac{CB}{AM} = \frac{I_1R}{I.Z_L}$$

$$\sin\beta = \frac{MC}{MB} = \frac{I_1.Z_L}{I_2R}$$

Lại cú, $\frac{I}{\sin\beta} = \frac{I_2}{\sin\alpha} \Leftrightarrow \frac{I}{I_2} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{I_1.Z_L}{I_2R}.\frac{I.Z_L}{I_1R} = \frac{I}{I_2}.\frac{Z_L^2}{R^2}$

⇨ $Z_L = R \Rightarrow \omega L = R \Rightarrow \omega = \frac{R}{L}$

b. $Z_L = R \Rightarrow \beta = 45^0 \Rightarrow \sin\beta = \frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Ta có: AB = AN + NB = AN + MC = $\sqrt{AM^2 - MN^2} + I_1.Z_L$

Mà : CD = CB = $I_1R$; MN = CB

⇨ AB = $\sqrt{I^2.Z_L^2 - I_1^2R^2} + I_1.Z_L = R(I_1 + \sqrt{I^2 + I_1^2}))$

CD = $R.I_1$

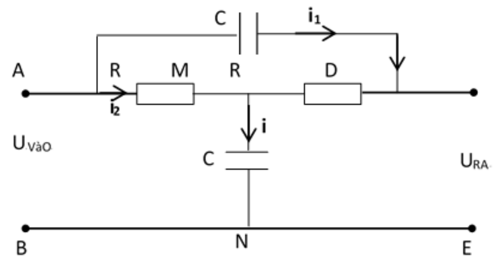
$\beta = 45^0 \Rightarrow I^2 = I_1^2 + I_2^2 + 2I_1.I_2.\frac{\sqrt{2}}{2} = I_1^2 + 2I_1^2 + 2I_1.\sqrt{2}I_1.\frac{\sqrt{2}}{2} = 5I_1^2$

AB = $R(I_1 + \sqrt{5I_1^2 - I_1^2} = 3I_1R$

Vậy: $\frac{AB}{CD} = 3 \Leftrightarrow \frac{U_{CD}}{U_{AB}} = \frac{1}{3}$

**Bài 35.** 1/ Giản đồ 1: $i = i_1 + i_2$

$i_2$ cùng pha với $u_{AM}$ , $i_1$ sớm pha hơn so với $u_{AM}$ góc $\varphi_1$ với




$$tg\varphi_1 = \frac{Z_C}{R} \quad (1)$$

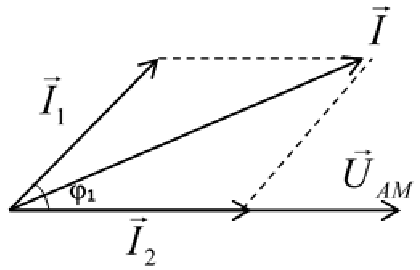
Và $I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + 2I_1I_2\cos\varphi_1} \quad (2)$

Lại có $\vec{U}\,\vec{U}_{AB} = \vec{U}_{AM} + \vec{U}_{MB} = \vec{U}_{AD} + \vec{U}_{SM} + \vec{U}_{MB}$

$$\vec{U}_{AM} // \vec{I}_2; \vec{U}_{AD} \perp \vec{I}_1; \vec{U}_{DM} // \vec{I}_1; \vec{U}_{MB} \perp \vec{I}; \vec{U}_{AB} // \vec{U}_{DB}$$

Ta có giản đồ :

Xét tam giác AKG:



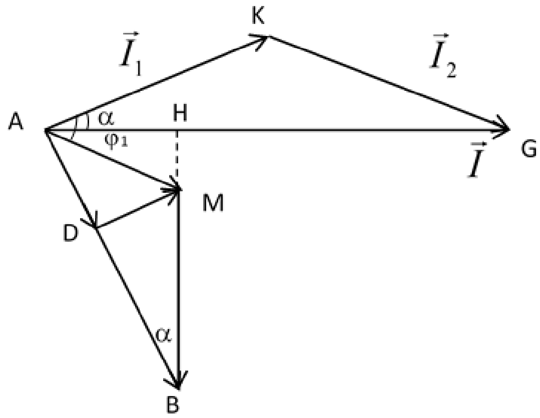

$$\frac{I}{\sin A\hat{K}G} = \frac{I_2}{\sin\alpha}$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{I_2\sin\varphi_1}{I} \quad (3)$$

Xét tam giác AMB:

$$\frac{U_{AM}}{\sin\alpha} = \frac{U_{MB}}{\sin M\hat{A}B}$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{U_{AM}\cos\varphi_1}{U_{MB}} = \frac{I_2R\cos\varphi_1}{IZ_C} \quad (4)$$




Từ (2) và (3) suy ra $tg\varphi_1 = \frac{R}{Z_C} \quad (5)$

Từ (1) và (5)

$$\Rightarrow \frac{Z_C}{R} = \frac{R}{Z_C} \Rightarrow R = Z_C \Leftrightarrow \omega = \frac{1}{RC} \quad (6)$$

2. Và ta suy ra $tg\varphi_1 = 1 \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{4}$

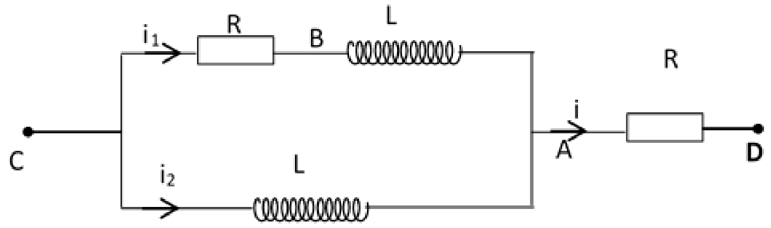
Và còn có $I_1\sqrt{R^2 + Z_C^2} = I_2R \Rightarrow I_1\sqrt{2} = I_2$

Thay vào biểu thức dòng chính ta có $I = I_1\sqrt{5}$

Tỉ số :

$$\frac{U_{ra}}{U_{vao}} = \frac{U_{DB}}{U_{AB}} = \frac{U_{DB}}{U_{AD} + U_{DB}} = \frac{1}{1 + \frac{U_{AD}}{U_{DB}}} = \frac{1}{1 + \frac{I_1Z_C}{\sqrt{(IZ_C)^2 - (I_1R)^2}}} = \frac{2}{3}$$

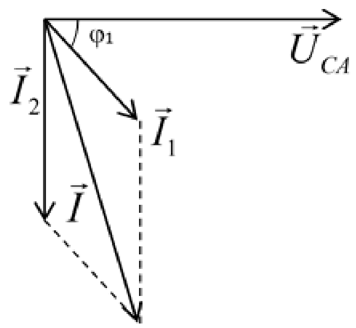
**Bài 36.** Mạch được vẽ lại như sau:




1. Giản đồ 1: $i = i_1 + i_2$

$i_2$ muộn pha với $u_{AM}$ góc $\frac{\pi}{2}$, $i_1$ muộn pha hơn so với $u_{AM}$ góc $\varphi_1$ với

$$tg\varphi_1 = \frac{Z_L}{R} \quad (1)$$



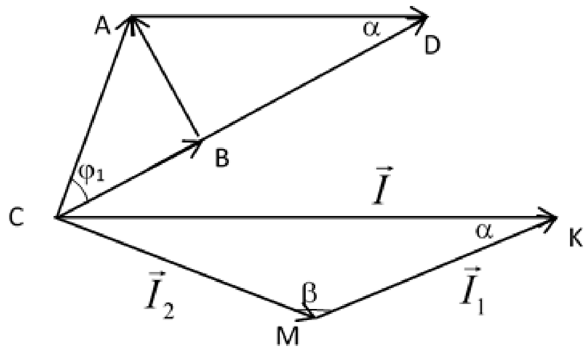

Và $I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + 2I_1I_2\cos\alpha}$

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + 2I_1I_2\sin\varphi_1} \quad (2)$$

Lại có $\vec{U}_{CD} = \vec{U}_{CA} + \vec{U}_{AD} = \vec{U}_{CB} + \vec{U}_{BA} + \vec{U}_{AD}$

$$\vec{U}_{CA} \perp \vec{I}_2; \vec{U}_{AD} // \vec{I}; \vec{U}_{CB} // \vec{I}_1; \vec{U}_{BA} \perp \vec{I}_2; \vec{U}_{CD} \perp \vec{U}_{BA}$$

Ta có giản đồ 2:




Xét tam giác CMK

$$\frac{I}{\sin\beta} = \frac{I_2}{\sin\alpha}$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{I_2\cos\varphi_1}{I} \quad (3)$$

Xét tam giác CAD:

$$\frac{U_{CA}}{\sin\alpha} = \frac{U_{AD}}{\sin\varphi_1}$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{U_{CA}\sin\varphi_1}{U_{AD}} = \frac{I_2Z_L\sin\varphi_1}{IR} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra $\frac{I_2\cos\varphi_1}{I} = \frac{I_2Z_L\sin\varphi_1}{IR}$

$$tg\varphi_1 = \frac{R}{Z_L} \quad (5)$$

Từ (1) và (5) $\Rightarrow \dfrac{Z_L}{R} = \dfrac{R}{Z_L} \Rightarrow R = Z_L \Leftrightarrow \omega = \dfrac{R}{L}$ (6)

2/ Và ta suy ra tg$\varphi_1$ = 1 $\Rightarrow \varphi_1 = \dfrac{\pi}{4}$

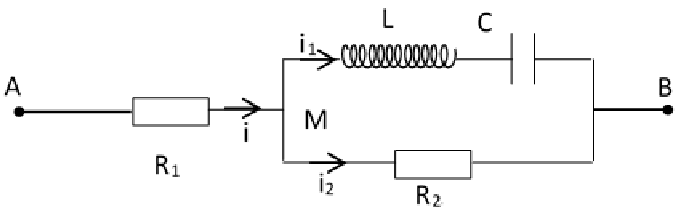
Và còn có $I_1\sqrt{R^2 + Z_C^2} = I_2 R \Rightarrow I_1\sqrt{2} = I_2$

Thay vào biểu thức dòng chính ta có $I = I_1\sqrt{5}$

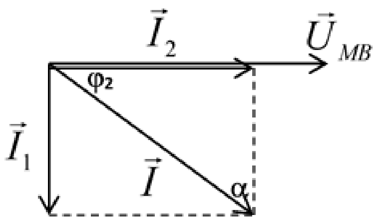
Tỉ số :

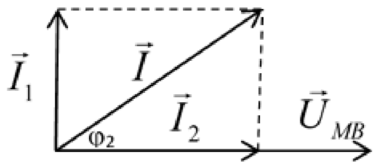
$$\frac{U_{CD}}{U_{BD}} = \frac{U_{CB} + U_{BD}}{U_{BD}} = 1 + \frac{U_{CB}}{U_{BD}} = 1 + \frac{I_1 R}{\sqrt{(IR)^2 - (I_1 Z_L)^2}} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

**Bài 37.**




1/ Giản đồ 1: i = $i_1$ + $i_2$




$$tg\varphi_2 = \frac{R_2}{\delta} \quad ; \quad \delta = \left|\omega L - \frac{1}{\omega C}\right|$$

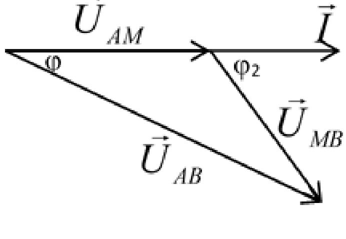
$$\sin\varphi_2 = \frac{R_2}{\sqrt{R_2^2 + \delta^2}} \quad ; \quad \cos\varphi_2 = \frac{\delta^2}{\sqrt{R_2^2 + \delta^2}}$$

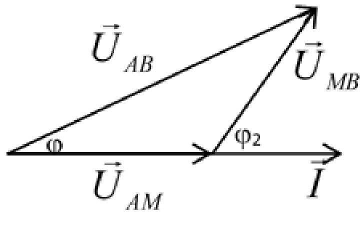
Lại có $U_2 = |U_L - U_C|$ ; $\dfrac{U_L}{U_C} = \omega^2 LC \Rightarrow U_L = U_C\omega^2 LC$

$\Rightarrow U_{MB} = U_C|\omega^2 LC - 1|$

Giản đồ 2 : $u_{AB} = u_{AM} + u_{MB}$

$\Leftrightarrow \vec{U}_{AB} = \vec{U}_{AM} + \vec{U}_{MB}$



$$U_{AM} = IR_1 = \frac{I_2R_1}{\cos\varphi_2} = \frac{U_{MB}R_1\sqrt{R_2^2+\delta^2}}{R_2\delta}$$

$$U_{AB}^2 = U_{AM}^2 + U_{MB}^2 + 2U_{AM}U_{MB}\cos\varphi_2$$

$$U^2 = U_{MB}^2\left[1+\frac{R_1^2(R_2^2+\delta^2)}{R_2^2\delta^2}+2\frac{R_1}{R_2}\right] = U_C^2\left(\omega^2LC-1\right)^2\left[\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)^2+\frac{R_1^2}{\delta^2}\right]$$

$$\Leftrightarrow U^2 = U_C^2\left(\frac{R_1+R_2}{R_2}\right)^2\left[\left(\omega^2LC-1\right)^2+\left(\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}\right)^2C^2\omega^2\right]$$

*/ Đặt $k = \frac{R_1+R_2}{R_2}$ ; $R = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$

Thì $U_C = \dfrac{U}{k\sqrt{\left(\omega^2LC-1\right)^2+R^2C^2\omega^2}}$

2/ Để $U_{C\max}$ thì $y = L^2C^2\omega^4 - \left(2LC-R^2C^2\right)\omega^2 + 1$ phải cực tiểu

$y_{\min}$ khi: $\omega = \sqrt{\dfrac{2LC-R^2C^2}{2L^2C^2}}$

Thay số $\omega = 3.10^4$ Hz = 30kHz

Suy ra $U_{C\max} = 0{,}32$ (V)

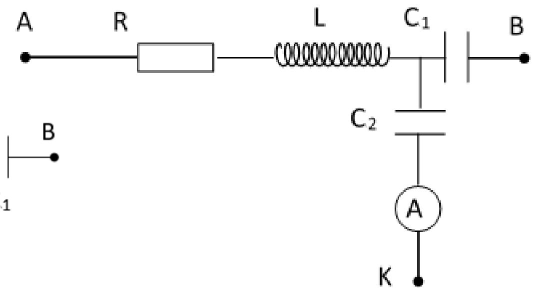
3/ Nếu thay $R_2 = R_3 = 2k\Omega$ thì $2LC - R^2C^2 < 0$

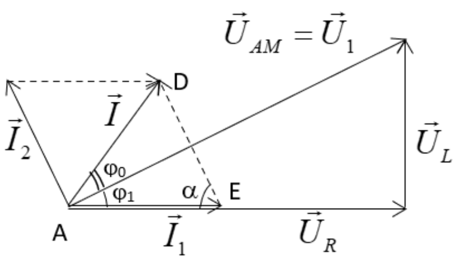
$y = L^2C^2\omega^4 - \left(2LC-R^2C^2\right)\omega^2 + 1$ luôn tăng cùng với ω

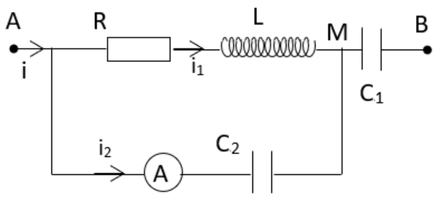
Khi đó $y_{\min} = 1$ ứng với $\omega = 0$

Và $U_{C\max} = \dfrac{U}{k'} = \dfrac{U}{1+\dfrac{R_1}{R_3}} = \dfrac{U}{3} = \dfrac{2}{3}(V)$

**Bài 38.**1. Khi K nối với A. Ta có mạch điện như hình vẽ




Giản đồ 1: $i = i_1 + i_2$ :

$$tg\varphi_0 = \frac{U_L}{U_R} = \frac{Z_L}{R} \Rightarrow \sin\varphi_0 = \frac{Z_L}{\sqrt{R^2+Z_L^2}}; \cos\varphi_0 = \frac{R}{\sqrt{R^2+Z_L^2}}$$

$$U_{AM} = I_1\sqrt{R^2 + Z_L^2} = I_2 Z_C \Rightarrow I_1 = \frac{I_2 Z_C}{\sqrt{R^2 + Z_L}} = \frac{I_2.2Z_L}{\sqrt{R^2 + Z_L^2}} = 2I_2 \sin\varphi_0$$

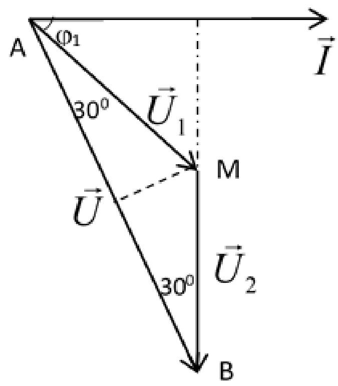
áp dụng định lý hàm số cos cho tam giác ADE:

$$I^2 = I_1^2 + I_2^2 - 2I_1 I_2 \sin\varphi_0 = I_2^2 \Rightarrow I = I_2$$

Tam giác ADE cân ở D

Giản đồ 2 : $u_{AB} = u_{AM} + u_{MB}$ $\Leftrightarrow \vec{U} = \vec{U}_1 + \vec{U}_2$

$\vec{U}$ muộn hơn $\vec{I}$ góc $\frac{\pi}{3}$ ; $\vec{U}_2$ muộn hơn $\vec{I}$ góc $\frac{\pi}{2}$




áp dụng định lý hàm số sin cho tam giác AMB:

$$\frac{U_2}{\sin\left(\frac{\pi}{3} - \varphi_1\right)} = \frac{U_1}{\sin\frac{\pi}{6}} \Leftrightarrow \frac{IZ_C}{\sin\left(\frac{\pi}{3} - \varphi_1\right)} = \frac{I_2 Z_C}{\sin\frac{\pi}{6}}$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3} - \varphi_1\right) = \sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{6}$$

Quay lại giản đồ 1:

áp dụng định lý hàm số sin cho tam giác ADE:

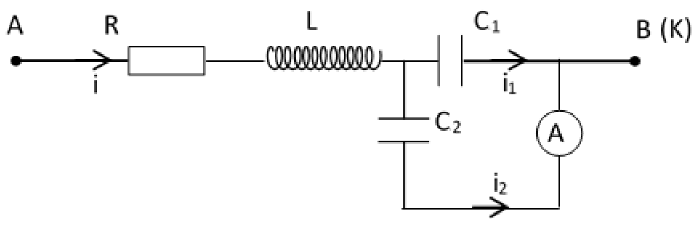
$$\frac{I}{\cos\varphi_0} = \frac{I_2}{\sin(\varphi_0 + \varphi_1)} \Rightarrow \cos\varphi_0 = \sin\left(\varphi_0 + \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{6}$$

Suy ra tam giác ADE đều $\Rightarrow I_1 = I_2 = I = 0,5(A)$ ; $U_{AM} = I_2 Z_C = 100(V)$ ;

$U_{AB} = 2U_{AM}\cos(\pi/6) = 100\sqrt{3}$ (V) ; $tg\varphi_0 = \frac{Z_L}{R} = tg\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\Rightarrow R = Z_L\sqrt{3} = 100\sqrt{3}(\Omega)$$

2/ Khi nối K với B . Mạch điện như hình vẽ, trong đó $C_1$// $C_2$



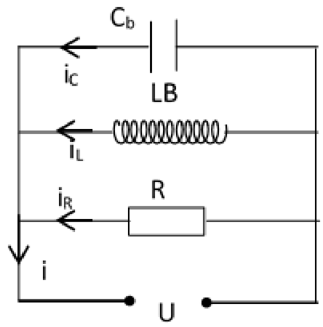

Trong mạch có cộng hưởng : $\Rightarrow Z = R = 100\sqrt{3}(\Omega)$ ; I = $\frac{U}{Z} = 1(A)$

$\Rightarrow$ $I_A = 0,5$ (A)

**Bài 39.** Coi hai cuộn dây tương đương với 1 cuộn có độ tự cảm $L = \dfrac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} = \dfrac{20}{3}\mu H$

Coi hai tụ tương đương với 1 tụ có điện dung

$C = C_1 + C_2 = 20\mu F$

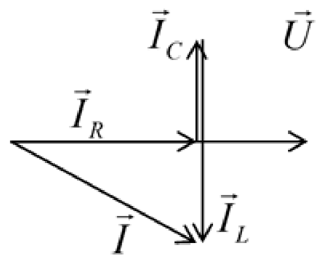



Giản đồ Frexnel ta có:

$$I = \sqrt{I_R^2 + (I_L - I_C)^2} \Leftrightarrow \frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}$$

Công suất :

$$P = I_R^2 R = \frac{U^2}{R} = \frac{I^2 Z^2}{R} = \frac{I^2}{R}.\frac{1}{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} \le I^2 R$$




$P_{MAX} = I^2R$ khi $Z_L = Z_C \Rightarrow \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ (1)

* Khi $\omega = \omega'$ thì công suất $P = \dfrac{P_{MAX}}{2}$

thì ta phải có :

$$\omega' C - \frac{1}{\omega' L} = \pm\frac{1}{R} \quad (2)$$

1/ Trường hợp $\omega' C - \dfrac{1}{\omega' L} = \dfrac{1}{R} \Leftrightarrow C\omega'^2 - \dfrac{\omega'}{R} - \dfrac{1}{L} = 0$

$$\Delta = \frac{1}{R^2} + \frac{4C}{L} > 0 \Rightarrow \omega' = \frac{1}{2C}\left(\frac{1}{R} \pm \sqrt{\Delta}\right)$$

Ta chọn nghiệm $\omega' = \omega_2 = \dfrac{1}{2C}\left(\dfrac{1}{R} + \sqrt{\Delta}\right)$ (3)

2/ Trường hợp $\omega' C - \dfrac{1}{\omega' L} = -\dfrac{1}{R} \Leftrightarrow C\omega'^2 + \dfrac{\omega'}{R} - \dfrac{1}{L} = 0$

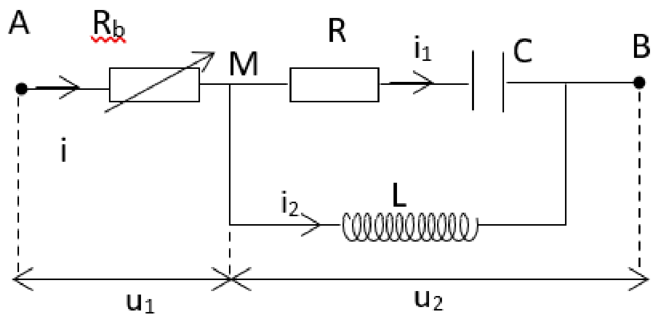
$$\Delta = \frac{1}{R^2} + \frac{4C}{L} > 0 \Rightarrow \omega' = \frac{1}{2C}\left(-\frac{1}{R} \pm \sqrt{\Delta}\right)$$

Ta chọn nghiệm $\omega' = \omega_1 = \dfrac{1}{2C}\left(-\dfrac{1}{R} + \sqrt{\Delta}\right)$ (4)

Hiệu hai tần số: $\omega_2 - \omega_1 = \dfrac{1}{RC}$ (5)

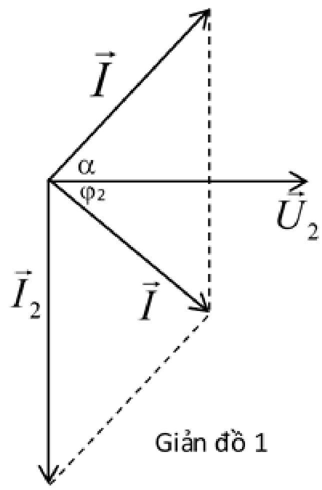
Tỉ số: $\dfrac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \dfrac{RC}{\sqrt{LC}} = R\sqrt{\dfrac{C}{L}} = 100\sqrt{3}$

**Bài 40.**




*/Giản đồ 1: i = $i_1$ + $i_2$ $\Leftrightarrow \vec{I} = \vec{I_1} + \vec{I_2}$

Trong đó $I_1 = \dfrac{U_2}{\sqrt{R^2 + Z_C^2}} = \dfrac{U_2}{R\sqrt{2}}$




$\vec{I_1}$ sớm hơn $\vec{U_2}$ góc α với $tg\alpha = \dfrac{Z_C}{R} = 1$

Suy ra $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$

$$I_2 = \frac{U_2}{Z_L} = \frac{U_2}{R} = I_1\sqrt{2}$$

$\vec{I_2}$ muộn hơn $\vec{U_2}$ góc $\dfrac{\pi}{2}$.

Từ giản đồ 1 suy ra I = $I_1$ $\Leftrightarrow \dfrac{U_2}{Z_2} = \dfrac{U_2}{R\sqrt{2}}$ suy ra $Z_2 = R\sqrt{2}$

Và $\vec{I}$ muộn hơn $\vec{U_2}$ góc $\dfrac{\pi}{4}$

Giản đồ 2: $u_{AB} = u_{AM} + u_{MB}$ $\Leftrightarrow \vec{U} = \vec{U_1} + \vec{U_2}$

Trong giản đồ 2, $u_1$ cùng pha với i, $u_2$ sớm pha hơn so với i góc $\varphi_2 = \pi/4$, u sớm pha hơn so với i góc φ .

áp dụng định lý hàm số sin cho tam giác AMB:

$$\frac{U}{\sin\beta} = \frac{U_2}{\sin\varphi} \Rightarrow \sin\varphi = \frac{U_2}{U}\sin\varphi_2 = \frac{Z_2}{Z\sqrt{2}} = \frac{R}{Z} \quad (1)$$

Gọi N là đầu mút véc tơ $\vec{I}$ với $I = \dfrac{U}{Z}$ (2)

Khi $R_b = 0$ , $Z = Z_2 = R\sqrt{2}$ , $U_2 = U$ thì $I = I_0 = \dfrac{U}{Z_2} = \dfrac{U}{R\sqrt{2}}$ (3)

N ≡ $N_1$.

Khi $R_b = \infty$ , $Z = \infty$ , $U = U_1$ thì I = 0 , N ≡ A

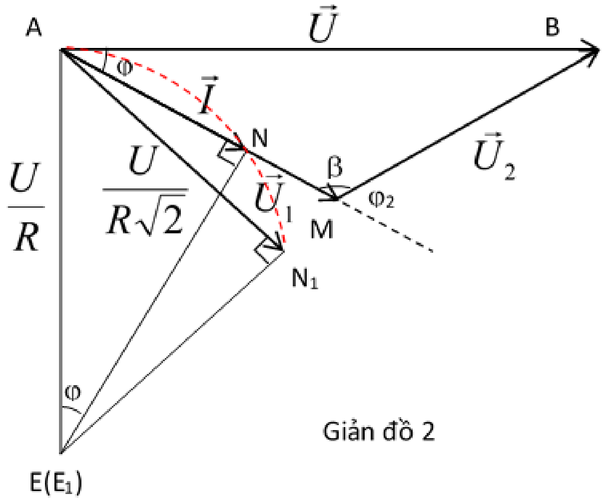
Trên giản đồ vẽ đường thẳng Ax vuông góc AB. Từ $N_1$ hạ $N_1E$ vuông góc $AN_1$ cắt Ax tại E , ta có $AE = AN_1\sqrt{2} = I_0\sqrt{2} = \dfrac{U}{R}$ (4)

Từ N hạ $NE_1$ vuông góc AN cắt Ax tại $E_1$ suy ra góc $A\hat{E}_1N = \varphi$

Trong tam giác $AE_1N$ có $AE_1 = \dfrac{AN}{\sin\varphi} = \dfrac{I}{\sin\varphi} = \dfrac{U}{Z}\dfrac{Z}{R} = \dfrac{U}{R} = AE$ (5)

Suy ra $E_1 \equiv E$ .

Như vậy N luôn nhìn AE dưới góc $\dfrac{\pi}{2}$ vậy N thuộc cung tròn $\overset{\frown}{AN_1}$ có đường kính AE = U/R

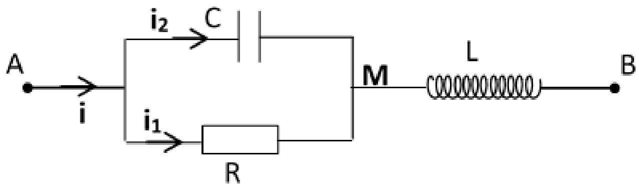


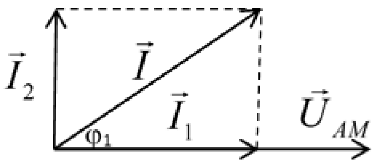
Giản đồ 2

**Bài 41.** Theo bài ra Z = R và u,i cùng pha; $P_{MAX} = \dfrac{U_{AB}^2}{R}$ ; $U_{AB}$ = IR. (1)

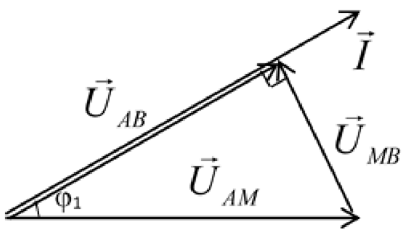
Như vậy không thể mắc nối tiếp $R^*$, L, C vì khi đó Z = 5R, và cũng không thể mắc song song vì khi đó $P = \dfrac{U_{AB}^2}{5R} < \dfrac{U_{AB}^2}{R}$. Vậy chỉ có thể là ($R^*$// C) nt L hoặc ($R^*$// L) nt C

1. Xét trường hợp ($R^*$// C) nt L: Mạch điện như hình vẽ :



Giản đồ 1



Giản đồ 2

*/Giản đồ 1: i = $i_1$ + $i_2$ :

$$I_1=\frac{U_{AM}}{5R}\;;\;I_2=\frac{U_{AM}}{Z_C}\quad;\;I=\sqrt{I_1^2+I_2^2}=U_{AM}\sqrt{\frac{1}{(5R)^2}+\frac{1}{Z_C^2}}$$

$$\cos\varphi_1=\frac{I_1}{I}=\frac{1}{5R\sqrt{\frac{1}{(5R)^2}+\frac{1}{Z_C^2}}}\qquad(2)$$

*/ Giản đồ 2: $u_{AB}=u_{AM}+u_{MB}$ $\Leftrightarrow\vec{U}=\vec{U}_1+\vec{U}_2$

$$\cos\varphi_1=\frac{U_{AB}}{U_{AM}}=\frac{IR}{I}\sqrt{\frac{1}{(5R)^2}+\frac{1}{Z_C^2}}=R\sqrt{\frac{1}{(5R)^2}+\frac{1}{Z_C^2}}\qquad(3)$$

Từ (2) và (3) suy ra :

$$5R^2\left[\frac{1}{(5R)^2}+\frac{1}{Z_C^2}\right]=1\Rightarrow Z_C=\frac{5}{2}R\Rightarrow C=\frac{2}{5\omega R}\qquad(4)$$

Từ giản đồ 2 suy ra : $U_{MB}=\sqrt{U_{AM}^2-U_{AB}^2}\Leftrightarrow Z_L^2=\dfrac{1}{\dfrac{1}{(5R)^2}+\dfrac{1}{Z_C^2}}-R^2$

$$\Rightarrow Z_L=2R\Rightarrow L=\frac{2R}{\omega}\qquad(5)$$

2. Trường hợp ($R^*$// L) nt C.

Tương tự ta có : $Z_L=2{,}5R\Rightarrow L=\dfrac{2{,}5R}{\omega}$

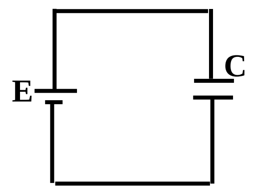
$$Z_C=2R\Rightarrow C=\frac{1}{2\omega R}$$

# CHƯƠNG VIII.
# MẠCH QUÁ ĐỘ, PHI TUYẾN

**Bài 1.**

- Khi khóa K ở vị trí 1, mạch có dạng

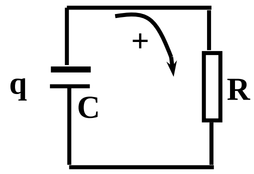
Điện tích trên tụ $Q_0 = E.C$.




- Khi khóa K ở vị trí 2, mạch có dạng:

Chọn chiều dương trong mạch như hình vẽ:

Gọi điện tích trên bản tụ đang xét (tô đậm) là q, cường độ dòng điện trong mạch là i.




Ta có:

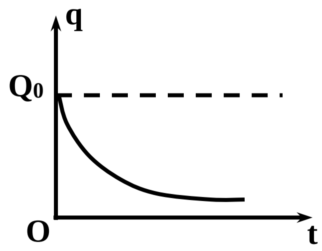
$$\frac{q}{C} = i.R \qquad i = -\frac{dq}{dt} \qquad \Rightarrow \frac{q}{C} = i.R = -\frac{dq}{dt}.R$$

$$\Leftrightarrow \frac{dq}{q} = -\frac{1}{R.C}.dt \qquad \Leftrightarrow \int_{Q_0}^{q} \frac{dq}{q} = -\frac{1}{R.C}.\int_0^t dt \qquad \Leftrightarrow \ln\frac{q}{Q_0} = -\frac{1}{R.C}.t$$

$$\Leftrightarrow q = Q_0.e^{-\frac{t}{R.C}}$$

Vậy điện tích biến thiên theo phương trình $\quad q = Q_0.e^{\frac{-t}{R.C}}$

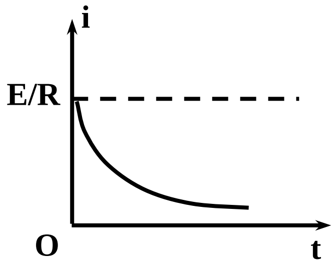
- Đồ thị biểu diễn sự biến thiên của điện tích theo thời gian




- Phương trình cường độ dòng điện trong mạch

$$i = -\frac{dq}{dt} = Q_0.\frac{1}{R.C}.e^{\frac{-t}{R.C}} = \frac{E}{R}.e^{\frac{-t}{R.C}}$$

- Đồ thị biểu diễn sự phụ thuộc của cường độ dòng điện trong mạch vòa thời gian




**Nhận xét:**

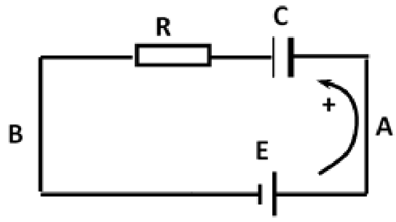
Từ đồ thị ta thấy: Ngay khi chuyển khóa K sang vị trí 2, cường độ dòng điện trong mạch là E/R, tụ cho dòng điện qua nó.

Khi trạng thái dừng được xác lập ( sau một thời gian nào đó) thì i = 0, hay nói cách khác, tụ không cho dòng điện qua nó ( Trong thực tế, trạng thái dừng được xác lập rất nhanh sau khi đóng khóa K sang vị trí 2)

**Bài 2.** Khi khóa K đóng, mạch điện có dạng

+ Xét tại thời điểm t bất kì, gọi điện tích của bản tụ đang xét (bản tô đậm là q), cường độ dòng điện trong mạch là i

+ Chọn chiều dương trong mạch như hình vẽ.
+ Ta có:




$u_{AB}=E \quad u_{AB}=\dfrac{q}{C}+i.R \quad i=\dfrac{dq}{dt} \quad \Leftrightarrow \; E=\dfrac{q}{C}+R.\dfrac{dq}{dt}$

$\Leftrightarrow q'.R+\dfrac{q}{C}=E \quad \Leftrightarrow q'=-\dfrac{q}{C}+\dfrac{E}{R}$ (*)

- Nghiệm của phương trình trên là tổng của hai nghiệm riêng $q_1$ của phương trình vi phân thuần nhất $q_2$ = const là nghiệm riêng của phương trình

$$q'=-\frac{q}{R.C}+\frac{E}{R}$$

Thay $q_2$ vào phương trình trên $q_2=EC$

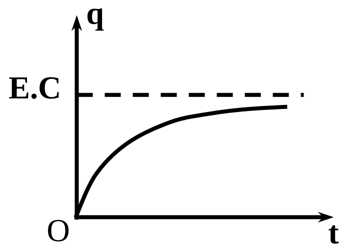
- Vậy phương trình (*) có nghiệm là:

$$q = q_1 + q_2 = Q_0.\ e^{\frac{-t}{R.C}}+E.C$$

- Tại thời điểm nagy khi đóng khóa K ( t = 0) thì tụ điện chưa tích điện ( điện tích bảo toàn $\Rightarrow Q_0=-CE$)

- Vậy phương trình điện tích là $E.C(1-e^{\frac{-t}{R.C}})$

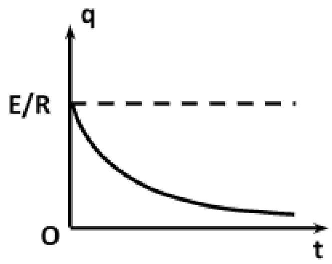
- Đồ thị biểu diễn sự phụ thuộc của điện tích vào thời gian:




- Phương trình cường độ dòng điện trong mạch

$$i=\frac{dq}{dt}=E.C.e^{\frac{-t}{R.C}}=\frac{E}{R}.e^{\frac{-t}{R.C}}$$

- Đồ thị biểu diễn sự phụ thuộc của cường độ dòng điện trong mạch vào thời gian:




**Nhận xét:**

Từ đồ thị ta thấy:

Ngay khi khóa K đóng ( t = 0) thì tụ chưa được tích điện, và cường độ dòng điện trong mạch là I = E/R, tụ điện chưa cản trở dòng điện

Khi trạng thái dừng được thiết lập, thì cường độ dòng điện trong mạch là i = 0, tụ không cho dòng điện qua nó.

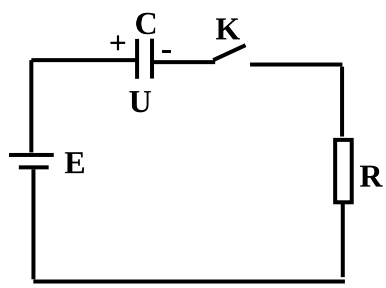
**Bài 3.** Khi K đóng, mạch có dạng:

+ Xét tại thời điểm t bất kì, gọi điện tích của bản tụ đang xét

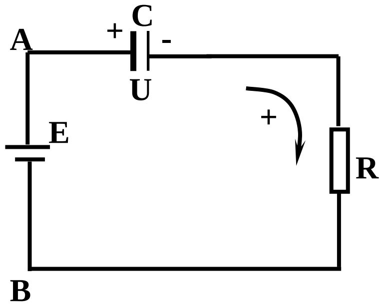
là q, cường độ dòng điện trong mạch là i

+ Chọn chiều dương trong mạch như hình vẽ.

Ta có:



$$u_{AB} = E \quad u_{AB} = \frac{q}{C} + i.R \quad i = \frac{dq}{dt} \quad \Rightarrow E = \frac{q}{C} + R.\frac{dq}{dt}$$



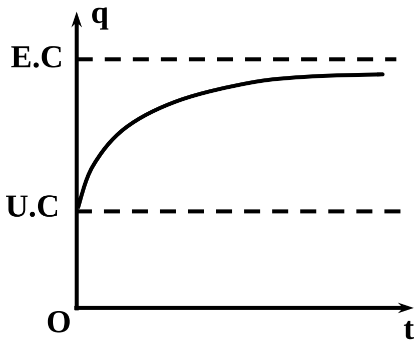

$$\Leftrightarrow q'.R + \frac{q}{C} = E$$

$$\Leftrightarrow q' = -\frac{q}{R.C} + \frac{E}{R} \quad \Rightarrow q = Q_0.e^{-\frac{t}{R.C}} + E.C$$

- Tại thời điểm t = 0 (ngay khi đóng khóa K) thì điện tích là q = +UC (vì ta đang xét với bản bên trái), nên ta có:

$$U.C = Q_0 + E.C \quad \Rightarrow Q_0 = C(U - E)$$

- Vậy phương trình điện tích $q = C(U - E).e^{\frac{-t}{R.C}} + E.C$
- Đồ thị biểu diễn sự phụ thuộc của điện tích vào thời gian

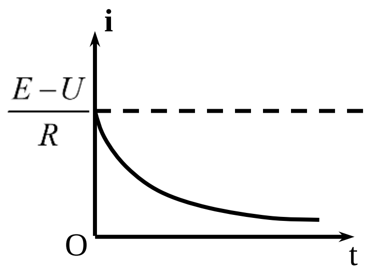



- Phương trình cường độ dòng điện trong mạch

$$i = \frac{dq}{dt} = (U - E).C.(\frac{-1}{R.C}.e^{\frac{-t}{R.C}})$$

$$= \frac{E - U}{R}.e^{\frac{-t}{R.C}}$$

- Đồ thị biểu diễn sự phụ thuộc của cường độ dòng điện vào thời gian




**Nhận xét:** Từ đồ thị ta thấy:

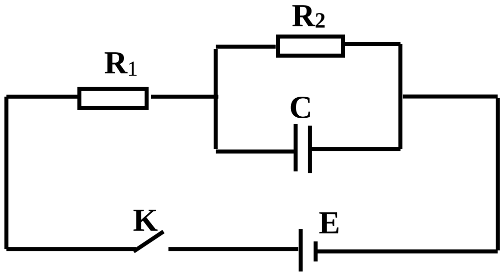
Ngay sau khi K đóng thì cường độ dòng điện trong mạch là I = (E-U)/R, điện tích khi đó là UC, tụ chưa cản trở dòng điện

Khi trạng thái dừng được thiết lập, thì điện tích là CE, cường độ dòng điện trong mạch bằng không, tụ không cho dòng điện qua nó.

Vậy nagy cả khi tụ điện được tích điện trước, sau đó mới mắc vào mạch điện thì ngay khi khóa K đóng, tụ chưa cản trở dòng điện

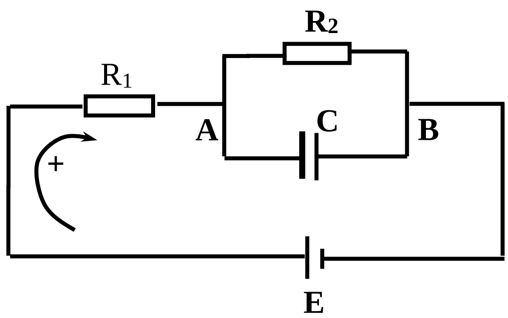
**Bài 4.**

Khi khóa K đóng, mạch có dạng:




+ Xét tại thời điểm t bất kì, giả sử điện tích trên bản tụ đang xét là q, cường độ dòng điện qua $R_1$ là $i_1$ , qua $R_2$ là $i_2$ , qua tụ là $i_c$

Chọn chiều dương trong mạch như hình vẽ




Ta có:

$$i_1 = i_2 + i_c$$

$$u_{AB} = i_2.R_2 = \frac{q}{C} \qquad E = i_1.R_1 + u_{AB} = i_1.R_1 + \frac{q}{C}$$

$$i_c = \frac{dq}{dt}$$

$$\Rightarrow E = (i_2 + i_c).R_1 + \frac{q}{C} \quad = (\frac{q}{R_2.C} + \frac{dq}{dt}).R_1 + \frac{q}{C}$$

$$\Leftrightarrow E = \frac{R_1}{R_2.C}.q + \frac{dq}{dt}.R_1 + \frac{q}{C} \quad \Leftrightarrow E = q'.R_1 + q.\frac{R_1 + R_2}{R_2.C}$$

$$\Leftrightarrow q' = -q.\frac{R_1 + R_2}{R_1.R_2.C} + \frac{E}{R_1}$$

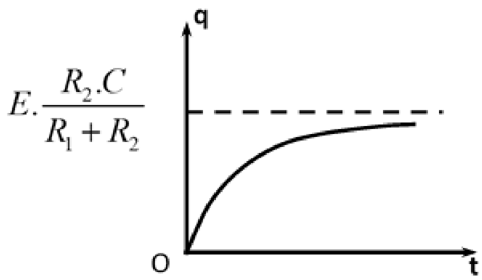
$$\Rightarrow q = Q_O.e^{\frac{-t}{R}} + E.\frac{C.R_2}{R_1 + R_2} \qquad \text{Víi} \qquad R = \frac{R_1 + R_2}{R_1.R_2.C}$$

- Tại thời điểm t = 0, ngay khi đóng khóa K, điện tích q = 0 (định luật bảo toàn điện tích)

$$\Leftrightarrow 0 = Q_0 + E.\frac{R_2.C}{R_1 + R_2} \qquad \Rightarrow Q_0 = -E.\frac{R_2.C}{R_1 + R_2}$$

- Vậy phương trình điện tích là $\quad q = E.\frac{R_2.C}{R_1 + R_2}(1 - e^{\frac{-t}{R}})$

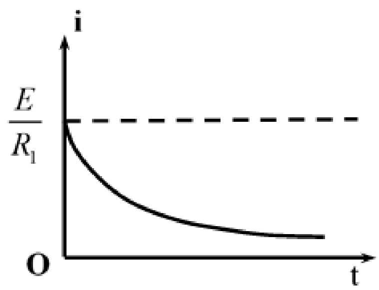
- Đồ thị biểu diễn sự phụ thuộc của điện tích vào thời gian




- Phương trình cường độ dòng điện trong mạch

Khi đó

$$i = \frac{q}{CR_2} = \frac{EC}{R_1 + R_2}(1 - e^{\frac{-t}{R}})$$



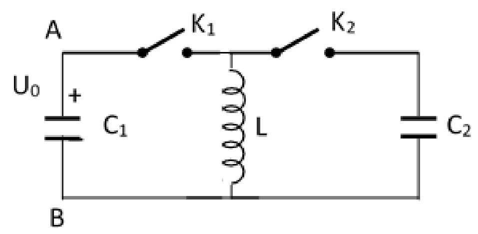

**Nhận xét:** Từ đồ thị ta thấy

Ngay khi khóa K đóng ( t = 0), tụ điện chưa cản trở dòng điện, cường độ dòng điện qua tụ là $E/R_1$

Khi trạng thái dừng được thiết lập thì điện tích trên tụ là $E.\frac{R_2.C}{R_1 + R_2}$ , cường độ dòng điện qu tụ bằng không, tụ điện không cho dòng điện qua nó.

**Bài 5.** 1. a. Chu kì dao động của mạch $LC_1$: $T_0=2\pi/\omega_0=2\pi\sqrt{LC}$.

Điện tích q của bản A của tụ điện $C_1$ vào thời điểm $t = 0$ là $q(0)= Q_0 = CU_0$ và $i(0) = 0$; Vào thời điểm t ta có: $i=-dq/dt=U_0\sqrt{\frac{C}{L}}\sin\frac{t}{\sqrt{LC}}$




b. $q(t)=Q_0\cos\frac{t}{\sqrt{LC}}=CU_0\cos\frac{t}{\sqrt{LC}}$

2. Tại thời điểm $t_1=3T_0/4=3\pi\sqrt{LC}/2$, thì $q(3T_0/4)=0$ (3)

và $i(3T_0/4)=U_0\sqrt{\frac{C}{L}}\sin\frac{3\pi}{2}=-U_0\sqrt{\frac{C}{L}}$ (4)

Từ thời điểm này dao động điện từ có tần số góc $\omega_1=\frac{1}{\sqrt{2LC}}$ (Hai tụ điện mắc song song coi như một tụ điện ghép có điện dung 2C và có điện tích bằng 0 vào thời điểm $t=\frac{3T_0}{4}$). Với điều kiện ban đầu (3) và (4), ta có:

$i_1=-I_1\cos\omega_1(t_1-\frac{3T_0}{4})$, với $I_1=U_0\sqrt{\frac{C}{L}}$. Hay

$i_1=-U_0\sqrt{\frac{C}{L}}\cos\left(\frac{t}{\sqrt{2LC}}-\frac{3\sqrt{2}\pi}{4}\right)$ (5)

kí hiệu $q_{12}$ là điện tích của tụ ghép và q' là điện tích của tụ $C_2$, ta có

$q_{12}=2q' = Q'\sin\omega_1(t_1-\frac{3T_0}{4})$. Để tính Q' ta áp dụng định luật bảo toàn năng lượng:

$\frac{Q_0^2}{2C}=\frac{1}{2}LI_1^2=\frac{Q'^2}{2(2C)}\rightarrow Q'=\sqrt{2}Q_0=CU_0\sqrt{2}$. Từ đây

$q'=\frac{CU_0}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{2LC}}-\frac{3\sqrt{2}\pi}{4}\right)$ (6)

b. Nếu đóng $K_2$ vào thời điểm $t_2=T_0$ thì ta có:

$$q(T_0)=CU_0\cos(2\pi)=CU_0=Q_0 \quad (7)$$

và

$$i(T_0) = 0 \quad (8)$$

Tại thời điểm này hai tụ điện $C_1$ và $C_2$ mắc song song, tụ $C_1$ tích điện tích $Q_0$ còn tụ điện $C_2$ thì không tích điện, dòng trong mạch bằng . Do đó ngay sau đó lượng điện tích $Q_0$ này trên tụ $C_1$ sẽ phân bố lại cho cả hai tụ điện. Quá trình phân bố này xảy ra rất nhanh trong khi điện tích chưa kịp dịch chuyển qua cuộn dây, vì tại thời điểm này i = 0 và sự thay đổi cường độ dòng điện qua cuộn cảm bị cản trở do hệ số tự cảm (gây ra cảm kháng), điện tích hầu như chỉ truyền qua các khoá và dây nối. Vì hai tụ điện có điện dung như nhau nên điện tích $Q_0$ được phân bố đều cho hai tụ điện.

Sau khi điện tích được phân bố đều trên hai tụ điện, trong mạch lại có dao động điện từ với tần số góc $\omega_2=\frac{1}{\sqrt{2LC}}=\omega_1$, với điều kiện ban đầu (7) và (8).

Vì vậy ta có

$i_2 = I_2 \sin\omega_2(t-T) = I_2 \sin\left(\frac{t}{\sqrt{2LC}} - \sqrt{2}\pi\right)$ ;

$q_{12} = 2q_2 = Q_0 \cos\omega_2(t-T) = Q_0 \cos\left(\frac{t}{\sqrt{2LC}} - \sqrt{2}\pi\right)$.

Từ $\quad i_2 = -\frac{dq_{12}}{dt} \to I_2 = \frac{Q_0}{\sqrt{2LC}} = U_0\sqrt{\frac{C}{2L}}$.

Cuối cùng ta có $\quad i_2 = U_0\sqrt{\frac{C}{2L}}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{2LC}} - \sqrt{2}\pi\right)$; $\quad q_2 = \frac{CU_0}{2}\cos\left(\frac{t}{\sqrt{2LC}} - \sqrt{2}\pi\right)$.

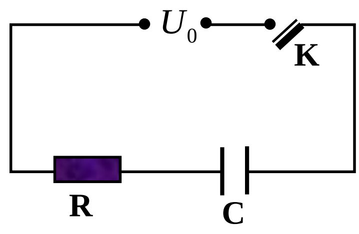
3. Sự phân bố lại điện tích làm giảm năng lượng điện từ: từ giá trị $\frac{Q_0^2}{2C}$ đến $2\left(\frac{Q}{2}\right)^2.\frac{1}{2C} = \frac{Q_0^2}{4C}$, do đó có nhiệt lượng toả ra trên dây dẫn khi điện tích dịch chuyển từ tụ điện $C_1$ sang $C_2$ trong quá trình phân bố lại điện tích.

**Bài 6.**

a. $[\tau] = 1\Omega \times 1F = 1\frac{V}{A} \times 1\frac{C}{V} = 1\frac{C}{A} = 1s$

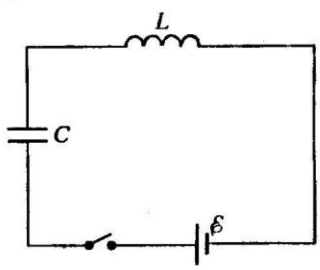
b. Có $\tau = RC = 10^{-3}\,s$.

- Sau $t = 10^{-3}s$ thì $u = U_0\left(1-e^{-1}\right) = 10\left(1-2,7^{-1}\right) \approx 6,3V$
- Sau $t = 5.10^{-3}s$ thì $u = U_0\left(1-e^{-5}\right) = 10\left(1-2,7^{-5}\right) \approx 9,93V$ .
- Sau $t = 10^{-2}s$ thì $u = U_0\left(1-e^{-10}\right) \approx 9,9995V \approx 10V = U_0$.




c. Khi $u = U_0/2 \Leftrightarrow U_0\left(1-e^{-t/\tau}\right) = U_0/2 \Rightarrow e^{t/\tau} = 2 \Rightarrow t = \tau\ln 2 = 0,693.10^{-3}s$

**Bài 7.**




Xét tại một thời điểm tuỳ ý sau khi đóng khoá. Giả sử dũng điện chạy trong mạch đi ra từ cực dương của nguồn. Theo định luật Ohm: $E - Li' = u_C$

Mặt khỏc, i = q' = $Cu_C'$. Lấy đạo hàm hai vế ta được: i' = $Cu_C''$ .

Thay biểu thức của i' vào phương trình định luật Ôm ta được:

$u_C'' + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 E$

trong đó $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ - tần số dao động riêng của mạch. Phương trình vi phân này khác với phương trình ở vớ dụ trước là có vế phải là hằng số khác không. Để giải phương trình này chỉ cần đổi biến : X = $u_C$ - E , Thay vào phương trình vi phân trên ta được:

$$X'' + \omega_0^2 X = 0$$

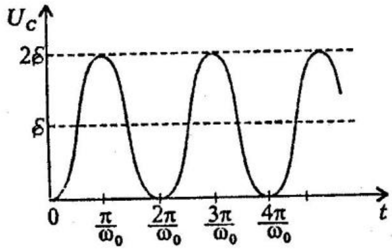
Nghiệm của phương trình này như đó biết:

$$X(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$$

Để xác định A và B ta dùng điều kiện ban đầu: tại t = 0 $u_C$ = 0 hay X = -E, và i = $Cu_C'$ = 0, thay vào nghiệm vừa tìm được ở trên, ta có: A = - E và B = 0. Kết quả ta được:

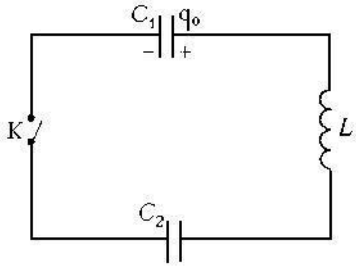
$X(t) = -E\cos\omega_0 t$ hay $u_C(t) = E(1-\cos\omega_0 t)$

Sự biến thiên theo thời gian của hiệu điện thế trên tụ vẫn theo quy luật điều hoà nhưng khác với Ví dụ 1 ở chỗ không phải đối với mức 0 mà đối với mức $u_C = E$.




**Bài 8.**

Ta xét tại một thời điểm tùy ý sau khi khoá K đóng. Giả sử tại thời điểm đó, điện tích trên tụ thứ nhất là $q_1$, còn trên tụ thứ hai là $q_2$ và trong mạch có dòng điện i . Và ta chỉ quan tâm tới giá trị $q_{2max}$ , nên ta sẽ tìm biểu thức $q_2(t)$. Theo định luật Ohm ta có:




$$-Li' = \frac{q_2}{C_2} - \frac{q_1}{C_1}$$

Vỡ $i = q_2'$ và $q_1 + q_2 = q_0$, nên phương trỡnh tròn ta có thể đưa về phương trình của $q_2$:

$$q_2'' + \frac{C_1 + C_2}{LC_1C_2} q_2 = \frac{q_0}{LC_1}$$

Giống như ví dụ 2, ta đưa vào biến mới:

$$X = q_2 - \frac{q_0 C_2}{C_1 + C_2}$$

ta lại nhận được phương trình mô tả dao động điều hoà:

$$X'' + \omega_0^2 X = 0$$

trong đó $\omega_0 = \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{LC_1C_2}}$ - là tần số dao động riêng của mạch. Nghiệm của phương trình trên là:

$$X(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$$

Dùng điều kiện ban đầu: tại t = 0 $q_2 = 0$ hay $X(0) = -\frac{q_0C_2}{C_1 + C_2}$ và i = 0 hay X' = 0, ta tìm được:

$A = -\frac{q_0C_2}{C_1 + C_2}$ và B = 0. Cuối cựng, trở lại biến $q_2$ ta được:

$$q_2(t) = \frac{q_0C_2}{C_1 + C_2}(1 - \cos\omega_0 t)$$

Từ biểu thức tròn ta thấy ngay $q_2$ lần đầu tiên đạt giá trị cực đại sau thời gian $t_1 = \pi/\omega_0$, sau đó giá trị cực đại này sẽ được lặp lại với chu kỳ $T = 2\pi/\omega_0$. Trong trường hợp tổng quát, thời điểm để $q_2$ đạt giá trị cực đại có thể viết dưới dạng:

$$t_n = \frac{\pi}{\omega_0}(1 + 2n) \quad \text{với n = 0, 1 , 2 , 3, ...}$$

Giá trị cực đại đó bằng $q_{2max} = \frac{q_0C_2}{C_1 + C_2}$.

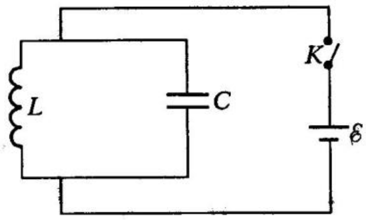
**Bài 9.** gay khi đóng khoá K tụ nạp điện rất nhanh tới hiệu điện thế bằng suất điện động của nguồn và trong cuộn cảm cường độ dũng điện tăng chậm từ giá trị 0. Tại thời điểm ngắt khoá K, hiệu điện thế trên tụ bằng E và qua cuộn cảm cú dũng điện mà ta sẽ ký hiệu là $I_0$. Đó chính là các điều kiện ban đầu đối với mạch LC của chúng ta.

Xét một thời điểm tuỳ ý sau khi ngắt khoá K, giả sử khi đó cường độ dòng điện trong mạch là i, có chiều đi ra từ bản tích điện dương của tụ điện và hiệu điện thế trên tụ là $u_C$. Theo định luật Ohm ta có:

$$Li' = u_C$$

Nhưng vỡ i = $Cu_C^{'}$, ta có:

$$u_C^{''} + \omega_0^2 u_C = 0$$




với $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Nghiệm của phương trình trên có dạng: $u_C(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$. Dạng này của nghiệm cũng tương đương với dạng mà ta chọn ở trên, chỉ có điều ở trên hai hằng số là A và B cũn ở đây là A và φ.

Dùng các điều kiện ban đầu $u_C(0)$ = E và i = $I_0$, ta được: E = Acosφ và $I_0 = AC\omega_0\sin\varphi$.

Từ đây suy ra:

$$A = \sqrt{E^2 + (\frac{I_0}{C\omega_0})^2}, \ \tan\varphi = \frac{I_0}{EC\omega_0}$$

Vì A là biên độ dao động của hiệu điện thế trên tụ nên nó cũng chính là giá trị cực đại hiệu điện thế này.

Do đó, $\sqrt{E^2 + (\frac{I_0}{C\omega_0})^2} = 2E$ , từ đó ta tính được: $I_0 = \sqrt{3}EC\omega_0 = E\sqrt{3\frac{C}{L}}$

**Cách giải** đơn giản hơn xuất phát từ những suy luận vật lý chung và định luật bảo toàn năng lượng. Theo định luật bảo toàn năng lượng thì năng lượng của mạch tại t = 0 và tại thời điểm hiệu điện thế trên tụ đạt cực đại và dũng trong mạch bằng 0 phải bằng nhau:

$$\frac{LI_0^2}{2} + \frac{CE^2}{2} = \frac{4CE^2}{2}$$

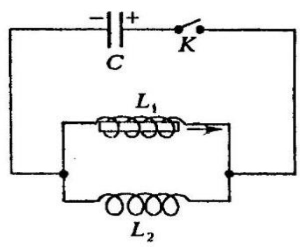
Từ đó suy ra: $I_0 = E\sqrt{3\frac{C}{L}}$.

**Bài 10.** Ta xét một thời điểm tùy ý sau khi đóng khoá K nhưng trước khi rút lõi sắt ra. Ký hiệu hiệu điện thế ban đầu trên tụ là $U_0$ cũn hiệu điện thế ở một thời điểm tùy ý là u. Giả sử dòng điện qua cuộn $L_1$ là $i_1$ và qua cuộn $L_2$ là $i_2$ Theo định luật Ohm cho mạch vòng chứa tụ điện và cuộn cảm $L_1$:

$$L_2 i_2^{'} = u \qquad (1)$$

và cho mạch vũng chứa hai cuộn cảm:

$$L_2 i_2^{'} = L_1 i_1^{'} \quad \text{hay} \quad (L_1 i_1 - L_2 i_2)^{'} = 0$$




Từ đó suy ra: $L_1 i_1 - L_2 i_2 = const$. Nhưng với các dòng điện ban đầu qua hai cuộn cảm đều bằng 0, nên const trong biểu thức trên bằng 0, tức $L_1 i_1 = L_2 i_2$. Theo định luật Ohm cho mạch rẽ:

$$i = i_1 + i_2 = \frac{L_1 + L_2}{L_1} i_2 \qquad (2)$$

Lấy đạo hàm hai vế của (1) ta được: $L_2 i_2^{''} = u'$ và lưu ý rằng i = -Cu', ta có:

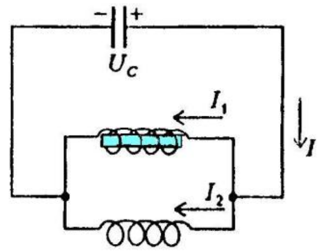
$$L_2 i_2'' + \frac{1}{C} i = 0$$

Thay biểu thức (2) của i vào ta được:

$$i_2'' + \frac{L_1 + L_2}{CL_1L_2} i_2 = 0$$

Nghiệm tổng quát của phương trình này có dạng:

$$i_2(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$$




trong đó $\omega_0 = \sqrt{\frac{L_1 + L_2}{CL_1L_2}}$. Vỡ $i_2(0) = 0$ suy ra A = 0. Để tìm B lưu ý rằng biên độ dòng điện trong cuộn $L_2$ bằng $I_0$ nên B = $I_0$. Kết quả ta có:

$$i_2(t) = I_0 \sin\omega_0 t \text{ và } i_1(t) = \frac{L_2}{L_1} I_0 \sin\omega_0 t$$

Trong thời gian rút lõi sắt ra khỏi cuộn cảm thứ nhất, từ thụng qua hai cuộn cảm coi như không đổi. Điều này dẫn tới chỗ dòng điện trong cuộn thứ hai vẫn giữ nguyên, tức là $i_2^* = I_0$, cũn cường độ dũng điện trong cuộn thứ nhất được xác định từ điều kiện $L_2 I_0 = \frac{L_1}{k} i_1^*$:

$$i_1^* = \frac{kL_2}{L_1} I_0$$

Để xác định hiệu điện thế cực đại trên tụ ta sẽ sử dụng định luật bảo toàn năng lượng. Năng lượng từ được lưu trữ trong hai cuộn dây ngay sau khi rút lõi sắt ra là:

$$W_t = \frac{L_1(i_1^*)^2}{2} + \frac{L_2(i_2^*)^2}{2} = \frac{L_1}{2k}\left(\frac{kL_2}{L_1} I_0\right)^2 + \frac{L_2 I_0^2}{2} = \frac{L_2 I_0^2}{2}\left(1 + \frac{kL_2}{L_1}\right)$$

Khi hiệu điện thế trên tụ đạt cực đại, dòng mạch chính bằng 0, tức dòng điện qua hai cuộn liên hệ với nhau bởi hệ thức:

$$i_1^{**} + i_2^{**} = 0.$$

Dựng hệ thức liên hệ các dòng mà ta đó nhận được ở trên ($L_1 i_1 - L_2 i_2 = const$) cho $i_1^{**}$ và $i_2^{**}$, ta được:

$$\frac{L_1}{k} i_1^{**} - L_2 i_2^{**} = 0$$

Từ hai phương trình trên suy ra dòng qua hai cuộn cảm đều bằng 0, do vậy toàn bộ năng lượng đều được tập trung trong tụ điện và bằng:

$$W_C = \frac{CU_m^2}{2}$$

trong đó $U_m$ là hiệu điện thế cực đại trên tụ. Theo định luật bảo toàn năng lượng, $W_L = W_C$, hay

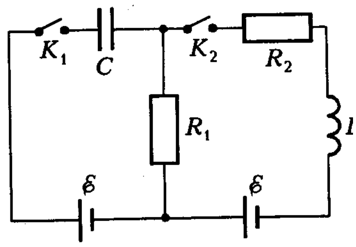
$$\frac{L_2 I_0^2}{2}\left(1 + \frac{kL_2}{L_1}\right) = \frac{CU_m^2}{2}$$

Từ đây ta tìm được:

$$U_m = I_0 \sqrt{\frac{L_2(L_1 + kL_2)}{CL_1}}$$

**Bài 11.** Trước hết ta xét xem điều gì sẽ xảy ra ở phần bên trái của sơ đồ sau khi đóng khoá $K_1$? Ngay sau khi đóng khoá thứ nhất, hiệu điện thế trên tụ điện vẫn còn bằng không, và trong mạch có dòng điện

$$I_0 = \mathcal{E}/R_1,$$




kết quả này được rút ra từ định luật Ohm đối với mạch kín. Sau đó hiệu điện thế trên tụ điện sẽ tăng và dòng điện trong mạch sẽ giảm. Tại thời điểm khi hiệu điện thế trên tụ điện đạt giá trị $U_0$điện áp trên điện trở $R_1$ sẽ bằng

$$U_1 = \mathcal{E} - U_0 = \frac{\mathcal{E}}{2}.$$

(đầu trên là dương, đầu dưới là âm). Tại thời điểm này ta đóng khoá thứ 2. Khi đó xuất hiện mạch kín có chứa cuộn cảm L. Ngay sau khi đóng khoá thứ 2, dòng điện qua điện trở $R_2$, cuộn cảm và nguồn (phía phải của sơ đồ) sẽ bằng không, còn điện áp trên điện trở $R_1$giữ không đổi. Việc không có dòng điện ban đầu này liên quan đến quán tính của cuộn cảm – sự xuất hiện dòng điện không lớn trong cuộn cảm tạo ra trong các vòng dây của nó một suất điện động cảm ứng mà theo định luật Lenz hướng ngược với dòng điện này và như vậy khống chế sự tăng dần của nó. Theo định luật Ohm, đối với phần bên phải của sơ đồ, ta có phương trình:

$$\mathcal{E} = U_L - U_1 .$$

Từ đây chúng ta tìm được h.đ.t. trên cuộn cảm ngay sau khi đóng khoá thứ hai:

$$U_L = \mathcal{E} + U_1 = \frac{3}{2}\mathcal{E} .$$

Đối với chế độ đã được thiết lập trong phần bên phải của sơ đồ sẽ có dòng điện không đổi (hướng theo chiều kim đồng hồ)

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2},$$

và trên điện trở $R_1$sẽ thiết lập hiệu điện thế

$$U_{1tl} = IR_1 = \frac{R_1\mathcal{E}}{R_1 + R_2}.$$

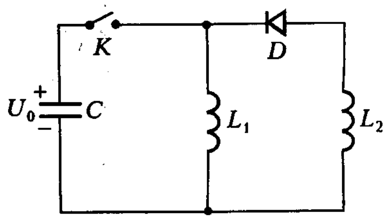
(đầu dưới là dương, đầu trên là âm). Theo định luật Ohm, đối với mạch bên trái ta có thể viết

$$\mathcal{E} = U_c - U_{1tl} .$$

Do đó ta nhận được h.đ.t. thiết lập trên tụ điện

$$U_c = \mathcal{E} + U_{1tl} = \frac{(2R_1 + R_2)\mathcal{E}}{R_1 + R_2}.$$

**Bài 12.** Sau khi đóng khoá K ta có một mạch dao động bao gồm tụ điện với điện dung C và cuộn cảm với độ tự cảm $L_1$. Tụ điện bắt đầu tích điện, và khi hiệu điện thế của nó trở nên bằng không thì năng lượng ban đầu của tụ điện được chuyển hoàn toàn sang năng lượng từ trường của cuộn cảm. Nếu tại thời điểm này dòng điện chạy qua cuộn cảm bằng $I_L$ thì ta có thể viết




$$\frac{CU_0^2}{2} = \frac{L_1 I_L^2}{2}.$$

Từ đây ta nhận được dòng điện phải tìm

$$I_L = U_0\sqrt{\frac{C}{L_1}}.$$

Đó là dòng điện cực đại chạy qua cuộn cảm $L_1$, sau đó nó bắt đầu giảm, một phần của nó được tích điện cho tụ, một phần chạy qua cuộn cảm $L_2$. Giả sử tại một thời điểm nào đó dòng điện $I_1$ chạy qua cuộn cảm ứng thứ nhất còn dòng điện $I_2$ chạy qua cuộn cảm ứng thứ hai. Khi đó theo định luật Ohm đối với mạch chứa cả hai cuộn cảm ta có thể viết:

$$L_1\frac{dI_1}{dt} + L_2\frac{dI_2}{dt} = 0.$$

Nghiệm của phương trình này có dạng

$$L_1I_1 + L_2I_2 = A.$$

với A là một hằng số. Ta có thể tìm A từ các điều kiện ban đầu. Tại thời điểm khi dòng điện chạy qua cuộn cảm $L_1$ đã đạt giá trị cực đại và bằng $U_0\sqrt{C/L_1}$, thì dòng điện qua cuộn $L_2$ bằng không, do đó

$$A = U_0\sqrt{L_1C}.$$

Khi đó nghiệm có dạng

$$L_1I_1 + L_2I_2 = U_0\sqrt{L_1C}.$$

Khi h.đ.t. của tụ điện đạt giá trị cực đại, dòng qua tụ điện sẽ bằng không, còn dòng chung đi qua hai cuộn cảm ta sẽ ký hiệu là $I_{12}$. Sử dụng mối liên hệ như trên ta có thể viết

$$(L_1 + L_2)I_{12} = U_0\sqrt{L_1C},$$

khi đó

$$I_{12} = \frac{U_0\sqrt{L_1C}}{L_1+L_2}.$$

Giả sử hiệu điện thế cực đại trên tụ điện bằng $U_m$. Vì trong mạch không có mất mát năng lượng do toả nhiệt nên tại thời điểm bất kỳ ta đều có thể sử dụng định luật bảo toàn năng lượng. Năng lượng toàn phần của mạch điện bằng $CU_0^2/2$. Tại thời điểm khi tụ điện tích điện lại và h.đ.t. của nó đạt giá trị cực đại, phần năng lượng tập trung trong tụ điện bằng:

$$W_c = \frac{1}{2}CU_m^2,$$

phần còn lại sẽ tập trung trong các cuộn cảm:

$$W_L = \frac{1}{2}(L_1 + L_2)I_{12}^2 = \frac{1}{2}\frac{L_1CU_0^2}{L_1+L_2}.$$

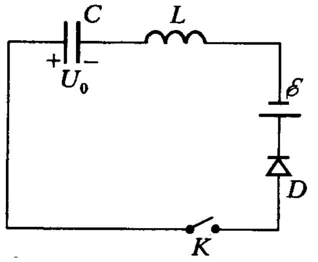
Theo định luật bảo toàn năng lượng ta có

$$\frac{1}{2}CU_0^2 = \frac{1}{2}CU_m^2 + \frac{1}{2}\frac{L_1CU_0^2}{L_1+L_2}.$$

Từ đây ta nhận được

$$U_m = U_0\sqrt{\frac{L_2}{L_1+L_2}}.$$

**Bài 13.** Do trong mạch có cuộn cảm nên ngay sau khi đóng khoá K dòng điện sẽ bằng không, sau đó dòng điện sẽ tăng dần, và tại một thời điểm nào đó, nó sẽ đạt cực đại. Khi dòng điện trong mạch cực đại suất điện động cảm ứng trong cuộn cảm sẽ bằng không, và theo định luật Ohm đối với mạch kín hiệu điện thế của tụ điện trong trường hợp này phải bằng suất điện động của nguồn. Ta ký hiệu hiệu điện thế này bằng $U_1$ ($U_1 = E$) và sẽ tìm giá trị của dòng điện cực đại. Để làm điều đó ta sử dụng định luật bảo toàn năng lượng. Trong thời gian thiết lập dòng điện cực đại, điện lượng đã chạy qua mạch bằng:



$$\Delta q = CU_0 - CU_1 = C(U_0 - U_1).$$

Để dịch chuyển điện lượng này ngược với suất điện động của nguồn, phải thực hiện một công:

$$A = \Delta q\mathcal{E} = C\mathcal{E}(U_0 - U_1).$$

Sự có mặt dòng điện cực đại $I_m$ trong cuộn cảm dẫn đến xuất hiện năng lượng của từ trường

$$W_L = \frac{1}{2}LI_m^2.$$

Hiệu năng lượng của tụ điện tại trạng thái đầu và trạng thái cuối bằng tổng của công đã thực hiện và năng lượng của cuộn cảm:

$$\frac{1}{2}CU_0^2 - \frac{1}{2}CU_1^2 = A + W_L = C\mathcal{E}(U_0 - U_1) + \frac{1}{2}LI_m^2.$$

Từ đây ta tìm được

$$I_m = (U_0 - \mathcal{E})\sqrt{\frac{C}{L}} \approx 0{,}022\,A.$$

Bây giờ ta trả lời câu hỏi về giá trị của hiệu điện thế được thiết lập trên tụ điện. Sau khi đạt giá trị cực đại, dòng điện trong mạch sẽ giảm và cuối cùng sẽ bằng không. Do dòng điện không thể chạy theo chiều ngược lại (do điôt cản trở) nên một trạng thái dừng sẽ được thiết lập: Dòng điện bằng không, còn trên tụ điện hiệu điện thế có giá trị không đổi nào đó được ký hiệu bởi $U_K$. Ta có thể tìm hiệu điện thế này theo định luật bảo toàn năng lượng. Trong suốt thời gian từ lúc đóng khoá K đến lúc thiết lập trạng thái dừng, sự biến đổi năng lượng của tụ điện đã được dùng để làm dịch chuyển toàn bộ điện lượng chạy ngược với suất điện động của nguồn điện:

$$\frac{1}{2}CU_0^2 - \frac{1}{2}CU_K^2 = C\mathcal{E}(U_0 - U_K).$$

Sau một số biến đổi đơn giản, phương trình này sẽ có dạng

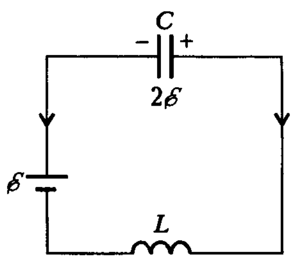
$$(U_0 - U_K)(U_0 - 2\mathcal{E} + U_K) = 0.$$

Phương trình này có hai nghiệm. Nghiệm thứ nhất: $U_K = U_0$ ứng với trạng thái ban đầu ngay sau khi đóng khoá K. Nghiệm thứ hai bằng:

$$U_K = 2\mathcal{E} - U_0 = -2V,$$

trong đó dấu trừ nói lên rằng tụ điện được nạp điện lại và hiệu điện thế được thiết lập sẽ ngược dấu với hiệu điện thế ban đầu.

**Bài 14.** Ngay sau khi nối tụ điện lần thứ nhất vào mạch dòng điện trong mạch bằng không. Sau đó dòng điện sẽ tăng, đạt giá trị cực đại, rồi sau đó bắt đầu giảm và qua khoảng thời gian $\tau = \pi\sqrt{LC}$ (bán chu kỳ dao động của dòng) lại trở nên bằng không. Giả sử tại thời điểm đó hiệu điện thế của tụ điện bằng $U_x$. Do không có mất mát năng lượng trong mạch, ta có thể sử dụng định luật bảo toàn năng lượng đối với thời điểm ban đầu và đối với thời điểm khi dòng điện trong mạch lại trở nên bằng không. Trong thời gian $\tau$ điện lượng chạy qua nguồn bằng $q = CU_x$, và nguồn đã thực hiện công:




$$A_x = q_x\mathcal{E} = CU_x\mathcal{E}.$$

Toàn bộ công này được dùng làm tăng năng lượng của tụ điện:

$$CU_x\mathcal{E} = \frac{CU_x^2}{2}.$$

Phương trình này có hai nghiệm:

$$U_{1x} = 0; \quad U_{2x} = 2\mathcal{E}.$$

Nghiệm thứ nhất ứng với trạng thái ban đầu và trạng thái tại các thời điểm là bội số nguyên lần các chu kỳ $T = 2\pi\sqrt{LC}$. Nghiệm thứ hai xảy ra sau một thời gian bằng nửa chu kỳ cộng với một số nguyên lần chu kỳ.

Ta hãy xét trường hợp thứ nhất. Tại trạng thái ban đầu dòng điện trong mạch bằng không, tụ điện không tích điện. Sự đổi cực của tụ điện trong trường hợp này không đóng vai trò gì. Khi dòng điện trong mạch đạt giá trị cực đại, suất điện động cảm ứng sẽ bằng không, còn hiệu điện thế trên tụ điện rõ ràng bằng suất điện động $\mathcal{E}$ của nguồn. Ta ký hiệu dòng điện trong mạch tại thời điểm đó bằng $I_{m1}$. Theo định luật bảo toàn năng lượng, công của nguồn thực hiện trong thời gian thiết lập dòng cực đại bằng tổng năng lượng của tụ điện và năng lượng chứa trong cuộn cảm:

$$C\mathcal{E}^2 = \frac{1}{2}C\mathcal{E}^2 + \frac{1}{2}LI_{m1}^2.$$

Từ đây ta nhận được

$$I_{m1} = \mathcal{E}\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Bây giờ ta xét trường hợp thứ hai. Tại trạng thái ban đầu sau khi mắc lại tụ điện dòng điện trong mạch bằng không, còn hiệu điện thế trên tụ điện bằng $2\mathcal{E}$, trong đó bản bên trái có dấu âm, còn bản bên phải có dấu dương (Hình 4). Khi dòng điện trong mạch đạt cực đại, suất điện động cảm ứng sẽ bằng không, và theo định luật Ohm đối với mạch kín hiệu điện thế trên tụ điện sẽ bằng s.đ.đ. $\mathcal{E}$ của nguồn, trong đó bản trái của tụ điện sẽ là “dương”, còn bản phải sẽ là “âm”. Như vậy, độ biến thiên điện tích của tụ điện sẽ bằng

$$\Delta q = C(U_K - U_H) = C(\mathcal{E} - (-2\mathcal{E})) = 3C\mathcal{E}.$$

Năng lượng ban đầu của hệ bằng

$$W_H = \frac{1}{2}CU_H^2 = 2C\mathcal{E}^2,$$

còn năng lượng cuối bằng

$$W_K = \frac{1}{2}CU_K^2 + \frac{1}{2}LI_{m2}^2 = \frac{1}{2}C\mathcal{E}^2 + \frac{1}{2}LI_{m2}^2,$$

trong đó $I_{m2}$ là dòng điện cực đại trong mạch. Theo định luật bảo toàn năng lượng, công của nguồn để dịch chuyển điện tích $\Delta q$ sẽ ứng với sự biến đổi năng lượng của hệ

$$\Delta q\mathcal{E} = W_K - W_H,$$

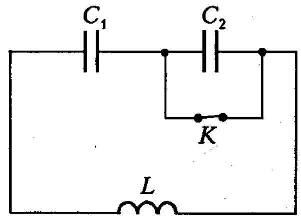
hay là

$$3C\mathcal{E}^2 = \frac{1}{2}C\mathcal{E}^2 + \frac{1}{2}LI_{m2}^2 - 2C\mathcal{E}^2.$$

Từ đây ta nhận được

$$I_{m2} = 3\mathcal{E}\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

**Bài 15.** Khi hiệu điện thế của tụ điện với điện dung $C_1$ đạt giá trị cực đại, dòng điện trong mạch bằng không, và vì vậy ta có thể ngắt mạch mà không có vấn đề gì. Ngay sau khi mở khoá K điện tích trên bản bên phải của tụ điện với điện dung $C_1$ bằng $q_1 = C_1U_0$, còn điện tích trên bản trái của tụ điện với điện dung $C_2$ bằng không. Nhưng tổng điện tích trên hai bản tụ điện này sẽ giữ không đổi và bằng $C_1U_0$. Tại thời điểm khi hiệu điện thế trên tụ điện thứ nhất bằng không, toàn bộ điện tích $q_1$ sẽ tập trung ở tụ điện thứ hai. Ta ký hiệu dòng điện trong mạch tại thời điểm này là $I_K$. Theo định luật bảo toàn năng lượng thì năng lượng ban đầu chứa trong tụ điện với điện dung $C_1$ sẽ bằng tổng năng lượng của tụ điện với điện dung $C_2$ và năng lượng chứa trong cuộn cảm với dòng $I_K$:




$$\frac{1}{2}C_1U_0^2 = \frac{q_1^2}{2C_2} + \frac{LI_K^2}{2},$$

hay

$$\frac{1}{2}C_1U_0^2 = \frac{1}{2}\frac{C_1^2}{C_2}U_0^2 + \frac{LI_K^2}{2}.$$

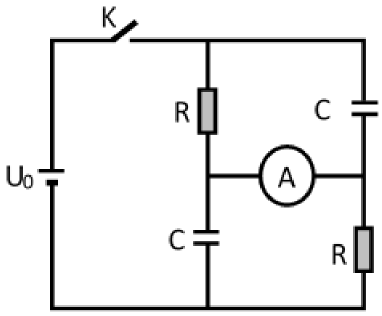
Từ đây ta nhận được

$$I_K = U_0\sqrt{\frac{C_1(C_2-C_1)}{C_2L}}\ .$$

**Bài 16.** Vì điện trở của nguồn điện và của ampe kế không đáng kể, nên khi đóng khoá K, các tụ điện gần như lập tức được nạp điện đến hiệu điện thế $U = \frac{U_0}{2}$.

Khi khóa K mở, các tụ điện gần như phóng điện hoàn toàn. Dòng điện phóng ở thời điểm đầu tiên mở khoá: $I_0 = \frac{U}{R} = \frac{U_0}{2R}$

Giả sử dòng này không đổi thì tụ điện sẽ phóng hết điện sau thời gian:




$$t = \frac{q}{I_0} = \frac{CU}{I_0} = RC\left(i = i_0e^{\frac{t}{RC}}\right)$$

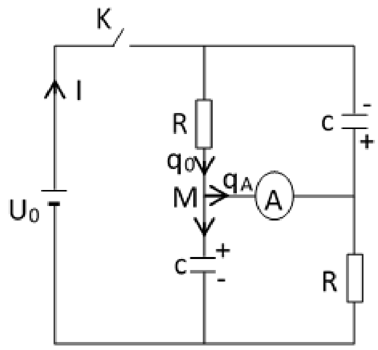
Trong thực tế, dòng phóng điện giảm, nhưng vì thời gian mở khoá $\Delta t_2 = 20.10^{-3}s > \Delta t_1$ nên có thể coi rằng sau thời gian $\Delta t_2$ tụ điện phóng hết điện.

Ta hãy tính cường độ dòng điện qua ampe kế.

Khi K đóng theo định luật bảo toàn điện tích tại điểm M, ta có: $q_0 = q_A + q_C$

Trong đó: $q_0 = I.\Delta t_1$ là điện tích đi vào M, $q_A$ là điện tích đi qua ampe kế, $q_C = CU$ là điện tích nạp cho tụ điện C $\Rightarrow I.\Delta t_1 = q_A + CU$

Với $I = \frac{U_0}{2R}; U = \frac{U_0}{2}$




Suy ra, điện lượng đi qua A trong thời gian $\Delta t_1$ là:

$$q'_A = \frac{U_0}{2R}\Delta t_1 - C\frac{U_0}{2}$$

Khi K mở, cả hai tụ điện đều phóng điện qua A, điện lượng phóng qua ampekế trong thời gian $\Delta t_2$ là: $q'_A = 2\frac{CU_0}{2} = CU_0$

Cường độ dòng điện trung bình qua ampe kế (là số chỉ của ampe kế):

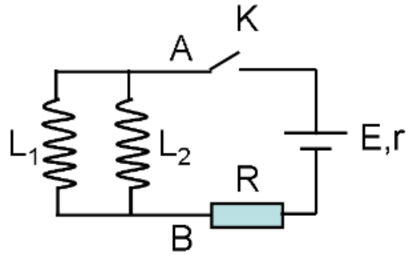
$$I_A = I_{tb} = \frac{q_A + q'_A}{\Delta t_1 + \Delta t_2} = \frac{-C\frac{U_0}{2} + \frac{U_0}{2R}\Delta t_1 + CU_0}{\Delta t_1 + \Delta t_2}; I_A = \frac{U_0}{2R}\left(\frac{\Delta t_1 + RC}{\Delta t_1 + \Delta t_2}\right)$$

Thay số ta được : $I_A \approx 4{,}8.10^{-3}A = 4{,}8mA$

**Bài 17.** Khi K đóng, dòng điện trong các đoạn mạch tăng, do đó trong các cuộn dây xuất hiện suất điện động cảm ứng:

$e_1 = -L_1\frac{di_1}{dt}$ (1.1)

$e_2 = -L_2\frac{di_2}{dt}$ (1.2)




Ta luôn có $u_{AB} = e_1 = e_2$

$\rightarrow \quad L_1 di_1 = L_2 di_2$

Ban đầu $i_1 = i_2 = 0 \quad \rightarrow \quad L_1 i_1 = L_2 i_2$ (1.3)

Mặt khác: $i = i_1 + i_2$ (1.4)

Từ (1.3) và (1.4) → $i_1 = \frac{L_2}{L_1+L_2} i$ (1.5)

Theo định luật Ôm ta có:

$u_{AB} = E - i(R + r) = -e_1 = -e_2$ (1.6)

$$E - i(R + r) = L_1\frac{di_1}{dt}$$

$$E - i(R + r) = \frac{L_1L_2}{L_1 + L_2}\frac{di}{dt}$$

$\frac{L_1L_2}{L_1+L_2}\frac{di}{dt} + (r + R)i - E = 0$ (1.7)

Phương trình vi phân này có nghiệm

$i = I_0e^{\lambda t} + C$ với C là một hằng số (1.8)

Tại thời điểm K đóng thì i = 0, do đó

$I_0 + C = 0$

Thay (1.8) vào (1.7) ta được:

--> $\frac{L_1L_2}{L_1+L_2}I_0\lambda e^{\lambda t} + (r + R)(I_0e^{\lambda t} + C) - E = 0$ với mọi t

--> $C = \frac{E}{r+R}$

--> $I_0 = -\frac{E}{R+r}$

--> $\lambda = -\frac{(r+R)}{L_1L_2}(L_1 + L_2)$.

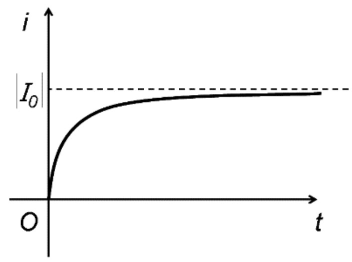
--> $i = \frac{E}{R+r}\left(1 - e^{-\frac{(r+R)(L_1+L_2)}{L_1L_2}t}\right)$

Hay $i = \frac{E}{R+r}(1 - e^{-\alpha t})$ (1.9)

Với $\alpha = \frac{(r+R)}{L_1L_2}(L_1 + L_2)$. (1.10)

Từ (1.9) suy ra:

- Khi t = 0: i = 0
- Khi t tăng, dòng điện qua đoạn mạch tăng dần theo đồ thị như hình vẽ.




- Khi t --> ∞ thì i dần đến giá trị $-I_0 = \frac{E}{R+r}$

Như vậy, có thể nói khi thời gian t đủ lớn thì dòng điện giữ không đổi và cuộn cảm không còn ảnh hưởng gì tới dòng điện trong mạch nữa.

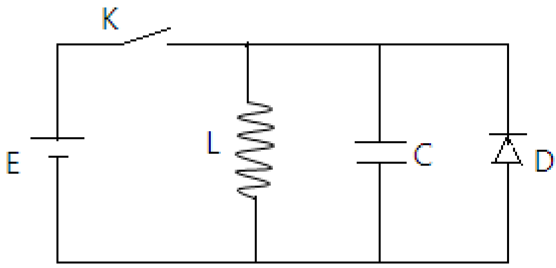
Theo (1.5), cường độ dòng điện trong các cuộn dây là

$$i_1 = \frac{L_2}{L_1+L_2}i = \frac{L_2}{L_1+L_2}\frac{E}{R+r} \qquad (1.11)$$

$$i_2 = \frac{L_1}{L_1+L_2}i = \frac{L_1}{L_1+L_2}\frac{E}{R+r} \qquad (1.12)$$

Nhận xét: Do tác dụng của cuộn cảm nên dòng điện trong mạch tăng một cách từ từ, nếu điện trở R là một bóng đèn thì đèn sẽ sáng lên dần, sau một lúc mới có độ sáng ổn định, đây chính là sự quá độ của dòng điện trong một mạch điện có cuộn cảm.

**Bài 18.** a) Khi ngắt K, cường độ dòng điện qua cuộn cảm $I_0$.




Ta có: $E = \frac{LI_0}{\tau}$.

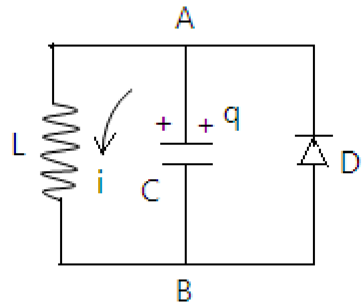
$e = -L\frac{di}{dt} \Rightarrow$ Edt = -Ldi

Lúc t = 0 $\Rightarrow \begin{cases} i_L = I_0 \\ q = E.C = Q_0 \end{cases}$

$U_{AB} > 0$ nên điốt D đóng (hình B.20)

Dòng qua cuộn cảm cực đại khi q = 0. Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng ta có:

$\frac{1}{2}LI_0^2 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}L(2I_0)^2 \Rightarrow 3LI_0^2 = E^2C_L$




Ta có: $\frac{q}{C} = L\frac{di_L}{dt} = LI_L' = -Lq''$

$\Rightarrow q'' + \frac{q}{LC} = 0 \Rightarrow q = Q_0\sin(\omega t + \phi)$ với $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$$i_L = -q' = -Q_0\omega\cos(\omega t + \phi) = -2I_0\cos(\omega t + \phi)$$

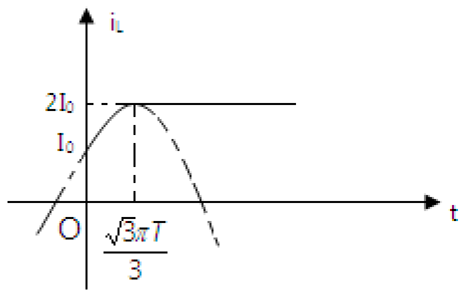
Lúc t = 0 $\Rightarrow \begin{cases} q = EC = Q_0\sin\phi \\ i_L = I_0 = -2I_0\cos\phi \end{cases}; \phi = \frac{2\pi}{3}$

$i_L = -2I_0\cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$ cực đại khi $\omega t + \frac{2\pi}{3} = \pi + k2\pi$

$\Rightarrow t = \frac{\pi}{3\omega} = \frac{\pi}{3}\sqrt{LC}$. Từ (1) và (2) $\Rightarrow t = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}\tau$.

b) Khi $t \geq \frac{\pi}{3}\sqrt{LC}$; q = 0, $U_{AB} = 0$ dòng không đổi và đi qua diôtd và cuộn cảm.

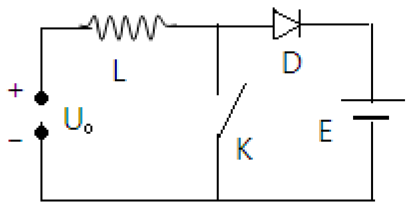
Đồ thị $i_L(t)$ ở hình bên




**Bài 19.** Tại thời điểm ban đầu khoá K ngắt và trong mạch không có dòng điện.

Sau khi khoá điện đóng thì trong mạch chứa hiệu điện thế, cuộn dây và khoá điện sẽ có dòng điện tăng lên. Theo định luật Ôm thì trong mạch này: $U_0 - L\frac{dI}{dt} = 0$

Bởi vì dòng điện ban đầu bằng không nên dòng điện phụ thuộc vào thời gian dưới dạng: $I(t) = \frac{U_0}{L}t$




Sau thời gian $\tau_1$dòng điện trong cuộn cảm đạt tới giá trị: $I(\tau_1) = \frac{U_0\tau_1}{L}$= 5(A)

Sau khi khoá điện ngắt thì quá trình nạp điện cho ắc quy bắt đầu (xem HV). Định luật Ôm cho mạch kín mới sẽ có dạng:

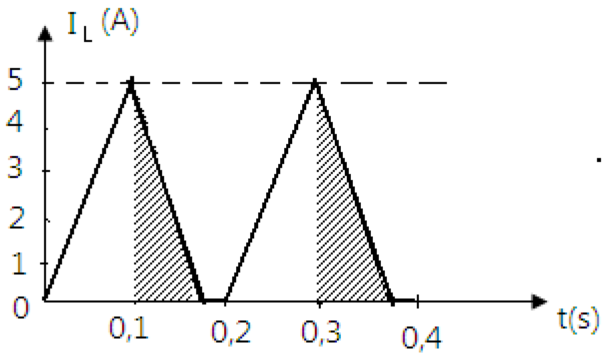
$U_0 - E - L\frac{dI}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \frac{dI}{dt} = -\frac{E-U_0}{L}$

Trong chế độ này, dòng điện giảm tuyến tính theo thời gian với quy luật:

$$I(t) = \frac{U_0}{L}\tau_1 - \frac{(E-U_0)t}{L} = 5 - 70t.$$

Sau thời gian $t_0 = U_0\tau_1/(E - U_0) \cong 0{,}07$s thì dòng điện trong mạch giảm tới không. Bởi vì $\tau_1 = \tau_2 > t_0$ nên dòng điện thực sự bị ngừng lại và trong thời gian còn lại. Đến khi khoá K đóng, tất cả sẽ được lặp lại.

Trên hình vẽ chỉ ra sự phụ thuộc tuần hoàn của dòng điện qua cuộn dây vào thời gian. Phần gạch chéo ứng với quá trình nạp điện. Mỗi chu kỳ nạp điện hết một thời gian $t_3 = \tau_1 + \tau_2$ và điện lượng Δq được nạp vào bình khi đó bằng diện tích phần gạch chéo:




$$\Delta q = \frac{1}{2}I_L(\tau_1)t_0 = \frac{U_0^2\tau_1^2}{2L(E-U_0)}$$

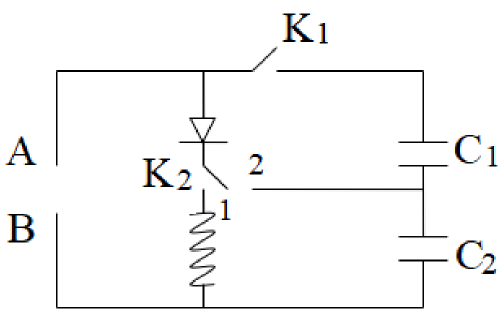
Số chu kỳ được xác định:

$$N = \frac{q}{\Delta q} = \frac{2qL(E-U_0)}{U_0^2\tau_1^2}$$

Tổng thời gian nạp điện là:

$$T = N(\tau_1 + \tau_2) = \frac{2qL(E-U_0)(\tau_1+\tau_2)}{U_0^2\tau_1^2} = 22{,}4(h)$$

**Bài 20.** a)




* Sau khi đóng $k_2$ vào chốt 1:

+ $0 \le t \le \frac{T}{2}$: Đ mở, mạch như hình vẽ.

$$i = \frac{U_o}{L\omega}\cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) = \frac{U_o}{L\omega}\sin\omega t$$

+ $t = \frac{T}{2}$: $u_{AB} = -U_o$ và $i=0$: Đ bắt đầu đóng lại

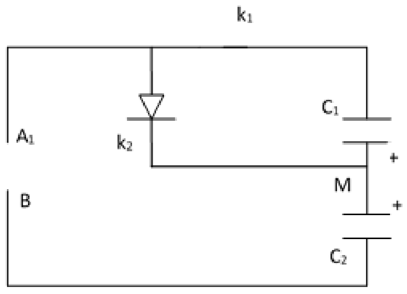
+ $\frac{T}{2} \le t \le \frac{3T}{4}$: $u_{AB} < 0$ Đ luôn đóng nên $i=0$

+ $t \ge \frac{3T}{4}$: $u_{AB} \ge 0$ Đ bắt đầu mở: $i = \frac{U_o}{L\omega}\sin\omega t + C$

Mà tại $t = \frac{3T}{4}$ thì $i = 0 \Rightarrow \frac{U_o}{L\omega}\sin(\frac{2\pi}{T}.\frac{3T}{4}) + C = 0 \Rightarrow C = \frac{U_o}{L\omega}$

Vậy pt dòng điện trong ktg này là: $i = \frac{U_o}{L\omega}\sin\omega t + \frac{U_o}{L\omega}$ $\quad (t \ge \frac{3T}{4})$

+ Từ pt ta có: $I_{max} = 2\frac{U_o}{L\omega}$ và đạt được tại $t = \frac{5T}{4}$




$i = 0$ tại $t = \frac{7T}{4}$ và khi đó cũng có $u_{AB} = 0$

+ $t = \frac{7T}{4}$. Thời điểm này giống thời điểm $t = \frac{3T}{4}$ và do đó quá trình cứ thế tiếp diễn.

b.

* Sau khi $k_2$ đóng vào chốt 2.

+ t=0: tụ $C_2$ nhanh chóng tích điện đến $Q_o = C_2U_o$

+ t>0: $V_A$ giảm ; Đ đóng, điện tích (+) chạy sang tụ $C_1$

$u_{AB} = u_{AM} + u_{MB}$ và $q_{1M} + q_{2M} = C_2U_o$

$\Rightarrow$ $U_o\cos\omega t = u_{AM} + u_{MB}$ và $C_2u_{MB} - C_1u_{AM} = C_2U_o$

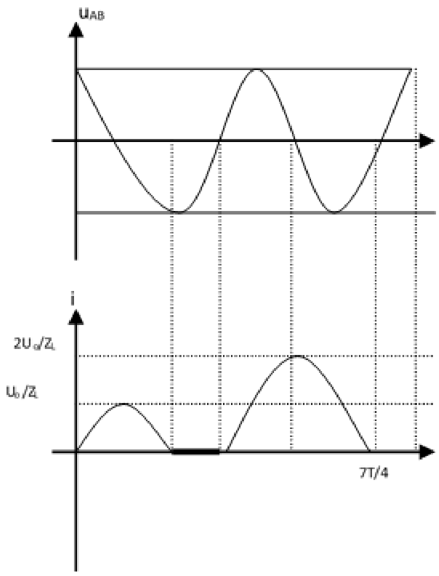
$\Rightarrow$ $u_{MA} = \frac{C_2U_0}{C_1 + C_2}(1 - \cos\omega t) \geq 0$

$u_{MB} = \frac{C_1U_0}{C_1 + C_2}(\cos\omega t + \frac{C_2}{C_1})$

$\Rightarrow$ Nếu : $C_2 > C_1$ thì $u_{MB}$ sẽ luôn > 0

Nếu: $C_2 < C_1$ thì $u_{MB}$ có những giá trị âm và có những giá trị dương

Đồ thị hình bên.




**Bài 21.**

* Đặt $V_N = 0$ thì $V_M = U_o\cos\omega t$

* Tại t=0: $V_M = U_o$ $\Rightarrow$ có dòng điện chạy qua Đ$_1$ nạp điện cho $C_2$ đến $U_{AN} = U_o$ ; $q_{2A} = C_2U_o$

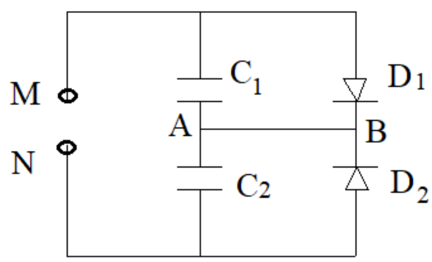
*Nửa chu kì đầu: $V_M$ giảm, điện tích (+) chạy sang bản $q_{1A}$ và tụ $C_1$ được tích điện:

$-\frac{q_{1A}}{C_1} + \frac{q_{2A}}{C_2} = V_M$ $\Rightarrow$ $q_{2A}C_1 - q_{1A}C_2 = C_1C_2V_M$ (1)

$q_{1A} + q_{2A} = U_oC_2$ (2)

+ Thay (2) vào (1) được: $q_{2A}(C_1+C_2) - U_oC_2^2 = C_1C_2V_M$ $\Rightarrow$ $\frac{q_{2A}}{C_2}(C_1+C_2) = C_1V_M + C_2U_o$

+ Lại có: $\frac{q_{2A}}{C_2} = V_A$ $\Rightarrow$ $(V_A - V_M)C_1 = (U_o - V_A)C_2 \geq 0$ (3)




Vậy nửa chu kì đầu $V_M > 0$ và $V_A > V_M$ hay hai đi ốt luôn đóng ở thời điểm $t \neq 0$ và $0 < t < \frac{T}{2}$

. Tại $t = \frac{T}{2}$: $V_M = 0$: $V_A = \frac{U_o}{C_1 + C_2} > 0$

* Nửa chu kì sau:

+ $V_M < 0$ đèn 1 đóng

+ Giả sử Đ$_2$ mở: $u_{Đ2} = u_{C2} = 0$ $\Rightarrow$ toàn bộ điện tích (+) tập trung tụ $C_1$ $\Rightarrow$ $q_{1A} > C_2U_o$

+ Lại có: $C_2 > C_1$ $\Rightarrow$ $q_{1A} > C_1U_o$ điều này là vô lí

Vậy nửa chu kì sau cả 2 đi ốt vẫn đóng.

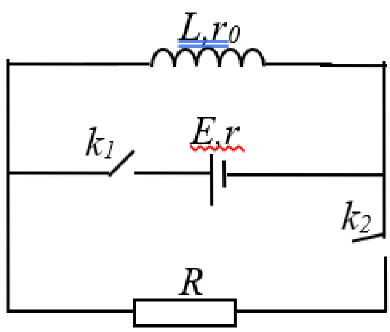
* Như thế có thể coi mạch trên là mạch gồm 2 tụ mắc nối tiếp mà ban đầu tụ $C_2$ đã tích điện đến $U_o$
+ Lập biểu thức:
. Có: $\begin{cases} u_{AN} - u_{AM} = U_o\cos\omega t \\ q_{1A} + q_{2A} = C_2U_o \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{AN} - u_{AM} = U_o\cos\omega t \\ C_1u_{AM} + C_2u_{AN} = C_2U_o \end{cases}$

$$\Rightarrow u_{AM} = \frac{C_2U_0}{C_1 + C_2}(1 - \cos\omega t); u_{AN} = \frac{C_2U_0}{C_1 + C_2}(1 + \frac{C_1}{C_1}\cos\omega t)$$

Chú ý: Tại thời điểm t=T điện tích (+) từ tụ 1 lại chạy hết về tụ 2 và quá trình được lặp lại

**Bài 22.**

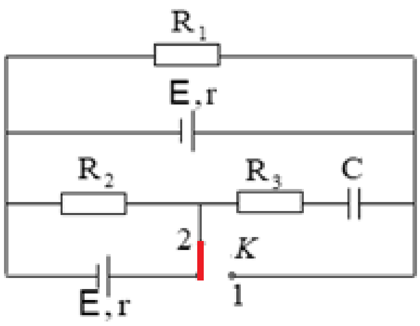
**1,** Ngay sau khi đóng $k_1$ dòng qua nguồn và R: $I_E = I_R = \frac{E}{R+r} = \frac{E}{2R_0}$, còn dòng qua cuộn cảm bằng 0 do có hiện tượng tự cảm: $I_L = 0$. Sau khi mạch đã ổn định thì: $I_E = \frac{2E}{3R_0}$ và $I_L = I_R = \frac{E}{3R_0}$.




**2,** + Điện lượng dịch chuyển qua mạch trong thời gian rất nhỏ dt là dq = idt. Mà theo định luật Ôm ta có: $i = \frac{e_{tc}}{R+r_0} = -\frac{L}{2R_0}.\frac{di}{dt}$. Suy ra $dq = -\frac{L}{2R_0}.\frac{di}{dt}.dt = -\frac{L}{2R_0}di$. Do dòng điện qua mạch giảm từ $I_L = I_0 = \frac{E}{3R_0}$ đến 0 khi đã ổn định nên điện lượng qua cuộn dây là: $q = \int_{I_0}^{0} dq = -\frac{L}{2R_0}\int_{I_0}^{0} di = -\frac{Li}{2R_0} \quad \|_{I_0}^{0} = \frac{LI_0}{2R_0} = \frac{LE}{6R_0^2}$.
+ Nhiệt lượng toả ra trên $r_0$ và R trong thời gian rất nhỏ dt là: $dQ = i^2(R + r_0)dt = i(R + r_0).(-\frac{L}{2R_0}).\frac{di}{dt}.dt = -Lidi$ .Nhiệt lượng toả ra trên toàn mạch là: $Q = \int_{I_0}^{0} dQ = -L\int_{I_0}^{0} idi = -\frac{Li^2}{2} \quad \|_{I_0}^{0} = \frac{LI_0^2}{2}$. Mà năng lượng từ trường của cuộn cảm ngay sau khi ngắt $k_1$ là $W_t = \frac{LI_0^2}{2}$.
Vậy Q=$W_t$ .

**Bài 23.**

a.Khi khóa K ở chố 1, hai nguồn E mắc song song nên $E_b$ = E = 3 V;
$r_b$ = r/2 = 0,5 Ω
Cường độ dòng điện qua $R_1$: $I_1 = E_b/(R_1+r_b)$ = 1,2 A
Hiệu điện thế giữa hai đầu tụ điện $U_C = U_{R1} = I_1R_1$ = 2,4 V
Điện tích cuả tụ điện $q_1 = CU_C$ = 24 μC



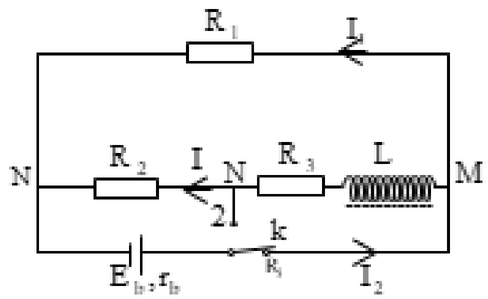

b.Đóng khóa k vào chốt 2 ta có mạch điện như sau
$U_{C2} = U_{MN} = U_{MP} + U_{PN} = E\frac{R_1}{R_1 + r} - E\frac{R_2}{R_2 + r}$ = - 0,5V

Điện tích của tụ điện
$q_2 = CU_{C2}$ = 5 μC

Ta thấy lúc khóa K ở chốt 1 bản tụ bên trái tích điện âm với điện tích $q_1$; khi khóa K chuyển sang chốt 2, bản bên trái của tụ điện tích điện dương với điện tích $q_2$. Vậy điện lượng đã chuyển qua điện trở $R_3$ là $\Delta q = q_1 + q_2 = 29\ \mu C$

c. Khi dòng điện qua cuộn dây biến thiên trong cuộn dây xuất hiện suất điện động tự cảm

$e_{tc} = -L\dfrac{\Delta i_3}{\Delta t}$ (1)




Áp dụng định luật ôm cho các đoạn mạch

$I_1 = \dfrac{U_{MP}}{R_1}$ (2)

$I_2 = \dfrac{-U_{MP} + E_b}{r_b}$ (3)

$I = \dfrac{U_{MP} + e_{tc}}{R_2 + R_3}$ (4)

$I_2 = I + I_1$ (5)

$\Rightarrow \dfrac{-U_{MP} + E_b}{r_b} = \dfrac{U_{MP} + e_{tc}}{R_2 + R_3} + \dfrac{U_{MP}}{R_1} \Rightarrow U_{MP} = \dfrac{36 - e_{tc}}{16}$ (6)

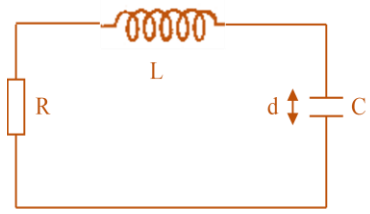
Từ (3) và (5) ta có $I = \dfrac{36 + 15e_{tc}}{96}$

Khi I = 0,35 A ta có $e_{tc}$ = - 0,16 V thay vào (1) ta tính được độ biến thiên cường độ dòng điện qua cuộn dây $\dfrac{\Delta I}{\Delta t} = 3,2$ A/s

**Bài 24.** Từ thời điểm tụ điện tích điện cực đại cho đến khi điện tích của tụ điện bằng 0 thì T/2. Trong đó , T chu kỳ dao động riêng của mạch. $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{LC}$

Trong thời gian này ta phải bổ sung cho tụ một năng lượng :

$\Delta W = W_C^/ - W_C = \frac{q_0^2}{2C'} - \frac{q_0^2}{2C}$




Để $W_C^/ > W_C$ thì $C' < C$ ⇒ phải tăng khoảng cách giữa hai bản tụ : $d^/ = d + \Delta d$

$$\Rightarrow \Delta W = \frac{q_0^2}{2}\left(\frac{C - C^/}{C.C^/}\right)$$

Thay $C = \frac{\omega s}{d}$ , $C' = \frac{\omega_0 s}{d + \Delta d} \Rightarrow \Delta W = \frac{q_0^2}{2C}\cdot\frac{\Delta d}{d}$ (1)

Năng lượng hao phí vì nhiệt ở điện trở R trong khoảng $\frac{T}{2}$

$$\Delta W_R = I^2R.\frac{T}{2} = \frac{T_0^2}{4}\cdot RT \quad \text{Vì} \quad I_0 = q_0 W$$

$$\Rightarrow \Delta W_R = \frac{\pi R q_0^2}{2\sqrt{LC}}$$

Điều kiện để duy trì dao động : $\Delta W \geq \Delta W_R \Rightarrow \frac{\Delta d}{d} \geq \pi R\sqrt{\frac{C}{L}} = 0,1 = 10\%$

Vậy $\frac{\Delta d}{d} \geq 10\%$

**Bài 25.**

1. Xác định $V_0$, V:

* Trước khi cho bản trên dao động thì: $C_0=\frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d_0}$

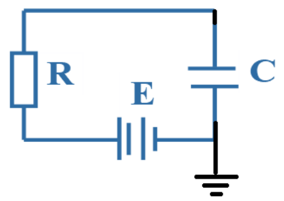
Khi cho bản trên dao động thì: $C_t=\frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d_0+A\sin\omega t}$

* Vậy điện thế bản cực trên là: $V_t=\frac{Q}{C_t}=\frac{C.E}{C_t}=\frac{d_0+A\sin\omega t}{d_0}E=E+\frac{E}{d_0}A\sin\omega t(1)$

Hay: $V_t = V_0 + V\sin\omega t$ (2)

* Đồng nhất giữa (1) và (2) ta được: $V_0=E=90(V)$

$$V=\frac{A}{d_0}E=0{,}9(V)$$




2a. Xác định $I_0$ và φ:

* Áp dụng định luật Ohm cho mạch: $i=\frac{E-U_C}{R}=\frac{E}{R}-\frac{V_t}{R}$

$\Rightarrow i=\frac{E}{R}-\frac{1}{R}\left(E+E\frac{A}{d_0}\sin\omega t\right)=-\frac{EA}{R.d_0}\sin\omega t=\frac{EA}{R.d_0}\sin(\omega t+\pi)$ (3)

* Mà: $i = I_0\sin(\omega t + \varphi)$ (4)

* Đồng nhất giữa (3) và (4) ta được:

$$I_0=\frac{EA}{R.d_0}=9.10^{-7}(A)$$

$$\phi=\pi(rad)$$

b. Xác định hiệu điện thế xoay chiều ở hai đầu điện trở R:

$u_R=R.i=RI_0\sin(\omega t+\varphi)=E\frac{A}{d_0}\sin(\omega t+\pi)$ =0,9sin(2000πt+π) (V)

(Với $\omega = 2\pi f$)

c. Xác định $f_0$:

Tổng trở của đoạn mạch: $Z=\sqrt{R^2+Z_{C_0}^2}=\sqrt{R^2+\frac{1}{C_0^2\omega^2}}$

Khi tần số rất cao ($f_t = \infty \Rightarrow \omega_\tau = \infty$) thì: $Z_1 = R$

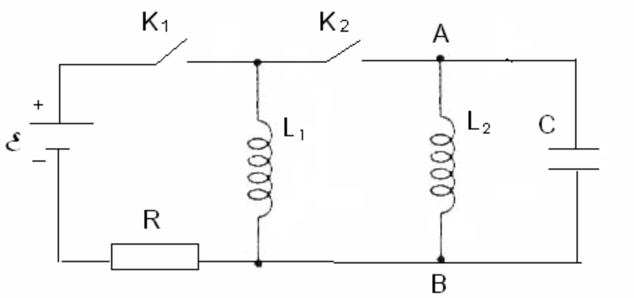
Khi có giới hạn tần số thấp thì: $Z_2=\frac{Z_1}{0{,}7}\Leftrightarrow R^2+\frac{1}{C_0^2\omega_0^2}=\frac{R^2}{0{,}7^2}$

$\Rightarrow\frac{1}{C_0\omega_0}=\frac{R}{0{,}7}\sqrt{1-0{,}7^2}\Rightarrow\omega_0=\frac{0{,}7}{C_0R\sqrt{1-0{,}7^2}}=2\pi f_0$

Vậy: $f_0=\frac{0{,}7}{2\pi C_0R\sqrt{1-0{,}7^2}}=176(Hz)$ Do $C_0=88{,}5.10^{-12}(F)$

$R=10^7(\Omega)$

**Bài 26.**




$K_1$ đóng, $K_2$ ngắt, dòng điện ổn định qua $L_1$:$I_0=\frac{\varepsilon}{R}$

$K_1$ ngắt, $K_2$ đóng: Vì 2 cuộn mắc song song

$u_{L1} = u_{L2} = u_{AB} \Rightarrow - 2L (i_1 – I_0) = Li_2 \Leftrightarrow 2L (I_0 – i_1) =Li_2$ (1)

$\frac{2LI_0^2}{2}=\frac{2Li_1^2}{2}+\frac{Li_2^2}{2}+\frac{CU^2}{2}$ (2)

$I_C = i_1 - i_2 \Rightarrow U_{Cmax} \Leftrightarrow I_C = 0 \Leftrightarrow i_1 = i_2 = I$ (3)

(2) và (3) $\Rightarrow CU_0^2 = 2LI_0^2 - 2Li_1^2 - Li_2^2 = 2LI_0^2 - 3LI^2$

(1)$\Rightarrow 2LI_0 = Li_2 + 2Li_1 = 3LI \Rightarrow I = \frac{2I_0}{3}$ $\Rightarrow CU_0^2 = \frac{2}{3}LI_0^2 \Rightarrow U_0 = I_0\sqrt{\frac{2L}{3C}} = \frac{\varepsilon}{R}\sqrt{\frac{2L}{3C}}$

+Khi tụ điện phóng hết điện thì $I_1$ và $I_2$ cực đại

$\frac{2LI_0^2}{2} = \frac{2LI_{1max}^2}{2\frac{LI_{2max}^2}{2}}$ (4)

(1) $\Rightarrow 2L\,(I_0 - I_{1max}) = LI_{2max}$ $\Rightarrow I_0 - I_{1max} = \frac{1}{2}I_{2max}$ (5)

(4) $\Rightarrow 2LI_0^2 = 2LI_{1max}^{2\,2\,2max} \Rightarrow 2I_0^2 = 2I_{1max}^{2\,2\,2max}$

$\Rightarrow 2(I_0 - I0\ \ {}^{2}_{2max1max1max}$ $\Rightarrow I_0 + I_{1max} = I_{2max}$ (6)

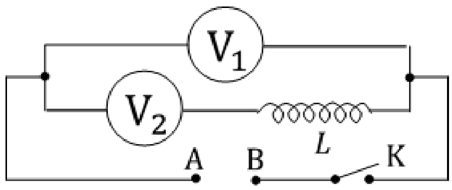
(5)(6) $\Rightarrow I_{2max} = \frac{4}{3}I_0 = \frac{4\varepsilon}{3R}$

**Bài 27.**

1.Từ giả thiết ta thấy

$$U_{AB} = \pm U_0$$

$$R_2 i_2 + L\frac{di_2}{dt} = U_{AB} \Rightarrow \frac{d\left(i_2 - \frac{U_{AB}}{R_2}\right)}{i_2 - \frac{U_{AB}}{R_2}} = -\frac{R_2}{L}dt$$



hình 1

$$i_2 = \frac{U_{AB}}{R_2}\left(1 - e^{-\frac{R_2}{L}t}\right) \Rightarrow u_{V_2} = U_{AB}\left(1 - e^{-\frac{R_2}{L}t}\right)$$

$$\frac{U_0}{2} = U_0\left(1 - e^{-\frac{R_2}{L}\tau}\right) \Rightarrow L = \frac{R_2\tau}{\ln 2}$$

2.Sau khi ngắt K, $-i_1 = i_2 = i \Rightarrow$

$$(R_1 + R_2)i + L\frac{di}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{di}{i} = -\frac{R_1 + R_2}{L}dt$$

Vì dòng điện qua L không thể đột ngột đảo chiều nên

$$i = \frac{U_{AB}}{R_2}e^{-\frac{R_1+R_2}{L}t} = \frac{U_{AB}}{R_2}e^{-\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)\frac{t}{\tau}\ln 2}$$

$$u_{V_1} = -R_1 i = -\frac{R_1}{R_2}U_{AB}e^{-\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)\frac{t}{\tau}\ln 2}$$

$$u_{V_2} = R_2 i = U_{AB}e^{-\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)\frac{t}{\tau}\ln 2}$$

Do đó số chỉ của các Vôn kế sau khi ngắt K

$$u_{V_{1hd}} = -\frac{R_1}{R_2}U_0 e^{-\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)\frac{t}{\tau}\ln 2}$$

$$u_{V_{2hd}} = U_0 e^{-\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)\frac{t}{\tau}\ln 2}$$

**Bài 28**

1. $C = \frac{\varepsilon a^2}{k4\pi d} = 0{,}48$ n F

$Q = CU = 11{,}52.10^{-9}$ (C)

2. -Phần tụ ra khỏi dầu có điện dung : $C_1 = \dfrac{S_1}{k4\pi d} = \dfrac{a.vt}{k4\pi d}$

- Phần tụ còn trong dầu :$C_2 = \dfrac{\varepsilon S_2}{k4\pi d} = \dfrac{\varepsilon a(a-vt)}{k4\pi d}$

- Hai tụ coi như mắc song song : $C' = C_1 + C_2 = C\left[1 - \dfrac{(\varepsilon-1)vt}{\varepsilon a}\right]$

- Điện tích của tụ ở thời điểm t ứng với $0 < t < \dfrac{a}{v}$:

$Q' = C'.U = CU\left[1 - \dfrac{(\varepsilon-1)vt}{\varepsilon a}\right] = Q\left[1 - \dfrac{(\varepsilon-1)vt}{\varepsilon a}\right]$

- Do $\varepsilon > 1$ nên $C' < C$ & $Q' < Q$ . điện tích bản dương giảm một lượng

$\Delta Q = Q - Q' = Q\dfrac{(\varepsilon-1)vt}{\varepsilon a}$ chuyển đến cực dương nguồn

- Cường độ dòng điện qua mạch : $I = \dfrac{\Delta Q}{t} = \dfrac{Q(\varepsilon-1)v}{\varepsilon a} = 1{,}12 \cdot 10^{-10}$ ( A)

**Bài 29.** Giả sử tại thời điểm bất kỳ dòng điện chạy qua các phần của mạch được biểu diễn trên hình. Tại thời điểm bất kỳ đều có các dòng điện như nhau $I_R$ chạy qua các điện trở R. Điều đó được rút ra từ định luật Ohm đối với mạch ABDC. Dòng chạy qua dây nối AB là $I_n$, dòng chạy qua cuộn cảm là $I_L$, còn dòng chạy qua điện trở r là $I_r$. Đối với các điểm nút A và B ta có thể viết định luật bảo toàn điện tích:

$$I_n + I_L = I_R$$

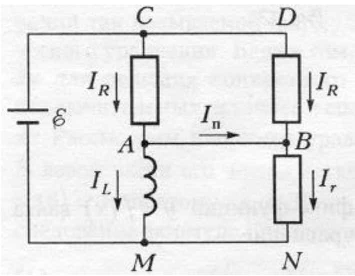
và

$$I_r = I_R + I_n.$$

Đối với mạch ABNM ta có thể viết định luật Ohm

$$L\frac{dI_L}{dt} = r(I_r - I_L),$$

hoặc sử dụng các biểu thức ở trên đối với các dòng điện, ta có




$$L\frac{dI_L}{dt} = 2rI_n\ .$$

Ta viết lại phương trình này dưới dạng

$$LdI_L = 2rI_ndt = 2rdq$$

và lấy tích phân

$$\int_0^Q dq = \frac{L}{2r}\int_0^{I_{Ln}} dI_L\ .$$

Ngay sau khi đóng khoá dòng điện qua cuộn cảm bằng không. Vì vậy giới hạn dưới của tích phân tại vế phải của phương trình trên cũng bằng không. Bây giờ ta tìm giới hạn trên $I_{Ln}$, nghĩa là dòng điện đã thiết lập qua cuộn cảm. Rõ ràng nó bằng

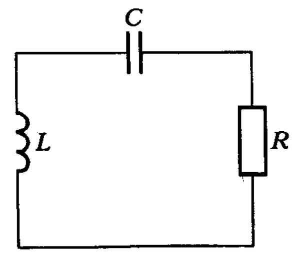
$$I_{L_n} = \frac{E}{R+r}\ .$$

Sau khi lấy tích phân ta nhận được tổng điện lượng chạy qua dây nối AB:

$$Q = \frac{LI_{L_n}}{2r} = \frac{LE}{2r(R+r)}\ .$$

**Bài 30.** Nếu sự biến đổi độ tự cảm của cuộn cảm xuất hiện trong thời gian ngắn (so với chu kỳ dao động của dòng điện trong mạch), thì từ thông Φ đi qua cuộn cảm được bảo toàn. Sự tăng độ tự cảm khi dòng điện bằng không trong mạch không dẫn đến thay đổi dòng điện và dòng đó vẫn giữ bằng không. Năng lượng trong mạch cũng được bảo toàn. Sau 1/4 chu kỳ dòng điện trong mạch đạt giá trị cực đại. Ta ký hiệu đại lượng này là $I_m$. Ta biểu diễn năng lượng từ trường của cuộn cảm qua từ thông $\Phi(\Phi = LI)$:

$$W_L = \frac{1}{2}\frac{\Phi^2}{L}.$$




Do $\Phi = \text{const}$ nên với biến đổi nhỏ của độ tự cảm ta có thể viết sự biến đổi năng lượng của cuộn cảm dưới dạng

$$\Delta W_L = \frac{\Phi^2 \Delta L}{2L^2} = -\frac{I_m^2 \Delta L}{2}.$$

Như vậy, rõ ràng là việc giảm độ tự cảm dẫn đến sự tăng năng lượng từ trường. Sự nhảy bậc này của năng lượng trong mạch sẽ xảy ra theo các khoảng thời gian bằng nửa chu kỳ dao động, nghĩa là

$$\frac{T}{2} = \pi\sqrt{LC}.$$

Giữa hai lần nhảy liên tiếp này năng lượng của mạch dao động sẽ giảm do sự mất nhiệt trong điện trở. Ta có thể viết những mất mát này sau thời gian T/2 dưới dạng:

$$\Delta W_R = \frac{1}{2} I_m^2 R\pi\sqrt{LC}.$$

Để duy trì dao động không tắt dần thì cần phải làm sao cho năng lượng đưa vào mạch phải lớn hơn hoặc bằng những mất mát do toả nhiệt đó:

$$|\Delta W_L| \geq \Delta W_R,$$

hay

$$\frac{I_m^2 \Delta L}{2} \geq \frac{I_m^2 R\pi\sqrt{LC}}{2}.$$

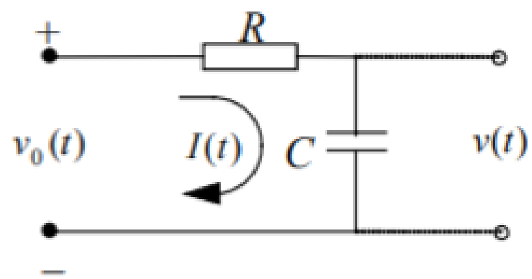
Từ đây ta nhận được

$$\Delta L \geq \pi R\sqrt{LC} \approx 9{,}4.10^{-3}\text{H}.$$

**Bài 31.**

Công thức liên hệ giữa dòng điện $I(t)$ và điện thế cung cấp $v_0(t)$ là:

$$v_0(t) = \mathrm{RI(t)} + \frac{1}{C}\left\{\int_0^t I(\tau)d\tau + Q_0\right\} \qquad (1)$$




trong đó $Q_0$ là điện tích ban đầu của điện dung C.

Công thức liên hệ giữa dòng điện $I(t)$ và điện thế $v(t)$ là:

$$v(t) = \frac{1}{C}\left\{\int_0^t I(\tau)d\tau + Q_0\right\} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có phương trình tính $v(t)$

$$RC\dot{v} + v = v_0 \qquad (3)$$

Điều kiện khởi đầu của điện thế là $v(0) = Q_0 / C$. Giả thiết $v_0(t)$ là một dãy điện xung tuần hoàn với chu kỳ T như hình vẽ. Để xác định $v(t)$ chúng ta viết $v_0(t)$ dưới dạng chuỗi Fourier

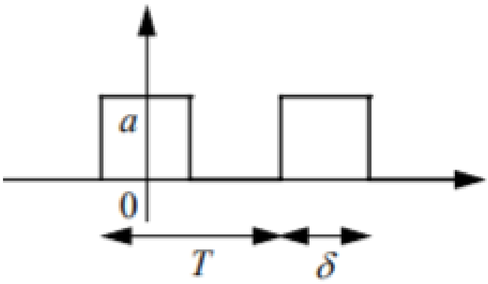
$$v_0(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{i\omega_k t}, \text{ trong đó } \omega_k = 2\pi k / T, \qquad (4)$$

Nghiệm của phương trình vi phân (3) là tổng của nghiệm phương trình thuần nhất $RC\dot{v} + v = v_0$, tức là $\alpha e^{-t/\mathrm{RC}}$ với $\alpha$ là hằng số và nghiệm riêng của (3).

Vì $v_0$ tuần hoàn, chúng ta có thể tìm nghiệm riêng tuần hoàn dạng $\sum_{k=-\infty}^{\infty} C^*_k e^{i\omega_k t}$. Như vậy nghiệm của (3) có dạng $v(t) = \alpha e^{-t/RC} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} C^*_k e^{i\omega_k t}$. Từ đây và công thức (4) suy ra

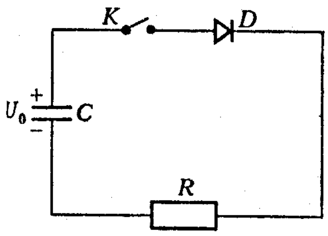
$C_k^* = \dfrac{C_k}{1+i\omega_k RC}$, trong đó hệ số Fourier $C_k$ của hàm $v_0(t)$ được tính theo công thức

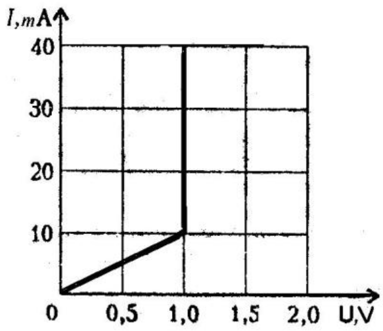
$$C_k = \frac{v_0\tau}{T}\frac{\sin(\omega_k\tau/2)}{\omega_k\tau/2} = 2\frac{v_0\sin(\omega_k\tau/2)}{T\omega_k}$$




Nghiệm phương trình thuần nhất được gọi là hiệu ứng tạm thời vì nó tắt dần khi $t\to\infty$. Nghiệm riêng tuần hoàn được gọi là hiệu ứng thường xuyên. Như vây điện thế ra của bộ lọc hoàn toàn được xác định và được xấp xỉ bởi hiệu ứng thường xuyên khi t đủ lớn.

**Bài 32.** Ngay sau khi đóng khoá, hiệu điện thế trên tụ vẫn cũng chưa thay đổi cả về độ lớn và dấu. Giả thiết rằng dũng điện ban đầu $I_0$ trong mạch lớn hơn 10mA. Định luật Ôm đối với mạch kín tại thời điểm đó có dạng:




$$U = U_d + I_0 R$$

trong đó $U_d$ là h.đ.t. hai đầu điôt ($U_d$ = 1V). Thay số vào ta được:

$I_0 = \frac{U_0 - U_d}{R} = 40mA$

Vỡ giỏ trị nhận được của dòng điện lớn hơn 10mA, nên giả thiết của chúng ta là đúng.

Sau khi đóng khoá, tụ điện sẽ phóng điện, cũn dũng điện trong mạch sẽ giảm. Khi dũng giảm tới giỏ trị $I_1$ = 10mA, áp dụng định luật Ôm ta tỡm được h.đ.t. $U_C$ giữa hai bản tụ:

$$U_C = U_d + I_1 R = 2V$$

Từ thời điểm đóng khoá cho tới khi tụ phóng hết điện, điôt sẽ có hai chế độ: khi dòng điện trong mạch biến thiên từ $I_0$ = 40mA đến $I_1$ = 10mA và khi dòng điện giảm từ $I_1$ = 10mA đến 0.

Trong chế độ thứ nhất, h.đ.t. trên điôt không đổi và bằng $U_d$ = 1V, còn đ.đ.t trên tụ giảm từ $U_0$ = 5V đến $U_C$ = 2V. Trong thời gian đó, điện lượng chạy qua điôt là:

$$q = C(U_0 - U_C) = 3.10^{-4}C$$

và nhiệt lượng toả ra trên điôt là:

$$Q_1 = qU_d = 3.10^{-4}J$$

Trong chế độ thứ hai, điôt hoạt động như một điện trở $R_d = U_d/I_1$ = 100Ω. Sau khi kết thúc chế độ thứ nhất, h.đ.t. trên tụ bằng $U_C$ = 2V và năng lượng còn lại của điện trường trong tụ là:

$W = \frac{CU_C^2}{2} = 2.10^{-4}J$

Vỡ điện trở $R_d$ của điôt bằng điện trở R, nên năng lượng toả ra trên điôt và trên R là như nhau. Do đó, nhiệt lượng toả ra trên điôt ở chế độ thứ hai bằng:

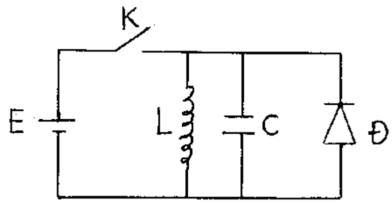
$Q_2 = \frac{W}{2} = 10^{-4}J$

Vậy nhiệt lượng toả ra trên sau khi đóng khoá bằng:

$$Q_d = Q_1 + Q_2 = 4.10^{-4}j.$$

**Bài 33.** a)Trong thời gian $\tau$, dòng qua cuộn cảm tăng tuyến tính theo thời gian, nên ta có $E = LI_0/\tau$ (1). Lục $t = 0$, dòng điện trong cuộn cảm bằng $I_0$, điện tích của tụ điện $q_0 = EC$, hiệu điện thế U giữa A và B dương, nên điôt Đ đóng, trong mạch bắt đầu xảy ra dao động. Khi dòng điện trong cuộn cảm cực đại, thì điện tích của tụ điện bằng 0. Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng, ta có:

$$\frac{1}{2}LI_0^2 + \frac{1}{2}\frac{q_0^2}{C} = \frac{1}{2}LI_0^2 + \frac{1}{2}E^2C = \frac{1}{2}L(2I_0)^2$$




Suy ra: $3LI_0^2 = E^2C$ (2)

Từ (1) và (2), ta được: $\sqrt{LC} = \sqrt{3}\tau$ (3)

Mặt khác,

$$\frac{q}{C} = L\frac{di_L}{dt} = Li_L' = -Lq''$$

trong đó $i_L$ là dòng điện đi qua cuộn cảm. Từ phương trình trên suy ra:

$$q'' + \frac{1}{LC}q = 0$$

Như đó biết, phương trình này có nghiệm là:

$$q = Q_0\sin(\omega t + \varphi) \text{ với } \omega = 1/\sqrt{LC}$$

và $i_L = -q' = -Q_0\omega\cos(\omega t + \varphi)$ với $\omega Q_0 = 2I_0$.

Khi $t = 0$,

$$q = EC = Q_0\sin\varphi = 2I_0(\sin\varphi)/\omega$$

$$i_L = I_0 = -2I_0\cos\varphi$$

Suy ra: $\varphi = 2\pi/3$. Do đó biểu thức của dòng điện qua cuộn cảm là:

$$i_L = -Q_0\omega\cos(\omega t + 2\pi/3) = Q_0\omega\cos(\omega t - \pi/3).$$

Như vậy, $i_L$ cực đại khi: $\cos(\omega t - \pi/3) = 1$, suy ra:

$t = \frac{\pi}{3\omega} = \frac{\pi}{3}\sqrt{LC}$ (4).

Từ (3) và (4), ta được:

$t = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}\tau \approx 1{,}814\tau.$

Vậy sau thời gian $1{,}814\tau$, kể từ khi ngắt khoỏ K, thì dòng điện trong cuộn cảm đạt cực đại.

b)+ Khi $0 < t < \frac{\pi\sqrt{3}}{3}\tau$, thì $i_L = 2I_0\omega\cos(\omega t - \pi/3)$

+ Khi $t = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}\tau$, thì điện tích q của tụ bằng 0 và U = 0, điôt Đ bắt đầu mở. Kể từ thời điểm này dòng điện không đổi, chỉ đi qua cuộn cảm và điôt Đ.

Đồ thị biểu diễn sự phụ thuộc của $i_L$ vào t, xin dành cho bạn đọc tự vẽ.

**Bài 34.** Dựa vào đường đặc trưng vôn-ampe ta thấy dũng điện I chạy qua phần tử phi tuyến này phụ thuộc vào h.đ.t. U giữa hai đầu phần tử: khi $0 < U < U_0$ thỡ $I = 0$; khi $U > U_0$ thỡ $I = \alpha(U - U_0)$ với $\alpha = \Delta I/\Delta U$ = const.

Khi mắc phân tử phi tuyến trên vào nguồn điện có s.đ.đ. E và điện trở trong r, cường độ dòng điện trong mạch là $I_1$, ta có:

$$E = I_1 r + \frac{I_1}{\alpha} + U_0 \qquad (1)$$

Khi mắc phần tử này vào nguồn điện nhưng qua một tải có điện trở R = r thì dòng điện trong mạch là $I_2$, ta có:

$$E = I_2 r + I_2 R + \frac{I_2}{\alpha} + U_0 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$E = \frac{I_2 I_1}{I_1 - I_2} r + U_0$$

Thay số ta được: E = 150V.

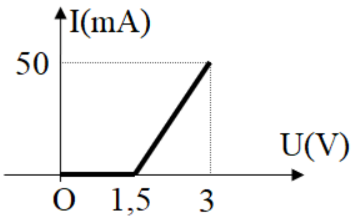
**Bài 35.**

Từ đặc tuyến V-A:

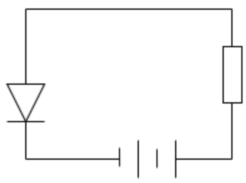
+ Khi $0 \le U_L \le 15(V)$: I = 0 và LED như một tụ điện

+ Khi $U_L > 15(V)$: có dòng qua LED và thoả mãn: $U_L = 1,5 + 30I$

+ Theo công thức hiệu điện thế từ cực (+) sang cực (-) của máy thu là: $U = E' + Ir \Rightarrow$ LED có suất phản điện và điện trở trong là: E'=1,5V; r' = 30Ω



Hình 1

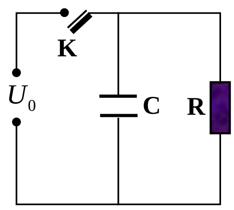

Hình 2

+ Từ mạch điện ta có: $E = IR + U_L \Rightarrow 3 = 100.I + 1,5 + 30I$

$\Rightarrow I = \frac{1,5}{130} = 0,0115$ (A) và $U_L = 1,85$ (V)

* Hiệu suất của LED: $H = \frac{E'}{E' + Ir'} = \frac{1,5}{1,85} = 81\%$

**Bài 36.**




a. Có $\tau = RC = 10^{-3} s$.

- Sau $t = 5.10^{-3} s$ thì $u = U_0 e^{-5} \approx 0,0697V$
- Sau $t = 10^{-2} s$ thì $u = U_0 e^{-10} \approx 4,86.10^{-4} V = 0,000486V \approx 0V$.

b. Khi $u = U_0/2 \Leftrightarrow U_0 e^{-t/\tau} = U_0/2 \Rightarrow e^{t/\tau} = 2 \Rightarrow t = \tau \ln 2 = 0,693.10^{-3} s$

c. Khi $u = U_0/e \Leftrightarrow U_0 e^{-t/\tau} = U_0/e \Rightarrow e^{t/\tau} = e \Rightarrow t = \tau = 10^{-3} s$

Vậy sau thời gian $t = \tau$ thì điện áp trên tụ giảm đi e lần.

**Bài 37.**

1. Đóng khoá K, Giá trị hiệu điện thế mà tụ điện nạp.

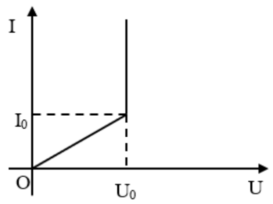
+ Giả sử khi mạch đã ổn định thì cường độ dòng điện qua điốt $I > I_0$, khi đó hiệu điện thế hai đầu mỗi điốt là $U_0$. Cường độ dòng điện trong mạch:

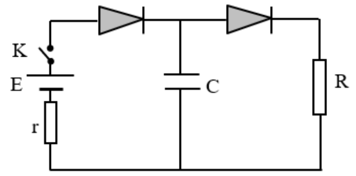
$$I = \frac{E - 2U_0}{R + r} = 0,1(A)$$

+ Mà $I_0 = 0,05 \Rightarrow I > I_0$ Vậy điều giả sử đúng.

+ Hiệu điện thế giữa hai bản tụ:

$$U = U_0 + I.R = 1 + 0{,}1.16 = 2{,}6(V)$$




2. Tính nhiệt lượng toả ra trên R và trên mỗi điốt.

**+ Giai đoạn 1:** Tụ phóng điện đến khi hiệu điện thế trên điốt bắt đầu giảm.

- Cuối giai đoạn này hiệu điện thế là:

$$U'_t = I_0R + U_0 = 0{,}05.16 + 1 = 1{,}8(V)$$

- Điện lượng tụ đã phóng:

$$\Delta q = C(U - U'_t) = 8.10^{-5}(C)$$

- Nhiệt lượng toả ra trên điốt:

$$Q_{1d} = U_0\Delta q = 8.10^{-5}(J)$$

- Nhiệt lượng toả ra trên điện trở R. Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng ta có:

$$Q_{1R} = \frac{CU^2}{2} - Q_{1d} - \frac{CU_t'^2}{2} = 9{,}6.10^{-5}(J).$$

**+ Giai đoạn 2:** Từ lúc hiệu điện thế trên điốt bắt đầu giảm, có thể xem điốt như điện trở có giá trị:

$$R_d = \frac{U_0}{I_0} = 20(\Omega)$$

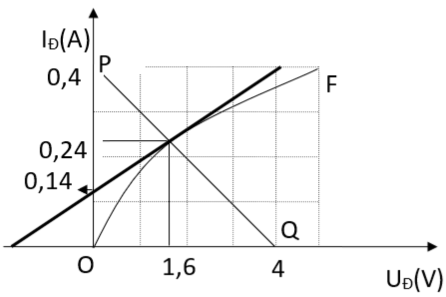
- Ta có: $\frac{Q_{2d}}{Q_{2R}} = \frac{R_d}{R} = \frac{5}{4}$ và $Q_{2d} + Q_{2R} = \frac{CU_t'^2}{2}$
- Từ đó suy ra: $Q_{2d} = 9.10^{-5}(J); Q_{2R} = 7{,}2.10^{-5}(J)$

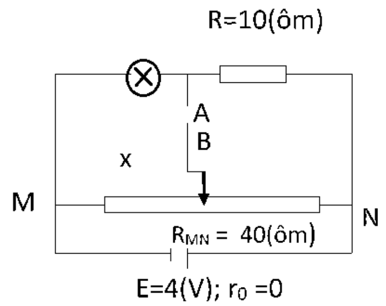
+ Vậy nhiệt lương toả ra trên R là: $Q_R = Q_{1R} + Q_{2R} = 16{,}8.10^{-5}(J)$

+ Nhiệt toả ra trên điốt bên phải là: $Q_d = Q_{1d} + Q_{2d} = 17.10^{-5}(J)$

+ Không có nhiệt lượng toả ra trên điốt bên trái.

**Bài 38.**




+ Vì $r_o$=0 nên ta luôn có: $U_{MN} = U_Đ + U_r = U_Đ + 10I_Đ = E = 4V$ (1)

+ Từ (1) suy ra: $I_đ = 0{,}4 - 0{,}1U_Đ$ (2)

Vậy đồ thị biểu diễn pt (2) chính là đường PQ, nó cắt đường đặc trưng V-A của đèn ở điểm: ($U_Đ$=1,6V; $I_Đ$=0,24A). Đó chính là điểm làm việc của đèn trong mạch điện

1) Để $U_{AB}$=0:

$$\frac{x}{40 - x} = \frac{U_{BM}}{U_{NB}} = \frac{U_D}{E - U_D} = \frac{1{,}6}{2{,}4} \Rightarrow x = 16\,(\Omega)$$

2) Từ (1): $E = U_Đ + 10I_Đ$

+ Khi E biến thiên nhỏ ta có: $dE = dU_Đ + 10dI_Đ$ (4)

+ Gọi $R_Đ$ là điện trở đèn tại điểm đang xét $\Rightarrow R_Đ = \frac{dU_D}{dI_D}$

Từ đồ thị ta có: $R_Đ = tg\beta = \dfrac{1,6}{0,1} = 16 \quad (\Omega)$

Thay vào (4) ta có: $dU_Đ + 10\dfrac{dU_D}{R_D} = dE \quad \Rightarrow \quad dU_Đ = \dfrac{dE}{1+\dfrac{10}{R_D}}$

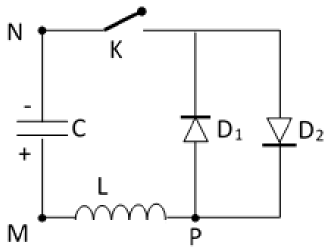
+Có: $U_{AB} = U_Đ + U_{MB} \quad \Rightarrow \quad dU_{AB} = dU_Đ - dU_{BM}$

$dE = dU_{NB} + dU_{BM} = dU_{BM} + dU_{BM}.\dfrac{40-x}{x} = \dfrac{40}{x}.dU_{BM} \quad \Rightarrow \quad dU_{BM} = \dfrac{x.dE}{40}$

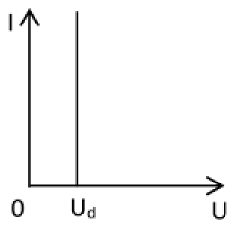
+ Để $U_{AB}$ không đổi thì $dU_{AB} = 0 \quad \Rightarrow \quad dU_Đ = dU_{BM} \Rightarrow \dfrac{dE}{1+\dfrac{10}{R_D}} = \dfrac{x.dE}{40} \quad \Rightarrow \quad x \approx 24\ (\Omega)$

**Bài 39.**

1. Quy ước chiều dòng điện qua cuộn cảm từ M tới P là chiều dương. $u_{MN} = u$. Khi $|u_{NP}| < U_d$ thì điôt ngắt (không cho dòng đi qua), vì dòng điện qua mạch dao động biến thiên điều hoà nên điôt chỉ đóng hoặc ngắt khi i = 0 ở cuối giai đoạn i ≠ 0. Sau khi đóng K:



Hình 2



Hình 3

+ **Trong khoảng** $0 \le t \le t_1$ **có dòng i qua $D_1$:**

$$u - L\frac{di}{dt} - U_d = 0, i = -Cu' \Rightarrow (u-U_d)'' = -\frac{1}{LC}(u-U_d) \quad (1)$$

Đặt $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$. Nghiệm của phương trình (1) có dạng: $u_1 = U_d + A\cos(\omega t + \varphi_1)$.

Thời điểm $t_0 = 0, i_1 = 0, u_1(0) = U_0 \Rightarrow \varphi_1 = 0, A = U_0 - U_{dm}$.

Lúc $t = t_1, i_1 = -Cu_1' = 0 \Rightarrow t_1 = \pi\sqrt{LC} = \pi/\omega$

$0 \le t \le t_1 = \pi/\omega, u_1 = U_d + (U_0 - U_d)\cos\omega t \quad (2)$

+ **Trong khoảng** $t_1 = \pi/\omega \le t \le t_2$ **thì dòng điện đổi chiều và chỉ qua $D_2$.**

Khi đó: $u + L\dfrac{di}{dt} + U_d = 0, i = Cu' \Rightarrow (u+U_d)'' = \dfrac{1}{LC}(u+U_d) \quad (3)$

Nghiệm của phương trình (3) có dạng: $u_2 = -U_d + B\cos(\omega t + \varphi_2)$.

Thời điểm $t_1 = \pi/\omega, i_2 = Cu_2' = 0, u_2(t_1) = u_1(t_1) = U_{2(t1)} = 2U_d - U_0, |U_{2(t1)}| > U_d \Rightarrow$

$\varphi_2 = -\pi, B = -U_0 + 3U_d, u_2 = -U_d + (U_0 - 3U_d)\cos\omega t \quad (4)$

Lúc $t = t_2, i_2 = Cu_2' = 0 \Rightarrow t_2 = 2\pi\sqrt{LC} = 2\pi/\omega \to t_2 = 2\pi/\omega$

+ **Trong khoảng** $t_2 = \pi/\omega \le t \le t_3$ **thì dòng điện đổi chiều và chỉ qua $D_1$.**

Tương tự, ta có: $u - L\dfrac{di}{dt} - U_d = 0, i = -Cu' \Rightarrow (u-U_d)'' = -\dfrac{1}{LC}(u-U_d)$

Nghiệm $u_3 = U_d + C\cos(\omega t + \varphi_3)$

Lúc $t_2 = 2\pi/\omega, i_3 = -Cu_3' = 0, u_{3(t_2)} = u_{2(t_2)} = U_{3(t2)} = U_0 - 4U_d, |U_{3(t2)}| > U_d \Rightarrow$

$\varphi_3 = 0, C = U_0 - 5U_d, u_3 = U_d + (U_0 - 5U_d)\cos\omega t \quad (5)$

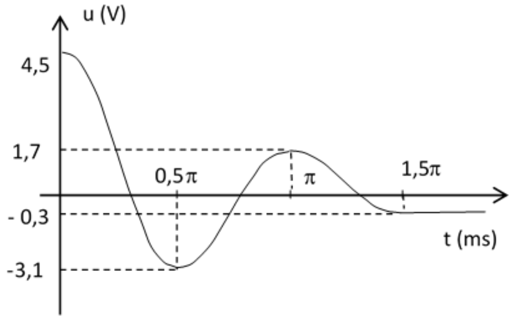
Lúc $t = t_3, i_3 = -Cu_3' = 0 \Rightarrow t_3 = 3\pi\sqrt{LC} = 3\pi/\omega \to t_3 = 3\pi/\omega$

Ở thời điểm: $t_3 = 3\pi/\omega, u_{3(t_3)} = u_{4(t3)} = U_{4(t3)} = -U_0 + 6U_d = -kU_d, |U_{4(t3)}| < U_d$ vì vậy $D_1$ ngắt ($D_2$ đã ngắt từ thời điểm $t_2$). Thành thử **khi** $t > t_3 = 3\pi/\omega$ **thì cả hai điôt đều ngắt.**

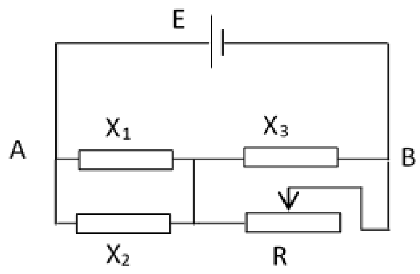
Lúc đó $u = -kU_d = \text{const}$

2. **Đồ thị u(t)** được vẽ như hình vẽ dưới.

**Chú ý:** Khi chấm cần chú ý đến các giá trị tính số cụ thể như trên hình. Dạng của đường cong có thể vẽ phác.




**Bài 40.**a. Gọi U là hiệu điện thế trên biến trở thì U ≤ E, cường độ dòng điện qua $X_1$, $X_2$ là $k(E - U)^2$, qua $X_3$ là $kU^2$. Công suất toả nhiệt trên R là:




$$P = U(I_1 + I_2 - I_3) = kU\left[2(E-U)^2 - U^2\right]$$

$$\frac{dP}{dU} = k\left[2(E-U)^2 - 4U(E-U) - 3U^2\right]$$

Từ điều kiện

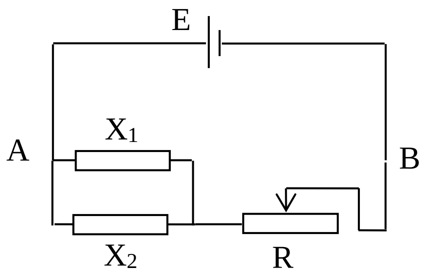
$$\frac{dP}{dU} = 0 \rightarrow 3U^2 - 8EU + 2E^2 = 0;$$

$$U_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{10}}{3}E = \begin{cases} U_1 = 0,28E \\ U_2 = 2,39E \end{cases}$$

P đạt cực đại tại giá trị $U_1 = 0,28E$.

$$I_R = 2k(E-U)^2 - kU^2;$$

Khi đó $R = \dfrac{U}{I_R} = \dfrac{U}{2k(E-U)^2 - kU^2} \approx \dfrac{0,29}{kE}$




b. Gọi $U_X$ là hiệu điện thế trên $X_1$, $X_2$; $U = U_{AB}$.

$$I = 2kU_X^2 = \frac{U - U_X}{R}$$

Giải phương trình $2kRU_X^2 + U_X - U = 0$

$$U_X = \frac{1 + \sqrt{1 + 8kRU}}{4kR}$$ (Loại dấu -); $I = \dfrac{\left(1 + \sqrt{1 + 8kRU}\right)^2}{2R}$

Vậy có thể coi AB như một phần tử phi tuyến có cường độ dòng điện phụ thuộc vào hiệu điện thế theo quy luật: $I = \dfrac{(1 + \sqrt{1 + 8kRU})^2}{2R}$.

**Bài 41.** Gọi U là h.đ.t. hai đầu mạch điện, $U_2$ là h.đ.t. hai đầu điện trở $R_2$, ta cú:

$$U_2 = \frac{UR_2}{R_1 + R_2}$$

Khi điện kế G chỉ số 0 thỡ h.đ.t. giữa hai đầu phần tử phi tuyến X bằng h.đ.t. hai đầu $R_2$: $U_X = U_2$. Ta cũng cú :

$$U_1 = U_3 = \frac{UR_1}{R_1 + R_2}$$

Cường độ dũng điện chạy qua X là :

$$I_X = \frac{U_3}{R_3} = \frac{UR_1}{(R_1 + R_2)R_3}$$

Theo bài ra : $I_X = \alpha U_X^3$ nờn ta cú :

$$\frac{UR_1}{(R_1+R_2)R_3} = \alpha\frac{U^3R_2^3}{(R_1+R_2)^3}$$

Từ đó rút ra :

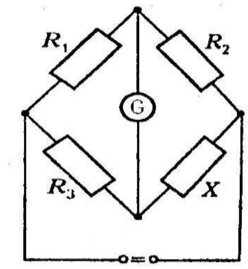
$$U = \sqrt{\frac{R_1(R_1+R_2)^2}{\alpha R_2^3 R_3}} \qquad (1)$$

Cụng suất toả ra tròn X là :

$$P_X = I_X U_X = \alpha U_X^4 = \alpha\left(\frac{UR_2}{R_1+R_2}\right)^4 \qquad (2)$$

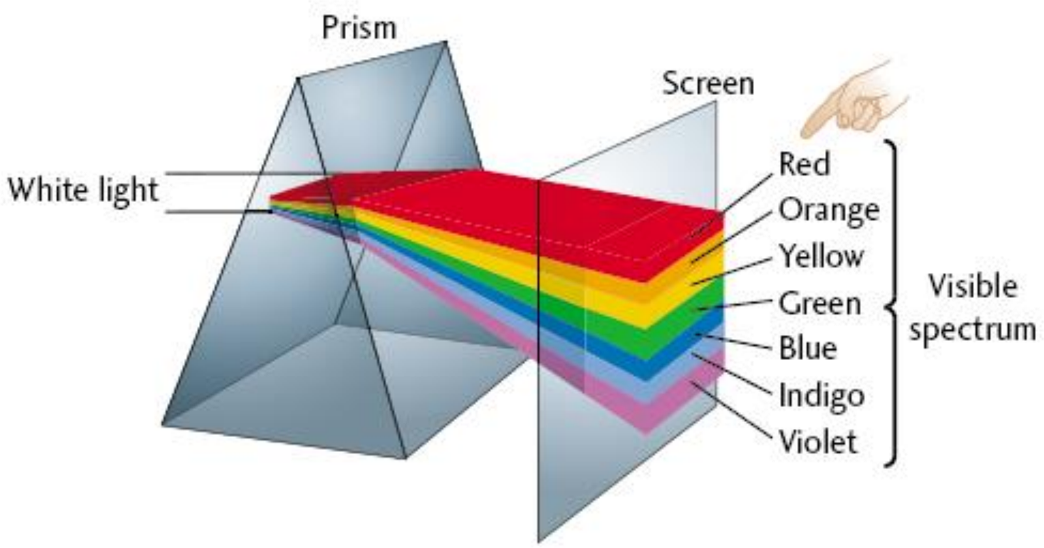
Từ (1) và (2) ta được:

$$P_X = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{R_1}{R_2R_3}\right)^2$$




Thay số ta được $P_X = 1W$.

# CHƯƠNG IX.
# TÍNH CHẤT SÓNG ÁNH SÁNG
## IX.1 TÁN SẮC ÁNH SÁNG




**Bài 1.**

a) Góc lệch của bức xạ $\lambda_2$ là góc lệch cực tiểu $D_m$ và được xác định bằng công thức:

$$\sin\frac{D_m + A}{2} = n.\sin\frac{A}{2}$$

hay $\sin\frac{D_m + 60}{2} = 1,617.0,5$

$$\Rightarrow \sin\frac{D_m + 60}{2} = 0,8085 = \sin 53^o57' = \sin i$$

$$\Rightarrow D_m = 2.53^o57' - 60^o = 47^o54'$$

và $i = 53^o57'$.

b) Lấy đạo hàm theo n của $\sin\frac{D + A}{2} = n.\sin\frac{A}{2}$

Ta được: $\frac{1}{2}\cos\frac{D+A}{2}\frac{dD}{dn} = \sin\frac{A}{2}$

Do đó $\frac{dD}{dn} = \frac{2\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{D+A}{2}} = \frac{2\sin\frac{A}{2}}{\sqrt{1 - n^2\sin^2\frac{A}{2}}}$

Với $A = 60^o \Rightarrow \sin\frac{A}{2} = 0,5$ và $n = 1,617$ ta được:

$$\frac{dD}{dn} = \frac{2}{\sqrt{4 - 1,617^2}} \approx \frac{2}{1,177}$$

$$\Rightarrow dD = \frac{2dn}{1,177}$$

Từ bức xạ $\lambda_1$ sang bức xạ $\lambda_2$, ta có $dn_1$ = 1,617 – 1,608 = 0,009

nên $$dD_1 = \frac{2.0,009}{1,177} = 0,0159rad = 0,8767^o \approx 52'36''$$

Từ $\lambda_2$ sang $\lambda_3$ thì $dn_2$ = 1,653 – 1,617 = 0,018 = $2dn_1$

nên $dD_2 = 2dD_1 = 2.52'36'' = 1^o45'12''$

Vậy góc lệch ứng với hai bức xạ $\lambda_1$ và $\lambda_3$ lần lượt là:

$$D_1 = 47^o54' - 0^o52'36'' = 47^o1'24''$$

$$D_2 = 47^o54' + 1^o45'12'' = 49^o39'12''$$

Khoảng cách giữa hai vạch $\lambda_1$ và $\lambda_2$ là:

$d_{1,2}$ = 0,01529.50 = 0,7645 cm = 7,645 mm.

Khoảng cách giữa hai vạch $\lambda_2$ và $\lambda_3$ là:

$d_{2,3} = 2.d_{1,2}$ = 7,645.2 = 15,290 mm.

c. Khi tăng góc tới i thì góc lệch $D_2$ của bức xạ $\lambda_2$ không cực tiểu nữa, mà tăng một chút, làm cho vạch quang phổ tương ứng dịch chuyển một đoạn nhỏ về đầu tím quang phổ, tức là về phía vạch $\lambda_3$.

Bức xạ $\lambda_1$ vốn đã ở quá độ lệch cực tiểu, nên độ lệch $D_1$ của nó cũng tăng, và tăng mạnh hơn $D_2$, làm cho vạch $\lambda_1$ cũng dịch chuyển về phía $\lambda_3$ và vì dịch nhiều hơn $\lambda_2$ nên khoảng cách $d_{1,2}$ giữa hai vạch $\lambda_1$ và $\lambda_2$ giảm.

Bức xạ $\lambda_3$ trước đây, chưa tới độ lệch cực tiểu, nên khi i tăng, thì độ lệch $D_3$ của nó giảm xuống (để tiến tới cực tiểu), làm cho vạch $\lambda_3$ dịch chuyển về phía đầu đỏ, tức là lại gần vạch $\lambda_2$, và khoảng cách giữa hai vạch $\lambda_2$ và $\lambda_3$ cũng giảm.

Rốt cục, khoảng cách giữa cách vạch giảm và vạch quang phổ ngắn lại. Trái lại, giảm góc tới i, thì các vạch xa nhau thêm, quang phổ dài thêm và ta phân biệt các vạch gần nhau được dễ hơn.

**Bài 2.** a) Coi góc A là nhỏ, ta tính được các góc lệch $D_C$ và $D_F$ bằng công thức:

$$D_C = (n_C - 1).A = (1,524 - 1)\frac{1}{20} = 262.10^{-4} \text{ rad}$$

$$D_F = (n_F - 1).A = (1,532 - 1)\frac{1}{20} = 266.10^{-4} \text{ rad}$$

Góc tạo bởi hai tia ló này là :

$\Delta D = D_F - D_C = (266 - 262).10^{-4}$ rad ≈ 1'20".

b) Góc tạo bởi hai tia ló ra khỏi lăng kính A' là:

$\Delta D' = (n'_F - n'_C).A' = (1,810 - 1,780).A' = 0,03.A'$

Để làm cho hai tia ló C và F trở thành song song, ta phải cho ΔD' bằng và trái dấu với ΔD. Vậy phải đặt hai lăng kính A, A' ngược chiều nhau (hình 4.9) và A' phải có giá trị:

$$A' = \frac{\Delta D}{n'_F - n'_C} = \frac{4.10^{-4}}{0,030} = \frac{1}{75} \text{ rad}$$

Góc lệch D của tia sáng qua hệ hai lăng kính A và A' là:

$$D = (n_C - 1)A - (n'_C - 1)A' = (n_F - 1)A - (n'_F - 1)A'$$

$$D = \frac{0{,}524}{20} - \frac{0{,}780}{75} = \frac{1{,}58}{100} \text{ rad}$$

Hay $D = 158.10^{-4}$ rad

***Chú ý:*** Nếu hai lăng kính đặt sát nhau, và chùm tia tới không quá hẹp thì hai tia ló C và F có thể coi là trùng nhau. Tia sáng qua lăng kính ghép vẫn bị lệch (về phía đáy lăng kính A), nhưng không bị tán sắc nữa. Hệ hai lăng kính này làm thành một *lăng kính tiêu sắc.*

**Bài 3.** a) Độ tụ của thấu kính được tính theo công thức:

$$D = \frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

Với $n = n_C = 1{,}524$; $R_1 = R_2 = R = 30$cm, ta được:

$$\frac{1}{f_C} = (1{,}524 - 1)\,\frac{2}{30}$$

$$\Rightarrow \quad f_C = \frac{30}{2.0{,}524} \approx 28{,}626 \text{ cm}$$

Với $n_F = 1{,}532$ ta cũng tìm được:

$$f_F = \frac{30}{2.0{,}532} \approx 28{,}195 \text{ cm}$$

Do đó (hình 4.10), $F_CF_F = f_C - f_F = 28{,}626 - 28{,}195 = 0{,}431$ cm

b) Độ tụ của hệ, đối với hai bức xạ C và F lần lượt là:

$$D_C = \frac{1}{f_C} + \frac{1}{f'_C} = \frac{(n_C - 1).2}{R} - \frac{(n'_C - 1).2}{R'}$$

$$D_F = \frac{1}{f_F} + \frac{1}{f'_F} = \frac{(n_F - 1).2}{R} - \frac{(n'_F - 1).2}{R'}$$

Để tiêu điểm của hệ, đối với hai bức xạ C và F trùng nhau, thì độ tụ của hệ đối với hai bức xạ ấy phải bằng nhau, tức là:

$$D_C = D_F \text{ hay } \frac{(n_F - n_C).2}{R} = \frac{(n'_F - n'_C).2}{R'}$$

$$\Rightarrow \quad R' = R.\frac{n'_F - n'_C}{n_F - n_C} = 30.\frac{1{,}810 - 1{,}780}{1{,}532 - 1{,}524} = 112{,}5\text{cm}$$

Tiêu cự f của hệ khi đó là:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_C} + \frac{1}{f'_C} = \frac{1}{f_F} + \frac{1}{f'_F} = \frac{(n_C - 1).2}{R} - \frac{(n_F - 1).2}{R'}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{0{,}524.2}{30} - \frac{0{,}780.2}{112{,}5} = \frac{15{,}72 - 12{,}48}{450}$$

$$\Rightarrow \quad f = \frac{450}{3{,}24} = 138{,}888 \approx 139 \text{ cm}$$

***Chú ý:*** 1) Độ dài của đoạn thẳng $F_FF_C$ được gọi là *độ lớn của sắc sai dọc* của thấu kính.

2) Thấu kính ghép này không còn sắc sai đối với hai bức xạ C và F, được gọi là *tiêu sắc* đối với hai bức xạ ấy.

**Bài 4.** a) Chiết suất của thuỷ tinh crao đối với 3 bức xạ $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ lần lượt là:

$$n = 1,5 + \frac{1}{200.0,55^2} \approx 1,5165$$

$$n_1 = 1,5 + \frac{1}{200.0,65^2} \approx 1,5118$$

$$n_2 = 1,5 + \frac{1}{200.0,43^2} \approx 1,5270$$

Bán kính cong R của hai mặt thấu kính là:

$$R = 2(n-1).f = 2.0,5165.30 \approx 31 \text{ cm}$$

Và tiêu cự của thấu kính đối với $\lambda_1, \lambda_2$ lần lượt là:

$$f_1 = f\frac{(n-1)}{(n_1-1)} = 30\frac{0,5165}{0,5188} \approx 30,28 \text{ cm}$$

$$f_2 = f\frac{(n-1)}{(n_2-1)} = 30\frac{0,5165}{0,5270} \approx 29,40 \text{ cm}$$

b) Chiết suất của thuỷ tinh flin đối với 3 bức xạ trên:

$$n' = 1,6 + \frac{1}{80.0,55^2} \approx 1,6413$$

$$n_1' = 1,6 + \frac{1}{80.0,65^2} \approx 1,6296$$

$$n_1' = 1,6 + \frac{1}{80.0,43^2} \approx 1,6676$$

Giả sử thấu kính flin có hai mặt cùng bán kính cong $R'$, thì để hệ là tiêu sắc, thấu kính này phải là thấu kính phân kì, và theo bài 3, $R'$ phải có giá trị:

$$R' = R\frac{n_F' - n_C'}{n_F - n_C} = 31.\frac{1,6676 - 1,6296}{1,5270 - 1,5118} \approx 77,5 \text{ cm}$$

Vì mặt trước của thấu kính này được dán với mặt sau của thấu kính hội tụ, nên $R_1'$ = -31 cm, và mặt sau của nó phải có bán kính $R_2'$ thoả mãn:

$$\frac{1}{R_1'} + \frac{1}{R_2'} = \frac{2}{R'} \Rightarrow \frac{1}{R_2'} = \frac{2}{R'} - \frac{1}{R_1'}$$

$$\frac{1}{R_2'} = -\frac{2}{77,5} - \frac{1}{-31} = \frac{-2.31 + 77,5}{77,5.31}$$

$R_2'$ = 155 cm (mặt sau của thấu kính phân kì là mặt lồi)

Tiêu cự của thấu kính ghép, đối với bức xạ $\lambda = 0,55\mu m$:

$$\frac{1}{f} = \frac{2(n-1)}{R} - \frac{2(n'-1)}{R'}$$

$$= \frac{2.0,5165}{31} - \frac{2.0,6413}{77,5} \approx 59,62 \text{ cm}$$

Đối với hai bức xạ $\lambda_1$ và $\lambda_2$, tiêu cự của thấu kính ghép là:

$$f' = \frac{77,5}{5.0,5118 - 1,2592} \approx 59,625 \text{ cm}$$

(Ta nhận thấy rằng, tiêu điểm của hệ đối với $\lambda$ cũng như đối với các bức xạ khác trong khoảng $\lambda_1,\lambda_2$ chỉ còn cách hai tiêu điểm $F_C$, $F_F$ chừng 0,05 mm, tức là thấu kính ghép hầu như tiêu sắc đối với mọi bức xạ).

**Bài 5.** Gọi $R_1$, $R_2$, $R_1^{'}$, $R_2^{'}$ là bán kính cong của các mặt hai thấu kính, thì theo giả thiết, ta có:

$$R_1 = 3|R_2| \; ; \; R_1^{'} = -R_2 \qquad (1)$$

$$D = (n_D - 1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + (n_D^{'} - 1)\left(\frac{1}{R_1^{'}} + \frac{1}{R_2^{'}}\right) \qquad (2)$$

Thấu kính ghép có tiêu cự dương, vậy, thấu kính hội tụ phải bằng crao còn thấu kính phân kì bằng flin. Trong thực tế, thấu kính hội tụ ghép như vậy luôn có hai mặt lồi, do đó $R_1$ và $R_2$ đều dương, và công thức (2) trở thành:

$$4 = 0,528\left(\frac{1}{3R_2} + \frac{1}{R_2}\right) + 0,652\left(-\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_2^{'}}\right)$$

$$4 = \frac{0,528.4}{3R_2} + \frac{0,652\left(R_2 - R_2^{'}\right)}{R_2R_2^{'}} \qquad (3)$$

Thấu kính được khử sắc sai đối với hai bức xạ C và F. Theo bài 4.3, ta phải có $D_C = D_F$, với:

$$D_C = (n_C - 1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + (n_C^{'} - 1)\left(-\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2^{'}}\right)$$

$$D_C = 0,524\left(\frac{4}{3R_2}\right) + 0,642\left(-\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2^{'}}\right)$$

và $$D_F = 0,532\left(\frac{4}{3R_2}\right) + 0,662\left(-\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2^{'}}\right)$$

Do đó $$(0,532 - 0,524)\left(\frac{4}{3R_2}\right) = (0,642 - 0,662)\left(-\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2^{'}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{0,032}{3R_2} = -\frac{0,020\left(R_2 - R_2^{'}\right)}{R_2R_2^{'}} \qquad (4)$$

Từ (4) ta rút ra được: $$\frac{\left(R_2 - R_2^{'}\right)}{R_2R_2^{'}} = -\frac{8}{15R_2}$$

Thế vào (3) ta được: $$4 = \frac{0,528.4}{3R_2} + \frac{0,652.8}{15R_2} = \frac{10,56 - 5,216}{15R_2}$$

Suy ra $$R_2 = \frac{5,344}{60} = 0,089066 \text{ hay } R_2 \approx 0,09$$

Do đó $$R_1 = 3R_2 = 3.8,9 \approx 26,72 \text{ cm}$$

Và $$15\left(R_2 - R_2^{'}\right) = -8R_2^{'}$$

Suy ra $$R_2^{'} = \frac{15R_2}{7} = \frac{15}{7}\frac{26,72}{3} \approx 19,08 \text{ cm.}$$

**Bài 6.** *(Trích đề thi Olimpic Vật lý quốc tế năm 1983 tại Rumani).*

1) Để không có khúc xạ thì chiết suất của hai lăng kính đối với bức xạ $\lambda_0$ phải bằng nhau ($n_1 = n_2$):

Hay $a_1 + \frac{b_1}{\lambda_0^2} = a_2 + \frac{b_2}{\lambda_0^2}$

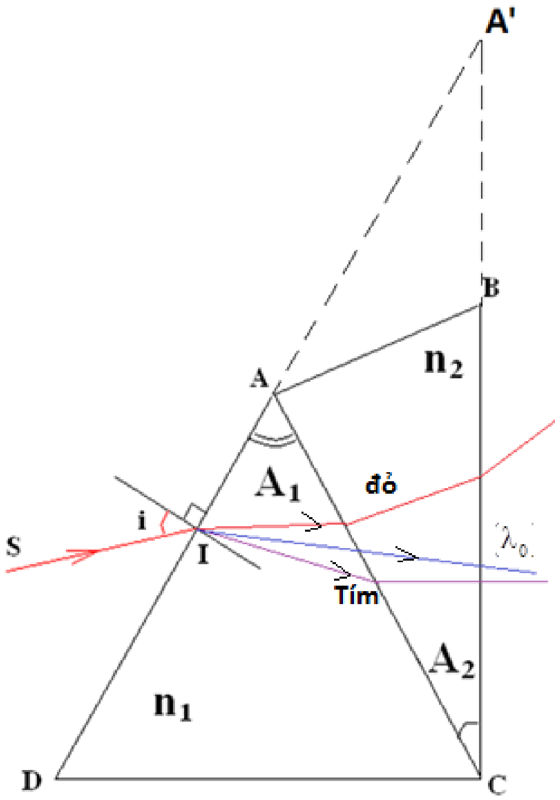
$\Rightarrow \lambda_0 = \sqrt{\frac{b_1 - b_2}{a_2 - a_1}}$ = 500 nm; $n_1 = n_2 = 1,5$

2) Ta tính $n_1$ và $n_2$ cho hai tia ($\lambda \approx 700\text{nm}$ và $\lambda \approx 400\text{nm}$)

Đối với tia đỏ $n_1 \approx 1,3; n_2 \approx 1,4$

Đối với tia tím $n_1 \approx 1,7; n_2 \approx 1,9$

Giả sử cả ba tia tới mặt AD dưới cùng một góc tới.




$n_1$ (đỏ) < $n_1(\lambda_0)$ < $n_2$ (tím) nên tia tím bị lệch về đáy nhiều nhất, tia đỏ bị lệch ít nhất (hình 4.11).

Ở mặt AC phân cách hai lăng kính, tia $\lambda_0$ đi thẳng, còn đối với hai tia đỏ và tím vì $n_2 > n_1$ nên góc khúc xạ bé hơn góc tới.

Ở mặt BC đối với cả 3 tia, góc khúc xạ đều lớn hơn góc tới.

3) Vì tia $\lambda_0$ đi thẳng ở mặt AC nên ta có thể kéo dài DA và CB tới giao điểm $A'$ và tìm góc lệch cực tiểu $\delta$ cho lăng kính có góc $A' = 30^o$ và chiết suất n = 1,5.

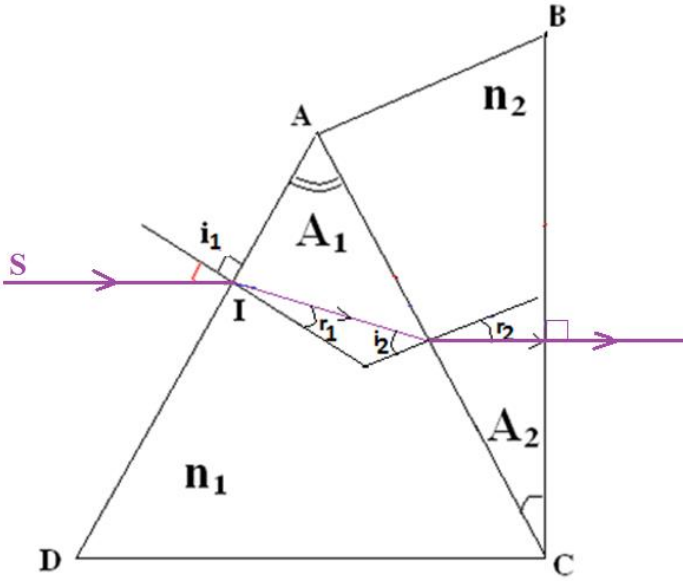
Ta có: $\sin\frac{A' + \delta}{2} = n\sin\frac{A'}{2}$ $\Rightarrow \delta = 2\arcsin\left(1,5.\sin 15^o\right) - 30^o$

$\Rightarrow \delta = 45^o40' - 30^o = 15^o40'$

**4)** Tia tới mặt AD có góc tới $i_1 = 30^o$. Tia ló vuông góc với mặt bên BC nên góc khúc xạ ở mặt AC là $r_2 = 30^o$. Tứ giác IAJK có hai góc vuông nên:

$r_1 + i_2 = A = 60^o$

Ta hãy tìm một hệ thức liên hệ giữa $n_1$ và $n_2$ trong trường hợp này. Ta có các phương trình của sự khúc xạ ở các mặt AD và AC (hình 4.12).




$\sin i_1 = n_1 \sin r_1$ (1)

$n_1 \sin i_2 = n_2 \sin r_2$

hoặc $n_1 \sin\left(60^o - r_1\right) = n_2 \sin 30^o$ (2)

Từ (1) ta suy ra $\sin r_1 = \dfrac{1}{2n_1}$ và

$\cos r_1 = \sqrt{1 - \dfrac{1}{4n_1^2}}$

Thay vào (2) ta được:

$$n_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-\frac{1}{4n_1^2}} - \frac{1}{4n_1}\right) = \frac{n_2}{2}$$

Nhân với 4 ta được:

$$\sqrt{3\left(4n_1^2 - 1\right)} = 2n_2 + 1$$

$$\Rightarrow 3\left(4n_1^2 - 1\right) = 4n_2^2 + 4n_2 + 1$$

$$\Rightarrow 3n_1^2 = n_2^2 + n_2 + 1$$

Thay $n_1 = a_1 + \dfrac{b_1}{\lambda_0^2}, n_2 = a_2 + \dfrac{b_2}{\lambda_0^2}$ ta được phương trình để tìm $\lambda$:

$$\lambda^4\left(3n_1^2 - n_2^2 - n_2 - 1\right) + \lambda^2\left(6a_1b_1 - 2a_2b_2 - b_2\right) + 3b_1^2 - b_2^2 = 0$$

Thay $a_1$, $b_1$, $a_2$, $b_2$ bằng các giá trị số, ta được:

$$-0,36\lambda^4 + 4,8.10^{-13}\lambda^2 + 2,75.10^{-26} = 0$$

Đặt $x = \lambda^2$, phương trình bậc 2 này có hai nghiệm trái dấu, ta chỉ lấy nghiệm dương:

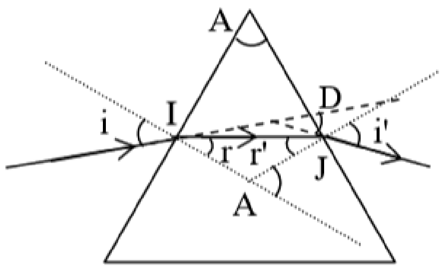
$$\lambda^2 = 1,4.10^{-12} \Rightarrow \lambda = 1.2.10^{-6}\text{m} = 1,2\mu\text{m}.$$

**Bài 7**.

Từ các công thức lăng kính:

$\sin i = n \sin r, \sin i' = n \sin r', A = r + r'; D = i + i' - A$

$i = 45^0; A = 60^0$




a. Với mặt phẳng tới cho tia vàng:

$$\sin r = \frac{\sin 45^0}{1,653} = 0,428 \Rightarrow r = 25,33^0$$

$$\Rightarrow r' = 60^0 - 25,33^0 = 34,67^0$$

$$\sin i' = n_v \sin r' = 1,653.\sin 34,67^0 = 0,940$$

$$\Rightarrow i' = 70,12^0 \Rightarrow D_v = i + i' - A = 45^0 + 70,12^0 - 60^0 = 55,12^0 \quad \Rightarrow D_v = 55,12^0$$

b. Từ phương trình sin i = nsin r, đạo hàm 2 vế theo n (với i = $60^0$ là hằng số)

$$0 = \sin r + n\cos r\frac{dr}{dn} \;;\; dr = -\frac{\sin r}{n\cos r}dn$$

Đạo hàm 2 vế phương trình sin i' = nsin r' theo n, ở đây cả i' và r' đều thay đổi theo n nên

$$\cos i'\frac{di'}{dn} = \sin r' + n\cos r'\frac{dr'}{dn}$$

Từ A = r + r' ta có $\sin A = \sin r'\cos r + \cos r'\sin r$ và dr' = - dr ; $dr' = -dr = \frac{\sin r}{n\cos r}dn$ nên:

$$di' = \left(\frac{\sin r'}{\cos i'} + \frac{\cos r'}{\cos i'}\frac{\sin r}{\cos r}\right)dn = \left(\frac{\sin r'\cos r + \cos r'\sin r}{\cos i'.\cos r}\right)dn = \frac{\sin A}{\cos i'\cos(A - r')}dn$$

$$\Rightarrow \Delta i' = \frac{\sin A}{\cos i'.\cos(A - r')}.\Delta n \;(1)$$

Vì n biến đổi quanh giá trị $n_v$ lượng dn nên góc i' biến đổi lượng di' quanh giá trị i'. Tính từ giá trị

$$i' = i'_v \Rightarrow \cos i' = \cos 34{,}67^0 = 0{,}340 \quad (2)$$

thay $\cos r = \cos 25{,}33^0 \approx 0{,}904$ (3)

Thay số (2), (3) vào (1) :

$$di' = \frac{0{,}866}{0{,}340.0{,}904}dn = 2{,}82dn \;\Rightarrow \Delta n = 0{,}355.\Delta i'$$

**Bài 8.** * Xét sự lệch của tia sáng ứng với bước sóng $\lambda = 0,43\mu m$

$$\sin i = n\sin r \Rightarrow \sin 60^0 = 1,528.\sin r \Rightarrow r \approx 34^0 31'$$

$$r' = A - r = 60^0 - 34^0 31' = 25^0 29'$$

$$\sin i' = n\sin r' \Rightarrow \sin i' = 1,528.\sin 34^0 31' \Rightarrow r' = 41^0 5'$$

$$D = i + i' - A = 60^0 + 41^0 5' - 60^0 = 41^0 5'$$

* Xét sự lệch của tia sáng ứng với bước sóng $\lambda = 0,77\mu m$

$$\sin i = n\sin r \Rightarrow \sin 60^0 = 1,511.\sin r \Rightarrow r \approx 34^0 58'$$

$$r' = A - r = 60^0 - 34^0 58' = 25^0 2'$$

$$\sin i' = n\sin r' \Rightarrow \sin i' = 1,511.\sin 25^0 1' \Rightarrow r' = 39^0 44'$$

$$D = i + i' - A = 60^0 + 39^0 44' - 60^0 = 39^0 44'$$

Độ tán sắc giữa hai bước sóng là: $\Delta D = 41^0 5 - 39^0 44' = 1^0 21'$

**Bài 9.** a) $\sin i = n_v \sin r \Rightarrow \sin r = \dfrac{\sin 45^0}{1,653} \Rightarrow r \approx 25^0 19'$

$r' = A - r = 60^0 - 25^0 19' = 34^0 41'$

$\sin i' = n_v \sin r' = 1,653.\sin 34^0 41' \Rightarrow i' \approx 70^0 7'$

Góc lệch của tia vàng qua lăng kính là:

$$D_V = i + i' - A = 45^0 + 70^0 7' - 60^0 = 55^0 7'$$

b) Từ công thức: $r + r' = A$ ta đạo hàm cả hai vế theo n ta được:

$$\frac{dr}{dn} + \frac{dr'}{dn} = 0 \Rightarrow dr = -dr' \qquad (1)$$

Từ công thức: $\sin i = n \sin r$ với $i = 45^0$ không đổi ta đạo hàm hai vế theo n:

$$0 = \sin r + n.\frac{dr}{dn}\cos r$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{dn} = -\frac{\sin r}{n\cos r} \qquad (2)$$

Từ công thức $\sin i' = n \sin r'$ ta đạo hàm hai vế theo n:

$$\frac{di'}{dn}\cos i' = \sin r' + n.\frac{dr'}{dn}.\cos r' \qquad (3)$$

Thay (1), (2) vào (3) ta được:

$$\frac{di'}{dn}\cos i' = \sin r' + n.\left(\frac{\sin r}{n\cos r}\right).\cos r'$$

$$di' = \frac{\sin r'\cos r + \sin r\cos r'}{\cos i'.\cos r}dn$$

$$di' = \frac{\sin A}{\cos i'.\cos r}dn \qquad (4)$$

Lại có: $\cos r = \sqrt{1 - \sin^2 r} = \sqrt{1 - \dfrac{\sin^2 i}{n^2}} = \sqrt{1 - \dfrac{1}{2n^2}}$ .

Kết hợp với (4) ta được:

$$di' = \frac{\sin A}{\cos i'.\sqrt{1 - \dfrac{1}{2n^2}}}dn$$

Xét sự thay đổi nhỏ của góc ló $di' = 2^0$ từ giá trị góc ló của tia vàng với $n = n_v = 1,653$ và $i' = i'_v = 70^0 7'$

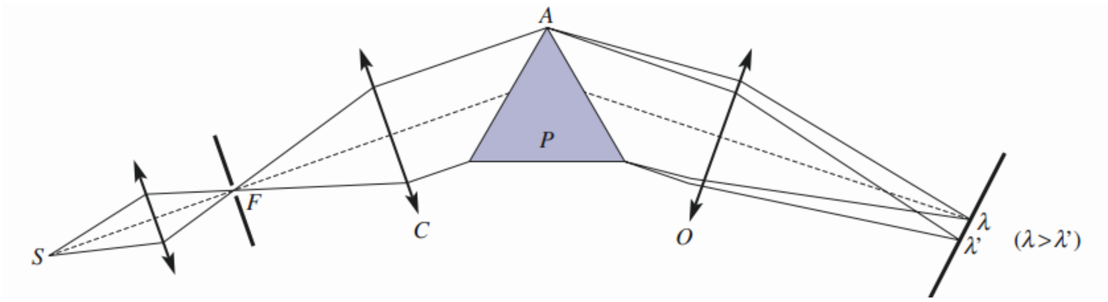
$$2.\frac{\pi}{180} = \frac{\sin 45^0}{\cos 70^0 7'.\sqrt{1 - \frac{1}{2.1,653^2}}} dn$$

$$\Rightarrow dn \approx 0,015$$

**Bài 10.**

a) $\left(\frac{dn}{d\lambda}\right)_{\lambda=\lambda_0} = -\frac{2b}{\lambda_0^3} = -\frac{2.1,5.10^{-2}}{0,6^3} \approx 3.10^{-4} \quad nm^{-1}$

Vậy $n$ thay đổi một lượng là $3.10^{-4}$ khi $\lambda$ thay đổi 1 nm




b1) Khi xảy ra góc lệch cực tiểu:

$$\sin(\frac{D_{min} + A}{2}) = n \sin\frac{A}{2}$$

Với $\lambda_1 = 577(nm) \Rightarrow n = 1,6971 \Rightarrow \sin(\frac{D_{min} + 60^0}{2}) = 1,6971.\sin 30^0 \Rightarrow D_{min} = 56^0 6'$

Với $\lambda_2 = 579(nm) \Rightarrow n = 1,6967 \Rightarrow \sin(\frac{D_{min} + 60^0}{2}) = 1,6967.\sin 30^0 \Rightarrow D_{min} = 56^0 4'$

b2) Theo bài trên ta có: $\frac{dD}{dn} = \frac{\sin A}{\cos r \cos i'}$ kết hợp với $\frac{dn}{d\lambda} = -\frac{2b}{\lambda_0}$ ta được:

$$dD = -4b \frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\left(\frac{D_{min} + A}{2}\right)}.\frac{d\lambda}{\lambda^3}$$

$$\Rightarrow \frac{dD}{d\lambda} = \frac{dD}{dn}.\frac{dn}{d\lambda} = \frac{\sin A}{\cos r \cos i'}\left(-\frac{2b}{\lambda^3}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{dD}{d\lambda} = \frac{\sin A}{\cos\frac{A}{2}\cos\left(\frac{D_{min} + A}{2}\right)}\left(-\frac{2b}{\lambda^3}\right)$$

$$dD = -\frac{4b}{\lambda^3}\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\left(\frac{D_{\min}+A}{2}\right)}d\lambda$$

Trên tiêu diện ảnh của vật kính, hai vạch tách nhau một đoạn:

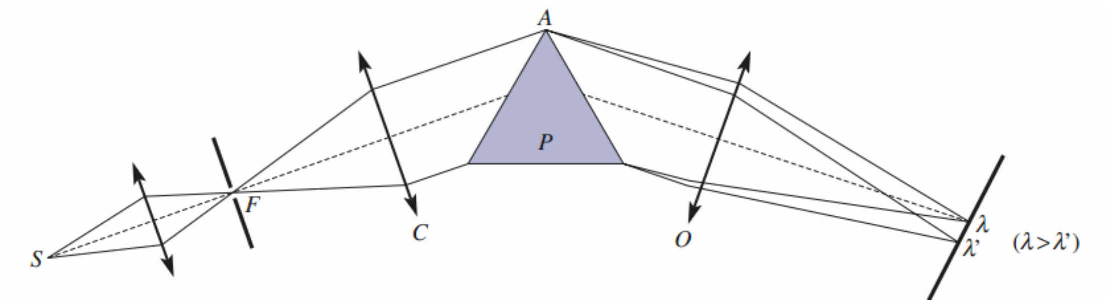
b3) $\Delta x = |dD|.f' = 4bf'\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\left(\frac{D_{\min}+A}{2}\right)}.\frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_1^3}$

$$\Delta x = 4.(1,5.10^{-2}).1.\frac{\sin 30^0}{\cos\left(\frac{56^0 6'+60^0}{2}\right)}.\frac{0,579-0,577}{0,577^3} \approx 0,590(mm)$$

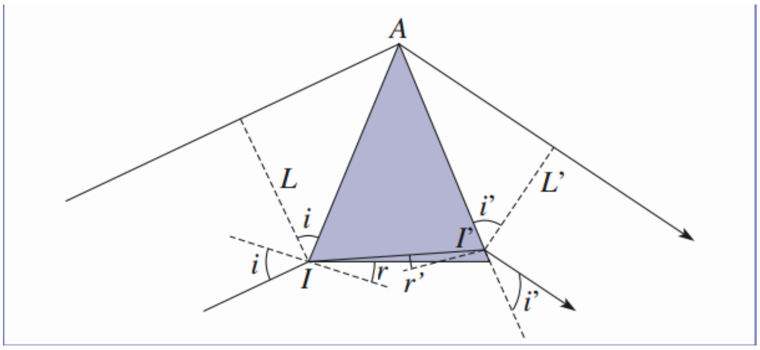
b4) Do $f' = 5f \Rightarrow$ trên phim hai ảnh đơn sắc ứng với bước sóng $\lambda_1, \lambda_2$ có bề rộng gấp 5 lần khe hẹp S ở ống chuẩn trực. Để tách biệt vạch kép thì độ rộng này phải nhỏ hơn khoảng cách hai vạch kép$=0,59(mm)$. Do đó bề rộng tối đa của khe hẹp S là $\frac{0,59}{5} = 0,118(mm)$.

Giá trị này rất nhỏ, để cải thiện sự tách vạch ta có thể kết hợp nhiều lăng kính để tăng góc lệch của các tia đơn sắc.

**Bài 11.**a. $A, n \quad i, r, r', i'$ thay đổi.




Lấy vi phân hai vế các hệ thức ở trên ta được:




$\sin i = n\sin r \Rightarrow \cos i.di = n\cos r.dr$

$\sin i' = n\sin r' \Rightarrow \cos i'.di' = n\cos r'.dr'$

$A = r + r' \Rightarrow dr + dr' = 0$

$\Rightarrow \frac{\cos i.di}{\cos r} = -\frac{\cos i'.di'}{\cos r'}$

$\Rightarrow di' = -\frac{\cos r'\cos i}{\cos r\cos i'}di$

Hay $|\delta i'| = \frac{\cos r' \cos i}{\cos r \cos i'} |\delta i|$ (1)

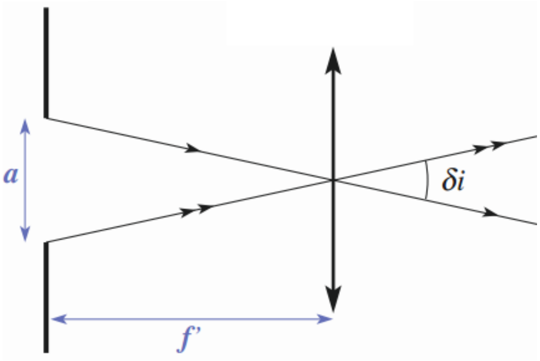
b) Bề rộng chùm tia tới: $L = AI.\cos i$

Bề rộng chùm tia ló : $L' = AI'.\cos i'$

Áp dụng định lý hàm số sin cho tam giác $AII'$

$$\frac{AI}{\cos r'} = \frac{AI'}{\cos r}$$

$$\frac{L}{\cos r'.\cos i} = \frac{L'}{\cos r.\cos i'} \quad (2)$$




c) Kết hợp (1) và (2) ta được: $|\delta i'| = \frac{L}{L'} |\delta i|$

Mặt khác: $|\delta i| = \frac{a}{f_1'}$; $|\delta i'| = \frac{a'}{f'}$

$\Rightarrow \frac{La}{f_1'} = \frac{L'a'}{f'}$

# IX.2. GIAO THOA KHÔNG ĐỊNH XỨ

**Bài 1.**

a. Tính độ dịch chuyển của S:

* Khoảng vân giao thoa $i = \frac{\lambda D}{a} = 2(mm)$

Ban đầu ta thấy vân tối gần tọa độ +1,2 mm nhất là vân tối thứ 1 tại tọa độ +1 mm
Vậy để tại tọa độ +1,2mm là một vân tối thì ta cần dịch chuyển 1 đoạn ngắn nhất sao cho vân tối thứ 1, và đồng thời là vân trung tâm dịch chuyển theo chiều dương 1 đoạn ngắn nhất là $x = 0,2mm$ theo chiều dương.

* Khi S di chuyển đoạn y, tại một điểm M trên màn là vị trí vân sáng, hiệu đường đi của hai sóng từ S tới M là $\Delta d = d_2' - d_1' + d_2 - d_1 = k\lambda$ trong đó $d_2 - d_1 = ax/D$, và $d_2' - d_1' = ay/d$ (d là khoảng cách từ S đến $S_1S_2$.

* Vân bậc 0 có k=0 $\Rightarrow y = -\frac{d}{D}x_0$ tức là vân trung tâm (cùng với cả hệ vân) dịch chuyển ngược lại một đoạn có độ dài $|y| = \frac{d}{D}x_0$. Vậy khe S phải dịch chuyển ngược lại tức là theo chiều âm 1 đoạn ngắn nhất là $|y| = \frac{d}{D}x = \frac{0,8}{2}0,2 = 0,08\ (mm)$

b. Tính tọa độ các vị trí vân tối của hai hệ trùng nhau:

* Vị trí các vân tối của 2 hệ trùng nhau $x_{\text{tối trùng}} = (2k_1+1)i_1/2 = (2k_2+1)i_2/2$

* Khai triển $\frac{2k_1+1}{2k_2+1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{7}{5} = \frac{7}{5}.\frac{2k+1}{2k+1} \Rightarrow 2k_1 + 1 = 7(2k+1)$

Thay vào trên ta được $x_{\text{tối trùng}} = (2k+1)5,6$ (mm) với $k \in Z$

**Bài 2.**

**a.* Bước sóng:**

- Ta có: $i=\dfrac{\lambda D}{a}\Rightarrow \lambda=\dfrac{i.a}{D}$

$\Rightarrow \lambda_1=\dfrac{8}{15}(\mu m)$

$\Rightarrow \lambda_2=0,4(\mu m)$

*** Vị trí của vân gần trung tâm nhất có cùng màu với vân trung tâm**

- Vị trí của vân có cùng màu với vân trung tâm là vị trí hai vân sáng của hai bức xạ trùng nhau $x_1 = x_2 \Leftrightarrow k_1\lambda_1 = k_2\lambda_2$

hay $4k_1 = 3k_2$

- Vị trí của vân trùng gần vân trung tâm nhất ứng với giá trị nguyên nhỏ nhất của $k_1, k_2$ thỏa mãn phương trình trên là $k_1= 3$, $k_2= 4$. khi đó khoảng cách tới trung tâm là $x=3i_1=4i_2=2{,}4mm$.

b. ***Tổng số vân sáng .**

- Trong khoảng hai vân trùng liên tiếp có 2 vân sáng của $\lambda_1$ và 3 vân sáng của $\lambda_2$

- Trong khỏang hai vân cùng màu với vân trung tâm, đối xứng với nhau qua vân trung tâm và gần vân trung tâm nhất có 5 vân sáng của $\lambda_1$ và 7 vân sáng của $\lambda_2$ trong đó có vị trí trung tâm trùng nhau nên có tổng 5+ 7-1=11vân sáng.

**c. Tìm vị trí vân sang trùng với vân tối:**

Điều kiện: $\left(k_1+\dfrac{1}{2}\right)i_1 = k_2i_2 \Leftrightarrow \dfrac{2k_1+1}{2k_2}=\dfrac{3}{4}$

Biểu diễn: $2k_1+1= 3(2n+1)$; $2k_2 = 4(2n+1)$ với n nguyên.

Trong miền giao thoa : $-\dfrac{9,6}{2}mm \le k_2i_2 \le \dfrac{9,6}{2}mm \Leftrightarrow -2,5 \le n \le 1,5$. Vậy có 4 vị trí thỏa mãn vân tối $i_1$ trùng vân sáng $i_2$ tương ứng n bằng: -2; -1; 0; 1.

Các vị trí đó cách vân trung tâm khoảng x cho bởi bảng sau:

| n | -2 | -1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|---|
| $k_1$ | -5 | -2 | 1 | 4 |
| $k_2$ | -6 | -2 | 2 | 6 |
| x (mm) | -3,6 | -1,2 | 1,2 | 3,6 |

**Bài 3.**

- Vị trí các vân sáng cùng màu với vân trung tâm ứng với các bức xạ $\lambda_1$ và $\lambda_2$ thỏa mãn:

$x_1=x_2 \Leftrightarrow k_1.\lambda_1 = k_2.\lambda_2 \Leftrightarrow \lambda_1k_1 = 0{,}46k_2$ (1)

- Vì trong khoảng giữa hai vân gần nhất cùng màu với vân trung tâm có 11 vân sáng nên $k_1+k_2=13$ (2). ( Xét khoảng giữa vân trung tâm và vân cùng màu gần nó nhất)

- Mặt khác số vân sáng của $\lambda_1$ và $\lambda_2$ lệch nhau 3 vân nên ta có: $|k_1 - k_2| = 3$ (3)

Giải hệ (2) và (3) $\Rightarrow$ có hai cặp nghiệm:

Cặp 1: $k_1 = 8$, $k_2 = 5$ thay vào (1)$\Rightarrow \lambda_1 = 0,2875$ μm

Cặp 2: $k_1 = 5$, $k_2 = 8$ thay vào (1)$\Rightarrow \lambda_1 = 0,736$ μm

- Nhận xét :

$\lambda_1 = 0,2875$ μm $< \lambda_{tim}$ Bức xạ này không nhìn thấy$\Rightarrow$loại

$\lambda_1 = 0,736$ μm thuộc vùng ánh sáng nhìn thấy$\Rightarrow$thỏa mãn.

**Bài 4 .**

a. Tính tốc độ truyền sóng:

• Tại M sóng có biên độ cực nên: $d_1 - d_2 = k\lambda \Rightarrow \lambda = \dfrac{d_1 - d_2}{k}$

- Giữa M và trung trực của AB có hai dãy cực đại khác $\Rightarrow k = 3$

• Từ đó $\Rightarrow \lambda = 1,5cm$, vận tốc truyền sóng: $v = \lambda f = 30$ cm/s

b. Tìm vị trí điểm N

• Giả sử $u_1 = u_2 = a\cos\omega t$, phương trình sóng tại N: $u_N = 2a\cos\left(\omega t - \dfrac{2\pi d}{\lambda}\right)$

Độ lệch pha giữa phương trình sóng tại N và tại nguồn: $\Delta\varphi = \dfrac{2\pi d}{\lambda}$

Để dao động tại N ngược pha với dao động tại nguồn thì

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi d}{\lambda} = (2k+1)\pi \Rightarrow d = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$$

• Do $d \geq a/2 \Rightarrow (2k+1)\dfrac{\lambda}{2} \geq a/2 \Rightarrow k \geq 2,16$. Để $d_{min}$ thì k=3.

$$\Rightarrow d_{min} = \sqrt{x_{min}^{\ 2} + \left(\frac{a}{2}\right)^2} \Rightarrow x_{min} \approx 3,4cm$$

c. Xác định $L_{max}$

• Để tại C có cực đại giao thoa thì:

$$\sqrt{L^2 + a^2} - L = k\lambda;\quad k = 1, 2, 3\ldots \text{ và } a = S_1S_2$$

Khi L càng lớn đường $CS_1$ cắt các cực đại giao thoa có bậc càng nhỏ (k càng bé), vậy ứng với giá trị lớn nhất của L để tại C có cực đại là k =1

• Thay các giá trị đã cho vào biểu thức trên ta nhận được:

$$\sqrt{L^2_{max} + 64} - L_{max} = 1,5 \Rightarrow L_{max} \approx 20,6cm$$

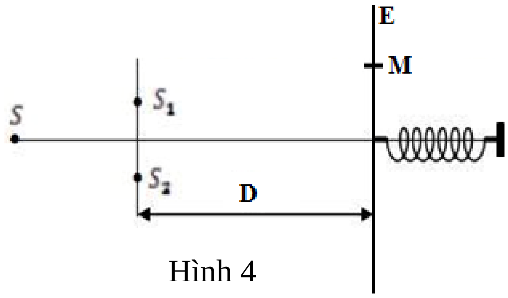
**Bài 5.**

+ Số vân sáng của bức xạ $\lambda_1$ trong vùng AB: $N_1 = \dfrac{AB}{i_1} + 1$

+ Số vân sáng của bức xạ $\lambda_2$ trong vùng AB: $N_2 = \dfrac{AB}{i_2} + 1$

+ Số vân trùng của 2 hệ vân: $N = N_1 + N_2$ - Số vạch sáng quan sát được

Hay 19 $= \frac{34,56.10^{-3}}{0,48.10^{-3}} + \frac{34,56.10^{-3}}{i_2} - 107 \Rightarrow i_2 = 0,64.10^{-3}m = 0,64mm$



Hình 4

**Bài 6.** Giả sử khi điểm M thuộc vân sáng bậc 6 thì màn có ly độ x ( góc tọa độ chọn ở VTCB, chiều dương là chiều kéo màn), khi đó khoảng cách từ màn đến 2 khe: D' = D + x = 2000 + x (mm),

Ta có $x_M = 6\frac{\lambda D'}{a} = 6\frac{\lambda(2000+x)}{a} \Rightarrow x = \frac{a.x_M}{6\lambda} - 2000 =$ 100mm=10cm

Vì thả nhẹ nên biên độ dao động A= 20cm.

Vậy thời gian kể từ khi thả vật đến khi đi qua x = 10cm = A/2 lần thứ 2016 là $\Delta t = 1007T + \frac{5T}{6} = 4527,75s$

**Bài 7.** Màu sắc của vân trung tâm được tạo thành do sự chồng chập của ba ánh sáng đơn sắc $\lambda_1;\lambda_2;\lambda_3$.

Vậy toạ độ những vân sáng cùng màu vân trung tâm thoả mãn

$$x = k_1i_1 = k_2i_2 = k_3i_3 \quad \text{với } i_1 = \frac{\lambda_1 D}{a} = \frac{0,4.10^{-6}.2}{0,5.10^{-3}} = 1,6.10^{-3}m = 1,6mm$$

$$\Rightarrow k_1\lambda_1 = k_2\lambda_2 = k_3\lambda_3$$

$$\Rightarrow 4k_1 = 5k_2 = 6k_3$$

hay $\Rightarrow 2^2k_1 = 5k_2 = 2.3k_3$

Bội số chung nhỏ nhất của các số này là $2^2.3.5.k_1k_2k_3 = 60n$ với n là số nguyên

Vậy ta có bảng sau đây

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | ........ |
|---|---|---|---|---|---|
| $k_1$ | 15 | 30 | 45 | 60 | .......... |
| $k_2$ | 12 | 24 | 36 | 48 | ........ |
| $k_3$ | 10 | 20 | 30 | 40 | ......... |
| x (mm) | 24 | 48 | 72 | 96 | ......... |

Giá trị cực đại của x là $x_{max} = l/2 = 10cm = 100mm$

Vậy ta thấy giá trị khả dĩ lớn nhất của n bằng 4

Vậy tổng số vân cùng màu vân trung tâm là N = 1 + 2.4 = 9 vân.

**Bài 8.**

Khi giao thoa với 2 ánh sáng đơn sắc $\lambda_1;\lambda_2$, tại vị vân trùng của hệ thì $k_1.i_1 = 7.i_2 \Rightarrow k\lambda_1 = 7\lambda_2$

$\Rightarrow 0,67\ \mu m < \lambda_2 = \frac{k.\lambda_1}{7} < 0,74\ \mu m\ (k_1 \in Z) \Rightarrow k_1 = 9 \Rightarrow \lambda_2 = 0,72\ \mu m$

Khi giao thoa với đồng thời 3 ánh sáng đơn sắc $\lambda_1;\lambda_2;\lambda_3$

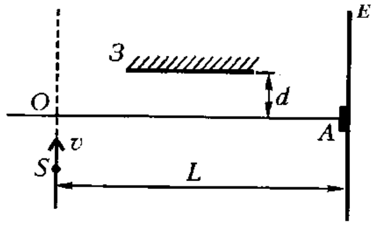
- Tại vị trí vân trùng của cả 3 bức xạ thì $k_1i_1 = k_2i_2 = k_3i_3 \Rightarrow 56k_1 = 72k_2 = 42k_3$

$\Rightarrow k_1 = 9; k_2 = 7; k_3 = 12 \Rightarrow i_{123} = 9i_1 = 7i_2 = 12i_3$

- Tại vị trí trùng nhau của 2 trong 3 bức xạ thì $i_{12} = 9i_1 = 7i_2; i_{23} = 7i_2 = 12i_3; i_{13} = 3i_1 = 4i_2$

- Tổng số bức xạ đơn sắc quan sát được trong khoảng giữa hai vân liên tiếp cùng màu vân trung tâm là

$$\left(\frac{i_{123}}{i_1}-1\right)+\left(\frac{i_{123}}{i_2}-1\right)+\left(\frac{i_{123}}{i_3}-1\right)-\left(\frac{i_{123}}{i_{12}}-1\right)-\left(\frac{i_{123}}{i_{23}}-1\right)-\left(\frac{i_{123}}{i_{13}}-1\right)=23$$




**Bài 10.** Khảo sát tại một thời điểm tùy ý, khi nguồn sáng cách trục OA một khoảng x không lớn lắm. Tại thời điểm đó màn được chiếu sáng bởi hai sóng cầu: một sóng tới trực tiếp từ S và sóng kia tới sau khi phản xạ từ gương. Sóng thứ hai có thể coi như một sóng cầu phát ra từ nguồn điểm ảo $S'$ - là ảnh của $S$ qua gương phẳng-, cách gương một khoảng $d+x$.

-Quang lộ SA bằng:

$$SA=\sqrt{L^2+x^2}\approx L+\frac{x^2}{2L}$$

-Quang lộ $S'A$ bằng:

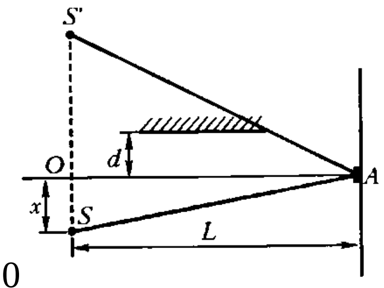
$$S'A=\sqrt{L^2+(2d+x)^2}\approx L+\frac{(2d+x)^2}{2L}.$$

Hiệu quang lộ của hai sóng bằng:

$$\Delta=S'A-SA=\frac{2d^2}{L}+\frac{2dx}{L}.$$

Giả sử tại thời điểm đang xét , tại A có cực đại giao thoa. Điều đó có nghĩa là hiệu quang lộ $\Delta$ bằng một số nguyên lần bước sóng:

$\Delta=\dfrac{2d^2}{L}+\dfrac{2dx}{L}=m\lambda$, trong đó $m=0,1,2,...$




Hình 10

Bây giờ chúng ta tìm khoảng thời gian $\Delta t$ để hiệu quang lộ $\Delta$ giảm một bước sóng và tại A ta lại quan sát được một cực đại giao thoa. Sau thời gian đó x thay đổi một lượng $\Delta x=v\Delta t$, còn m thay đổi một đơn vị, bởi vậy ta có đẳng thức sau:

**Nghĩa là** $d\Delta=d(m\lambda)\Rightarrow\Delta(\dfrac{2d^2}{L}+\dfrac{2dx}{L})=\lambda\Rightarrow\dfrac{2d}{L}\Delta x=\lambda$

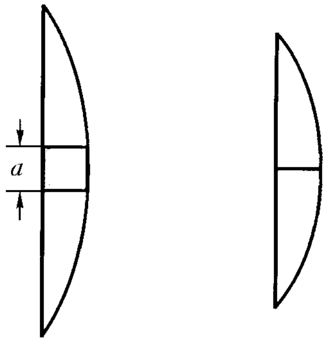
**Chia hai vế cho dt ta được** $\dfrac{2d}{L}\dfrac{\Delta x}{\Delta t}=\dfrac{\lambda}{\Delta t}\Rightarrow\dfrac{2d}{L}v=\dfrac{\lambda}{\Delta t}$

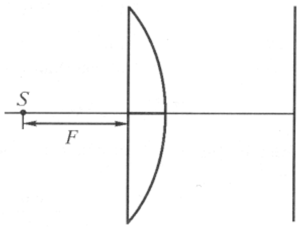
**Hay** $\dfrac{2dv}{L}\Delta t=\lambda$

Nhưng thời gian $\Delta t$ bằng chu kỳ dao động T của cường độ sáng tại A, nên tần số dao động của dòng quang điện trong máy thu sẽ bằng:

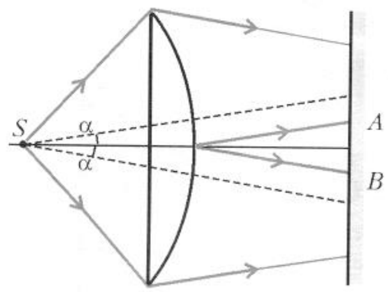
$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{\Delta t} = \frac{2dv}{\lambda L} = 40.000 Hz$.

**Bài 11.** Sóng cầu từ nguồn điểm S sau khi đi qua hai nửa thấu kính biến thành hai sóng phẳng kết hợp, mỗi sóng được truyền dưới góc $\alpha = \frac{a/2}{f}$ đối với phương ngang (H.7). Khi đó mặt của sóng ló ra ở nửa thấu kính trên quay theo chiều kim đồng hồ, còn ở nửa thấu kính dưới ngược chiều kim đồng hồ. Quang tâm của mỗi nửa thấu kính dịch đối với trục đối xứng ngang một khoảng bằng $a/2$ ( các đường đứt nét trên hình 7 đi qua quang tâm hai nửa thấu kính).

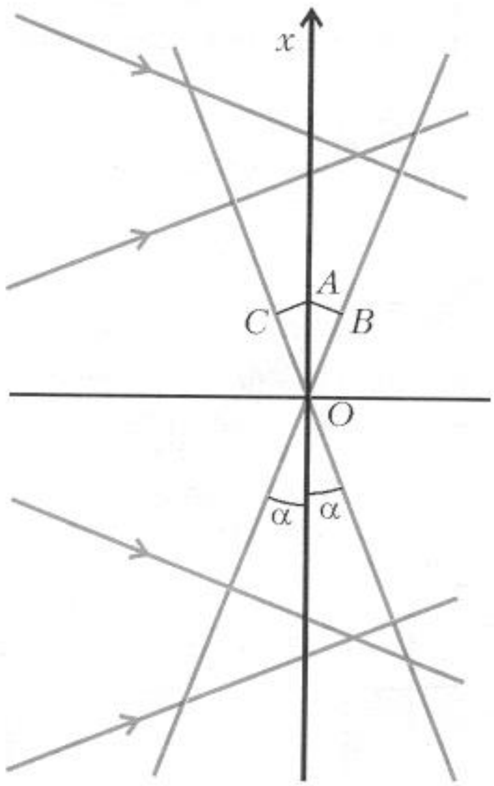



Hình 6




Hình 7




Hình 8

Như vậy, ta có hai sóng phẳng, đơn sắc, kết hợp đập vào màn. Trong vùng hai sóng này chồng chập lên nhau ta sẽ quan sát thấy bức tranh giao thoa. Trên hình 8 ta phóng to khu vực gần màn, trong đó có vẽ thêm hai mặt sóng tương ứng. Giao điểm O của hai mặt sóng này đặt ở tâm của màn và dựng trục x như hình vẽ. Ta hãy khảo sát điểm A trên màn có toạ độ x. Đặt pha ban đầu của hai sóng tại tâm O trên màn bằng 0. Khi đó pha của sóng tới A từ phía trên bằng:

$$\psi_{A1} = \frac{2\pi \cdot AB}{\lambda} = \frac{2\pi x \sin\alpha}{\lambda},$$

còn pha của sóng tới A từ phía dưới bằng:

$$\psi_{A2} = -\frac{2\pi .CA}{\lambda} = -\frac{2\pi\, x \sin\alpha}{\lambda}$$

Độ lệch pha giữa hai sóng tại A bằng:

$$\Delta\psi = \psi_{A1} - \psi_{A2} = \frac{4\pi\, x \sin\alpha}{\lambda}$$

Điều kiện để A là một cực đại giao thoa (vân sáng) được viết dưới dạng:

$$\frac{4\pi\, x \sin\alpha}{\lambda} = 2\pi m, \text{ trong đó } m = 0,1,2...$$

Suy ra khoảng vân bằng:

$$i = x(m+1) - x(m) = \frac{\lambda}{2\sin\alpha} \approx \frac{\lambda}{2\alpha} \approx \frac{\lambda F}{a} = 5\cdot 10^{-4} m = 0{,}5mm.$$

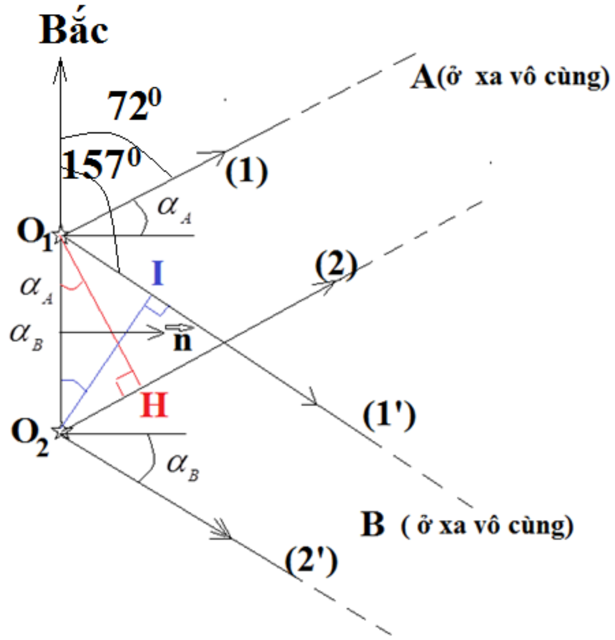
**Bài 12.** Bài này đi viết phương trình giao thoa của hai sóng tới ( từ $O_1$, $O_2$ tới A và B) bình thường.

-Lưu ý A, B ở rất xa so với $O_1$, $O_2$ nên coi hai sóng xuất phát từ hai nguồn $O_1$, $O_2$ từ đến một điểm A hoặc B là song song nhau. Nên hiệu đuờng đi hai sóng tới là $a\sin\alpha_A$ hoặc $a\sin\alpha_B$ .

a. Giả sử tính hiệu điện truyền cho hai thanh $O_1$, $O_2$ lần lượt là

$E_1 = E_0\cos(\omega t)$; $E_2 = E_0\cos(\omega t + \varphi)$

Gọi $\alpha$ là góc giữ pháp tuyến của hai mặt phẳng hai thanh và phương tới A hoặc B (hình vẽ).
A nhận được tính hiệu cực đại, chứng tỏ hai sóng từ hai angten truyền đến A cùng pha




Nghĩa là $\frac{2\pi}{\lambda}.O_2H + \varphi = 2\pi n$

$$\frac{2\pi}{\lambda}a\sin\alpha_A + \varphi = 2\pi n \qquad (1)$$

Tương tự điều kiện cực tiểu của tín hiệu đến B(phương $\alpha_B$)

$$\frac{2\pi}{\lambda}a\sin\alpha_B - \varphi = (2n'+1)\pi \qquad (2)$$

Mặt khác các góc theo giả thiết cho $\frac{\pi}{2} + \alpha_A = 72^0; \frac{\pi}{2} + \alpha_B = 157^0$

Nên ta đặt $\beta = \alpha_B - \alpha_A = 157^0 - 72^0 = 85^0$ $\alpha_B - \alpha_A = 157^0 - 72^0 = 85^0 = \beta$ (3)

Khi đó $\alpha_B = \beta + \alpha_A$ (4)

Bài toán rút về việc tìm các thông số $a, \alpha_A, \alpha_B, n, n', \varphi$

Lấy (2) cộng (1) ta loại được $\varphi$

$$\frac{2\pi}{\lambda}a\sin\alpha_A - \frac{2\pi}{\lambda}a\sin\alpha_B = 2\pi n - (2n'+1)\pi$$

Hay $a(\sin\alpha_A + \sin\alpha_B) = \lambda(n + n' + \frac{1}{2})$

$$2a\sin\frac{\alpha_A + \alpha_B}{2}\cos\frac{\alpha_A - \alpha_B}{2} = \lambda(n + n' + \frac{1}{2}) \qquad (5)$$

Thay (3) và (4) vào (5) ta được

$$a = \frac{\lambda(n+n'+\frac{1}{2})}{2\sin\frac{\alpha_A + \alpha_A + \beta}{2}\cos\frac{-\beta}{2}} = \frac{\lambda(n+n'+\frac{1}{2})}{2\sin(\alpha_A + \frac{\beta}{2})\cos\frac{\beta}{2}} \qquad (6)$$

Từ (6) để a đạt cực tiểu thì:
+ Tử số phải đạt cực tiểu, tức là $n + n' = 0$
+mẫu số phải đạt cực đại $\sin(\alpha_A + \frac{\beta}{2}) = 1$( ở đây $\beta = 85^0$ không đổi), nên

$$\alpha_A + \frac{\beta}{2} = 90^0 \rightarrow \alpha_A = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2} = 90^0 - 42{,}5^0 = 47{,}5^0$$

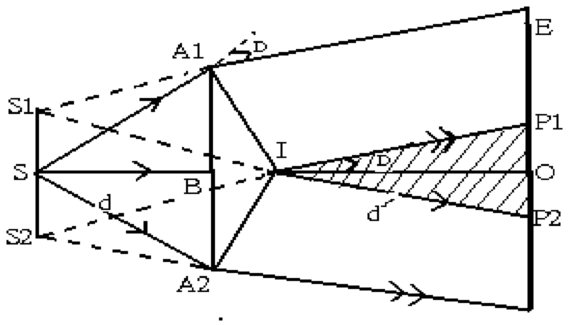
Do đó thay vào (4) ta được $\alpha_B = \beta + \alpha_A = (\beta + \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}) = \frac{\pi}{2} + \frac{\beta}{2} = 85^0 + 47,5^0 = 132,5^0$, nên

$$a = \frac{\lambda(0+\frac{1}{2})}{2.1.\cos\frac{\beta}{2}} = \frac{\lambda}{4\cos\frac{\beta}{2}}$$

b. $\lambda = \frac{c}{f} = 11,1m \rightarrow a = \frac{11,1}{\cos 42,5^0} = 3,76m$

Lưu ý: Ta thấy $\alpha_A = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}$ và $\alpha_B = \frac{\pi}{2} + \frac{\beta}{2}$ điều này chứng tỏ hướng truyền hai tia sán đến A và B đối xứng nhau qua pháp tuyến mặt khung chưa 2 thanh ăng ten.

**Bài 13.** Lăng kính có góc chiết quang nhỏ nên góc lệch : D = A(n – 1), đáy rất mỏng nên B và I rất gần nhau.




- $S_1$,$S_2$ là 2 nguồn kết hợp (ảo), từ hình vẽ $S_1S_2$ = a, ta có :

a = $S_1S_2$ = 2d tanD ≈2d(n – 1)A

(góc nhỏ: tanD ≈ D( rad) )

Thay số $\rightarrow$ d =

$$\frac{a}{2(n-1)A} = \frac{1,8.10^{-3}}{2(1,5-1).15.3.10^{-4}} = 0,4\,\text{m} = 40 \text{ cm}$$

**b.** Khoảng cách từ hai nguồn đến màn D ≈ d + d$^/$ $\rightarrow i = \frac{\lambda D}{a} = \frac{\lambda(d+d')}{a}$

- Bề rộng miền giao thoa là L, từ hình vẽ có :

$$\frac{L}{a} = \frac{d'}{d} \Rightarrow L = a\frac{d'}{d}$$

và theo đầu bài L = 10i

$$\Rightarrow d' = \frac{d}{\frac{a^2}{10\lambda d} - 1} = \frac{0,4}{\frac{(1,8.10^{-3})^2}{10.0,5.10^{-6}.0,4} - 1} \approx 0,645\,\text{m} = 64,5 \text{ cm.}$$

- L = $a\frac{d'}{d} = 1,8.10^{-3}.\frac{0,645}{0,4} \approx 2,9.10^{-3}$ m = 2,9 mm, mà L = 10i $\Rightarrow i = 0,29mm$

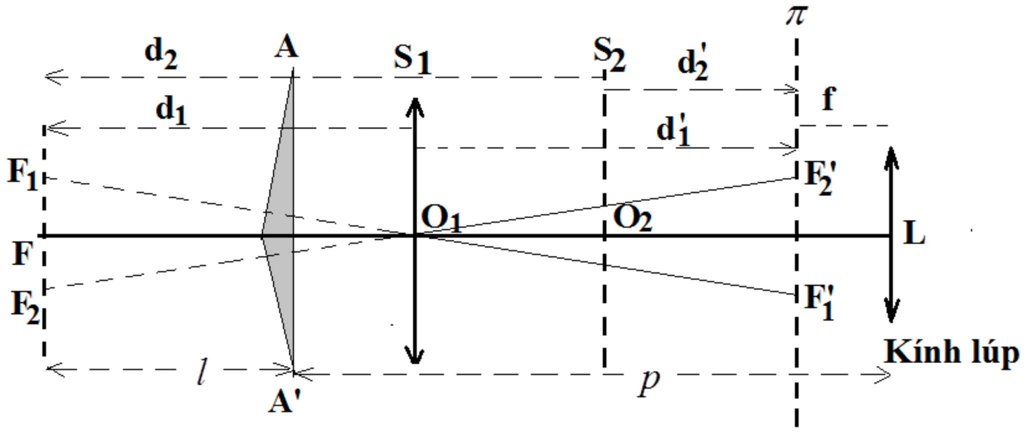
**c)** - Ánh sáng tử ngoại gần là bức xạ không trông thấy nhưng vẫn gây ra hiện tượng giao thoa trên màn. Để quan sát được hiện tượng đó, người ta đã dùng máy ảnh với phim đen trắng chụp ảnh miền giao thoa và in trên giấy ảnh thì kết quả vân sáng sẽ ứng với vạch tối trên ảnh.

- Với 15 vạch tối đếm được, ta có 14 khoảng vân i. Vì a và D không đổi, chiết suất n cũng được coi là không đổi, nên ta có: $10\lambda = 14\lambda' \to \lambda' \approx 0,357\mu m$

**Bài 14.**

1.Tính a và A.

F qua hai lăng kính cho hai ảnh $F_1$, $F_2$, cách nhau a= $2l(n-1)A$ (1)




Hai ảnh này trở thành hai vật thật đối với thấu kính O, cho hai ảnh thật $F_1$', $F_2$' trên tiêu diện $\pi$ của thấu kính L, ở cách F (cách mặt phẳng chứa $F_1$, $F_2$) một khoảng $(l+p-2)cm$

Khoảng cách $a_1$, $a_2$ của hai ảnh này ở hai vị trí của O ứng ứng với hai số phóng đại $k_1$, $k_2$ nghịch đảo nhau $k_1 = \dfrac{1}{k_2}$ , nên ta có ngay $F_1F_2 = a = \sqrt{a_1a_2} = \sqrt{4,5.0,18} = 0,9mm$

Mà $d_1' = k_1d_1 = \dfrac{4,5d_1}{0,9} = 5d_1;\ d_2 = d_1';\ d_2' = d_1$

Mặt khác $S_1S_2 = d_2 - d_1 = d_1' - d_1 = 4d_1 = 48cm \Rightarrow d_1 = 12cm$

$d_1' = 60cm, p = d_1 - d_1' - l + f_0 = 64cm$

**Và** $A = \dfrac{a}{2l(n-1)} = \dfrac{0,9}{2.100.0,5} = 9.10^{-3}rad \approx 30'$

**2.a. Tính khoảng cách x từ kính lúp L đến quan tâm O, cho ta quan sát được vân giao thoa.**

Vân quan sát được qua L, ở trên mặt phẳng $\pi$ cách O: $d' = x - f_0 = x - 2cm$

Và ảnh thật của hệ vân cách O một khoảng x':

$$x' = \frac{d'.f}{d'-f} = \frac{10(x-2)}{x-2-10}$$

Tức cách hai nguồn kết hợp $F_1$, $F_2$ một khoảng D:

D=p-2+$l$ -(x-2)-x'=64-2+10-x+2-$\dfrac{10(x-2)}{x-12}$

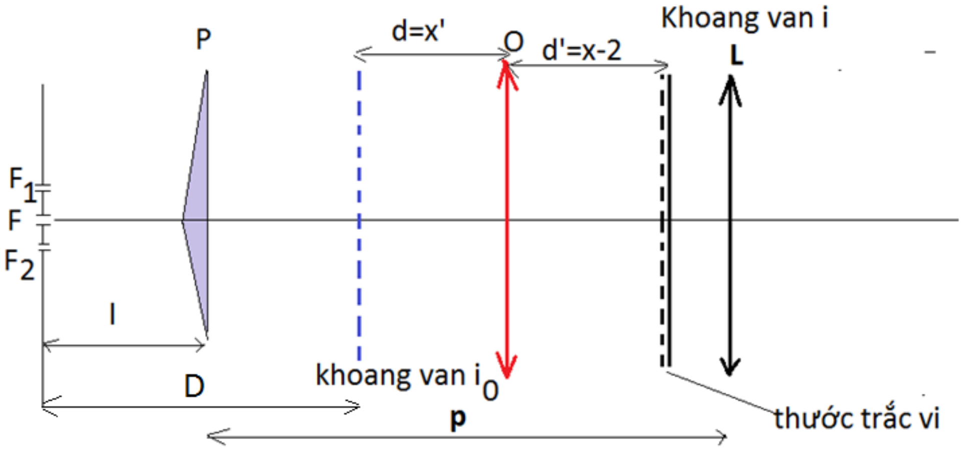
$$\Leftrightarrow D = \frac{-x^2 + 76x - 868}{x-12} \qquad (1)$$

Khoảng vân $i_0$ tại đó là $i_0 = \dfrac{\lambda D}{a}$

Còn tại mặt phẳng $\pi$ có khoảng vân i( mà ta thực sự đo được) là

$$i = i_0 \frac{x-2}{x'} = \frac{\lambda D}{a}\frac{(x-12)}{10} = \frac{\lambda}{a}(\frac{-x^2+76x-868}{10}) \quad (2)$$

Trong biểu thức này, $\lambda$ và a có đơn vị mm, nên i có đơn vị là cm




Biện luận: Hệ vân $i_0$ phải ở sau lưỡng lăng kính, còn hệ vân i phải ở trên mặt phẳng $\pi$. Vậy x phải thỏa mãn điều kiện $d'+d \le p-2 \Leftrightarrow x-2+x' \le p-2 \Rightarrow x+x' \le 64cm$

$$x + \frac{10(x-2)}{x-12} \le 64cm$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-66x+768}{x-12} \le 0 \qquad (3)$$

Ảnh của hệ vân trên mặt phẳng $\pi$ là anht thật, vậy ta luôn có x-2>f

Hay x-2>10$\Rightarrow x-12>0$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow x^2-66x+768 \le 0$

Tam thức ở vế trái có 2 nghiệm $x_1 = 33+\sqrt{341} \approx 51,cm;\ x_2 = 33-\sqrt{341} \approx 14,5cm$

Vậy $S_1$ cách lúp 51,5cm, và $S_2$ cách lúp 14,5cm

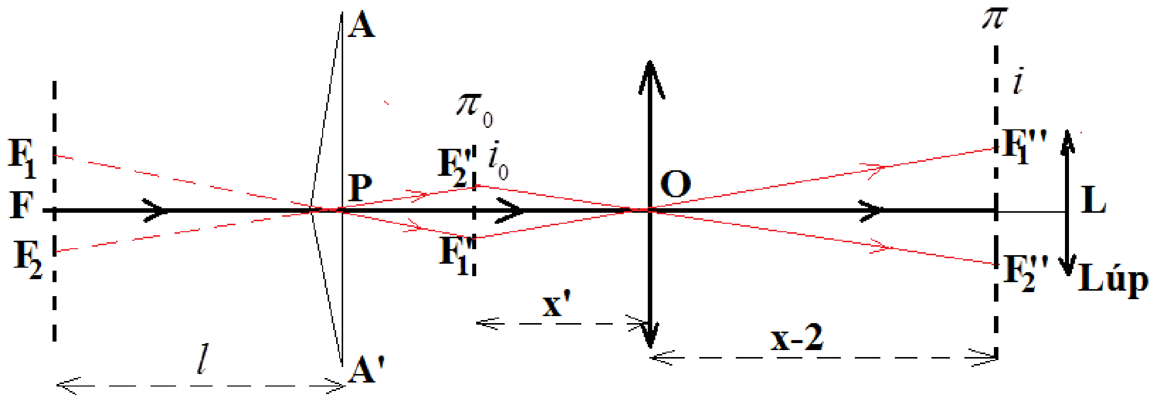
b. Tính giá trị cực đại $i_{max}$ của i.

từ (2) $i = \frac{\lambda}{a}(\frac{-x^2+76x-868}{10})$ cho thấy i đạt cực đại khi $x = \frac{-76}{2(-1)} = 38cm$

Do đó thay vào ta được $i_{max} \approx$ 0,035cm

Số vân quan sát được

Độ rộng trường giao thoa trên mặt phẳng $\pi$ là $F_1$''$F_2$''; còn trong mặt phẳng $\pi_0$ liên hợp với mặt phẳng $\pi$ là $F_1$'$F_2$'( hình vẽ).




$F_1'F_2' = a\dfrac{PF_1'}{PF_1}$ và $F_1''F_2'' = F_1'F_2'\dfrac{x-2}{x'}$

Với x=38cm, ta có $x' = \dfrac{10(38-2)}{38-2-10} = \dfrac{180}{13}cm$ ; $\dfrac{x-2}{x'} = \dfrac{38-2}{\frac{180}{13}} = \dfrac{13}{5}$

$PF_1' = p - x - x' = 64 - 38 - \dfrac{180}{13} = \dfrac{158}{13}cm$

$\Rightarrow F_1''F_2'' = a\dfrac{PF_1'}{l}\dfrac{x-2}{x'} = 0{,}9\dfrac{158}{13.10}\dfrac{13}{5} \approx 2{,}85cm$

Vậy số vân nhiều nhất có thể quan sát được $N = \dfrac{F_1''F_2''}{i} = \left[\dfrac{2{,}85}{0{,}35}\right] \approx 8$ vân

Bỏ thấu kính đi, thì D có giá trị: D'=$l + p - f_0 = 10 + 64 - 2 = 72cm$

Và khoảng vân I có giá trị $i' = \dfrac{\lambda D'}{a} = \dfrac{0{,}546.10^{-3}.720}{0{,}9} \approx 0{,}44mm$

Số vân quan sát được là $N' = \left[\dfrac{a}{i}\dfrac{p - f_0}{l}\right] = \left[\dfrac{0{,}9}{0{,}44}\dfrac{62}{10}\right] = [12{,}7] = 12$

3.Tính i'' và N''

Khi O ở cách $\pi$ một khoảng x-2<f hay x<12cm, thì O vẫn cho một anht thật trên $\pi$ nhưng của một vật ảo ( tức là của hệ vân $i_0$) ở trên mặt phẳng $\pi'$ liên hợp với $\pi$. Vậy ta quan sát được ảnh của hệ vân $i_0$ trên $\pi'$

Điểm $V_3$ như vậy ở các lúp L là 12cm.

Với x=8cm, tức là d'=6cm, ta có d=$\dfrac{6.10}{6-10} = -15cm$ , tức là mặt phẳng $\pi'$ ở sau O, cách O một khoảng 15cm, và cách $F_1F_2$:

$D' = l + p - x + 15 = 10 + 64 - 8 + 15 = 81cm$

Khoảng vân $i_1$(ảo) trên mặt phẳng $\pi'$ là

$$i_1 = \frac{\lambda D''}{a} = \frac{0,546.10^{-3}}{0,9}.81 = 0,546.0,9mm$$

Còn khoảng vân i'' quan sát được trên mặt phẳng $\pi$ là:

$$i'' = i_1\left|\frac{d'}{d}\right| = 0,546.0,9.\frac{6}{15} \approx 0,2mm$$

Và số vân quan sát được là $N'' = \frac{a}{i_1}\frac{(D''-l)}{l} = \frac{0,9}{0,546.0,9}.\frac{81-10}{10} \approx 13,003 \approx 13$ vân.

**Bài 15 .**

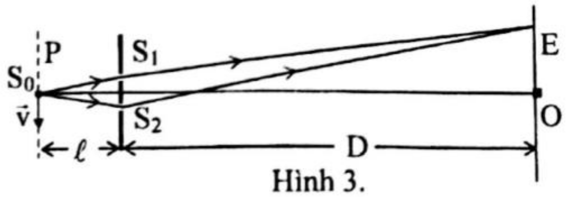
1. Hiệu quang trình từ S đến M:

$$\Delta\delta = (l_2 + d_2) - (l_1 + d_1) = d_2 - d_1 = \frac{ax_M}{D}$$

a. Theo giả thiết $\Delta\delta = 3\lambda \Rightarrow d_2 - d_1 = \Delta\delta = 3\lambda = 1,50\mu m$

b. Khoảng vân giao thoa có giá trị bằng:

$$i = \frac{\lambda D}{a} = 0,5mm$$



Hình 3.

+Khoảng cách giữa hai vân ngoài cùng: Δ = 40i

+Số vân sáng $N_s = \frac{\Delta}{i} + 1 = 41$

Giữa hai vân sáng có một vân tối -> số vân tối $N_t = N_s - 1 = 40$

2. Theo giả thiết: $\Delta\delta = \frac{ax_M}{D} = k\lambda = 5\lambda_d \Rightarrow \lambda = \frac{5\lambda_d}{k}$

Vì $0,400\mu m = \lambda_t \le \lambda \le \lambda_d = 0,750\mu m$ nên $5 \le k \le \frac{5\lambda_d}{\lambda_t} \approx 9,375 \Rightarrow k = 5,6,7,8,9$

Vậy có tất cả 5 bức xạ trùng nhau tại vân sáng bậc 5 của ánh sáng đỏ $\lambda_d = 0,750\mu m$.

Bước sóng của 5 bức xạ này lần lượt là: $\lambda_5 = \lambda_d = 0,750\mu m; \lambda_6 \approx 0,625\mu m; \lambda_7 \approx 0,536\mu m$
$\lambda_8 \approx 0,469\mu m; \lambda_9 \approx 0,417\mu m$

3. Ta có:

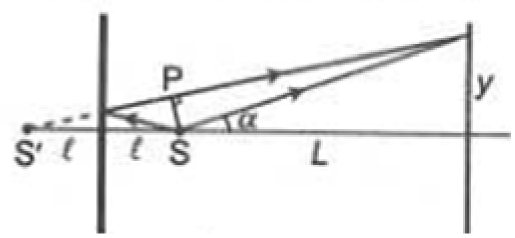
$$\Delta\delta = (l_2 + d_2) - (l_1 + d_1) = (l_2 - l_1) + (d_2 - d_1) = \frac{avt}{l} + \frac{ax_E}{D} \Rightarrow t = \frac{D}{l}\frac{x_E}{v} - \frac{l\Delta\delta}{av}$$

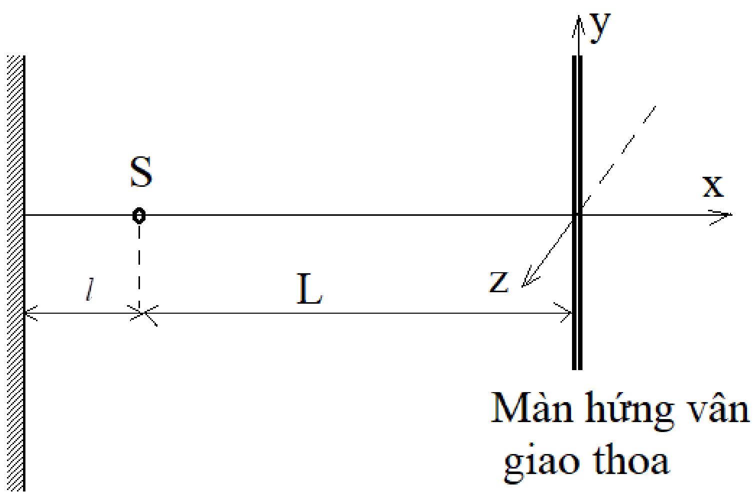
Mỗi lần Δδ thay đổi một lượng $\lambda$ tính chất giao thoa lại được lặp lại mà giá trị của dòng quang điện bão hòa tỉ lệ với cường độ sáng, nên khoảng thời gian giữa hai lần dòng quang điện bão hòa đạt giá trị cực đại (hoặc cực tiểu) là $T = \frac{l\lambda}{av}$.

Do đó, số lần dòng quang điện bão hòa đạt cực đại (hoặc cực tiểu) trong một đơn vị thời gian là: $f = \frac{1}{T} = \frac{av}{l\lambda} = 50Hz$

**Bài 16.**

1.Điểm tới có tọa độ y sẽ tạo ra một góc nhỏ $\alpha \approx \dfrac{y}{L}$




Hiệu quang trình giữa hai tia trực tếp và phản xạ

$$\Delta \approx S'P = 2l\cos\alpha \approx 2Nl - Nl\alpha^2$$

Vì phản xạ trên điện môi có chiết suất lớn hơn nên quang trình tia phản xạ tăng lên nửa bước sóng hay pha tăng lên một lượng $\pi$

Do đó độ lệch phai giữa hai tia đến P

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi\Delta}{\lambda} + \pi = 4\pi N - \pi(2N\alpha^2 - 1)$$

Tại vị trí cực đại, độ lệch pha này bằng $2\pi(2N-n)$, n là số nguyên.

Vì vậy để có cực đại $\alpha = \sqrt{\dfrac{n+0,5}{N}} \rightarrow y_n = L\sqrt{\dfrac{n+0,5}{N}}$

Với n=0,1,2,3,…<<N

2.Các tia sáng có cùng số n sẽ tạo với trục x cùng một góc, do đó vân cực đại trên màn quan sát sẽ là các đường tròn đồng tâm. Góc giữa các đường tròn cạnh nhau sẽ giảm dần khi n tăng. Nếu chọn bán kính vòng đầu tiên $r_0$, thì bán kính các đường tròn là

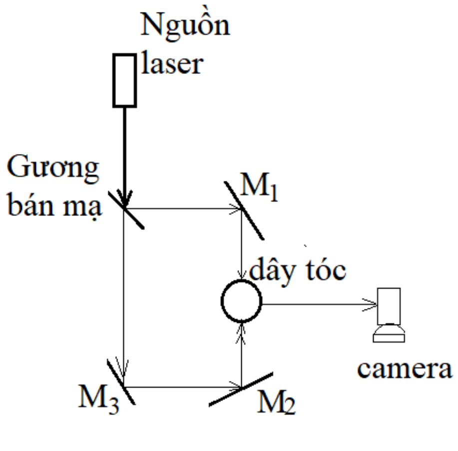
$$r_0\sqrt{1}, r_0\sqrt{3}, r_0\sqrt{5}, r_0\sqrt{7}\ldots$$

3.Các tia phản xạ chỉ tới được nửa cầu bên phải, độ lệch pha cực đại

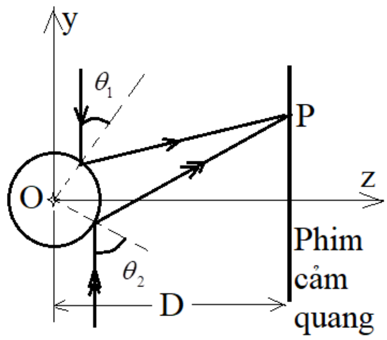
$\Delta\varphi_{max} = 4\pi N + \pi$ và $\Delta\varphi_{\min} = \pi$

Số vân cực đại là $m = \dfrac{\Delta\varphi_{max} - \Delta\varphi_{\min}}{2\pi} = 2N$

**Bài 17.**




Hình a

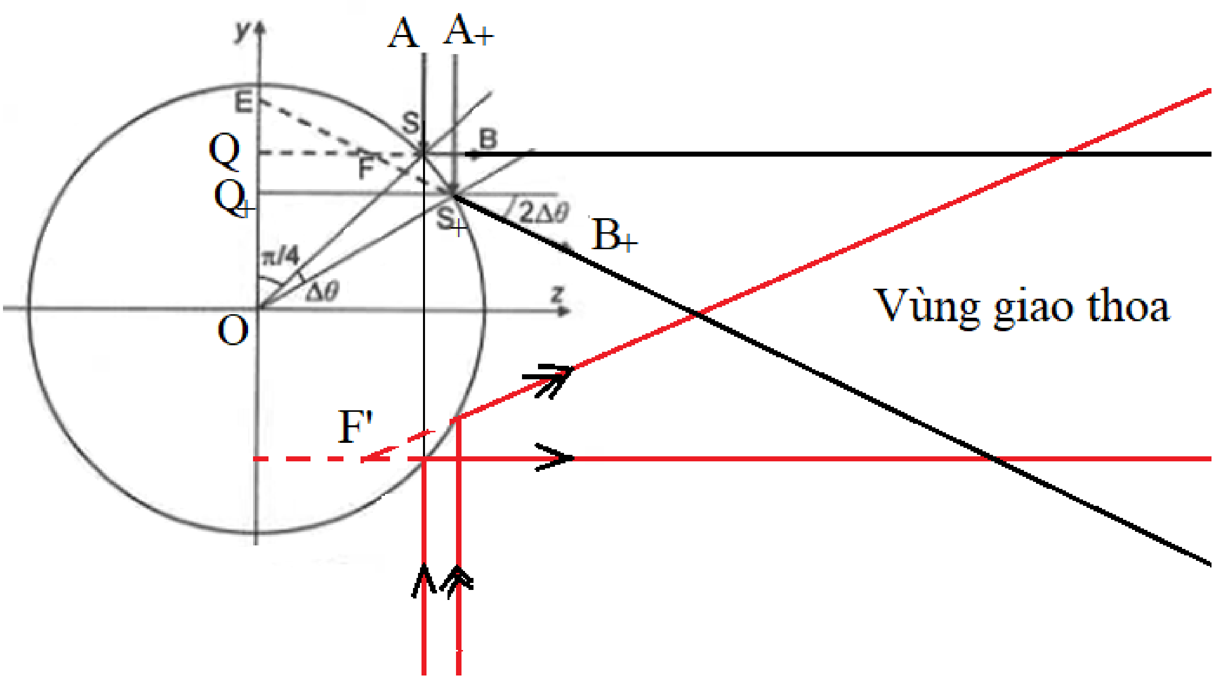



Hình b

1.Tia sáng AS chiếu đến mặt trên sợi tóc dưới góc $45^0$, tia phản xạ SB đi dọc theo trục z và đường kéo dài của nó cắt trục y tại điểm Q:

$y = OQ = \dfrac{d}{2}\dfrac{\sqrt{2}}{2} = d\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ (1)

Tia sáng $A_+S_+$ chiếu đến mặt dây tóc (gần sát AS) dưới góc tới $45^0 + \Delta\theta$, cho tia phản xạ $S_+B_+$ có đường kéo dài căt trục y tại E




Khi đó góc $\angle A_+S_+B_+ = 2(45^0 + \Delta\theta)$ (2)

do đó $S_+B_+$ tạo với $SB$ một góc $2\theta$ (3)

Vì $\angle OS_+E = \angle BS_+B_+ = 45^0 + \Delta\theta = \angle S_+OE$

Nên tam giác EO$S_+$ là tam giác cân, do đó OE=$S_+$E (4)

Mặt khác $OS_+ = d/2$ , suy ra $\frac{d}{4} = OE\cos(45^0 + \Delta\theta) \approx OE\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\Delta\theta)$

$\rightarrow OE = \frac{d}{2\sqrt{2}(1-\Delta\theta)} \approx \frac{d}{2\sqrt{2}}(1+\Delta\theta)$ (5)

$\Rightarrow QE = OE - QO = \frac{d\sqrt{2}}{4}\Delta\theta$ (6)

Tia $EB_+$ cắt QB tại ảnh F( giao nhau chùm phản xạ) có tọa độ $z_+$

Xét tam giác EQF ta có $z_+ = QF = \frac{QE}{\tan 2\Delta\theta} = \frac{\sqrt{2}}{8}d$ (7)

Như vậy, chùm phản xạ của chùm tới dưới góc $\pi/4$ giống như xuất phát từ nguồn đặt ở điểm F có tọa độ ($y_+$,$z_+$)

Với $y_+ = \frac{\sqrt{2}}{4}d;\ z_+ = \frac{\sqrt{2}}{8}d$ (8)

Tương tự chùm phản xạ ở mặt dưới dây tóc coi như phát ra từ nguồn F' có tọa độ

$y_- = -\frac{\sqrt{2}}{4}d;\ z_- = \frac{\sqrt{2}}{8}d$ (9)

**Câu 1- Cách khác**

Cung $SS_+$ có thể coi là đoạn thẳn có độ dài $SS_+ = r\Delta\theta = \frac{d}{2}\Delta\theta$

Và $PQ = OQ = r\frac{\sqrt{2}}{2} = d\frac{\sqrt{2}}{4}$ (4)

$SS_+$ tạo với QB một góc $45^0$

Nên $Q_+S_+ = r\frac{\sqrt{2}}{2} + r\frac{\sqrt{2}}{2}\Delta\theta$

Trong tam giác vuông $ES_+Q_+$ có

$Q_+E = Q_+S_+\tan 2\Delta\theta = r\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\Delta\theta).2\Delta\theta \approx \sqrt{2}r\Delta\theta$ (5)

Dễ thấy $Q_+E = 2Q_+Q$ (6)

Xét cặp tam giác đồng dạng $\Delta EQF \sim \Delta EQ_+S_+$:

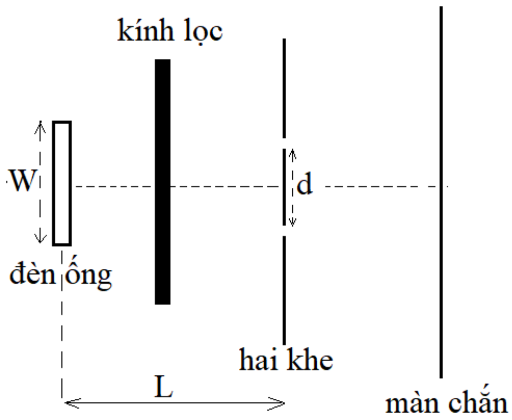
$z_+ = QF = \frac{1}{2}Q_+S_+ = r\frac{\sqrt{2}}{4} = d\frac{\sqrt{2}}{8}$ (7)

2.Ta coi F, F' là hai nguồn gây ra giao thoa: $a = FF' = y_+ - y_- = \frac{d}{2}\sqrt{2}$, Khi đó mặt phẳng qua FF cách màn mộ đoạn $D' = D - z_+ \approx D$

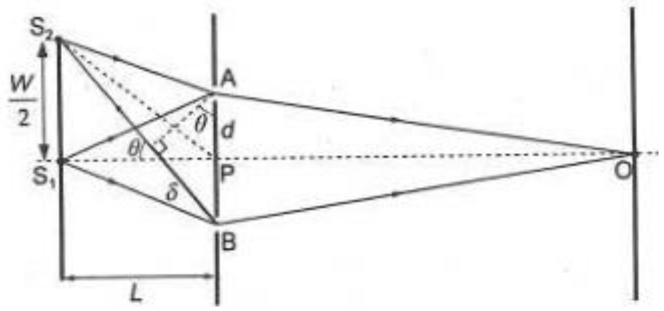
Khi đó khoảng vân $i = \frac{\lambda D'}{a} = \frac{\lambda D}{\frac{d\sqrt{2}}{2}}$

$d = \frac{\lambda D}{i}\sqrt{2}$

**Bài 18.** Mỗi điểm trên đèn ống đóng vai trò là một nguồn điểm, qua kính lọc sắc cho một hệ vân giao thoa riêng biệt trên màn chắn. Vì từ đầu đến cuối đèn ống có vô số nguồn sáng điểm nên cho vô số hệ vân giao thoan đan trộn vào nhau trên màn chắn, nên sẽ không còn thấy hệ vân giao thoa nữa.




Xét hai nguồn điểm trên đèn ống $S_1$ tại tâm đèn ống, $S_2$ tại rìa đèn ống. $S_1$ luôn cho vân sáng trung tâm tại O và nếu $S_2$ cho vân tối tại O thì kết quả các vân giao thoa biến mất.




Đối với nguồn $S_2$ cho hiệu quang trình đến hai khe A và B và đến O là $\Delta_2 = (S_2B + BO) - (S_2A + AO) = S_2B - S_2A$

Vì đ<<L nên ta dễ dàng tính gần đúng $\Delta_2 = S_2B - S_2A \square\ d\sin\theta = d\theta$ (1)

Mặt khác $\theta \approx \angle S_2PS_1 \approx \dfrac{W/2}{L}$ (2)

Từ (1) và (2)

$$\Delta_2 = d\frac{W/2}{L}$$

Để $S_2$ cho vân tối tại O:

$$\Delta_2 = (2k+1)\pi$$

$$\Leftrightarrow (2k+1)\frac{\lambda}{2} = d\frac{W}{2L} \Rightarrow d = \frac{\lambda(2k+1)L}{W}$$

$$\Rightarrow d_{\min} = \frac{\lambda L}{W}$$

Bài 19.

**a.** Tốc độ và bước sóng ánh sáng trong chân không là c và $\lambda$ thì tốc độ ánh sáng bước sóng trong môi trường chiết suất $\mu$ là $c' = \dfrac{c}{\mu}$ và $\lambda' = \dfrac{\lambda}{\mu}$

a. Thời gian di chuyển theo chiều kim đồng hồ là(CW) hết 1 vòng (đối với vòng chứ không phải đối với đất):ta tính theo cổ điển vì giả thiết cho $\Omega R << c$

$$t^+ = \frac{2\pi R + R\Omega t^+}{c'} \Rightarrow t^+ = \frac{2\pi R}{c'}(1 - \frac{R\Omega}{c'})^{-1}$$

Thời gian di chuyển theo chiều ngược kim đồng hồ là(CCW):

$$t^- = \frac{2\pi R - R\Omega t^-}{c'} \Rightarrow t^- = \frac{2\pi R}{c'}(1 + \frac{R\Omega}{c'})^{-1}$$

Hiệu hai thời gian ánh sáng đi là:

$$t^+ - t^- = \Delta t \approx \frac{4\pi R^2\Omega}{(c')^2}$$

Hay $\Delta t = \frac{4\Omega A}{(c')^2} = \frac{4\mu^2\Omega A}{c^2}$

b) Hiệu quang trình chính là hiệu đường đi của hai sóng trong cùng môi trường:

$$\Delta L = c'\Delta t = \frac{4\pi R^2\Omega}{c'}$$

c) Theo kết quả câu b: $\Delta L = c'\Delta t = \frac{4\pi R^2\Omega}{c'}$

$$\Delta L = \frac{4\pi.1^2}{\frac{3.10^8}{1,5}}\frac{2\pi}{86400}(rad/s) \approx 4,56.10^{-12}\,m$$

d) Liên hệ giữa hiệu số pha và hiệu đường đi cho 1 vòng là :

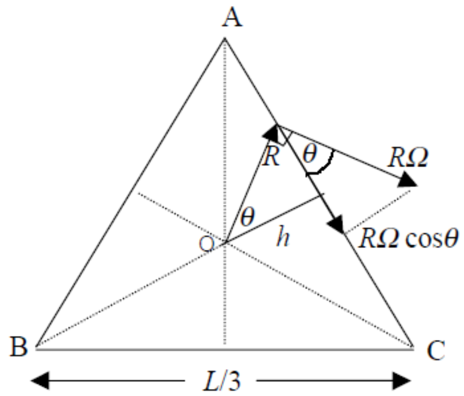
$$\Delta\theta = \frac{2\pi\Delta L}{\lambda'} = \frac{8\pi^2R^2\Omega}{c\lambda'}, \text{ where } \lambda' = \frac{\lambda}{\mu}$$

Cho N vòng là

$$\Delta\theta' = N\Delta\theta = \frac{8\pi^2R^2N\Omega}{c\lambda'}$$

e)Ta thấy các vòng hình tam giác quay quanh trung tâm O của tam giác với tốc độ góc Ω theo hướng chiều chiều kim đồng hồ.

Để không mất tính tổng quát, chúng ta hãy đi xem xét vận tốc của ánh sáng cùng một đoạn AC đi theo hướng CW và hướng CCW,




$$v_\pm = c \pm R\Omega\cos\theta = c \pm \Omega h.$$

Trong đó h là một hằng số.

Do vậy thời gian đi hết đoạn AC theo cùng chiều CW và hướng CCW là $t_+$ và $t_-$

$$\tau_\pm = \frac{L/3}{v_\pm} = \frac{L/3}{c \pm \Omega h} \approx \frac{L/3}{c}(1 \mp \frac{\Omega h}{c})$$

$$t_\pm = \frac{L/3}{v_\pm}$$

Vì $\Omega h << c$ nên ta lấy gần đúng

Trong đó L là chu vi của hình tam giác vòng

Vì vậy, thời gian khác nhau của ánh sáng trong một chu kỳ hoàn chỉnh

$$\Delta t = \frac{2\Omega L h}{c^2} = \frac{4\Omega}{c^2}\left(\frac{1}{2}Lh\right) = \frac{4\Omega A}{c^2}$$

Kết quả này giống kết quả khi sợi quan hình tròn

Trong đó A là diện tích tam giác: $A = \frac{1}{2}\frac{L}{3}(3h) = \frac{1}{2}Lh$

f) Quãng đường được quy đổi theo hai hướng CW và CCW ra trong chân không là:

$$L_+ = ct^+ \approx L(1 - \frac{\Omega h}{c}) \; ; \; L_- = ct^- \approx L(1 + \frac{\Omega h}{c})$$

Hiều quang trình theo hai hướng là( với lưu ý $h\Omega << c$)

$$\Delta L = L_- - L_+ = 2L\frac{\Omega h}{c} = \frac{4\Omega A}{c} = \frac{\Omega L^2}{\sqrt{3}\, c}$$

Các điều kiện để duy trì dao động laser được đưa ra trong giả thiết trên: L=m$\lambda$. Khi đó $L_+ = m\lambda_+; \quad L_- = m\lambda_-$

Và
$$\nu_+ = \frac{c}{\lambda_+} = \frac{c}{\frac{L_+}{m}} = m\frac{c}{L_+}; \qquad \nu_- = \frac{c}{\lambda_-} = \frac{c}{\frac{L_-}{m}} = m\frac{c}{L_-}$$

Với m là số nguyên

$$\Delta\nu = \nu_- - \nu_+ = \frac{m}{L_-}c - \frac{m}{L_+}c \approx mc\frac{\Delta L}{L^2} = \nu\frac{\Delta L}{L}$$

Ta thấy tích $L_+L_- \approx L^2$; trong đó L là chu vi của vòng hình tam giác.Do đó

$$\Delta\nu = \frac{\Delta L}{L}\nu = \frac{4A}{Lc}\nu\Omega = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{L}{\lambda}\Omega$$

$$\Delta\nu = \frac{4A\nu\Omega}{Lc} = \frac{4\frac{1}{2}\frac{L}{3}\frac{L}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\nu\Omega}{Lc} = \frac{\sqrt{3}}{9}\frac{L}{\lambda}\Omega$$ ( đây là đáp số đúng; đáp số tác giả có vẻ sai)

# VIII.3 GIAO THOA ĐỊNH XỨ

**Bài 1**. Đáp số. a. $\alpha = \frac{\lambda}{2ni} = 1,43.10^{-4} rad$ ; b. $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{19}$

**Bài 2.** Đáp số. a. 21 vân tối (tính luôn tại A); b. $\lambda_k = \frac{40}{k}\mu m$ với $k = 53 \div 105$

**Bài 3.**Đáp số a. $d_{\min} = \frac{\lambda_1}{4\sqrt{n^2 - \sin^2 i_1}} = 0,11\mu m$ ;b. tìm được $\lambda = 0,513\mu m$ (màu lục)

**Bài 4.** Đáp số. m=0,18mg. Giá trị này tương đương sai số của cân nên không thể cân được.

**Bài 5.**

**Bài 6 .** Đáp số. a. $i \approx 2{,}85cm \quad \Delta\lambda \approx 14A^0$

**Bài 7.** Đáp số. $d = 13{,}8\mu m$

**Bài 8** Đáp số. a. $d = 1{,}25\mu m$ ; f=0,8m

**Bài 9.**Đáp số: $\lambda = 25\mu m$

**Bài 10.**

a.Gọi D là khoảng cách từ bản thủy tinh đến đỉnh thấu kính. Bán kính vân tối là $r_k^2 = R(k\lambda - 2D)$

b. Xuất hiện hoặc biến mất 345 vân tối.

**Bài 11.**Đáp số: a. 8mm; b. 1,33; c.Khi dịch thấu kính lên làm d tăng, bán kính hệ vân thu nhỏ lại, nếu d quá lớn thì khó quan sát được.

**Bài 12 .** Giữa đỉnh hai thấu kính có một lớp không khí mỏng độ dày e. Ở cách tâm r, bề dày lớp không khí là d. Vì tai đó cho vân tối, nên $d = \dfrac{\rho^2}{2R_1} - \dfrac{\rho^2}{2R_2} + e = (k - \dfrac{1}{2})\lambda$

Với $\rho = \rho_1 = 1{,}855mm, k = 6 \rightarrow \dfrac{\rho_1^2}{2R_1} - \dfrac{\rho_1^2}{2R_2} + e = 5{,}5\lambda$ (1)

Và $\rho = \rho_1 = 3{,}161mm,\ k = 16 \rightarrow \dfrac{\rho_2^2}{2R_1} - \dfrac{\rho_2^2}{2R_2} + e = 15{,}5\lambda$ (2)

Giải hệ (1),(2) ta được $\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2} = \dfrac{2\lambda}{\rho_2^2 - \rho_1^2} \approx 1{,}667$ (3)

Khi đó $D = (n-1)(\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2}) \approx 0{,}833dp;\ f = \dfrac{1}{D} \approx 1{,}2m$

Với d=0,8m$\Rightarrow d' = -2{,}4m$

**Bài 13. 1.**Tâm của hệ vân là một điểm sáng thì bán kính các vân tối là $R_{tk} = \sqrt{\dfrac{R\lambda}{n}(k - \dfrac{1}{2})}$

Vời k=1,2,3 và R=3cm, $\lambda_1 = 0{,}456\mu m \rightarrow R_{t1} \approx 0{,}826mm; R_{t2} \approx 2{,}43mm;\ R_{t3} \approx 1{,}849mm$

**2.** Tăng nhiệt độ của hình trụ từ $15^0$ lên $100^0$C thì chiều cao của hình trụ tăng từ $h_{15} = h_0(1+15k)$ lên $h_{100} = h_0(1+100k)$ tức tăng thêm $\Delta h = h_{100} - h_{15} = h_0.85k$ (1)

Thấu kính nâng cao lên, dễ dàng thấy rằng các vân dồn vào tâm rồi biến mất ở tâm.

Có 18 vân đi qua tâm thì $\Delta h = 18\dfrac{\lambda}{2} = 9\lambda$ (2)

Mặt khác theo (1) $\Delta h = h_0.85k = \dfrac{h_{15}.85k}{1+15k}$ (3)

Từ (2) và (3) ta tìm được $k = \dfrac{9\lambda}{85h_{15}}$

Với $\lambda = 0{,}436\mu m,\ h_{15} = 5mm \Rightarrow k = 0.10^{-6}K^{-1}$

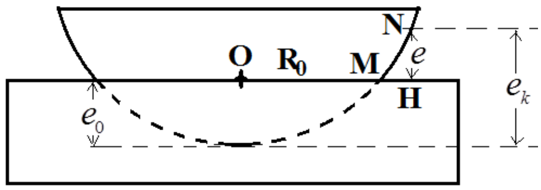
**3.** Hiêu quang trình của các tia ở đỉnh chỏm cầu khi chưa rút hết không khí là e=nh

Bậc giao thao ở tâm hệ khi chưa rút hết không khí được tính bằng công thức $2hn+\frac{\lambda}{2}=k\lambda+\frac{\lambda}{2}\to k=\frac{2hn}{\lambda}$

Khi đã rút hết không khí, bậc giao thoa là $k'=\frac{2h}{n}=\frac{k}{n}$, nhỏ đi n lần, tương đương với việc làm cho độ cao h giảm đi n lần, tức là hạ thấp thấu kính đi một đoạn:

$$\Delta h=h-\frac{h}{n}=h(1-\frac{1}{1,000293})=0,000293h\approx 1,47\mu m$$

Thấu kính hạ thấp xuống, vậy các vân nở ra từ tâm, và cứ mỗi khi $\Delta h=\frac{\lambda}{2}=0,218\mu m$ thì lại có một vân mới xuất hiện ở tâm rồi nở ra. Vậy số vân mới đi qua tâm hệ vân là $N=\frac{\Delta h}{0,5\lambda}\approx 6,6$ vân, tức là đã có 7 vân sáng mới xuất hiện, nhưng vân cuối cùng chưa nở ra tới vân thứ nhất ban đầu mà chỉ có bán kính $R_1'=\sqrt{0,6}R_1$, với $R_1$ là bán kính vân sáng ban đầu.




**4.** Thấu kính và tấm kính phẳng tiếp xúc với nhau (hình vẽ) nên tại điểm M của vòng tròn tiếp xúc (bán kính $R_0$) có một vân tối, vân số 0. Nếu tại N có vân tối thứ k thì độ dày e=NH của lớp không khí tại N là $e=k\frac{\lambda}{2}$

Kí hiệu $e_k, e_0$ lần lượt là khoảng cách từ N và M tới mặt phẳng tiếp xúc với đỉnh chỏm cầu, ta có

$R_k^2-2\text{R}e_k=R_0^2-2\text{R}e_0$ và $e=e_k-e_0$

Do đó $R_k^2-R_0^2=2\text{R}e_k-2\text{R}e_0=2\text{R}e=Rk\lambda\Rightarrow \text{R}_k=\sqrt{R_0^2+Rk\frac{\lambda}{n}}$

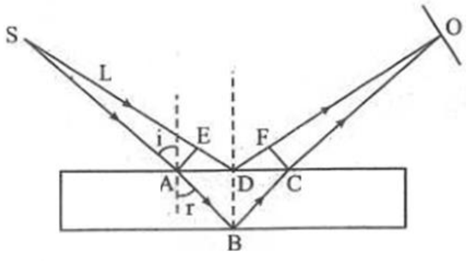
Bán kính vân thứ 10 là $\text{R}_{10}\approx 4,62mm$

Ở M có vân tối số 0, vân tối thứ nhất ứng với k=1. Giữa hai vân đó là vân sáng thứ nhất. Vậy vân sáng thứ nhất ứng với $k=\frac{1}{2}$, tức là $k=1-\frac{1}{2}$ và vân sáng thứ năm ứng với $k=5-\frac{1}{2}=4,5$.

Vậy bán kính vân sáng thứ 5 là: $R_5=\sqrt{9+\frac{3.4,5.0,546}{1,000293}}\approx 3,89mm$

**Bài 14 .**1.Chùm sáng tới nêm là chùm sáng hẹp, tơi mặt nêm trên một vùng lân cận tại D, do đó coi vùng nhỏ này như một bản mặt song song có bề dày e. Vì S ở xa nêm, nên coi SA=SE; OC=OF.

Đồng thời khi phản xajowr mặt tiếp xúc với môi trường chiết suất lớn có sự mất nửa bước sóng




*Hình 5.4G*

Do đó hiệu quang trình của các tia phản xạ SABCO, SDO là

$$\Delta = (AB+BC)n - (ED+DF+\frac{\lambda}{2})$$

$$\Delta = \frac{2ne}{\cos r} - 2e\tan r\sin i - \frac{\lambda}{2})$$

Thay $\sin r = \frac{\sin i}{n}; \cos r = \frac{\sqrt{n^2-\sin^2 i}}{n}$

Nên suy ra $\Delta = 2e\sqrt{n^2-\sin^2 i} - \frac{\lambda}{2}$

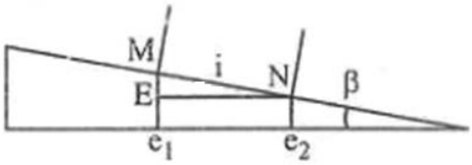
Khi $i = \alpha = 60^0$ thì $\Delta = 2e\sqrt{n^2-\sin^2\alpha} - \frac{\lambda}{2} = k\lambda \Rightarrow e = (2k+1)\frac{\lambda}{6}$

Vậy $e_{min} = (2.0+1)\frac{\lambda}{6} = 0{,}1\mu m$

2. Hiệu quang trình phụ thuộc vào bề dày e và $\alpha$: $\Delta = 2e\sqrt{n^2-\sin^2\alpha} - \frac{\lambda}{2}$

Khi tia sáng chiếu gần như vuông góc bề mặt $\alpha \approx 0$ do đó

$$\Delta = 2e\sqrt{n^2-\sin^2\alpha} - \frac{\lambda}{2} \approx 2ne - \frac{\lambda}{2}$$




*Hình 5.5G*

Giả sử độ dày của nêm tại điểm đang xét là $e_1$ tương ứng với vân sáng bậc k, khi đó

$$2ne_1 - \frac{\lambda}{2} = k\lambda \quad (1)$$

Và vân sáng bậc( k+1) tương ứng độ dày $e_2$: $2ne_2 - \frac{\lambda}{2} = (k+1)\lambda$ (2)

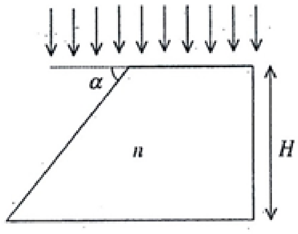
Lấy 2 trừ (1) vế theo vế ta được: $2n(e_2-e_1) = \lambda \Rightarrow ME = (e_2-e_1) = \frac{\lambda}{2n}$ (3)

Từ tam giác EMN ta tìm được khoảng vân trên nêm MN: $i = MN = \frac{e_2-e_1}{\sin\beta} \approx \frac{e_2-e_1}{\beta}$ (4)

Từ đó suy ra $ME = MN\sin\beta = MN\beta$

$$\rightarrow \beta = \frac{ME}{MN} = \frac{\lambda}{2nMN} = 1{,}744.10^{-3}rad \approx 0{,}1^0$$

**Bài 15.** Theo quan điểm của thuyết điện từ thì chùm phô tôn được coi như một sóng điện từ đơn sắc có tần số f=W/h, trong đó h là hằng số Plăng. Phần sóng truyền tới mặt phẳng song song với đáy sẽ truyền thẳng vào tấm thủy tinh vì vận tốc của chúng vuông góc với mặt phân cách.



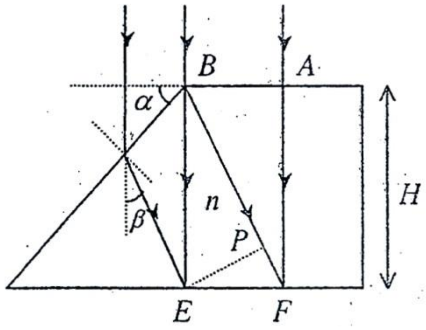

Phần đi tới mặt nghiên sẽ bị khúc xạ vào khối thủy tinh theo định luật khúc xạ:

$$\sin\alpha = n\sin(\alpha-\beta)$$

Nhưng vì góc □ rất nhỏ (và do đó □ rất nhỏ), nên:

$$\alpha = n(\alpha-\beta) \Rightarrow \beta = \alpha\left(1-\frac{1}{n}\right) \text{..............................0,5đ}$$

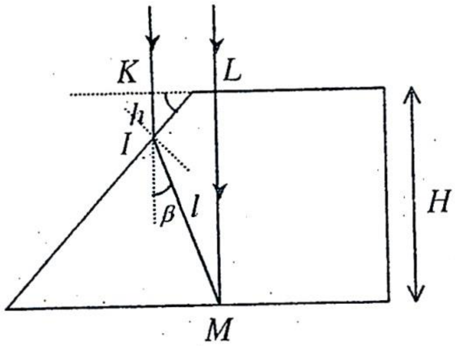
Theo điều kiện của bài toán thì tại mặt đáy phía dưới có hình ảnh giao thoa. Bài toán yêu cầu tính bậc lớn nhất của dãy cực đại giao thoa, nên ta cần tính bề rộng của vùng chồng chập hai giải sáng. Nhìn vào hình vẽ thì rõ ràng vùng có giao thoa chỉ có thể là vùng EF trên hình a. Nếu tấm thủy tinh đặt trong không khí thì chiết suất của môi trường này bằng 1.




Ta xét hiệu đường đi (quy về quãng đường trong chân không) của một tia KIM khúc xạ qua mặt bên và tia truyền thẳng LM đến gặp nhau tại mặt đáy (hình 3). Do vận tốc truyền của ánh sáng trong thủy tinh nhỏ hơn vận tốc truyền trong chân không n lần, nên:

$$\Delta = h + nl - nH = h + n\frac{H-h}{\cos\beta} - nH = \frac{(1-\cos\beta)(nH-h)}{\cos\beta}$$

Như vậy, hiệu đường đi của hai tia lớn nhất khi h = 0, nghĩa là hai tia gặp nhau tại F trên hình a.




Bậc lớn nhất của dãy cực đại ứng với hiệu đường đi lớn nhất của các tia. Nếu gọi bậc lớn nhất đó là $k_{max}$ thì $k_{max}$ sẽ bằng phần nguyên của $\frac{(BF-AF)n}{\lambda}$ mà ta ký hiệu là $\left\{\frac{(BF-AF)n}{\lambda}\right\}$:

$$k_{max} = \left\{\frac{(BF-AF)n}{\lambda}\right\} = \left\{\frac{nH}{\lambda}\left(\frac{1}{\cos\beta}-1\right)\right\}$$

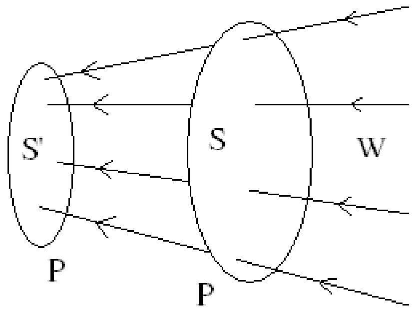
Do $\beta$ là góc nhỏ nên: $\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} \approx 1-\frac{\beta^2}{2}$ với □ đã tính được theo □ trên đây. Ngoài ra, chú ý thêm rằng $\beta^2 << 1$ và $\lambda = \frac{hc}{W}$ thì:

$$k_{max} = \left\{\frac{nH\beta^2}{2\lambda}\right\} = \left\{\frac{(n-1)^2\alpha^2 HW}{2nhc}\right\} = 6$$

# IX.4 CÁC ĐẠI LƯỢNG QUANG TRẮC

## I.LÝ THUYẾT

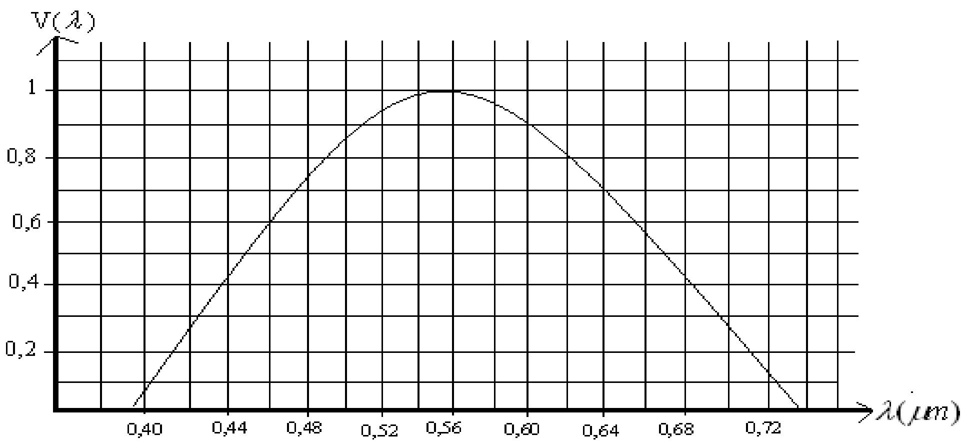
### 1. Dòng quang năng (năng thông) P




Định nghĩa: Là lượng năng lượng W ánh sáng truyền qua một diện tích S bất kỳ (không nhất thiết vuông góc với phương truyền) trong một đơn vị thời gian t

Biểu thức; $P = \frac{W}{t}$ (*chỉ đánh giá về mặt năng lượng qua mặt S*)Đơn vị: oát (W)

### 2. Hàm số thị kiến (đường cong thị kiến) V($\lambda$)




- Cùng một năng thông, của các bức xạ đơn sắc khác nhau thì cảm giác sáng cũng khác nhau. ***Để đặc trưng cho độ nhạy của mắt đối với các ánh sáng có bước sóng khác nhau, người ta dùng một đại lượng gọi là hàm số thị kiến V($\lambda$).***

V($\lambda$) đạt cực đại khi $\lambda = \lambda_m = 0{,}555\,\mu m$;

quy ước giá trị V($\lambda_m$) =1. Suy ra V($\lambda$)$\leq$1

### 3. Quang thông $\Phi$

Để đặc trưng cho phần dòng quang năng P gây ra cảm giác sáng, người ta dùng khái niệm quang thông $\Phi$ :

Quang thông d$\Phi(\lambda)$= kV($\lambda$).d$P(\lambda)$ (*đánh giá về mặt năng lượng và cảm giác sángqua mặt dS*)

Suy ra quang thông toàn phần của nguồn sáng : $\Phi = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} kV(\lambda)dP(\lambda)$

Thường $\lambda = 0{,}4\ \mu m \div 0{,}76\mu m$

K=683 lm/W gọi là đương lượng quang học của oát, là hệ số chuyển đổi đơn vị đo bằng năng lượng sang đơn vị đo ánh sáng.

Đơn vị của quang thông là **lumen** (lm). ĐN: ***Lumen là quang thông do một nguồn sáng điểm có cường độ 1candela phát đi trong một góc khối 1 stêradian***

**Ví dụ**: Màu lục với công suất sáng là 1 W thì có quang thông $\Phi_T$ =650 lm

Màu đỏ sẫm với công suất 300 W thì quang thông là $\Phi$= 1lm.

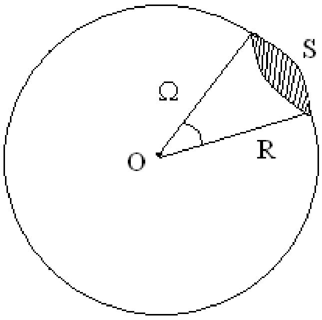
Nghĩa là cùng một năng thông P nhưng đối với các bức xạ khác nhau thì quang thông cũng khác nhau .

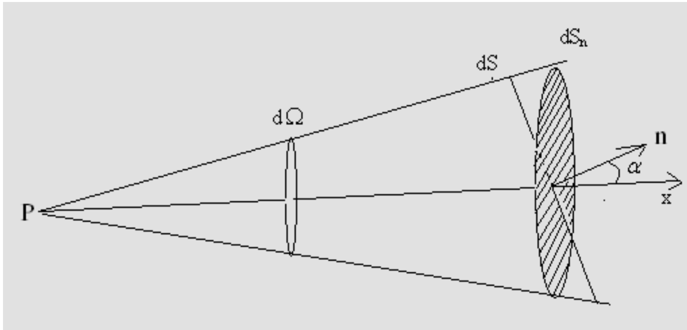
### 4. Cường độ sáng I

a) **Góc khối** $\Omega$

Định nghĩa: Góc khối d$\Omega$ nhìn thấy diện tích dS từ một điểm P là không gian giới hạn bởi mặt nón có đỉnh P và có các đường sinh tựa lên chu vi dS

$d\Omega = \frac{dS_n}{r^2} = \frac{dS.\cos\alpha}{r^2}$ (với $dS_n$ <<)




$\alpha$ là góc tạo bởi pháp tuyến n của dS và phương truyền ánh sáng qua dS

Đơn vị góc khối là stêradian (sr). Vậy góc khối toàn không gian là $4\pi$ (sr)

b) **Cường độ sáng I**( *cường độ trong một góc khối)*

Nguồn sáng điểm P phát ra quang thông $d\Phi_T$ đều trong góc khối $d\Omega$ thì cường độ sáng của nguồn P là I = $\frac{d\Phi}{d\Omega}$ (*đánh giá về mặt năng lượng và cảm giác sang trong một góc khối*)

Đặc biệt đối với nguồn sáng điểm ***đẳng hướng*** thì quang thông toàn phần

$\Phi = \oint Id\Omega = 4\pi I \qquad \Rightarrow I = \frac{\Phi}{4\pi}$.

Nếu nguồn sáng có cường độ thay đổi theo các phương thì người ta dùng khái niệm cường độ sáng trung bình: $\bar{I} = \frac{\Phi}{4\pi}$

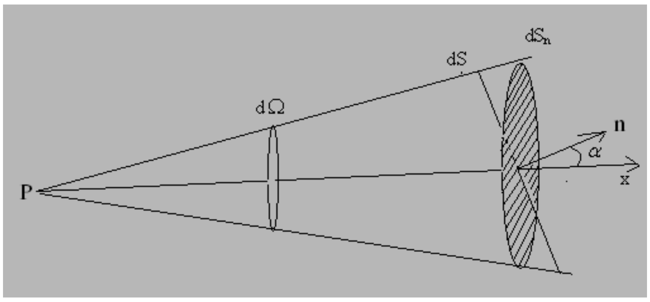
Đơn vị cường độ sáng là candela (cd). ĐN: ***Candela là cường độ của một nguồn sáng chuẩn bằng bạch kim ở nhiệt độ 2046,5$^0$K***(nhiệt độ nóng chảy bạch kim) ***phát ra theo phương vuông góc từ một diện tích bằng 1/60cm$^2$.*** **C**andela (cd) thứ nguyên $[J]$*là một 7 đơn vị cơ bản trong hệ SI(khối lượng* $[M]$*, thời gian* $[T]$*, độ dài*$[L]$*,cường độ dòng điện*$[A]$*, nhiệt độ*$[K]$*, lượng chất*$[Mol]$*)*

Lưu ý: Giữa lm và W có mối liên hệ sau đây: 1lm ($\lambda_m = 0{,}555\,\mu m$) = 0,0016 W. Hay 1 W ($\lambda_m = 0{,}555\,\mu m$) = 650 lm, vì V($\lambda_m$ ) = 1

Vậy $\lambda \neq \lambda_m$ thì 1 W($\lambda$) = 650 V($\lambda$) lm

**5. Độ chói**: Độ chói là một đại lượng đặc trưng cho sự phát sáng của một diện tích (nguồn sáng rộng) theo một phương cho trước và có trị số bằng cường độ sáng của một đơn vị diện tích nhìn thấy của nguồn

$$B_\alpha = \frac{d\Phi_T}{dS\cos\alpha\, d\Omega} = \frac{I}{\cos\alpha\, dS} = \frac{I}{dS_n}$$




Định luật Lambert: Những nguồn sáng có độ chói không phụ thuộc phương gọi là nguồn tuân theo định luật Lambert. ***Nghĩa là nếu độ chói B không phụ thuộc vào $\alpha$, với góc khối $d\Omega$ cho trước thì quang thông $d\Phi_T$ tỉ lệ thuận với cos$\alpha$ và đạt cực đại theo phương vuông góc mặt dS***

**Ví dụ**:

- Vật đen tuyệt đối hoặc tờ giấy trắng nằm giữa ngoài nắng tuân theo định luật Lambert

- gương phẳng để ngoài nắng không tuân theo định luật Lambert.

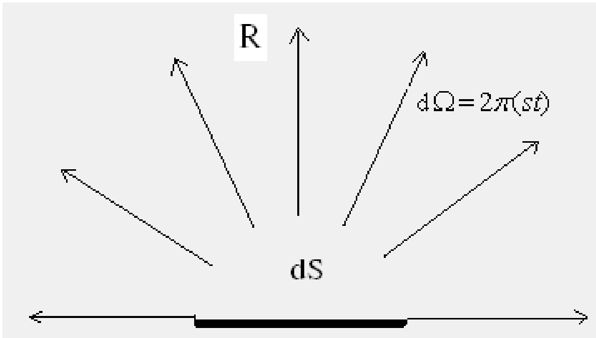
Độ chói có đơn vị đo là nit (nt): 1nt = $\frac{cd}{m^2}$. ĐN: ***cd/m² là độ chói của một nguồn phẳng 1m² có cường độ sáng 1 candela đo theo phương vuông góc bề mặt nguồn***.

Ví dụ: Máy ảnh chiếu bóng 5-20.$10^4$nt

Tờ giấy được chiếu sáng đủ để viết 10-15 nt

6**. <u>Độ trưng (R)</u>**

Định nghĩa: Một nguồn sáng rộng có diện tích dS(phẳng), quang thông được phát ra từ nó là $d\Phi_T$ trong một góc khối là $d\Omega = 2\pi(sr)$ :




R = $\frac{d\Phi_T}{dS}$ *(đánh giá về mặt năng lượng và cảm giác sang cho một đơn vị diện tích của nguồn sáng)*

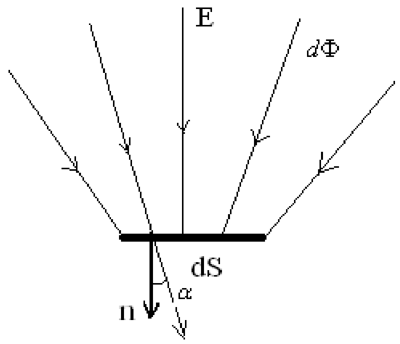
- Đơn vị: lm/m². ***ĐN: lm/m² là độ trưng của một nguồn hình cầu, có diện tích mặt ngoài là 1m², phát ra quang thong cầu 1 lumen phân bố đều theo mọi phương.***

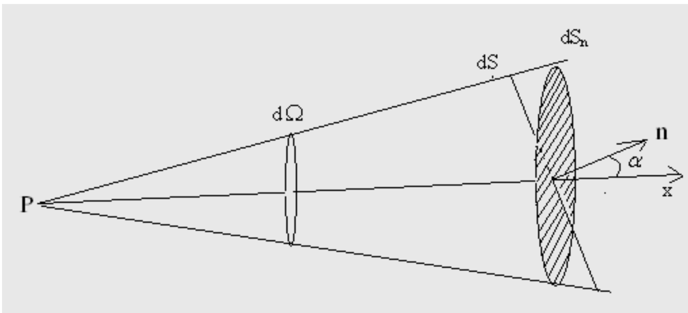
***<u>Ví dụ</u>*** đèn nêon bình thường có R = 20000lm/m²

Đối với nguồn Lambert thì mối liện hệ giữa độ trưng và độ chói: R= $\pi$B

7. **<u>Độ rọi</u>***(đánh giá về mặt năng lượng và cảm giác sáng trên một đơn vị diện tích cho vật vật được chiếu sáng)*

Nếu quang thông $d\Phi_T$ tới một mặt dS (không nhất thiết vuông góc) thì đại lượng E = $\frac{d\Phi}{dS}$ gọi là độ rọi.




Vậy độ rọi do một nguồn sáng điểm rọi trên mặt dS là E = $\frac{d\Phi}{dS} = \frac{I.d\Omega}{dS} = \frac{I.\cos\alpha}{r^2}$

( vì $d\Omega = \frac{dS_n}{r^2} = \frac{dS.\cos\alpha}{r^2}$)

- Đơn vị của độ rọi là lux (lx). ĐN: ***Lux là độ rọi của một mặt diện tích 1m² nhận một quang thong đều 1 lumen.***

***<u>VD</u>.***

- Ánh sáng ngoài trời buổi trưa 100.000lux.
- Trong phòng mở hết các cửa sổ 100lux.
  - ánh sánh đủ để đọc sách 30lux
  - ánh sánh trăng tròn 0,25lux.

* Độ trưng và độ rọi cùng thứ nguyên nhưng khác đơn vị. hai đại lượng này khác nhau:

- Độ trưng đánh giá năng suất phát xạ của bề mặt nguồn.
- Độ rọi đánh giá mật độ quang thông của bề mặt nhận ánh sáng.

**Lưu ý:**

**1. Hệ số tán xạ k**: Đối với mặt tán xạ ánh sáng thì độ trưng R được xác định bởi độ rọi E trên mặt đó theo hệ thức R = kE; k gọi là hệ số tán xạ, k phụ thuộc vào phương của ánh sáng tới và bước sóng của ánh sáng ($k \le 1$). Vật có màu trắng thì hệ số k lấy tương đương bằng 1 đối với miền ánh sáng thấy được. Vật màu đen thì k rất nhỏ và có giá trị như nhau đối với mọi bước sóng.

Từ đó độ chói B của một mặt tán xạ ánh sáng được xác định bởi độ rọi E : B= $\frac{k}{\pi}$.R.

2. Hệ số phản xạ $\rho = \frac{I(as\,p.xa)}{I_0(as\,toi)}$.

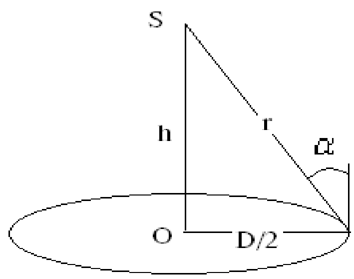
3. Hệ số hấp thụ $\alpha$: $I = I_0 e^{-\alpha d}$ với là bề dày vật hấp thụ ánh sang truyền qua.

HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 1.**

Độ rọi $E_0$ tại tâm bàn và $E_M$ tại mép bàn lần lượt bằng

$E_0 = \frac{I}{h^2} = 50 lux$. $E_M = \frac{I}{r^2}\cos\alpha = \frac{Ih}{(h^2 + D^2/4)^{3/2}} = 25{,}6 lux$

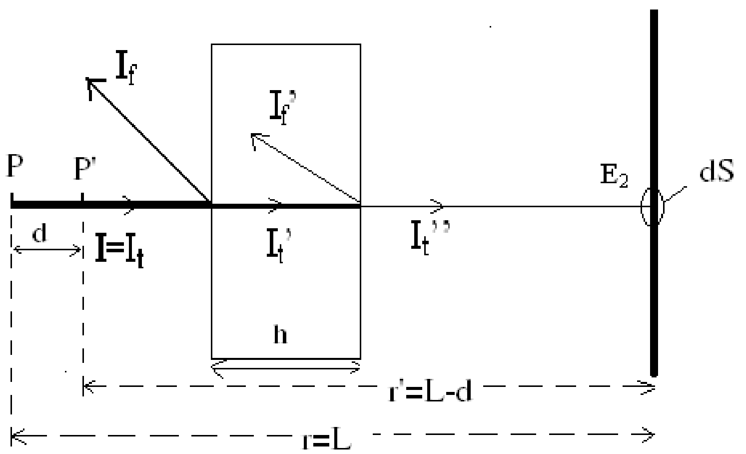



**Bài 2.**

$E_1 = \frac{E}{2} = \frac{I.\cos\alpha}{r^2} = \frac{I.h}{(h^2 + l^2/4)^{3/2}} \quad \Rightarrow I \approx 110 cd$

**Bài 3.**

Độ rọi tại tâm bàn khi chưa có bản là $E_1 = I/L^2$




(lưu ý $\rho = I_f/I = I_f'/I_t' \Rightarrow I_t'/I = I_t''/I'_t = 1-\rho$ )

Độ giảm khoảng cách đến màn d = $\frac{L}{6}(1-\frac{1}{n}) = \frac{L}{18}$

Độ rọi mới tại tâm màn là $E_2 = \frac{I''}{r'^2} = \frac{(1-\rho)I'}{r'^2} = \frac{(1-\rho)^2 I}{(L-d)} = \frac{(1-\rho)^2}{(\frac{17}{18})^2}.\frac{I}{L^2} = E_1$. Suy ra $\rho = \frac{1}{18} = 5{,}5\%$

**Bài 4.** Quang thông mà thấu kính nhận được cách nguồn một khoảng d: $\Phi = \dfrac{\pi.D^2.I}{4d^2}$.

Độ rọi ảnh E = $\dfrac{\Phi}{S'} = \dfrac{\Phi}{k^2.S} = \dfrac{d^2\Phi}{(L-d)^2.S} = \dfrac{\pi D^2.I}{4(L-d)^2.S}$

S là diện tích phát sáng của đèn. Tỉ số độ rọi của hai ảnh ứng với hai vị trí ảnh rỏ nét:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{(L-d_1)^2}{(L-d_2)^2} = 9$$

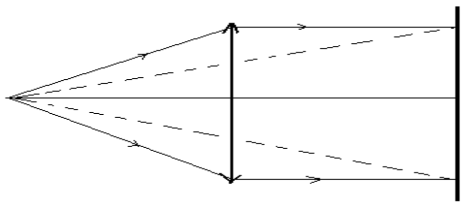
Theo tính chất thuận nghịch của chiều truyền ánh sáng thì $L - d_2 = d_1$ và $L - d_1 = d_1'$, nghĩa là $\dfrac{d_1}{d_1'} = 3$

Suy ra $d_1 = 75$ cm, $d_1' = 25$ cm và suy ra f = 18,75 cm

**Bài 5.**

$E_1 = \dfrac{I}{L^2}$, $E_2 = \dfrac{\alpha I}{f^2}$ ( $\alpha = \dfrac{I(p.xa)}{I_0(as.toi)}$ là hệ số phản xạ)

Mà $E_1 = E_2$ Suy ra $\alpha = \dfrac{f^2}{L^2} = \dfrac{4}{9}$



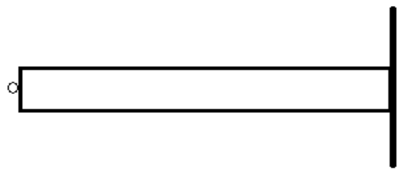
Vậy lượng ánh sáng mất mát do phản xạ trên các mặt thấu kính:

$$\frac{1-\alpha}{1}.100\% = \frac{500\%}{9} = 55{,}5\%$$

**Bài 6.**

Quang thông qua lỗ trước khi có thanh thủy tinh

$$\Phi_1 = I\Omega_1 = I.\frac{\pi d^2}{4L^2}$$



Sauk hi có thanh thủy tinh các tia sáng đi vào thanh dưới góc tới $\alpha$ có giá trị từ 0 đến gần bằng $90^0$, chiết suất của thanh đảm bảo mọi tia lọt vào đầu thanh đều bị phản xạ toàn phần ở thành bên và thoát ra hết ở đầu kia của thanh. Như vậy góc chum tia qua lỗ bây giờ là $2\pi$. Tỉ số quang thông 2 lần nói trên là: $\dfrac{\Phi_2}{\Phi_1} = \dfrac{2\pi.I}{\pi.I}.\dfrac{4L^2}{d^2} = 8.10^4$.

**Bài 7.** Quan sát từ Trái Đất thì Mặt Trời có thể xem như nguồn sáng nhỏ với diện tích biểu kiến $\pi r^2$ (nếu ở gần quá thì diện tích biểu kiến nhỏ hơn), do đó cường độ I liên hệ với độ chói theo biểu thức:

$$B = \frac{I}{S} = \frac{4I}{\pi d^2}.$$

Suy ra I = $\pi d^2.B/4 = 1{,}5.10^{27}\,cd$ và E = $\dfrac{I}{L^2} = \dfrac{1{,}5.10^{27}}{(1{,}5.10^{11})^2} = 67.000\,lux$

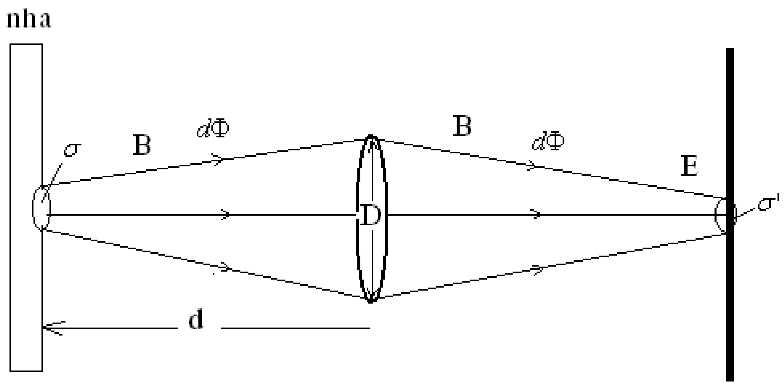
**Bài 8.** Độ rọi trên tờ giấy E = $\dfrac{\Phi}{S} = \dfrac{10^3}{0{,}05} = 2.10^4\,lux$

Tờ giấy trắng được chiếu sáng có thể xem như nguồn tuân theo định luật Lambert:

B = $\dfrac{R}{\pi} = \dfrac{\rho\Phi}{\pi S} = 4330\,nt$

**Bài 9.** $\frac{I_2}{l_2^2}=\frac{I_0}{l_1^2} \quad \Rightarrow I_2=9I_0=225\,cd$.

**Bài 10.** Mỗi phần nhỏ diện tích $\sigma$ của vật cần chụp lần 1 có thể xem là một nguồn sáng có đội chói B nào đó. Độ rọi trên phim của phần đó được xác định theo quang thông $\Delta\Phi$ lọt qua vật kính*( vì thỏa mãn điều kiện tương điểm nên coi các tia tới thấu kính vuông góc bề mặt thấu kính* $S_t=\frac{\pi D^2}{4}$) và diện tích ảnh $\sigma'$ trên phim : $E=\frac{\Delta\Phi}{\sigma'}$




Vì bỏ qua sự mất mát ánh sáng do phản xạ trên hai mặt của kính, nên quang thông của phần diện tích $\sigma$ gửi qua vật kính có đường kính bằng D và đặt cách vật một khoảng d bằng:

$\Delta\Phi=\frac{B\sigma\pi D^2}{4d^2}$. Diện tích ảnh $\sigma'=k^2\sigma=\frac{f^2}{(d-f)^2}.\sigma$. ( với $k^2=(\frac{-d'}{d})^2=\frac{\sigma'}{\sigma}$)

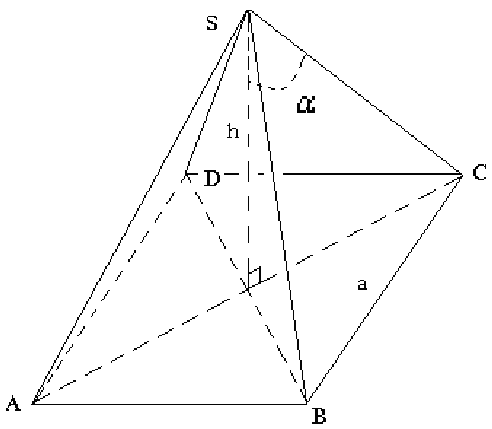
Do đó $E=\frac{\pi BD^2(d-f)^2}{4f^2d^2}$

Với máy ảnh thông dụng vật kính có tiêu cự khoảng chừng f = 5 cm rất nhỏ so với d. Nên các khoảng cách 100m và 50 m có thể bỏ qua được đại lượng f ở tử số. Khi đó $E=\frac{\pi BD^2}{4f^2}$

.Nghĩa là với những khoảng cách khá lớn so với tiêu cự vật kính, độ rọi ảnh trên phim của cùng một chi tiết vật là hầu như không phụ thuộc vào khoảng cách giữa vật cần chụp và vật kính. Vì vậy để có cùng một lượng ánh sáng tác dụng lên phim thì thời gian chụp hai lần phải như nhau.

**Bài 11**.

Họi h là độ cao của ngọn đèn S so với sàn nhà, khoảng cách từ ngọn đèn đến các góc phòng là $r=\sqrt{h^2+\frac{a^2}{2}}$ với a là chiều dài của một cạnh. ($a^2$ = 16 $m^2$).




Coi ngọn đèn là nguồn sáng điểm đẳng hướng, độ rọi tại 4 góc phòng như nhau và bằng $E=\frac{I.\cos\alpha}{r^2}=\frac{I.h}{(h^2+\frac{a^2}{2})^{3/2}}$.

Độ rọi lớn nhất khi $\frac{dE}{dh}=0 \quad \Rightarrow h=\frac{a}{2}=2m$

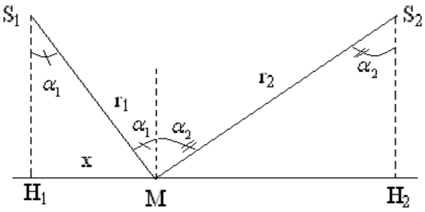
**Bài 12.** Gọi Q là năng lượng ánh sáng mà một đơn vị diện tích trên phim nhận được trong thời gian t giây. Ta có

Q= E.t = $\frac{I.t}{r^2}$

Vì $Q_1 = Q_2$ nên $\frac{I_1.t_1}{r_1^2} = \frac{I_2.t_2}{r_2^2} \quad \Rightarrow \quad t_2 = t_1\frac{I_1}{I_2}\frac{r_2^2}{r_1^2} = 10s$

**Bài 13.** Quang thông mà một diện tích dS đặt tại một điểm M trên sàn nhà nhận được bằng:

$d\Phi = d\Phi_1 + d\Phi_2 = I_1 d\Omega_1 + I_2 d\Omega_2 = I_1.\frac{dS\cos\alpha_1}{r_1^2} + I_2.\frac{dS\cos\alpha_2}{r_2^2}$;




$I_1 = I_2 = I$ = 100 cd nên độ rọi tại M là E =

$$\frac{d\Phi}{dS} = I\left(\frac{\cos\alpha_1}{r_1^2} + \frac{\cos\alpha_2}{r_2^2}\right) = Ih\left[\left(\frac{1}{h^2+x^2}\right)^{3/2} + \left(\frac{1}{h^2+(d-x)^2}\right)^{3/2}\right].$$

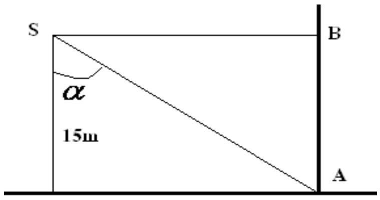
Độ rọi cực đại khi $\frac{dE}{dx} = 0 \quad \Rightarrow x = \frac{d}{2}$. Nghĩa là M nằm trung điểm $H_1H_2$.

Khi đó $E_{max}$ = $2Ih(h^2 + d^2/4)^{-3/2}$ = 15,24 lux.

**Bài 14.** a) E = $\frac{\Phi}{4\pi}\left(\frac{1}{h^2} + \frac{h}{(h^2+a^2)^{3/2}}\right) = 10{,}2\,lux$

b) E = $\frac{\Phi.h}{2\pi(h^2 + a^2/4)^{3/2}} = 10{,}9\,lux$

**Bài 15** Ta cần tính cường độ sáng I theo phương SA. Biết độ rọi tai A là 10 lux, tại B là 20 lux, ta có thể tính được khoảng cách SA, SB và góc $\alpha$. Từ đó tính
I = 24875 cd




**Bài 16.**

a) R = $\frac{\Phi}{\pi dl} = 5{,}3\,lm/m^2$

b) E = $\frac{\Phi}{2\pi al} = 700\,lux$

**Bài 17.**

***a.*** $\Phi = BS\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta\cos\theta d\theta = \pi BS = 3{,}14W$

Trong đó B là độ chói của nguồn, S là diện tích của nguồn, θ là góc giữa phương của tia tới với pháp tuyến của mặt nguồn.

***b.*** Độ phóng đại là: $k = \frac{D'}{D} = \left(\frac{S'}{S}\right)^{\frac{1}{2}} = 0{,}5$

Trong đó, D’, D, S’ và S là đường kính và diện tích của ảnh và vật tương ứng. Vì $k = \frac{d'}{d} = 0{,}5$, ta có d’= 2d.

Phương trình thấu kính cho ta $d' = 3f = 300cm, d = \frac{3f}{2} = 150cm$. Do đó, nếu khoảng cách của vật và ảnh tương ứng là 300cm và 150cm thì thấu kính tạo ra ảnh của nguồn có diện tích 0,25cm$^2$.

***c.*** Nếu thấu kính không hấp thụ thì năng thông tới $\frac{1}{4}cm^2$ mặt đĩa bằng năng thông tới thấu kính.

Góc khối trương bởi thấu kính tại nguồn là: $\Omega = \frac{\pi r^2}{d'^2}$.

Khi đó, năng thông toàn phần tới thấu kính là: $\Phi' = BS\Omega = 1.1.\pi\frac{5^2}{300^2} = 8,7.10^{-4}W$

***d.*** Theo nguyên lý thứ hai nhiệt động học, độ chói của ảnh không thể vượt quá độ chói của vật. Như vậy năng thông cực đại tới $\frac{1}{4}cm^2$ mặt đĩa là:

$$\Phi'' = \frac{\Phi S'}{S} = \frac{\Phi}{4} = 0,785W$$

**Bài 18.** Mặt trời có thể xem như một nguồn Lambert có độ chói biểu kiến L và diện tích S. Công suất bức xạ tới thấu kính (có diện tích A và tiêu cự f) là:

$$\Phi = \frac{LSA}{R^2}$$

Trong đó, R là khoảng cách giữa mặt trời và trái đất. Toàn bộ công suất này lại truyền đến ảnh $S'$ (của S).

Độ chói biểu kiến $L'$ của ảnh là: $\Phi' = L'S'd\Omega'$

Trong đó, $d\Omega'$ là góc khối trương bởi thấu kính tại ảnh, tức là: $d\Omega' = \frac{A}{f^2}$

Nếu bỏ qua sự hấp thụ trong khí quyển và thấu kính thì khi đó: $\Phi \approx \Phi'$, tức là:

$$\frac{LSA}{R^2} \approx \frac{L'SA'}{f^2}$$

Vì $S/R^2 = S'/f^2$, ta có: $L \approx L'$

**Bài 19. *a.*** Quang thông tới kính thiên văn trong 1 giây cho bởi công thức:

$$\phi = \int\left(Sd\Sigma d\Sigma' \cos\theta \cos'/r^2\right)$$

Trong đó, $d\Sigma$ là yếu tố diện tích của bề mặt nguồn và $d\Sigma'$ là yếu tố diện tích của kính vật trong kính thiên văn, $\theta$ là góc tạo bởi trục chính của kính thiên văn với pháp tuyến của $d\Sigma$, $\theta'$ là góc tạo bởi trục này với pháp tuyến của $d\Sigma'$, r là khoảng cách giữa $d\Sigma$ và $d\Sigma'$. Vì $\int(d\Sigma/r^2)$, góc khối trương bởi nguồn, lớn hơn góc khối nhận Ω của kính thiên văn, nên chỉ có ánh sáng phát xạ từ một diện tích hiệu dụng $\Omega r^2$ mới truyền cả vào kính thiên văn, tức là $\int(d\Sigma/r^2) = \Omega$. Khi đó vì $\int d\Sigma' = A$, ta có:

$$\Phi = S\Omega A$$

Ở đây, ta đã giả thiết khoảng cách giữa nguồn và kính thiên văn là rất lớn và kính thiên văn quan sát trực tiếp nên cả $\cos\theta$ và $\cos\theta'$ đều bằng đơn vị.

***b.*** Diện tích của ảnh, $\sigma'$, được cho bởi: $\sigma' = \Omega f^2$

trong đó f là tiêu cự của kính vật. Góc khối $\Omega'$ trương bởi thấu kính tại vị trí ảnh là:

$$\Omega' = \left(\frac{\pi D^2}{4}\right)/f^2$$

Trong đó D là đường kính của thấu kính. Do đó ta có:

$$\sigma'\Omega' = \frac{\pi D^2}{4f^2}.\Omega f^2 = \frac{\pi D^2}{4}.\Omega = A\Omega$$

**c.** Quang thông qua diện tích ảnh là: $\Phi = \pi S'\sigma'\sin^2 u'$

Trong đó, $S'$ là độ chói của ảnh, $u'$ là nửa khẩu độ góc của thấu kính, cho bởi $\sin u' = \frac{D}{2f}$.

Suy ra: $\Phi' = \pi S'(\Omega f^2)\left(\frac{D}{2f}\right)^2 = S'\Omega A$

Vì hệ số truyền qua của thấu kính nhỏ hơn đơn vị, tức là $\Phi' \le \Phi$, suy ra $S' < S$. Như vậy không có khả năng tăng độ chói biểu kiến của nguồn khuếch tán rộng nhờ các thấu kính.

**Bài 20.** Quang thông tới mặt đất cho bởi công thức: $\Phi = B\sigma' d\Omega$

Trong đó, B là độ chói của mặt trời, xem như nguồn bức xạ Lambert, $\sigma'$ là diện tích được chiếu sáng trên mặt đất, dΩ là góc khối trương bởi mặt trời tại $\sigma'$ và cho bởi công thức:

$d\Omega = \pi\alpha^2$

$\alpha$ là khẩu độ góc của mặt trời, theo đề bài có giá trị khoảng 0,01rad. Quang thông trên diện tích ảnh sau thấu kính là:

$$\Phi' = \pi B\sigma'\sin^2 u' = \pi B\sigma'\left(\frac{r}{f}\right)^2$$

Trong đó, $u'$ là nửa khẩu độ góc của thấu kính, r và f tương ứng là bán kính và tiêu cự của thấu kính. Khảo sát tỷ số:

$$\frac{\Phi'}{\Phi} = \frac{\pi B\sigma'\left(\frac{r^2}{f^2}\right)}{\pi B\sigma'(0,01)^2} = \frac{10^4 r^2}{f^2}$$

Ở đây ta lấy độ truyềnn qua của thấu kính là 1. Như vậy quang thông trên ảnh lớn gấp $\frac{10^4 r^2}{f^2}$ lần quang thông trên chính diện tích này của mặt đất khi không có thấu kính.

Đối với $\frac{\Phi'}{\Phi} \le 1$ ta có $f \ge 10^2 r$. Từ đó suy ra đối với $f \ge 100r$ thấu kính sẽ không làm tăng quang thông trên diện tích ảnh.

**Bài 21.** Theo giả thiết: $R = \frac{I_p}{I_0} = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_2}\right)^2 = R_{21} = \left(\frac{n_{21} - 1}{n_{21} + 1}\right)^2 = \left(\frac{1 - n_{21}}{1 + n_{21}}\right)^2 = R_{12}$

Suy ra: $T = 1 - R = T_{21} = 1 - R_{21} = 1 - R_{21} = T_{21}$

1. Về hệ số phản xạ rất bé nên ta có thể bỏ qua các đóng góp của các thành phần phản xạ:

$$I = T^2 I_0 = (1-R)^2 I_0 = \left(1 - \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2\right)^2 I_0 = \frac{16n^2}{(n+1)^4} I_0$$

Do đó tỷ lệ ánh sáng truyền qua: $T' = T^2 = \frac{I}{I_0} = \frac{16n^2}{(n+1)^4} \approx 93,4\%$

Nếu kể đến tất cả các thành phần phản xạ thì ta phải kể đến sự giao thoa của các thành phần. Đây là bài toán rất phức tạp và dữ kiện đã cho của đề bài không đủ để giải quyết vấn đề này.

Trong trường hợp các thành phần phản xạ thứ cấp không giao thoa với nhau, mỗi thành phần sẽ thực hiện hai lần truyền qua và 2k lần phản xạ (k = 0, 1, 2,…), khi đó:

$$I = T^2 I_0(1 + R^2 + R^4 + ...) = \frac{(1-R)^2}{1-R^2} I_0 = \left(\frac{1-R}{1+R}\right) I_0$$

Do đó: $T' = \frac{I}{I_0} = \frac{1-R}{1+R} = \frac{2n}{n^2+1} \approx 93,5\%$

2. Biên độ sáng của hai thành phần phản xạ từ lớp phủ:

$$\begin{cases} E_1 = \sqrt{R_0} E_0 = \sqrt{R_0 I_0} \\ E_2 = T_0 \sqrt{R_0} E_0 = (1 - R_0)\sqrt{R_0 I_0} \end{cases}$$ trong đó: $R_0 = \left(\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}\right)^2$

Hai thành phần phản xạ này lệch pha với nhau một lượng: $\Delta\varphi = 2\pi \frac{2\sqrt{n}e}{\lambda}$

Hai sóng này giao thoa với nhau cho biên độ cực tiểu khi: $\Delta\varphi = \pi + k.2\pi, (k \in Z)$

Do đó: $e = \frac{\lambda}{4\sqrt{n}}(1+2k); \mathrm{e}_{\min} = \frac{\lambda}{4\sqrt{n}}$

# CHƯƠNG X.
# CƠ HỌC TƯƠNG ĐỐI HẸP
## X.1 ĐỘNG HỌC TƯƠNG ĐỐI TÍNH.

**Bài 1.**

Xét ba hệ quy chiếu K(t,x), K'(t',x'), K'' (t'',x'') có các trục tương ứng song song với nhau. Tại thời điểm $t_0 = 0$, $t'_0 = 0$, $t''_0 = 0$ các gốc toạ độ trùng nhau. Gọi $\vec{v}$ là vận tốc của hệ K' đối với hệ K, $\vec{u'}$ là vận tốc của hệ K'' đối với hệ K'. Biết rằng $\vec{v}$ và $\vec{u'}$ có phương dọc theo trục x. Áp dụng công thức biến đổi Loren cho các cặp K, K' và K', K'', ta có:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad (1)$$

$$x'' = \frac{x' - u't'}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}}; \quad t'' = \frac{t' - \frac{u'}{c^2}x'}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}} \qquad (2)$$

Thay x' và t' từ (1) vào (2), ta tìm được mối liên hệ tọa độ thời gian trong hai hệ quy chiếu K'' và K:

$$x'' = \frac{x - \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2}t}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{u' + v}{1 + u'v/c^2}\right)^2}}$$

$$t'' = \frac{t - \frac{x}{c^2}\frac{u' + v}{1 + u'v/c^2}}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{u' + v}{1 + u'v/c^2}\right)^2}} \qquad (3)$$

Mặt khác, nếu gọi u là vận tốc tương đối của hệ K'' đối với hệ K, ta có:

$$x'' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}; \quad t'' = \frac{t - \frac{u}{c^2}x'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \qquad (4)$$

Từ biểu thức biến đổi t'' trong hệ K'' theo t trong hệ K ((3) và (4)). Đồng nhất hai biểu thức trên ta có công thức biến đổi vận tốc của hệ K'' so hệ K:

$$u = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2} \qquad (5)$$

đó chính là công thức hợp vận tốc phải tìm.

**CÁCH GIẢI KHÁC**

Xét ba hệ quy chiếu K, K', K'' có các trục tương ứng song song với nhau. Tại thời điểm $t_0 = 0$, $t'_0 = 0$, $t''_0 = 0$ các gốc toạ độ trùng nhau. ***Gọi $\vec{v}$ là vận tốc của hệ K đối với hệ K', $\vec{u'}$***

***là vận tốc của hệ K'' đối với hệ K'.*** Hơn nữa $\vec{v}$ và $\vec{u'}$ có phương dọc theo trục x. Áp dụng công thức biến đổi Loren cho các cặp K, K' và K', K'', ta có:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \; ; \; t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad (1)$$

$$x'' = \frac{x' - u't'}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}} \; ; \; t'' = \frac{t' - \frac{u'}{c^2}x'}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}} \qquad (2)$$

Thay x' và t' từ (1) vào (2), ta có:

$$x'' = \frac{x - \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2}t}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{u' + v}{1 + u'v/c^2}\right)^2}}$$

$$t'' = \frac{t - \frac{x}{c^2}\frac{u' + v}{1 + u'v/c^2}}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{u' + v}{1 + u'v/c^2}\right)^2}} \qquad (3)$$

Mặt khác, nếu gọi u là vận tốc tương đối của hệ K'' đối với hệ K, ta có:

$$x'' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \; ; \; t'' = \frac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \qquad (4)$$

So sánh (3) và (4) ta có công thức biến đổi vận tốc sau đây:

$$u = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2} \qquad (5)$$

***đó chính là công thức hợp vận tốc phải tìm.***

**Bài 2. CÁCH 1.**

Với lưu ý $\left[\vec{u'} \wedge \vec{v}\right]^2 = \left[(u_x'\vec{i} + u_x'\vec{i} + u_x'\vec{i}) \wedge v\vec{i}\right]^2 = ... = v^2(u'^2_y + u'^2_z)$;trong đó $\vec{v} = v\vec{i}$ (1)

$$(\vec{u'}.\vec{v}) = (\vec{u'_x}.\vec{v}) = u'_x v \qquad (2)$$

$$(u_x' + v)^2 = (\vec{u'_x} + \vec{v})^2 = u'^2_x + v^2 + 2\vec{u'_x}.\vec{v}$$

$$(\vec{u'} + \vec{v})^2 = u'^2_x + u'^2_y + u'^2_z + v^2 + 2\vec{u'_x}.\vec{v} = (u_x + v)^2 + u'^2_y + u'^2_z$$

$$\rightarrow (u_x' + v)^2 = (\vec{u'} + \vec{v})^2 - (u'^2_y + u'^2_z) \qquad (3)$$

Nên từ $u^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 \Rightarrow u = \sqrt{\left(\frac{u_x' + v}{1 + \frac{u_x'v}{c^2}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{u_x'v}{c^2}}u'_y\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{u_x'v}{c^2}}u'_y\right)^2}$

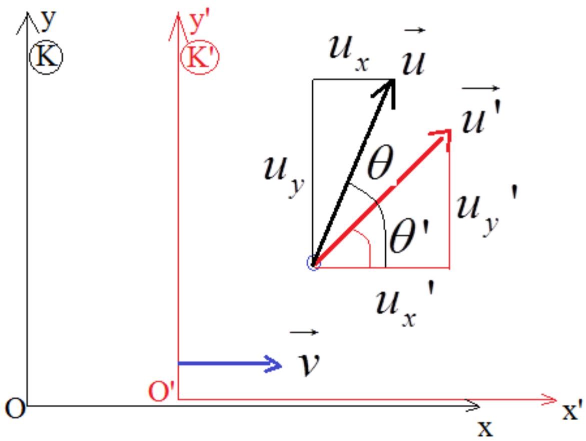
$$u=\frac{1}{1+\frac{\vec{u}'\vec{v}}{c^2}}\sqrt{(u_x'+v)^2+(1-\frac{v^2}{c^2})(u'^2_y+u'^2_y)}\qquad (4)$$

Thay (1), (3) vào (4) ta được $u=\dfrac{\sqrt{(\vec{u'}+\vec{v})^2-\left[\vec{u'}\wedge\vec{v}\right]^2/c^2}}{1+\frac{1}{c^2}(\vec{u'}\,\vec{v})}$

**CÁCH 2.**

Lưu ý: $u=\dfrac{\sqrt{(\vec{u'}+\vec{v})^2-\left[\vec{u'}\wedge\vec{v}\right]^2/c^2}}{1+\frac{1}{c^2}(\vec{u'}\,\vec{v})}=\dfrac{\sqrt{(\vec{u'}+\vec{v})^2-v\left[\vec{u'}\wedge\frac{\vec{v}}{v}\right]^2/c^2}}{1+\frac{v}{c^2}(\vec{u'}\,\frac{\vec{v}}{v})}=\dfrac{\sqrt{(\vec{u'}+\vec{v})^2-v[u_x']^2/c^2}}{1+\frac{v}{c^2}(u_x')}$

Chọn các trục tọa độ như hình vẽ: Các mặt phẳng Oxy và O' x'y' đồng phẳng. Khi đó vận tốc vật trong các HQC K và K' lần lượt là $\vec{u}$, $\vec{u'}$




**Ta có** $u'_x=u'\cos\theta'=\vec{u'}\dfrac{\vec{v}}{v};u'_y=u'\sin\theta'=\left|\vec{u'}\wedge\dfrac{\vec{v}}{v}\right|$ **(1)**

Khi đó ta có $u_y=\dfrac{u_y'\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}{1+\frac{u_x'v}{c^2}}=\dfrac{\left|\vec{u'}\wedge\frac{\vec{v}}{v}\right|\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}{1+\left|\vec{u'}.\frac{\vec{v}}{v}\right|\frac{v}{c^2}}$ **(2)**

$$u_x=\frac{u_x'+v}{1+\frac{u_x'v}{c^2}}=\frac{\left|\vec{u'}.\frac{\vec{v}}{v}\right|+v}{1+\left|\vec{u'}.\frac{\vec{v}}{v}\right|\frac{v}{c^2}}\ \textbf{(3)}$$

**Mà** $u=\sqrt{u_x^2+u_y^2}$ **thay (2) và (3) vào ta được:**

$$u=\sqrt{\left(\frac{\left|\vec{u'}.\frac{\vec{v}}{v}\right|+v}{1+\left|\vec{u'}.\frac{\vec{v}}{v}\right|\frac{v}{c^2}}\right)^2+\left(\frac{\left|\vec{u'}\wedge\frac{\vec{v}}{v}\right|\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}{1+\left|\vec{u'}.\frac{\vec{v}}{v}\right|\frac{v}{c^2}}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow u=\frac{1}{1+\left|\vec{u'}.\frac{\vec{v}}{v}\right|\frac{v}{c^2}}\sqrt{\left(\left|\vec{u'}.\frac{\vec{v}}{v}\right|+v\right)^2+\left(\left|\vec{u'}\wedge\frac{\vec{v}}{v}\right|\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow u=\frac{1}{1+\left|\vec{u'}.\frac{\vec{v}}{v}\right|\frac{v}{c^2}}\sqrt{\left(\left|\vec{u'}.\frac{\vec{v}}{v}\right|^2+2v\left|\vec{u'}.\frac{\vec{v}}{v}\right|+v^2\right)+\left(\left|\vec{u'}\wedge\frac{\vec{v}}{v}\right|\right)^2(1-(\frac{v}{c})^2)}$$

$$\Leftrightarrow u=\frac{1}{1+\left|\vec{u'}.\frac{\vec{v}}{v}\right|\frac{v}{c^2}}\sqrt{\left|\vec{u'}.\frac{\vec{v}}{v}\right|^2+2v\left|\vec{u'}.\frac{\vec{v}}{v}\right|+v^2+\left(\left|\vec{u'}\wedge\frac{\vec{v}}{v}\right|\right)^2-(\frac{v}{c})^2\left(\left|\vec{u'}\wedge\frac{\vec{v}}{v}\right|\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow u=\frac{1}{1+\left|\overrightarrow{u'}.\frac{\vec{v}}{v}\right|\frac{v}{c^2}}\sqrt{\left[\left|\overrightarrow{u'}.\frac{\vec{v}}{v}\right|^2+\left(\left|\overrightarrow{u'}\wedge\frac{\vec{v}}{v}\right|\right)^2\right]+2v\left|\overrightarrow{u'}.\frac{\vec{v}}{v}\right|+v^2+-(\frac{v}{c})^2\left(\left|\overrightarrow{u'}\wedge\frac{\vec{v}}{v}\right|\right)^2}$$

**Với lưu ý:**

$$\begin{cases}\left|\overrightarrow{u'}.\frac{\vec{v}}{v}\right|^2=\left(u'\cos\theta'\right)^2\\ \left(\left|\overrightarrow{u'}\wedge\frac{\vec{v}}{v}\right|\right)^2=(u'sin\theta)^2\end{cases}\Rightarrow\left[\left|\overrightarrow{u'}.\frac{\vec{v}}{v}\right|^2+\left(\left|\overrightarrow{u'}\wedge\frac{\vec{v}}{v}\right|\right)^2\right]=\left(u'\cos\theta'\right)^2+(u'sin\theta)^2=u'^2=\left(\overrightarrow{u'}\right)^2$$

**Do đó** $u=\dfrac{1}{1+\left|\overrightarrow{u'}.\frac{\vec{v}}{v}\right|\frac{v}{c^2}}\sqrt{u'^2+2v\left|\overrightarrow{u'}.\frac{\vec{v}}{v}\right|+v^2-(\frac{v}{c})^2\left(\left|\overrightarrow{u'}\wedge\frac{\vec{v}}{v}\right|\right)^2}$

$$\Leftrightarrow u=\frac{1}{1+\left|\overrightarrow{u'}.\vec{v}\right|\frac{1}{c^2}}\sqrt{\overrightarrow{u'}^2+2\overrightarrow{u'}\vec{v}+\vec{v}^2-(\frac{v}{c})^2\left(\left|\overrightarrow{u'}\wedge\frac{\vec{v}}{v}\right|\right)^2}=\frac{1}{1+\frac{\left|\overrightarrow{u'}.\vec{v}\right|}{c^2}}\sqrt{(\overrightarrow{u'}+\vec{v})^2-(\frac{v}{c})^2\left(\left|\overrightarrow{u'}\wedge\frac{\vec{v}}{v}\right|\right)^2}$$

$$\Rightarrow u=\frac{1}{1+\frac{\left|\overrightarrow{u'}.\vec{v}\right|}{c^2}}\sqrt{(\overrightarrow{u'}+\vec{v})^2-\frac{1}{c^2}\left(\left|\overrightarrow{u'}\wedge\vec{v}\right|\right)^2}=\frac{1}{1+\frac{(\overrightarrow{u'}.\vec{v})}{c^2}}\sqrt{(\overrightarrow{u'}+\vec{v})^2-\frac{1}{c^2}\left(\overrightarrow{u'}\wedge\vec{v}\right)^2}$$

**Bài 3.**

Theo đầu bài ta có:

$v_x = v$; $v_y = v_z = 0$; $u'_x = u'\cos\theta'$ ; $u'_y = u'\sin\theta'$ ; $u'_z = 0$

Thay các giá trị này vào biểu thức vận tốc u đã tìm được ở bài trên, ta có:

$$u_x=u\cos\theta=\frac{(v+u'\cos\theta')}{(1+\frac{1}{c^2}vu'\cos\theta')}$$

$$u_y=u\sin\theta=\frac{u'\sin\theta'.\sqrt{1-\beta^2}}{(1+\frac{1}{c^2}vu'\cos\theta')}$$

$U_z = 0$; $\beta^2=\dfrac{v^2}{c^2}$

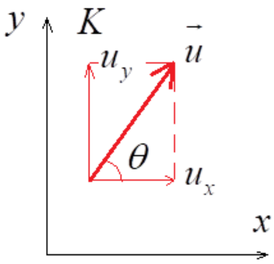
Từ đó suy ra:

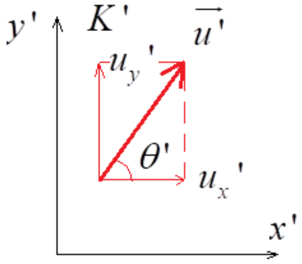
$tg\theta=\dfrac{u'\sqrt{1-\beta^2}\sin\theta'}{v+u'\cos\theta'}$ là góc hợp bởi u và trục Ox

CÁCH GIẢI KHÁC

Theo đầu bài ta có:

$v_x = v$; $v_y = v_z = 0$; $u'_x = u'\cos\theta'$ ; $u'_y = u'\sin\theta'$ ; $u'_z = 0$




Thay các giá trị này vào biểu thức vận tốc u đã tìm được ở bài trên, ta có:

$$u_x = u\cos\theta = \frac{(u'\cos\theta' + v)}{(1 + \frac{u'\cos\theta}{c^2}v)}$$

$$u_y = u\sin\theta = \frac{u_y'.\sqrt{1-\beta^2}}{(1+\frac{u_x'v}{c^2})} = \frac{u'\sin\theta'.\sqrt{1-\beta^2}}{(1+\frac{1}{c^2}vu'\cos\theta')}$$

$U_z = 0$; $\beta^2 = \frac{v^2}{c^2}$

Từ đó suy ra:

$tg\theta = \frac{u'\sqrt{1-\beta^2}\sin\theta'}{v + u'\cos\theta'}$ là góc hợp bởi u và trục Ox

**Bài 4.**

**CÁCH 1.** Chọn chiều dương là chiều của tên lửa 1.

a.Ta coi HQC QT K gắn tên lửa 2; Ta coi HQC QT K' gắn tên lửa 1. Khi đó Trái đất là vật có vận tốc $u_x$=0,8c và $u'_x$=-0,8c. Gọi v là vận tốc tên lửa 1(HQCK') đối với tên lửa 2( HQCK):

$$u_x = \frac{u_x' + v}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}} \to 0,8c = \frac{-0,8c + v}{1 + \frac{-0,8c}{c^2}v} \to v = \frac{1,6}{1,64}c = 0,97c$$

b.Ta coi HQC QT K gắn tên lửa 2; Ta coi HQC QT K' gắn trên Trái đất . Lúc này vận tốc của Trái đất đối với TL 2là vận tốc giữa K' đối với K là v=0,8c.

Khi đó tên lửa 1 có vận tốc đối với TL 2 $u_x=v_{12}$ và đối với Trái đất là $u'_x$=0,8c.

$$v_{12} = u_x = \frac{u_x' + v}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}} = \frac{0,8c + 0,8c}{1 + \frac{0,8c}{c^2}.0,8c} = \frac{1,6}{1,64}c = 0,97c$$

CÁCH 2.

a. Sau mỗi giây, hai tên lửa tách xa nhau một quãng đường bằng 480000km. Lưu ý rằng ở đây không nói về vận tốc của một vật, do đó không mâu thuẫn gì với tiên đề giá trị giới hạn của vận tốc bằng vận tốc ánh sáng (300000km/s).

Hoặc theo quan điểm cổ điển thì $v_{12}$=1,6c

Theo quan điểm tương đối tính thì $v_{12} = v = \frac{v_{1d} + v_{d2}}{1 + \frac{v_{1d}v_{d2}}{c^2}} = \frac{0,8c + 0,8c}{1 + \frac{0,64c^2}{c^2}} = 0,976c = 2,93.10^8 m/s$

Với $v_{1d}$=v; $v_{d2} = v$; $v_{2d} = -v$

b) V: vận tốc của Trái Đất đối với một tên lửa.

v': vận tốc của tên lửa kia đối với Trái Đất.
v: vận tốc tên lửa thứ hai đối với tên lửa đầu.

$$v=\frac{v'+V}{1+\frac{Vv}{c^2}}=\frac{0,8c+0,8c}{1+\frac{0,64c^2}{c^2}}=0,976c=2,93.10^8 m/s$$

**Bài 5.** Tính thời gian **$T_1$** để dòng hạt còn lại 1% trong hệ quy chiếu riêng của mêzôn $\mu$ (dùng công thức của N(t) cho trong đầu bài). Từ đó tính được thời gian **$T'_1$** để dòng hạt đi xuống đến mặt đất (đối với hệ quy chiếu Trái Đất). Biết được vận tốc của mêzôn $\mu$ và V = 0,99c ta tìm dễ dàng được độ cao đó H=V **$T'_1$=19,4km**.

-Xét trong HQC gắn với hạt mêzôn $\mu$ :

$N = N_0e^{-\lambda t_0} = N_0e^{-\frac{t_0}{\tau}} \rightarrow t_0 = \tau\ln\frac{N}{N_0} = \tau\ln\frac{1}{100}$; với $\tau$ là thời gian sông của hạt trong hQC gắn với hạt

-Đối với QSV đứng yên mặt đất (HQC K gắn đất)

$$t = \gamma t_0 = \frac{t_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Và độ cao hạt mezon sinh ra là $h = vt = v\frac{t_0}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} = v\frac{\tau\ln\frac{1}{100}}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$

Thay số ta được h=19,4km

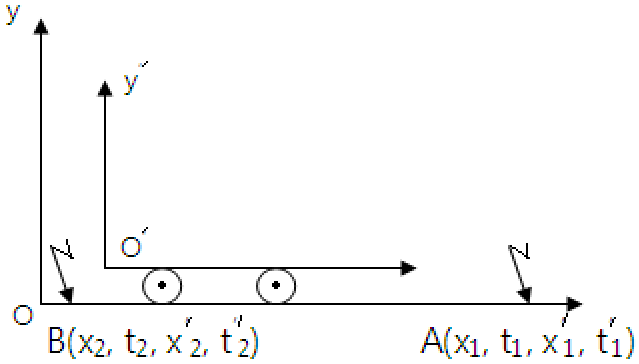
LƯU Ý THỜI GIAN SỐ VA CHU KÌ BÁN RÃ.

$$\begin{cases}\frac{N_0}{2} = N_0.2^{-\frac{t}{T}} \\ \frac{N_0}{e} = N_0.2^{-\frac{t}{\tau}}\end{cases} \rightarrow \begin{cases} N = N_0.e^{-\frac{\ln 2}{T}t} \\ N = N_0.e^{-\frac{t}{\tau}}\end{cases} \rightarrow \tau = \frac{T}{\ln 2}$$

**Bài 6.**

Trên hình kí hiệu toạ độ và thời gian của hai sét đó là A ($x_1$, $t_1$ ; $x'_1$, $t'_1$) , B($x_2$, $t_2$ ; $x'_2$, $t'_2$), với $x_1 > x_2$. V là vận tốc của xe. Áp dụng công thức biến đổi toạ độ,

$$t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - t_1 - \frac{V}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$



Giả thiết cho $t'_2 = t'_1$ nên $t'_2 - t'_1 = \dfrac{t_2 - t_1 - \dfrac{V}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}} = 0$

từ đó suy ra: $t_2 - t_1 = \dfrac{V}{c^2}(x_2 - x_1)$

vì $\dfrac{V}{c^2} > 0$, $x_2 - x_1 < 0$ cho nên $t_1 > t_2$

như vậy sét đánh ở B trước (phía sau xe) ở A sau (trước xe).

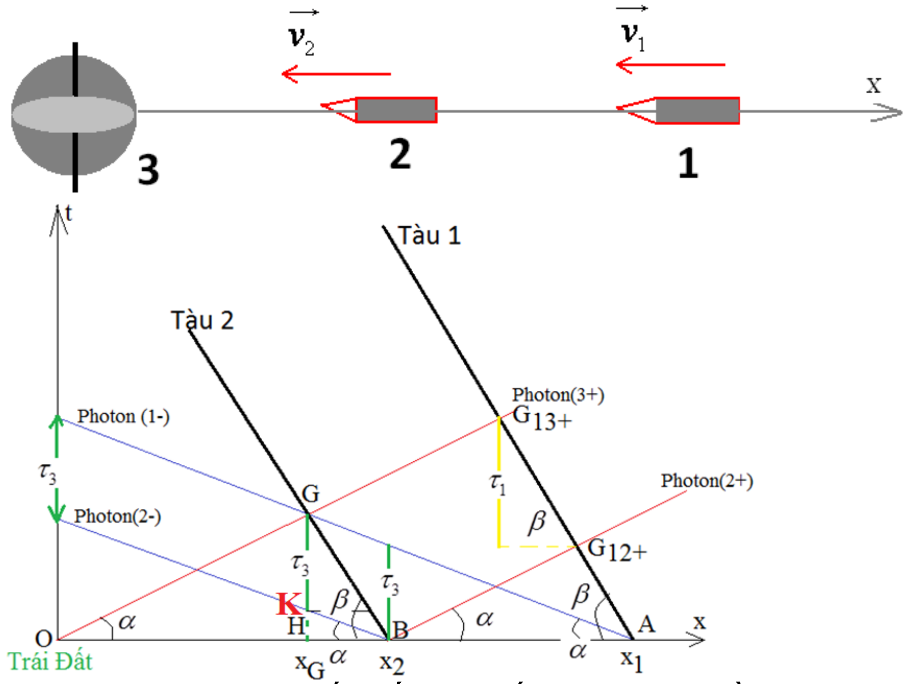
**Bài 7.**

Ở đây người trên Trái Đất quan sát thấy, nên giải bài toán giống hệ bài toán động học chất điểm cổ điển bình thường.

Ta hãy tự mở rộng bài toán: $\tau_1, \tau_2, \tau_3$ là thời gian thấy của những quan sát viên khác nhau trong từng HQC.

Ngoài cách giải thông thường ta có thể giải bằng đồ thị:

Nhưng lưu ý ở đây thời điểm xuất phát các photon trong hệ quy chiếu gắn với đất là như nhau.




-Xét Trong hệ quy chiếu gắn với đất ta vẽ được đồ thị thời gian của các tàu và các pho tôn như trên. Lưu ý $\tau_2 = \dfrac{\tau_2'}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} = \dfrac{0}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} = 0$ do đó các đồ thị cắt nhau tại G.

Hệ số góc các đường thẳng có độ lớn: của các pho ton là $\tan\alpha = \dfrac{1}{c}$ ; của các tàu là $\tan\beta = \dfrac{1}{v}$

+ Khi photon (1-), photon(3+) và tàu 2 gặp nhau ( tại G trên đồ thị) thì ta thấy tọa độ của G là OH=$\dfrac{1}{2}OA$ ; vì tam giác OGA cân tại G, hay $x_G = \dfrac{x_1}{2}$ (1)

Khi đó ta thấy $\tau_1$ cũng chính là đoạn GH: $\begin{cases} \tau_1 = GH = OH\tan\alpha = x_G\dfrac{1}{c} = \dfrac{x_1}{2c} \quad (2) \\ \tau_1 = GH = HB\tan\beta = (x_2 - x_G)\dfrac{1}{v} (3) \end{cases}$

Từ (2) và (3) ta suy ra được $(x_2 - x_G)\dfrac{1}{v} = \dfrac{x_1}{2c} \rightarrow (x_2 - \dfrac{x_1}{2})\dfrac{1}{v} = \dfrac{x_1}{2c} \Rightarrow x_2 = \dfrac{x_1(c+v)}{2c}$ (4)

Và từ (2) : $x_1 = 2\tau_1 c$ (2')

Vậy $\tau_3 = \dfrac{x_1}{c} - \dfrac{x_2}{c} = \dfrac{x_1 - x_2}{c}$ (5)

Thay (4) vào (5) và kết hợp với (2') ta được $\tau_3 = \dfrac{x_1 - x_2}{c} = \dfrac{x_1 - \dfrac{x_1(c+v)}{2c}}{c} = \dfrac{x_1}{c}\left(1 - \dfrac{(c+v)}{2c}\right)$

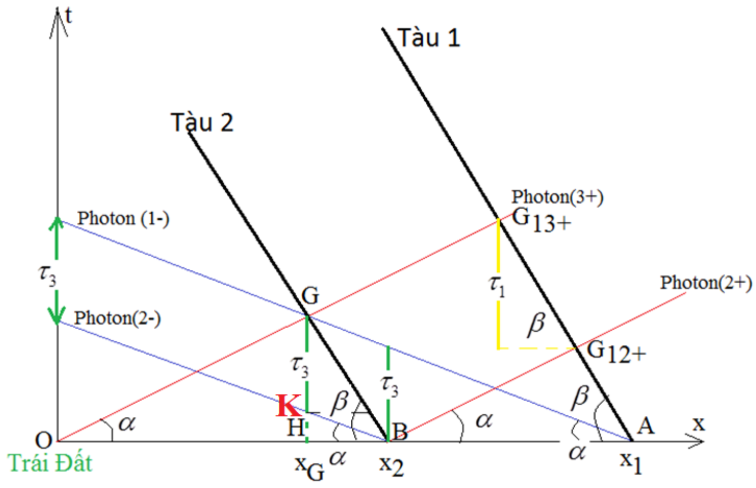
$\tau_3 = \dfrac{x_1}{c}\dfrac{(c-v)}{2c} = \dfrac{2\tau_1 c}{c}\dfrac{(c-v)}{2c} = \tau_1(1 - \dfrac{v}{c})(6)$

Lưu ý: $\tau_1$ là thời gian theo quan điểm người trên trái đất đo được bằng đồng hồ gắn tai đất; $\tau_1'$=1 là thời gian theo quan điểm người trên trái đất đo được bằng đồng hồ gắn trên con tàu 1:

Ta có quan hệ giữa hai thời gian $\tau_1 = \dfrac{\tau'_1}{\sqrt{1-(\dfrac{v}{c})^2}}$ (7)

Nên thay (6) vào (7) ta được $\tau_3 = \dfrac{\tau'_1}{\sqrt{1-(\dfrac{v}{c})^2}}(1-\dfrac{v}{c}) = \tau'_1\sqrt{\dfrac{c-v}{c+v}} = 1\sqrt{\dfrac{1-0,6}{1+0,6}} = 0,5s$

CÁCH 2 NGẮN HƠN NHIỀU:




Ta có $\tau_1$ =GH=HB$\tan\beta$ $\rightarrow HB = \dfrac{\tau_1}{\tan\beta}$ (1)

Và $\tau_1$ =GK+KH=$\tau_3$ +HB$\tan\alpha$ (2)

Thay (1) vào (2) ta được $\tau_1 = \tau_3 + \frac{\tau_1}{\tan\beta}\tan\alpha = \tau_3 + \tau_1\frac{\frac{1}{c}}{\frac{1}{v}} = \tau_3 + \tau_1\frac{v}{c}$

$$\tau_3 = \tau_1(1-\frac{v}{c}) = \frac{\tau_1'}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}(1-\frac{v}{c}) = \tau_1'\sqrt{\frac{c-v}{c+v}} = 1.\sqrt{\frac{1-0,6}{1+0,6}} = 0,5s$$

**Bài 8.**

**a.**Theo cách tính của người em **( HQC QT GẮN VỚI NGƯỜI EM)**: Quãng đường mà người anh đã đi là L= 24nas nên thời gian chuyển động của người anh là $T = \frac{24nas}{0,8c} = 30$ năm. do đó khi gặp nhau người em đã 20+30 = 50 tuổi. Nhưng người em thấy thời gian trôi qua trong tàu là chậm hơn, do đó người anh mới sống thêm $T' = \frac{T}{\gamma}$ năm, với $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{1}{0,6}$ nên T' = 18 năm và tuổi của người anh khi gặp nhau là 20+18 = 38 tuổi. Như thế người em kết luận: anh trẻ hơn mình 12 tuổi.

b. ( HQC QT GẮN VỚI NGƯỜI ANH)Theo cách tính của người anh: Trong hệ gắn với trái đất quãng đường là L= 24nas, do đó trong hệ gắn với tàu, người anh thấy nó co lại thành $L' = \frac{L}{\gamma} = 14,4nas$ và anh đi mất $T' = \frac{14,4c}{0,8c} = 18$ năm. do đó khi gặp em anh có 20 +18 = 38 tuổi. Cũng theo người anh thì thời gian trên trái đất trôi chậm hơn, T' = 18 năm của anh ta ứng với $T = \frac{T'}{\gamma} = 10,8$ năm trên trái đất, nên khi gặp em thì em có 20 + 10,8 = 30,8 tuổi. Anh kết luận: em trẻ hơn 7,2 tuổi.

**Bài 9**

Đối với quan sát viên O thì máy bay và đồng hồ gắn với mặt đất có vận tốc tương ứng là $V_b$ và $V_d$ nên thời gian trôi chậm hơn. Nếu $t_0$ , $t_b$ và $t_d$ tương ứng là thời gian bay đối với O, máy bay và mặt đất, thì: $t_0 = \gamma_b t_b = \gamma_đ t_đ$,

với $\gamma_b = \left[1-\left(\frac{V_b}{c}\right)^2\right]^{-1/2} \approx 1+\frac{V_b^2}{2c^2}; \gamma_d = \left[1-\left(\frac{V_d}{c}\right)^2\right]^{-1/2} \approx 1+\frac{V_d^2}{2c^2};$

$$\frac{t_b}{t_d} = \frac{\gamma_d}{\gamma_b} \approx 1+\frac{V_d^2-V_b^2}{2c^2}$$

$$\Delta t = t_b - t_d = t_d\left(\frac{t_b}{t_d}-1\right) = t_d\frac{V_d^2-V_b^2}{2c^2} \quad (1)$$

- Khi bay theo hướng đông: $V_b = V_d + V$. Thay số trong (1) sẽ có $\Delta t_D \approx -236ns$
- Khi bay theo hướng tây: $V_b = V_d - V$, từ đó có $\Delta t_T = 124ns$

Như vậy $\Delta t_T - \Delta t_D = 360ns$, nghĩa là bay theo hướng Đông ngắn hơn theo hướng Tây.

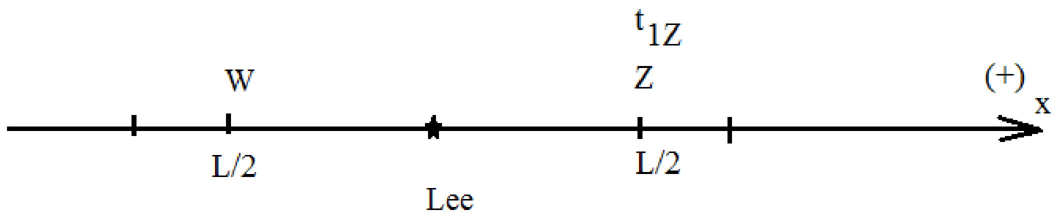
**Bài 10.**

1. Cách 1.Khi Zhang vỗ tay thì Zhang thấy mình đã đi được quãng đường đối với Zhang(đã co so với Lee) là $\frac{L}{2}\sqrt{1-\beta^2}$ do đó $t_{1Z} = \frac{\frac{L}{2}\sqrt{1-\beta^2}}{v} = \frac{L}{2v}\sqrt{1-\beta^2} = T$

Cách 2. Khi Zhang vỗ tay thì so với HQC gắn mặt đất(Lee) thì Zhang đã đi được một đoạn L/2. Khi đó đồng hồ của Lee là $t_{1L}$, của Zhang và Wang là $t_{1Z}$:

$$t_{1L} = \frac{L/2}{v} = \frac{L}{2v} \qquad (1)$$

Và $t_{1Z} = t_{1L}\sqrt{1-\beta^2} = \frac{L}{2v}\sqrt{1-\beta^2} = T$ (2)




Lưu ý:

+thời điểm Zang vỗ tay khác thời điểm Lee thấy Zhang vỗ tay.

+ Công thức cộng vận tốc $v_{13} = \frac{v_{12}+v_{23}}{1+\frac{v_{12}v_{23}}{c^2}}; v_{12} = \frac{v_{13}-v_{23}}{1-\frac{v_{13}v_{23}}{c^2}}$

Vậy nếu chọn chiều dương là chiều chuyển động của Zhang thì:

+ Vận tốc của Zhang đối với Wang là $v_{ZW} = \frac{v_{ZL}+v_{LW}}{1+\frac{v_{ZL}v_{LW}}{c^2}} = \frac{v+v}{1+\frac{vv}{c^2}} = \frac{2v}{1+\frac{v^2}{c^2}} = \frac{2\frac{v}{c}c}{1+\beta^2} = \frac{2\beta c}{1+\beta^2} = \mathrm{v}_r$

2. Zhang chuyển động với vận tốc $v_r = \frac{2\beta c}{1+\beta^2}$ so với Wang.

Nên $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v_r}{c})^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{\frac{2\beta c}{1+\beta^2}}{c})^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{2\beta}{1+\beta^2})^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1+2\beta^2+\beta^4-4\beta^2}{(1+\beta^2)^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1-2\beta^2+\beta^4}{(1+\beta^2)^2}}}$

$$\Leftrightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{\frac{1-2\beta^2+\beta^4}{(1+\beta^2)^2}}} = \frac{1+\beta^2}{1-\beta^2} \ (4)$$

**Trong HQC gắn với Zhang** :

Thời điểm Zhang vỗ tay lần 1, đồng hồ Zhang chỉ là $t_{1Z} = \dfrac{\frac{L}{2}\sqrt{1-\beta^2}}{v} = \dfrac{L}{2v}\sqrt{1-\beta^2} = T$ (so với Zhang)

Khi đó Wang cách Zhang tính theo cách của Zhang là $v_r t_{1Z} = \dfrac{2\beta c}{1+\beta^2}T$

-Thời gan tín hiệu sáng từ lúc Zhang vỗ tay lần 1 đến lúc Wang nhận được, theo Zhanh đo được là $\Delta t_{1Z}$

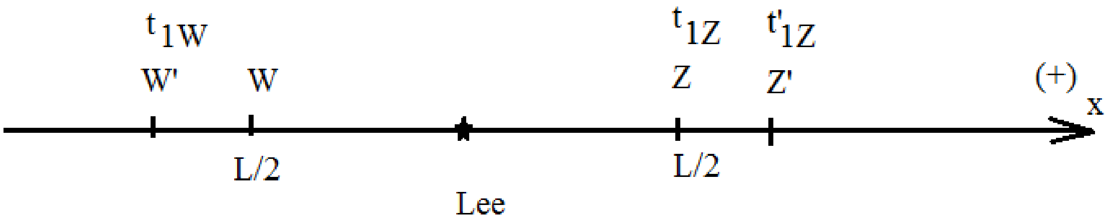
$$c.\Delta t_{1Z} = v_r.\Delta t_{1Z} + v_r T \Rightarrow \Delta t_{1Z} = \frac{v_r T}{c - v_r} = \frac{2\beta}{(1-\beta)^2}T$$

-Khi Wang nhận tín hiệu vỗ tay thì đồng hồ của Zhang chỉ là

$$t_{1Z}' = t_{1Z} + \Delta t_{1Z} = T + \frac{2\beta}{(1-\beta)^2}T = T\frac{1+\beta^2}{(1-\beta)^2}$$

Khi Wang nhận tín hiệu lần 1 thì đồng hồ Wang chỉ

$$t_{1W} = \frac{t_{1Z}'}{\sqrt{1-\frac{v_r^2}{c^2}}} = \gamma\, t_{1Z}' = \frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}T\frac{1+\beta^2}{(1-\beta)^2} = T\frac{(1+\beta^2)^2}{(1-\beta^2)(1-\beta)^2} = \frac{(1+\beta^2)^2}{(1-\beta^2)(1-\beta)^2}t_{1Z}\,(*)$$




Vậy khi Wang vỗ tay lần 1 ($t_{1W}$ ) đúng thời điểm Wang nhận tín hiệu vỗ tay của Zhang lần 1. Nên tương tự Zhang nhận tín hiệu vỗ tay lần 1 từ Wang cũng chính là thời điểm Zang vỗ tay lần 2

$$t_{2Z} = \frac{(1+\beta^2)^2}{(1-\beta^2)(1-\beta)^2}t_{1W} = \left[\frac{(1+\beta^2)^2}{(1-\beta^2)(1-\beta)^2}\right]^2 T$$

Wang nhận vỗ tay lần 2 từ Zhang là $t_{2W} = \dfrac{(1+\beta^2)^2}{(1-\beta^2)(1-\beta)^2}t_{2Z} = \left[\dfrac{(1+\beta^2)^2}{(1-\beta^2)(1-\beta)^2}\right]^3 T = A^3 T$

Zhang nhận vỗ tay lần 2 từ Wang là $t_{3Z} = \dfrac{(1+\beta^2)^2}{(1-\beta^2)(1-\beta)^2}t_{2W} = \left[\dfrac{(1+\beta^2)^2}{(1-\beta^2)(1-\beta)^2}\right]^4 T$

Wang nhận vỗ tay lần 3 từ Zhang là $t_{3W}=\frac{(1+\beta^2)^2}{(1-\beta^2)(1-\beta)^2}t_{3Z}=\left[\frac{(1+\beta^2)^2}{(1-\beta^2)(1-\beta)^2}\right]^5 T=A^5T$

Zhang nhận vỗ tay lần 3 từ Wang là $t_{4Z}=\frac{(1+\beta^2)^2}{(1-\beta^2)(1-\beta)^2}t_{3W}=\left[\frac{(1+\beta^2)^2}{(1-\beta^2)(1-\beta)^2}\right]^6 T$

Vậy $t_{nW}=A^{2n-1}T\rightarrow t_{n-1W}=A^{2(n-1)-1}T=A^{2n-3}T$

Do đó $t_{nZ}=At_{n-1W}=A^{2n-3}.AT=A^{2(n-1)}T$

Vậy khi nhóm Zhang vỗ tay lần thứ n thì đồng hồ Zhang chỉ là

$$t_{nZ}=\left[\frac{(1+\beta^2)^2}{(1-\beta^2)(1-\beta)^2}\right]^{2(n-1)} T$$

Khi đó đòng hồ Lee đo là $t_L$:

$$t_L=\frac{t_{nZ}}{\sqrt{1-\beta^2}}=\left[\frac{(1+\beta^2)^2}{(1-\beta^2)(1-\beta)^2}\right]^{2(n-1)}\frac{T}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Theo Lee hai nhóm cách  xa nhau là

$$d=t_L v=\left[\frac{(1+\beta^2)^2}{(1-\beta^2)(1-\beta)^2}\right]^{n+1}\frac{Tv}{\sqrt{1-\beta^2}}=\left[\frac{(1+\beta^2)^2}{(1-\beta^2)(1-\beta)^2}\right]^{n+1}\frac{\frac{L}{2v}\sqrt{1-\beta^2}v}{\sqrt{1-\beta^2}}=\left[\frac{(1+\beta^2)^2}{(1-\beta^2)(1-\beta)^2}\right]^{n+1}\frac{L}{2}$$

3.Theo Lee sẽ thấy nhóm Zhang và Wang vỗ tay vào những thời điểm :

+Zhang: $\frac{t_{1Z}}{\sqrt{1-\beta^2}};\frac{t_{2Z}}{\sqrt{1-\beta^2}};\frac{t_{3Z}}{\sqrt{1-\beta^2}}.....\frac{t_{nZ}}{\sqrt{1-\beta^2}}$

+Wang: $\frac{t_{1W}}{\sqrt{1-\beta^2}};\frac{t_{2W}}{\sqrt{1-\beta^2}};\frac{t_{3W}}{\sqrt{1-\beta^2}}.....\frac{t_{nW}}{\sqrt{1-\beta^2}}$

LỜI BÀN THÊM

Trong công thức (*) có HS đưa ra công thức tính $t'_{1Z}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_r^2}{c^2}}}(t_{1W}-\frac{v_r}{c^2}x_{1W})$ và cho rằng $x_{1W}=0$,

từ đó đưa ra một kết quả sai $t_{1W}=t'_{1Z}\sqrt{1-\frac{v_r^2}{c^2}}$(**)

-Điều này có thể hiểu : Khi Zhang đau bụng thì đồng hồ của Zhang do Zhang đọc là $t_{1Z}$' và đồng hồ của Wang do Wang đọc là $t_{1W}$. Do đó $x_{1W} = t_{1W}v_r$ . Từ đó thay $x_{1W} = t_{1W}v_r$ vào biểu thức HS đưa ra ta được:

$$t'_{1Z} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_r^2}{c^2}}}(t_{1W} - \frac{v_r}{c^2}t_{1W}v_r) \Rightarrow t_{1W} = \frac{t'_{1Z}}{\sqrt{1-\frac{v_r^2}{c^2}}}$$ trở về công thức (*)

-Việc HS cho rằng $x_{1W}$=0, là sai lầm. Ta có thể cho HS hiểu như sau: Khi đau bụng thì Zhang đọc đồng hồ của mình là $t_{1Z}$' thì Wang đọc đồng hồ của mình tại thời điểm đó là $t_{1W}$.

**Bài 11.**

**1) Hệ thức liên hệ giữa S và S'**

- Trong hệ quy chiếu K', ta có diện tích : S' = 0,5h.$l_0$ (1)

Với h là đường cao của tam giác đều , $l_0$ là độ dài cạnh của tam giác.

- Trong hệ quy chiếu quán tính K , ta có diện tích : S = 0,5h.l (2)

Với l là độ dài cạnh của tam giác trong hệ K.

-Ta có chiều dài dọc theo phương chuyển động là : $l = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ . (3)

Thay v = 0,6c vào (35) , ta được : l = 0,8.$l_0$ (4)

- Thay (36) vào (34) , ta có : S = 0,5h.$l_0$.0,8 = 0,8.S' (5)

**2) Các góc của tam giác :**

- Ta có : $tg\alpha = \frac{\frac{l}{2}}{h}$, với h = $l_0\frac{\sqrt{3}}{2}$ (6)

- Vậy : $tg\alpha = \frac{l.2}{2.l_0.\sqrt{3}} = \frac{0,8}{\sqrt{3}} = 0,47 \rightarrow \alpha = 25^0$ (7)

- Vậy : $\hat{A} = 2\alpha = 50^0$, (8)

$\hat{B} = \hat{C} = 90^0 - 25^0 = 65^0$ (9)

**Bài 12.** Từ các công thức của phép biến đổi Lorentz (các công thức của phép biến đổi ngược cũng giống như các công thức này, chỉ có điều thay v thành – v):

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, y' = y, z' = z, t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Lấy vi phân hai vế của các công thức tương ứng:

$$dx' = \frac{dx - vdt}{\sqrt{1-\beta^2}}, dy' = dy, dz' = dz, dt' = \frac{dt - \frac{v}{c^2}dx}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Các thành phần vận tốc:

$$u'_{x'} = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - vdt}{dt - \frac{v}{c^2}dx} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}u_x};$$

$$u'_{y'} = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy\sqrt{1-\beta^2}}{dt - \frac{v}{c^2}dx} = \frac{u_y\sqrt{1-\beta^2}}{1-\frac{v}{c^2}u_x};$$

$$u'_{z'} = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz\sqrt{1-\beta^2}}{dt - \frac{v}{c^2}dx} = \frac{u_z\sqrt{1-\beta^2}}{1-\frac{v}{c^2}u_x}.$$

(Trong bài này các trục trong hệ K và K' tương ứng cùng hướng nên ta có thể viết $u'_{y'}$ hay $u'_y$ đều được.)

Phép biến đổi ngược lại (thay v bởi – v):

$$u_x = \frac{u'_{x'}+v}{1+\frac{v}{c^2}u'_{x'}},\ u_y = \frac{u'_{y'}\sqrt{1-\beta^2}}{1+\frac{v}{c^2}u'_{x'}},\ u_z = \frac{u'_{z'}\sqrt{1-\beta^2}}{1+\frac{v}{c^2}u'_{x'}}$$

a. Vận tốc dọc trục Ox. Giả sử $\vec{u} = (u,0,0)$. Như vậy $\vec{u}' = \left(\frac{u-v}{1-\frac{v}{c^2}u}, 0, 0\right)$. Lấy vi phân hai vế các thành phần tương ứng của $\vec{u}'$ rồi chia cho $dt'$:

$$\frac{du'_{x'}}{dt'} = \frac{\left[\left(1-\frac{v}{c^2}u\right)du + (u-v)\frac{v}{c^2}du\right]\sqrt{1-\beta^2}}{\left(1-\frac{v}{c^2}u\right)^2\left(dt-\frac{v}{c^2}dx\right)}$$

$$= \frac{\left(du-\frac{v}{c^2}du\right)\sqrt{1-\beta^2}}{\left(1-\frac{v}{c^2}u\right)^2\left(dt-\frac{v}{c^2}dx\right)} = \frac{\left(1-\beta^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(1-\frac{v}{c^2}u\right)^3}a$$

Suy ra: $\vec{a}' = (a',0,0)$

$$a' = \frac{\left(1-\beta^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(1-\frac{v}{c^2}u\right)^3}a$$

b. Vận tốc dọc trục Oy. Giả sử $\vec{u} = (0,u,0)$. Như vậy $\vec{u}' = \left(-v, u\sqrt{1-\beta^2}, 0\right)$. Lấy vi phân hai vế các thành phần tương ứng của $\vec{u}'$ rồi chia cho $dt'$: $a'_{x'} = a'_{z'} = 0;\ a'_{y'} = a'$

$$a' = \frac{du'_{y'}}{dt'} = \frac{\left(1-\beta^2\right)du}{dt-\frac{v}{c^2}dx} = \frac{\left(1-\beta^2\right)a}{1-\frac{v}{c^2}u_x} = \left(1-\beta^2\right)a$$

c. Vận tốc nằm trong mặt phẳng xOy hợp với $\vec{v}$ góc α. Giả sử $\vec{u} = (u_x,u_y,u_z) = (u\cos\alpha, u\sin\alpha, 0)$. Ta có thể coi như chuyển động trong hệ quy chiếu K có hai chuyển động, một chuyển động theo phương Ox với vận tốc $u_x$ có gia tốc $a_x$, một chuyển động theo phương Oy với vận tốc $u_y$ có gia tốc $a_y$. Trong hệ quy chiếu K', $\vec{u}' = (u'_{x'}, u'_{y'}, 0)$. Có thể coi như hai chuyển động, một chuyển động theo phương O'x' với vận tốc $u'_{x'}$ có gia tốc $a'_{x'}$, một chuyển động theo phương O'y' với vận tốc $u_{y'}$ có gia tốc $a'_{y'}$.

Đối với thành phần theo trục O'x' của gia tốc, từ công thức gia tốc thu được ở phần (a):

$a'=\dfrac{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}{\left(1-\dfrac{v}{c^2}u\right)^3}a$ ta thay u→$u_x$, a→$a_x$, a'→$a'_x$, đó là

$$a'_{x'}=\frac{a\cos\alpha\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}{\left(1-\dfrac{uv\cos\alpha}{c^2}\right)^3}$$

**Chú ý**: Đối với thành phần theo trục O'y', việc suy luận kết quả từ phần (b) rất dễ bị nhầm lẫn do trong phần (b), vận tốc theo phương x trong HQC K là không đổi nhưng trong phần (c) thì nó thay đổi theo thời gian. Vì vậy, ta cần lấy vi phân từ công thức gốc:

$$u'_{y'}=\frac{u_y\sqrt{1-\beta^2}}{1-\dfrac{v}{c^2}u_x}.$$

Lấy vi phân công thức trên ta được:

$$du'_{y'}=\frac{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}\times\left(1-\dfrac{v}{c^2}u_x\right)du_y-u_y\times\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}\times\left(-\dfrac{v}{c^2}\right)du_x}{\left(1-\dfrac{v}{c^2}u_x\right)^2}$$

Rút gọn $\dfrac{du'_{y'}}{dt'}$ ta được:

$$a'_{y'}=\frac{\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)\times\left[\left(1-\dfrac{v}{c^2}u_x\right)a_y+\dfrac{v}{c^2}u_ya_x\right]}{\left(1-\dfrac{v}{c^2}u_x\right)^3}$$

Sử dụng

$u_y=u.\sin\alpha, u_x=u.\cos\alpha,$

$a_y=a.\sin\alpha, a_x=a.\cos\alpha,$

ta được:

$$a'_{y'}=\frac{\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)\times a.\sin\alpha}{\left(1-\dfrac{v}{c^2}u.\cos\alpha\right)^3}.$$

# X.2 ĐỘNG LỰC HỌC- NĂNG XUNG LƯỢNG TƯƠNG ĐỐI TÍNH

**Bài 1**
Với $v_0$ = 0,6.c thì suy ra $\gamma_0$ = 1,25
Biểu thức bảo toàn động lượng: $\gamma_0.m_0.v_0 = \gamma.m.v$ (1)
Biểu thức bảo toàn năng lượng: $\gamma_0.m_0.c^2 + m_1c^2 = \gamma.m.c^2$ (2)
Từ (2) ta tính được $\gamma$=3,25 thay vào (1) ta được: v = $\frac{3}{13}$c= 0,23c; m = $\sqrt{10}$=3,17 kg
Khối lượng nghỉ đã tăng 0,08 kg, ứng với năng lượng $0,08.561.10^{27} = 44,9.10^{27}$ MeV (3)
Động năng phải giảm một lượng tương đương.

$$K_0 = (\gamma_0-1)m_0c^2 = 140,25.10^{27} \text{ MeV}$$
$$K = (\gamma-1)mc^2 = 96,76.10^{27} \text{ MeV}$$

Độ giảm là $K_0 - K = 43,5.10^{27}$ MeV, phù hợp với (3) trong phạm vi sai số.

**Bài 2.** Năng lượng toàn phần của hạt tới:

$$E_0 = 1000 + 250 = 1250 \text{ MeV}$$

Biểu thức động lượng của hạt tới:

$$E_0^2 = (p_0c)^2 + (m_0c^2)^2 \text{ suy ra } p_0 = 750 \text{ MeV/c}$$

Biểu thức bảo toàn động lượng:

$P_0 = p = \gamma mv$, với $v = \beta c$, ta có:

$750 = \gamma.m.\beta c$. suy ra $\beta = \frac{750}{c.\gamma.m}$ (1)

Từ định luật bảo toàn năng lượng $E_0+K_0= E$ hay $\gamma_0.m_0.c^2 + m_1c^2 = \gamma.m.c^2$
ta suy ra

$\gamma.m = 4250$ MeV/$c^2$. Thay vào (1) ta được:

$$\beta = \frac{750\,(MeV/c)}{c.4250\,(MeV/c^2)} = 0,176 \Rightarrow v = 0,176\,c$$

Suy ra $\gamma$ = 1,106 và m = 4250/1,016 = 4183 MeV/$c^2$.
**Kiểm chứng**: Khối lượng nghỉ đã tăng 183 $\frac{MeV}{c^2}$ vậy động năng phải giảm 183MeV.
Động năng của hạt tạo thành

$$K = (\gamma - 1)mc^2 = 0,016.4183 = 67MeV$$
$$K_0 - K = 250 - 67 = 183MeV$$

Đây chính là độ giảm động năng đã tính được ở trên.
**Bài 3.** Định luật bảo toàn năng lượng cho:

$$m_\pi c^2 = \frac{m_\mu c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + W_v \quad (1)$$

Một hạt khối lượng nghỉ $m_0$= thì luôn có động lượng $p = \frac{E}{c}$ vì hệ thức sau luôn đúng $E^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2$.

Định luật bảo toàn xung lượng cho:

$$\frac{m_\mu v}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{W_v}{c} \qquad (2) \qquad (\beta = \frac{v}{c})$$

Khử $W_v$ (năng lượng của nơtrinoo) trong (1) và (2), ta có:

$$\frac{v}{c} = \beta = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{m_\pi^2 + m_\mu^2} \qquad (3)$$

Động năng của mêzôn $\mu$ bằng:

$$K = W - W_0 = m_\mu c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right) \qquad (4)$$

Thay (3) vào (4), ta được động năng K:

$$K = \frac{(m_\pi - m_\mu)^2}{2m_\pi}c^2$$

**Bài 4.**

Cách 1( Hay): Giả sử photon tự do có thể sinh cặp, khi đó ta có:

$$\begin{cases} \varepsilon = E_1 + E_2 \\ \vec{p} = \vec{p_1} + \vec{p_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 \\ p^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2\vec{p_1}.\vec{p_2} \end{cases}.$$

Với $\varepsilon$ là năng lượng photon; $E_1$, $E_2$ là năng lượng toàn phần hạt $e^+$ và $e^-$

$$\begin{cases} \varepsilon^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 \\ p^2c^2 = p_1^2c^2 + p_2^2c^2 + 2\vec{p_1}.\vec{p_2}c^2 \end{cases}$$

Lấy biểu thức trên trừ biểu thức dưới, ta được $\varepsilon^2 - p^2c^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 - p_1^2c^2 - p_2^2c^2 - 2\vec{p_1}\vec{p_2}c^2$

Lưu ý $E_1^2 = p_1^2c^2 + m_0c^2$; $E_2^2 = p_2^2c^2 + m_0c^2$; $m_0$ là khối lượng nghỉ từng hạt

Thay vào ta được $0 = 2E_0^2 + 2E_1E_2 - 2\vec{p_1}\vec{p_2}c^2 \quad \to E_0^2 + E_1E_2 - \vec{p_1}\vec{p_2}c^2 = 0$

$$\Rightarrow \vec{p_1}\vec{p_2}c^2 = E_0^2 + E_1E_2 \qquad (1)$$

Mà ta lại có: $\begin{cases} E_1^2 - p_1^2c^2 = E_0^2 > 0 \Rightarrow |\vec{p_1}c| < E_1 \\ E_2^2 - p_2^2c^2 = E_0^2 > 0 \Rightarrow |\vec{p_2}c| < E_2 \end{cases}$ suy ra $|\vec{p_1}c||\vec{p_2}c| < E_1E_2$ (2)

Mặt khác $\vec{p_1}\vec{p_2}c^2 \le |\vec{p_1}c||\vec{p_2}c|$. (3)

Thay (1) vào (3) ta được $|\vec{p_1}c||\vec{p_2}c| \ge E_1E_2 + E_0^2$ (4)

So sánh (4) và (2) hiển thị điều vô lí. Vậy hiệu ứng sinh cặp của **photon tự do** không thể xảy ra.

**CÁCH 2**

Kí hiệu vectơ năng – xung lượng 4 chiều của êlectron, pôzitôn và phôtôn lần lượt là $p_-$ ; $p_+$ và k. Nếu có sự biến đổi phôtôn thành cặp êlectron – positron.

-Áp dụng định luật bảo toàn năng xung lượng viết được:

$$k = p_- + p_+ \qquad (1)$$

hay bình phương hai vế: $k^2 = p_-^2 + p_+^2 + 2\vec{p_-}\vec{p_+}$ (2)

Mặt khác vì $p_\pm = (p_{\pm c}; \frac{i}{c}W^\pm)$ mà $W^{\pm 2} = c^2(p_\pm^2 + m_\pm^2c^2)$, cho nên ta có:

$p_-^2 = p_+^2 = -m^2c^2$ ($m_+ = m_- = m$)

$k^2 = 0$, khối lượng nghỉ của phô tôn bằng không, thay vào (2) ta được: $p_-p_+ = m^2c^2$ (3)

Mặt khác: $p_-p_+ = \overrightarrow{p_-}\overrightarrow{p_+} - \frac{W^-W^+}{c^2}$

Do đó $\overrightarrow{p_-}\overrightarrow{p_+} - \frac{W^-W^+}{c^2} = m^2c^2$ (4)

Như ta có $\frac{W^\pm}{c} >> \left|\overrightarrow{p_\pm}\right|$ Ư do đó (4) không thể thoả mãn được. Như vậy khi không có trường ngoài, phô tôn không thể phân huỷ thành cặp êlectrôn – pôzitrôn được.

CÁCH 3:

- Xét trong hệ quy chiếu gắn khối tâm G của hệ thì động lượng của hệ trước phản ứng là $P_0 = \frac{hf}{c} \neq 0$ và giá trị này $P_0 = \frac{hf}{c}$ bất biến trong mọi hệ quy chiếu quán tính.
- Mặt khác tổng động lượng hai hạt sinh ra trong hệ qui chiếu G thì luôn bằng không( $\overrightarrow{p_{+eG}} + \overrightarrow{p_{-eG}} = 0$

Vậy ta có độ biến thiên động lượng khi phân rã trong HQC khối tâm G

$$\Delta P = -\frac{hf}{c} \neq 0$$

Theo định luật II ta có $\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = 0$ hay $F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = 0$; mà giả thiết cho F=0 nên $\Delta P = 0$

Vậy thực tế mâu thuẩn giả thiết, nên thực tế không thể xảy ra theo yêu cầu giả thiết được.

**LƯU Ý**

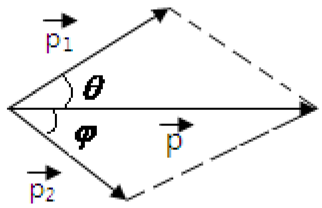
-Nếu hệ hai hạt thì hệ thức bất biến $E^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2$ có thể viết lại như sau. Xét trong hệ quy chiếu gắn với khối tâm hệ hai hạt $E^2 = \left[(\overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2})c\right]^2 + E_G$; trong đó $\overrightarrow{p_1}, \overrightarrow{p_2}$ đ động lượng mỗi hạt trong HQC gắn khối tâm G của hệ; $E_G$ là năng lượng nghỉ của hệ trong hệ G; $E^2$ là năng lượng toàn phần của hệ trong HQC khối tâm G.

Lưu ý: $E_G = (m_{01G} + m_{02G})c^2 = \frac{m_{01}c^2}{\sqrt{1-(\frac{v_{01G}}{c})^2}} + \frac{m_{02}c^2}{\sqrt{1-(\frac{v_{02G}}{c})^2}} \geq (m_{01} + m_{02})c^2$

$$E = (m_{1G} + m_{2G})c^2 = \frac{m_{01}c^2}{\sqrt{1-(\frac{v_{1G}}{c})^2}} + \frac{m_{02}c^2}{\sqrt{1-(\frac{v_{2G}}{c})^2}}$$

**Bài 5.**

Kí hiệu $W_2$, $p_2$ là năng lượng và xung lượng của hạt M sau va chạm, p và $p_1$ là xung lượng của hạt m trước và sau va chạm, W, $W_1$=$W_t$ là năng lượng của hạt m trước và sau va chạm.




Định luật bảo toàn năng lượng và xung lượng cho:

$W + Mc^2 = W_1 + W_2$ (1)

Và $\vec{p} = \vec{p_1} + \vec{p_2}$ (2)

Chiếu (2) lên phương của $\vec{p}$ và phương vuông góc với $\vec{p}$ ta được:

$p = p_1 \cos\theta + p_2 \cos\varphi$ (3)

và $p_1 \sin\theta = p_2 \sin\varphi$. (4)

Với $\theta$, $\varphi$ được xác định trên hình vẽ.

Thay các giá trị xung lượng bằng lượng nhờ công thức: $W = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}$ (5)

Thay (5) vào (3) và (4) ta được hệ:

$W + Mc^2 = W_1 + W_2$ (1')

$$\sqrt{\frac{W^2}{c^2} - m^2c^2} = \sqrt{\frac{W_1^2}{c^2} - m^2c^2}\cos\theta + \sqrt{\frac{W_2^2}{c^2} - m^2c^2}\cos\varphi \quad (3')$$

$$\sqrt{\frac{W_1^2}{c^2} - m^2c^2}\sin\theta = \sqrt{\frac{W_2^2}{c^2} - m^2c^2}\sin\varphi \quad (4')$$

Khử $\varphi$ và $W_2$ trong ba công thức trên (1'), (2'), (3') ta được: $W_1 = W_t$ phụ thuộc vào góc tán xạ $\theta$:

$(W - W_1)Mc^2 - W W_1 + \sqrt{(W^2 - m^2c^4)(W_1^2 - m^2c^4)}\cos\theta + m^2c^4 = 0$

Trường hợp tán xạ photon (m = 0; W= h$\nu$) lên êlectron tự do đứng yên, c ta có công thức Comtơn

$$\frac{1}{\nu_1} - \frac{1}{\nu} = \frac{h}{Mc^2}(1 - \cos\theta)$$

**Bài 6.** Hạt 1: $p_1 = m_1v_1 = \dfrac{mv_1}{\sqrt{1 - (\frac{v_1}{c})^2}} \leftrightarrow 5mc = \dfrac{mv_1}{\sqrt{1 - (\frac{v_1}{c})^2}} \rightarrow v_1 = \sqrt{\dfrac{25}{26}}c$ (1)

Hạt 2 có $p_2 = m_2v_2 \leftrightarrow 10mc = \dfrac{mv_2}{\sqrt{1 - (\frac{v_2}{c})^2}} \Rightarrow v_2 = \sqrt{\dfrac{100}{101}}c$ (2)

-Vận tốc hạt (2) so hạt (1) là $v_{21} = \dfrac{v_{2d} + v_{d1}}{1 + \dfrac{v_{2d}v_{d1}}{c^2}} = \dfrac{v_2 - v_1}{1 - \dfrac{v_2v_1}{c^2}} \approx 0,595c$

-Vận tốc hạt (1) so hạt (2) là $v_{12} = \dfrac{v_{1d} + v_{d2}}{1 + \dfrac{v_{1d}v_{d2}}{c^2}} = \dfrac{v_1 - v_2}{1 - \dfrac{v_1v_2}{c^2}} \approx -0,595c$

**Bài 7.**

**a.** Từ $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(m\vec{u}\right)$ ; $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - (\frac{\vec{u}}{c})^2}}$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{dm}{dt}\left(\vec{u}\right) + m\frac{d}{dt}\vec{u} \quad (1)$$

Mặt khác $K = (\dfrac{m_0}{\sqrt{1 - (\frac{\vec{u}}{c})^2}} - m_0)c^2 = (m - m_0)c^2 \rightarrow \dfrac{dm}{dt} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{dK}{dt}$ (2)

Mặt khác $dK = \vec{F}d\vec{r} \to \dfrac{dK}{dt} = \vec{F}\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\vec{u}$ (3)

Thay (2) vào (1) ta được $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt} = \dfrac{1}{c^2}dK\left(\vec{u}\right) + m\dfrac{d}{dt}\vec{u} = \dfrac{1}{c^2}\vec{F}\vec{u}\left(\vec{u}\right) + m\dfrac{d}{dt}\vec{u}$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{1}{c^2}dK\left(\vec{u}\right) + m\frac{d}{dt}\vec{u} = \frac{1}{c^2}\vec{F}\vec{u}\left(\vec{u}\right) + m\vec{a}$$

$$\vec{F} = \frac{1}{c^2}(\vec{F}\vec{u})\vec{u} + m\vec{a} \to \vec{a} = \frac{1}{m}\left[\vec{F} - \frac{1}{c^2}(\vec{F}\vec{u})\vec{u}\right] \qquad (4)$$

**b.Xét trường hợp 1**: $\vec{F}\,//\,\vec{u_1}$, khi đó thành phần : $\dfrac{1}{c^2}(\vec{F}\vec{u_1})\vec{u_1} = \dfrac{u_1}{c^2}\vec{F}$, nên (4) được viết lại

$$\to \vec{a}_1 = \frac{1}{m}\left[\vec{F} - \frac{u_1^2}{c^2}\vec{F}\right] = \frac{1}{m}\left[1 - \frac{u_1^2}{c^2}\right]\vec{F} = \frac{1}{\dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{u_1^2}{c^2}}}}\left[1 - \frac{u_1^2}{c^2}\right]\vec{F} = \frac{(1-\dfrac{u_1^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}{m_0}\vec{F}$$

Hay $\to \vec{a_1} = \dfrac{(1-\dfrac{u_1^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}{m_0}\vec{F} = \dfrac{\vec{F}}{m_0\gamma_1^3}$

**c. Xét trường hợp 2**: $\vec{F} \perp \vec{u}_2$, khi đó thành phần : $\dfrac{1}{c^2}(\vec{F}\vec{u_2})\vec{u}_2 = 0$, nên (4) được viết lại

$$\to \vec{a}_2 = \frac{1}{m_2}\left[\vec{F} - \frac{1}{c^2}(\vec{F}\vec{u}_2)\vec{u_2}\right] = \frac{1}{m_2}\left[\vec{F} - \vec{0}\right] = \frac{\vec{F}}{m_2} = \frac{\vec{F}}{\gamma_2 m_0} = \frac{\sqrt{1-\dfrac{u_2^2}{c^2}}}{m_0}\vec{F}$$

Vậy $\to \vec{a}_2 = \dfrac{\sqrt{1-\dfrac{u_2^2}{c^2}}}{m_0}\vec{F} = \dfrac{\vec{F}}{m_0\gamma_2}$

**Bài 8**

Từ công thức $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt} = \dfrac{d(m\vec{u})}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{m_0\vec{u}}{\sqrt{1-(\dfrac{\vec{u}}{c})^2}}\right)$

$$\to \vec{F} = \frac{dm}{dt}\vec{u} + m\frac{d\vec{u}}{dt}$$

Ta thấy lúc t=0 $\to \vec{F}(0) = \dfrac{dm}{dt}\vec{u}(0) + m\dfrac{d\vec{u}}{dt} = \dfrac{dm}{dt}\vec{v_1} + m\dfrac{d\vec{u}}{dt}$ do vậy $d\vec{u}$ □ □ $\vec{F}$, do đó $\vec{u}$ □ □ $\vec{F}$ với mọi t. Do vậy

$$\rightarrow \vec{F}=\frac{d\vec{P}}{dt}\rightarrow \vec{F}dt=d\vec{P}\rightarrow \vec{F}\int_0^{\tau}dt=\int_{\vec{P}_1}^{\vec{P}_2}d\vec{P}\rightarrow \vec{F}\tau=\vec{P}_2-\vec{P}_1$$

Vì $\vec{F}$ □ □ $\vec{P}_1$ nên $\vec{P}_2$ □ □ $\vec{P}_1,\vec{F}$

$$\rightarrow F\tau=P_2-P_1$$

$$F\tau=\frac{m_0v_2}{\sqrt{1-(\frac{v_2}{c})^2}}-\frac{m_0v_1}{\sqrt{1-(\frac{v_1}{c})^2}}=\frac{m_0 0{,}8c}{\sqrt{1-(0{,}8)^2}}-\frac{m_0 0{,}6c}{\sqrt{1-(0{,}6)^2}}$$

$$F\tau=\frac{m_0.0{,}8c}{0{,}6}-\frac{m_0.0{,}6c}{0{,}8}=(\frac{4}{3}-\frac{3}{4})m_0c=\frac{7}{12}m_0c$$

Hay $F=\dfrac{7m_0c}{12\tau}$

**Bài 9.**

a) Do ban đầu hạt không có vận tốc nên khi tác dụng lực theo phương x, hạt sẽ chuyển động theo phương x. Thật vậy, bởi vì ta có: $\vec{F}=\dfrac{d\vec{p}}{dt}\Rightarrow \vec{p}-\vec{0}=\int_0^t\vec{F}dt\Rightarrow \vec{p}=\vec{F}t\Rightarrow \dfrac{m_0\vec{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}=\vec{F}t$.

Từ đây, ta tìm được vận tốc của hạt là $u=\dfrac{Ft/m_0}{\sqrt{1+F^2t^2/m_0^2c^2}}\Rightarrow x=x_0+\int_0^t\dfrac{Ft/m_0}{\sqrt{1+F^2t^2/m_0^2c^2}}dt=\sqrt{m_0^2c^4/F^2+c^2t^2}$

b) $x=\sqrt{a^2+c^2t^2}\Rightarrow u=\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{c^2t}{\sqrt{a^2+c^2t^2}}\Rightarrow p=\dfrac{m_0u}{\sqrt{1-u^2/c^2}}=\dfrac{m_0c^2t}{a}\Rightarrow F=\dfrac{dp}{dt}=\dfrac{m_0c^2}{a}$

**Bài 10.** a) Ta có: $\vec{F}=\dfrac{d\vec{p}}{dt}=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{m_0\vec{u}}{\sqrt{1-\vec{u}^2/c^2}}\right)=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-\vec{u}^2/c^2}}\vec{a}+\dfrac{m_0(\vec{u}.\vec{a})/c^2}{\left(\sqrt{1-\vec{u}^2/c^2}\right)^3}\vec{u}$

Để $\vec{F}//\vec{a}$ thì $\left[\dfrac{m_0(\vec{u}.\vec{a})/c^2}{\left(\sqrt{1-\vec{u}^2/c^2}\right)^3}\vec{u}\right]//\vec{a}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{m_0(\vec{u}.\vec{a})/c^2}{\left(\sqrt{1-\vec{u}^2/c^2}\right)^3}=0\\ \vec{u}//\vec{a}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\vec{u}\perp\vec{F}\\ \vec{u}//\vec{F}\end{cases}\left(do\ \vec{F}//\vec{a}\right)$. Vậy để lực tác dụng cùng phương với gia tốc của lực tác dụng phải cùng phương với vận tốc hoặc vuông góc với vận tốc.

b) Khi $\vec{u}//\vec{F}$ thì $\vec{F}=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-\vec{u}^2/c^2}}\vec{a}+\dfrac{m_0(\vec{u}.\vec{a})/c^2}{\left(\sqrt{1-\vec{u}^2/c^2}\right)^3}\vec{u}=\dfrac{m_0}{\left(\sqrt{1-\vec{u}^2/c^2}\right)^3}\vec{a}$.

Khi $\vec{u}\perp\vec{F}$ thì $\vec{F}=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-\vec{u}^2/c^2}}\vec{a}+\dfrac{m_0(\vec{u}.\vec{a})/c^2}{\left(\sqrt{1-\vec{u}^2/c^2}\right)^3}\vec{u}=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-\vec{u}^2/c^2}}\vec{a}$.

**Bài 11.**

a) Ta có: $\vec{F}=\dfrac{d\vec{p}}{dt}=q\vec{E}\Rightarrow\dfrac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\dfrac{m_0\vec{v_0}}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}}+q\vec{E}t$. Do $\vec{v}_0//\vec{E}\Rightarrow\vec{v}//\vec{E}$

Từ đó, ta suy ra được: $\dfrac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\dfrac{v_0}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}}+\dfrac{qEt}{m_0}\Rightarrow v=...$

b) Tương tự câu a, ta có : $\dfrac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\dfrac{m_0\vec{v_0}}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}}+q\vec{E}t$. Lần lượt nhân hữu hướng và vô hướng vào biểu thức trên cho $\vec{v_0}$ ta được:

$$\begin{cases}\dfrac{m_0\vec{v}\vec{v_0}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\dfrac{m_0v_0^2}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}}+q\vec{E}.\vec{v_0}t=\dfrac{m_0v_0^2}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}}\\ \dfrac{m_0\left[\vec{v}\times\vec{v_0}\right]}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\dfrac{m_0\left[\vec{v_0}\times\vec{v_0}\right]}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}}+q\left[\vec{E}\times\vec{v_0}\right]t=q\left[\vec{E}\times\vec{v_0}\right]t\end{cases}\Rightarrow\tan\theta=\dfrac{\left\|\left[\vec{v}\times\vec{v_0}\right]\right\|}{\vec{v}.\vec{v_0}}=\dfrac{qEt}{m_0v_0}\sqrt{1-v_0^2/c^2}\ (\text{ do } \vec{v_0}\perp\vec{E}\ ).$$

c) $\vec{F}=\dfrac{d\vec{p}}{dt}=q\left[\vec{v}\times\vec{B}\right]$, ta thấy rằng $\vec{F}\perp\vec{v}$ nên từ kết quả câu 12, ta có: $\vec{F}=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\vec{a}$. Từ đó suy ra phương trình sau: $F=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}a$. Do lực $\vec{F}\perp\vec{v}$, tức lực Lorentz không sinh công, nên vận tốc của proton có độ lớn không đổi. Gia tốc a lúc này là gia tốc hướng tâm: $a=\dfrac{v^2}{R}$.

Từ đây ta suy ra: $qvB=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\dfrac{v^2}{R}\Rightarrow R=\dfrac{m_0v/qB}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ và $a=\dfrac{qvB}{m_0}\sqrt{1-v^2/c^2}$.

**Bài 12.**

**1.** Để một hạt có tốc độ v'chuyển động trong hệ quy chiếu di chuyển với tốc độ v. Khi đó, vận tốc w của nó trong hệ quy chiếu đứng yên được cho bởi công thức cộng vận tốc tương đối tính

$$w=\frac{v+v'}{1+\dfrac{vv'}{c^2}}. \tag{16}$$

Từ đây, chúng ta tìm thấy mối quan hệ giữa những thay đổi về vận tốc trong các hệ quy chiếu tương ứng

$$dw=\frac{\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1+\dfrac{vv'}{c^2}\right)^2}dv'. \tag{17}$$

Phù hợp với các biến đổi Lorentz

$$t=\frac{t'+\dfrac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{18}$$

Chuyển đổi thời gian trong hai hệ quy chiếu bằng mối quan hệ

$$dt=dt'\frac{\left(1+\dfrac{vv'}{c^2}\right)}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{19}$$

Chia phương trình (17) và (19) và đặt v' = 0, cuối cùng chúng ta cũng có được

$$a_r = \frac{dw}{dt} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2} \frac{dv'}{dt'} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2} a_p . \qquad (20)$$

**2.** Trong hệ tọa độ đi kèm, chuyển động của tên lửa là cổ điển và gia tốc của nó được xác định bởi biểu thức

$$a_p = \frac{dv'}{dt'} = \frac{u}{m}\frac{dm}{dt'} . \qquad (21)$$

Bây giờ chúng ta sử dụng phép biến đổi gia tốc (20) và thời gian (19) khi v' = 0, chúng ta thu được

$$\frac{dm}{dv} = \frac{m}{u(1 - v^2/c^2)} . \qquad (22)$$

Từ đó chúng ta thấy rằng

$$\alpha = \frac{c}{2u} . \qquad (23)$$

**3.** Tính toán theo công thức đã cho

$$m_0 = m\left(\frac{1 + v/c}{1 - v/c}\right)^{c/2u} = 10^{28630} \text{ кг}. \qquad (24)$$

**4.** Tính toán theo công thức đã cho

$$m_0 = m\left(\frac{1 + v/c}{1 - v/c}\right)^{c/2u} = 1730 \text{ кг}. \qquad (25)$$

**Bài 13.** Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng, ta có: sau va chạm, năng lượng và động lượng của hệ là $E$ và $\vec{p}$ xác định như sau:

$$E = Mc^2 + mc^2 + K \text{ và } p^2c^2 = p_m^2c^2 = \left(mc^2 + K\right)^2 - m^2c^4$$

Từ đó thay vô, ta được: $E^2 - p^2c^2 = \left(Mc^2 + mc^2 + K\right)^2 - \left(mc^2 + K\right)^2 + m^2c^4 = 2KMc^2 + \left(m + M\right)^2 c^4$ (1)

Do đại lượng $E^2 - p^2c^2$ bất biến, nên ta có: $E^2 - p^2c^2 = E_G^2 \geq \left(m_1 + m_2 + ... + m_n\right)^2 c^4$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra:

$$2KMc^2 + \left(m + M\right)^2 c^4 \geq \left(m_1 + m_2 + ... + m_n\right)^2 c^2$$

$$\Rightarrow K \geq \frac{\left(m_1 + m_2 + ... + m_n\right)^2 - \left(m + M\right)^2}{2M} c^2$$

**Bài 14**. Thời gian truyền quãng đường một bước sóng trong môi trường và trong chân không bằng nhau

$$\tau = \frac{\lambda}{v} = \frac{\lambda_0}{c} = \frac{n\lambda}{c} \text{ nên } \lambda_0 = n\lambda \quad (1)$$

$$f = \frac{c}{\lambda_0} = \frac{c}{n\lambda} = \frac{v}{\lambda} \quad (2)$$

(Tần số photon không phụ thuộc môi trường).

Động lượng của photon trong môi trường chiết suất n:

$$p_f = \frac{h}{\lambda} = \frac{hf}{v} = \frac{nhf}{c} \quad (3)$$

Năng lượng photon:

$$\varepsilon_f = hf = p_f v \quad (4)$$

Từ (3) và (4) ta tính được:

$$\left(\frac{\varepsilon_f}{c}\right)^2 - p_f^2 = \left(\frac{p_f v}{c}\right)^2 - p_f^2 = -\frac{n^2-1}{n^2}p_f^2 = -\frac{n^2-1}{n^2}\left(\frac{hf}{v}\right)^2 = -(n^2-1)\left(\frac{hf}{c}\right)^2 \quad (5)$$

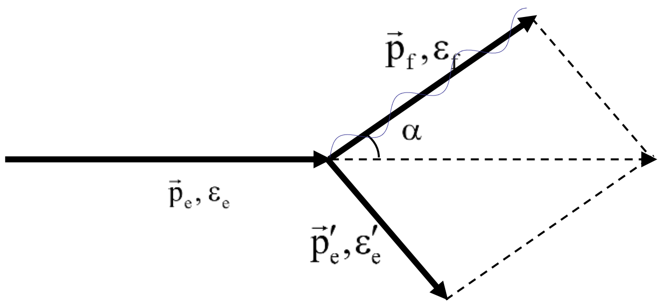
a) Sử dụng định luật bảo toàn năng lượng và định luật bảo toàn động lượng, ta có:

- Trước khi phát photon ($\varepsilon_0$ là năng lượng nghỉ của electron)

$$\varepsilon_e = \sqrt{p_e^2c^2 + \varepsilon_0^2} = m_e c^2; \varepsilon_0 = m_{0e}c^2; p_e = m_e u \quad (6)$$

- Sau khi phát photon, hệ gồm electron và photon:

$$\varepsilon_e' = \sqrt{p_e'^2c^2 + \varepsilon_0^2}; p_e' = \frac{\sqrt{\varepsilon_e'^2 - \varepsilon_0^2}}{c} \quad (7)$$




Năng lượng nghỉ của electron bất biến trong các hệ quy chiếu quán tính:

$$\frac{\varepsilon_0^2}{c^2} = \frac{\varepsilon_e^2}{c^2} - p_e^2 = \frac{\varepsilon_e'^2}{c^2} - p_e'^2 \quad (8)$$

Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng và định luật bảo toàn động lượng:

$$\varepsilon_e = \varepsilon_f + \varepsilon_e'; \vec{p}_e = \vec{p}_f + \vec{p}_e' \quad (9)$$

Biến đổi (9):

$$\frac{\varepsilon_e'^2}{c^2} = \frac{\varepsilon_e^2}{c^2} + \frac{\varepsilon_f^2}{c^2} - 2\frac{\varepsilon_e}{c}\frac{\varepsilon_f}{c} \quad (10)$$

$$p_e'^2 = p_e^2 + p_f^2 - 2p_e p_f \cos\alpha \quad (11)$$

Lấy các vế tương ứng của (10) và (11) trừ cho nhau:

$$\frac{\varepsilon_e'^2}{c^2} - p_e'^2 = \frac{\varepsilon_e^2}{c^2} - p_e^2 + \frac{\varepsilon_f^2}{c^2} - p_f^2 - 2\frac{\varepsilon_e}{c}\frac{\varepsilon_f}{c} + 2p_e p_f \cos\alpha \quad (12)$$

Chú ý đến (8) và (5):

$$2p_e p_f \cos\alpha = p_f^2 - \frac{\varepsilon_f^2}{c^2} + 2\frac{\varepsilon_e}{c}\frac{\varepsilon_f}{c} = (n^2-1)\left(\frac{hf}{c}\right)^2 + 2\frac{\varepsilon_e}{c}\frac{\varepsilon_f}{c} \quad (13)$$

Thay $p_e = m_e u$, $\varepsilon_e = m_e c^2$, $p_f = \dfrac{hf}{v}$, $\varepsilon_f = hf$, rút ra:

$$\cos\alpha = \frac{c}{nu}\left(1 + \frac{hf(n^2-1)}{2\varepsilon_e}\right) \quad (14)$$

Khi $\varepsilon_f = hf \gg \varepsilon_e$:

$$\cos\alpha \approx \frac{c}{nu} = \frac{v}{u} \le 1$$

ta suy ra điều kiện để có thể bức xạ Cherencov:

$c > u > v$

**Bài 15.**

Chọn hệ tọa độ xOy với Ox theo phương ban đầu của prôton và Oy theo hương của điện trường, gốc O tại điểm hạt đi vào điện trường, khi đó phương trình động lực học tương đối tính là

Ta có $\vec{F} = \dfrac{d\vec{P}}{dt} = \dfrac{d(\vec{P_x} + \vec{P_y})}{dt} = \dfrac{d(P_x\vec{e_x} + P_y\vec{e_y})}{dt}$

Hay $F\vec{e_y} = \dfrac{dP_x}{dt}\vec{e_x} + \dfrac{dP_y}{dt}\vec{e_y}$ (*)

Từ (*) suy ra $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{m_0V_x}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}\right) = 0$ (1)

Và $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{m_0V_y}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}\right) = eE$ (2)

Từ (1) suy ra

$$\frac{V_x}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} = const = \frac{V_0}{\sqrt{1-\dfrac{V_0^2}{c^2}}} \qquad (3)$$

Theo định luật bảo toàn năng lượng

$$\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\dfrac{V_0^2}{c^2}}} + eEy \qquad (4)$$

Đặt $\varepsilon = \dfrac{m_0c^2}{\sqrt{1-\dfrac{V_0^2}{c^2}}}$ và từ (3) ta có $\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} = \dfrac{V_0/V_x}{\sqrt{1-\dfrac{V_0^2}{c^2}}}$. Thay vào (4) ta được:

$$\frac{m_0c^2V_0/V_x}{\sqrt{1-\frac{V_0^2}{c^2}}}=\varepsilon+eEy \quad \Rightarrow \varepsilon\frac{V_0}{V_x}=\varepsilon+eEy$$

Suy ra: $$V_x=\frac{V_0\varepsilon}{\varepsilon+eEy} \quad \text{hay} \quad v_x=\frac{v_0}{\sqrt{1+(\frac{eEt}{\gamma_0m_0c})^2}} \qquad (*)$$

Với $\gamma_0=\dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}}$

Từ (4) ta cũng có:

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}=\frac{\varepsilon+eEy}{c^2}$$

Thay vào (2), ta được:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{(\varepsilon+eEy)V_y}{c^2}\right)=eE$$

Lấy tích phân hai vế, ta được

$$(\varepsilon+eEy)V_y=c^2eEt+const$$

Dùng điều kiện ban đầu, tại *t* = 0, $V_y=0$, ta tìm được “const” = 0. Vậy

$$(\varepsilon+eEy)V_y=c^2eEt \qquad (**)$$

Thay $V_y=\dfrac{dy}{dt}$ vào và tích phân một lần nữa, ta được

$$\varepsilon y+\frac{1}{2}eEy^2=\frac{1}{2}c^2eEt^2+const \qquad (5)$$

Vì tại *t* = 0, *y* = 0, ta lại có “const” = 0. Nhân hai vế của (5) với *eE*, ta được

$$(ceEt)^2=(eyE)^2+2\varepsilon eEy+\varepsilon^2-\varepsilon^2$$

Hay

$$(ceEt)^2=(\varepsilon+eyE)^2-\varepsilon^2$$

$$\Rightarrow \qquad \varepsilon+eEy=\sqrt{\varepsilon^2+c^2e^2E^2t^2}$$

Thay vào các biểu thức của $V_x$ (*) và $V_y$ (**) ta được

$$V_x = \frac{\varepsilon V_0}{\sqrt{\varepsilon^2 + (ceEt)^2}} = \frac{V_0}{\sqrt{1 + (1 - V_0^2/c^2)(eEt/m_0 c)^2}} \quad \text{( với } \varepsilon = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{V_0^2}{c^2}}} \text{)}$$

và
$$V_y = \frac{c^2 eEt}{\sqrt{\varepsilon^2 + (ceEt)^2}}$$

Suy ra

$$\tan\theta = \frac{V_y}{V_x} = \frac{c^2 eEt}{\varepsilon V_0}$$

Thay biểu thức của $\varepsilon$ vào ta được:

$$\tan\theta = \frac{c^2 eEt}{V_0} \cdot \frac{\sqrt{1 - V_0^2/c^2}}{m_0 c^2} = \frac{eEt}{m_0 V_0}\sqrt{1 - V_0^2/c^2}$$

**CÁCH 2 GỌN HƠN:**

Chọn trục Ox song song cùng chiều $\vec{V_0}$ và Oy song song cùng chiều với $\vec{E}$

+Ta có định luật II trên Ox: $\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 V_x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}\right) = 0$

Hay $\frac{m_0}{\sqrt{1 - (\frac{V}{c})^2}} V_x = etc = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (\frac{V_0}{c})^2}} V_0 \Rightarrow \frac{V_x}{\sqrt{1 - (\frac{V}{c})^2}} = \frac{V_0}{\sqrt{1 - (\frac{V_0}{c})^2}}$ (1)

+Ta có định luật II trên Oy: $\frac{d\left(\frac{m_0 V_y}{\sqrt{1 - (\frac{V}{c})^2}}\right)}{dt} = eE \Rightarrow \frac{m_0 V_y}{\sqrt{1 - (\frac{V}{c})^2}} = eEt$

Hay $\frac{m_0 V_y}{\sqrt{1 - (\frac{V}{c})^2}} = eEt \Rightarrow \frac{V_y}{\sqrt{1 - (\frac{V}{c})^2}} = \frac{eEt}{m_0}$ (2)

Mặt Khác ta lại có $V_x^2 + V_y^2 = V^2$ (3)

Thay (1) và (2) vào (3) ta tìm được V. Từ đó thay vòa (1) và(2) ta tìm được $V_x$ và $V_y$.

**Bài 16.**

Biến thiên của động lượng: $dp_x = F_x dt$

Nên

$$dp_x = qEdt \to p_x = qEt$$

$$dp_y = 0 \to p_y = p_0 = const$$

$$p^2 = p_x^2 + p_y^2 = p_0^2 + (qEt)^2$$

Từ hệ thức năng – xung: $\varepsilon^2 = E^2 = (pc)^2 + E_0^2$

$$\varepsilon = c\sqrt{p_0^2 + (qEt)^2 + m_0^2c^2}$$

$$t = 0;\ \varepsilon_0 = c\sqrt{p_0^2 + m_0^2c^2}$$

$$\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_0^2 + (qEct)^2}$$

Mặt khác ta lại có

$$\vec{p} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\varepsilon}{c^2}\vec{v}$$

$$p_x = \frac{\varepsilon}{c^2}\frac{dx}{dt} = qEt \to \frac{dx}{dt} = \frac{qEc^2t}{\varepsilon} \to dx = \frac{qEc^2tdt}{\varepsilon} = \frac{qEc^2tdt}{\sqrt{\varepsilon_0^2 + (qEct)^2}}$$

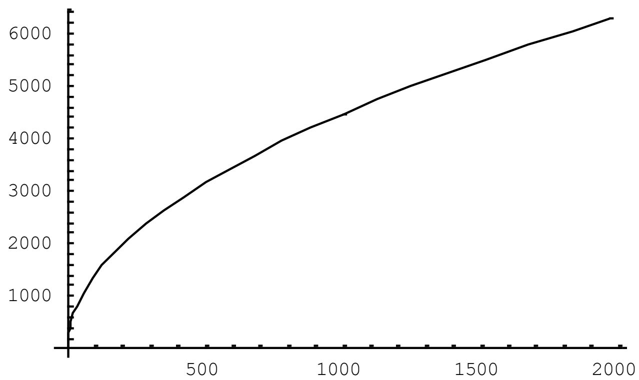
$$\to x = c\sqrt{t^2 + \left(\frac{\varepsilon_0}{qEc}\right)^2} - \frac{\varepsilon_0}{qE} \qquad (1)$$

Tương tự với $p_y$:

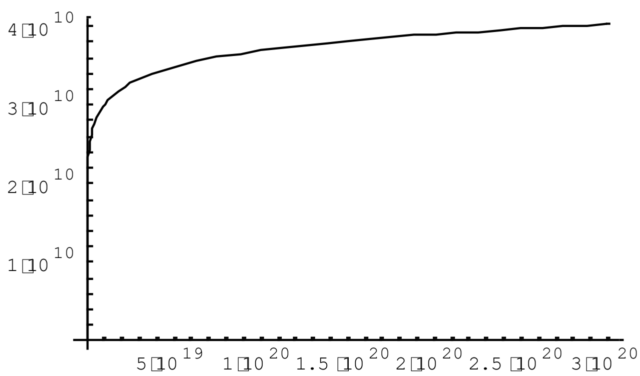
$$p_y = \frac{\varepsilon}{c^2}\frac{dy}{dt} = p_0 \to dy = \frac{p_0c^2dt}{\sqrt{\varepsilon_0^2 + (qEct)^2}}$$

$$\to y = \frac{p_0c}{qE}\ln\left(\frac{qEc}{\varepsilon_0}\right) + \frac{p_0c}{qE}\ln\left(t + \sqrt{t^2 + \left(\frac{\varepsilon_0}{qEc}\right)^2}\right) \qquad (2)$$

Phương trình quỹ đạo của hạt là phương trình tham số



H.1 Khi t nhỏ


H.2 Khi t lớn

$$x = c\sqrt{t^2 + \left(\frac{\varepsilon_0}{qEc}\right)^2} - \frac{\varepsilon_0}{qE};\ y = \frac{p_0c}{qE}\ln\left(\frac{qEc}{\varepsilon_0}\right) + \frac{p_0c}{qE}\ln\left(t + \sqrt{t^2 + \left(\frac{\varepsilon_0}{qEc}\right)^2}\right)$$

Quỹ đạo của hạt vẽ với số liệu sau:

$q = 10^{-6}C$; $E = 10^4\ A/m^2$; $p_0 = 0{,}1 kg.m/s$; $c = 3.10^8 m/s$; $m_0 = 10^{-4}$ kg

Khi $t \to \infty$, hạt chuyển động với phương song song với trục Ox.

2. $\vec{v}$ của hạt tại thời điểm t có các thành phần được xác định:

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{ct}{\sqrt{t^2+A^2}} \\ v_y = B\dfrac{\left(1+\dfrac{t}{\sqrt{t^2+A^2}}\right)}{t+\sqrt{t^2+A^2}} = \dfrac{B}{\sqrt{t^2+A^2}} \end{cases} \Rightarrow v = c\sqrt{\dfrac{t^2+\left(\dfrac{p_0}{qE}\right)^2}{t^2+\left(\dfrac{\varepsilon_0}{qEc}\right)^2}}$$

Trong đó $A = \dfrac{\varepsilon_0}{qEc}, B = \dfrac{p_0c}{qE}$.

$\vec{v}$ hợp với trục Ox góc φ xác định bởi công thức: $tg\varphi = \dfrac{v_y}{v_x} = \dfrac{B}{ct}$

Khi $t = \dfrac{P_0}{qE}$: $v = \dfrac{P_0c\sqrt{2}}{\sqrt{2P_0^2c^2+m_0^2c^4}}; \varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

**Bài 17.** 1.

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{u}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\vec{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right) = \frac{m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\frac{\vec{u}\dfrac{d\vec{u}}{dt}}{c^2}\vec{u}$$

Trong từ trường vận tốc và gia tốc của hạt vuông góc nhau, nên tích vô hướng hai véc tơ bằng không

$$\vec{u}\frac{d\vec{u}}{dt} = 0,$$

ngoài ra

$$F_L = quB; \quad a_{ht} = \frac{u^2}{R} = \left|\frac{d\vec{u}}{dt}\right|$$

$$quB = \frac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}.\frac{u^2}{R} \Rightarrow qB\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} = m_0.\frac{u}{R} \Leftrightarrow (\frac{qBR}{m_0})^2(1-\frac{u^2}{c^2}) = u^2$$

$$\Leftrightarrow (\frac{qBR}{m_0})^2 = u^2 + (\frac{qBR}{m_0})^2\frac{u^2}{c^2} \Rightarrow u = \frac{\dfrac{qBR}{m_0}}{\sqrt{1+(\dfrac{qBR}{m_0c})^2}} = \frac{qBRc}{\sqrt{(m_0c)^2+(qBR)^2}}$$

Từ đó

$$quB = \frac{m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\frac{u^2}{R} \to \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \sqrt{1+\left(\frac{qBR}{m_0c}\right)^2} \quad (1)$$

2. Từ công thức Anhxtanh

$$E = mc^2; \quad E = mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = m_0c^2\sqrt{1+\left(\frac{qBR}{m_0c}\right)^2},$$

do đó năng lượng toàn phần của poziton và electron bằng

$$E_+ = (0{,}511Mev)\sqrt{1+\left(\frac{1{,}6.10^{-19}.0{,}1.160.10^{-3}}{9{,}11.10^{-31}.3.10^{8}}\right)^2} = 4{,}814Mev$$

$$E_- = (0{,}511Mev)\sqrt{1+\left(\frac{1{,}6.10^{-19}.0{,}1.40.10^{-3}}{9{,}11.10^{-31}.3.10^{8}}\right)^2} = 1{,}3Mev.$$

3.Theo định luật bảo toàn năng lượng ( bỏ qua sự giật lùi của hạt nhân nặng)

$$h\nu = \frac{hc}{\lambda} = E_+ + E_- = 6{,}114Mev$$

từ đó $$\lambda = \frac{hc}{E_+ + E_-} = 0{,}002\overset{o}{A}$$

**Bài 18.** a) Tỷ lệ giữa tổng năng lượng và năng lượng nghỉ của electron

$$\gamma = \frac{E}{E_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{E}{m_ec^2} = \frac{14\text{ GeV}}{0.511\text{ MeV}} = 27{,}397.10^3$$

Suy ra

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1-\left(\frac{E_0}{E}\right)^2} \approx 1-\frac{1}{2}\left(\frac{E_0}{E}\right)^2 = 1-6{,}7.10^{-10}$$

Vận tốc của electron chỉ sai khác $6{,}7.10^{-8}$ % so với vận tốc ánh sáng.

b) Lực từ là lực hướng tâm

$$\frac{m_ev^2}{R\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\gamma m_ev^2}{R} = B_0ev \quad\Rightarrow\quad R = \frac{\gamma m_ev^2}{B_0ev} \approx \frac{\gamma m_ec^2}{B_0ec} = \frac{E}{B_0ec} = 37{,}33\text{ m}$$

$$\sin\alpha = \frac{a}{2R} = 0{,}000201, \quad \alpha = 0{,}0115^\circ = 41''$$

Khoảng cách tối đa của electron từ trục của máy lượn sóng:

c) Giá trị của thông số máy lượn sóng $K = \dfrac{eB_0a}{\pi m_ec} = 3{,}5$

Thay vào phương trình bước sóng ta được:

$$\lambda = \frac{a}{\gamma^2}\left(1 + \frac{K^2}{2}\right) = \frac{1{,}5\times10^{-2}}{27{,}000^2}.7{,}125 = 1{,}4.10^{-10}\text{ m} = 0{,}14\text{ nm.}$$

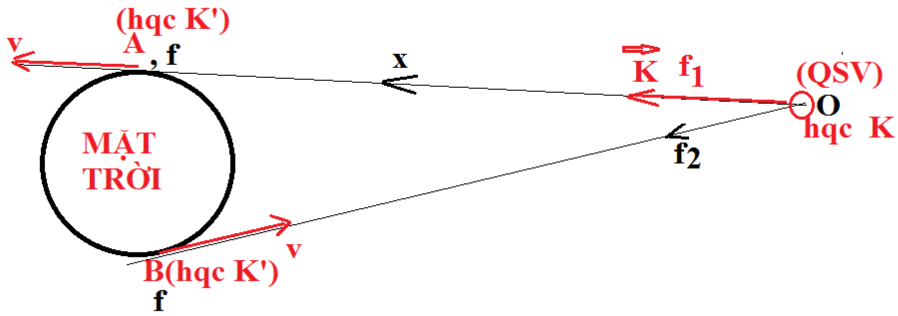
So sánh năng lượng của photon tia X và tổng năng lượng của electron

$$E_f = \frac{hc}{\lambda} = 1{,}41\times10^{-15}\text{ J} = 8{,}80\text{ keV} = 6{,}28\times10^{-7}E$$

# X.3 HIỆU ỨNG ĐỐP-LE TƯƠNG ĐỐI TÍNH

**Bài 1.** Ta coi QSV đứng yên ( HQC K)phát sóng tần số $f_1 = \dfrac{c}{\lambda_1}$ và mép A(HQCK') thu được sóng tần số f=$\dfrac{c}{\lambda}$; $\lambda = 0{,}59\mu m$ ; khi đó ta biết chắc chắn $\alpha_1 = 0; \beta_1 = \dfrac{c}{v}$ ( Vì A đi dọc chiều dương trục Ox ra xa HQC K)

Khi đó $f_1 = f\dfrac{1-\beta_1\cos\alpha}{\sqrt{1-\beta_1^2}} \Leftrightarrow \dfrac{c}{\lambda_1} = \dfrac{c}{\lambda}\dfrac{1-\frac{v}{c}.1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$ (1)




**Tương tự** ta coi QSV đứng yên ( HQC K)phát sóng tần số $f_2 = \dfrac{c}{\lambda_2}$ và mép B(HQCK') thu được sóng tần số f=$\dfrac{c}{\lambda}$; $\lambda = 0{,}59\mu m$ ; khi đó ta biết chắc chắn $\alpha_2 = 0; \beta_2 = \dfrac{-v}{c}$ ( Vì B đi dọc ngược chiều dương trục Ox lại gần HQC K)

Khi đó $f_2 = f\dfrac{1-\beta_2\cos\alpha_2}{\sqrt{1-\beta_2^2}} \Leftrightarrow \dfrac{c}{\lambda_2} = \dfrac{c}{\lambda}\dfrac{1-\frac{(-v)}{c}.1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} = \dfrac{c}{\lambda}\dfrac{1+\frac{v}{c}}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$(2)

Ta thấy $\lambda_2 < \lambda_1$ nên $\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2 = 0{,}8pm$ (3).

Mặt khác $v = \dfrac{2\pi R}{T}$ (4)

Thay (1),(2), (4) vào (3) và lấy gần đúng ta tìm ra được

$T = \dfrac{4\pi R\lambda}{c\Delta\lambda}$ =25 ngày đêm

**Bài 2.**

-Khi ra đa (HQCK)phát sóng tần số f: $f = \dfrac{c}{\lambda}$ , thì máy bay( HQCK') thu được sóng tấn số f'.

khi đó trong công thức $f' = f\dfrac{1-\beta\cos\alpha}{\sqrt{1-\beta^2}}$ ta biết chắc $\alpha = 0$ và $\beta = \dfrac{v\cos180^0}{c}$ , nên

$$f' = f\frac{1-\beta\cos\alpha}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{c}{\lambda}\frac{1+\frac{v}{c}}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} \qquad (1)$$

-Khi sóng điện từ phản xạ lại tần số f', ta co máy bay thuộc hệ quy chiếu K và ra đa đang đi về máy bay có vận tốc v( hqc K') và thu được sóng tần số f''. Lúc này ta cũng biết chắc chắn

$$\alpha = 0\ ;\ \beta = \frac{v\cos 180^0}{c} = \frac{-v}{c}$$

$$f'' = f'\frac{1-\beta\cos\alpha}{\sqrt{1-\beta^2}} = f'\frac{1+\frac{v}{c}}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} \qquad (2)$$

Thay (1) vào (2) ta được $f'' = f\frac{1+\frac{v}{c}}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}.\frac{1+\frac{v}{c}}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} = f\frac{(1+\frac{v}{c})^2}{1-(\frac{v}{c})^2} = \frac{c}{\lambda}\frac{(1+\frac{v}{c})^2}{1-(\frac{v}{c})^2} > f$ (3)

Do đó $\Delta\nu = f'' - f = f'' = \frac{c}{\lambda}\frac{(1+\frac{v}{c})^2}{1-(\frac{v}{c})^2} - \frac{c}{\lambda}$ (4)

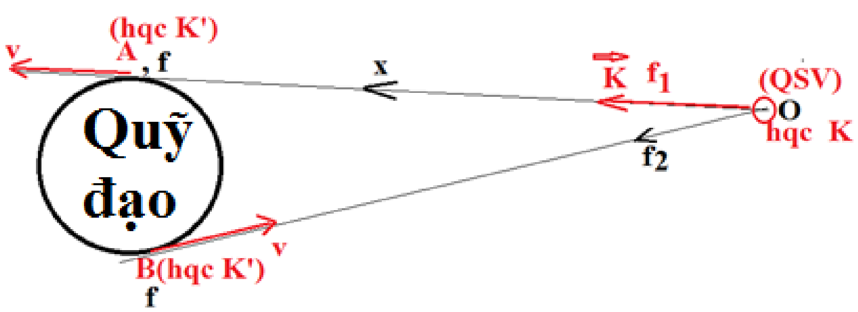
Thay số vào (4) ta được v=250 m/s.

**Bài 3.** *Δλ cực đại chỉ xảy ra khi đường thẳng nối hai sao vuông góc với phương truyền sóng ánh sáng về trái đất.*

Khi đó τ = 30 ngày chính là nửa chu kì quay của mỗi sao.

Ta coi QSV đứng yên ( HQC K)phát sóng tần số $f_1 = \frac{c}{\lambda_1}$ và sao A(HQCK') thu được sóng tần số f $f = \frac{c}{\lambda}$ ; khi đó ta biết chắc chắn $\alpha_1 = 0; \beta_1 = \frac{c}{v}$ ( Vì A đi dọc chiều dương trục Ox ra xa HQC K)

Khi đó $f_1 = f\frac{1-\beta_1\cos\alpha}{\sqrt{1-\beta_1^2}} \Leftrightarrow \frac{c}{\lambda_1} = \frac{c}{\lambda}\frac{1-\frac{v}{c}.1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$ (1)



**Tương tự** ta coi QSV đứng yên ( HQC K) phát sóng tần số $f_2 = \frac{c}{\lambda_2}$ và sao B(HQCK') thu được sóng tần số f= $\frac{c}{\lambda}$ ; khi đó ta biết chắc chắn $\alpha_2 = 0; \beta_2 = \frac{-v}{c}$ ( Vì B đi dọc ngược chiều dương trục Ox lại gần HQC K)

Khi đó $f_2 = f\frac{1-\beta_2\cos\alpha_2}{\sqrt{1-\beta_2^2}} \Leftrightarrow \frac{c}{\lambda_2} = \frac{c}{\lambda}\frac{1-\frac{(-v)}{c}.1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} = \frac{c}{\lambda}\frac{1+\frac{v}{c}}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$(2)

Ta thấy $\lambda_2 < \lambda_1$ nên $\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$ (3).

Mặt khác $v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi R}{2\tau} = \frac{\pi R}{\tau} = \frac{\pi d}{2\tau}$ (4)

Từ (1),(2),(3),(4) và lấy gần đúng ta được $d = \frac{c\tau.\Delta\lambda}{\pi\lambda}$

**Bài 4.** Ở đây ta coi người quan sát thuộc HQCQT K' thu sóng có tần số f' (bước sóng $\lambda' = \lambda_H + 130nm$ ) và nguyên tử H đóng vai trò máy phát (HQCQT K) và phát được sóng f' ứng với bước sóng $\lambda = \lambda_H = 434nm$ . Khi đó ta coi người quan sát đi ra xa tinh vân, biết chắc $\alpha = 0;\ \beta = \frac{v}{c}$ .

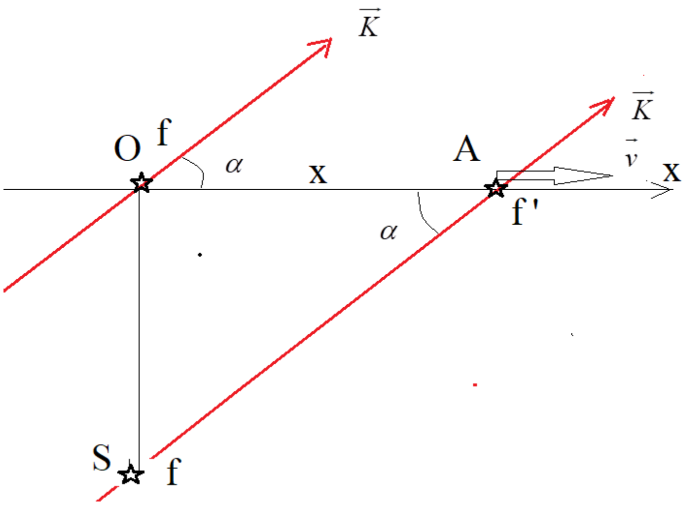
Do đó : $f' = f\frac{1-\beta\cos\alpha}{\sqrt{1-\beta^2}} \Leftrightarrow \frac{c}{\lambda_H + 130} = \frac{c}{\lambda_H}\frac{1-\frac{v}{c}}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} \Rightarrow v = 0,256c$

**Bài 5.** Ta giả sử ô tô di ra xa người quan sát (HQCK') và nhận được sóng tần số f'' bước sóng ($\lambda$ = 0,70μm; $f' = \frac{c}{\lambda}$); người quan sát phát ra sóng tần số f(bước sóng $\lambda'$ = 0,55μm; $f = \frac{c}{\lambda'}$ ). Khi đó ta biết chắc $\alpha = 0$ và $\beta = \frac{v}{c}$ .

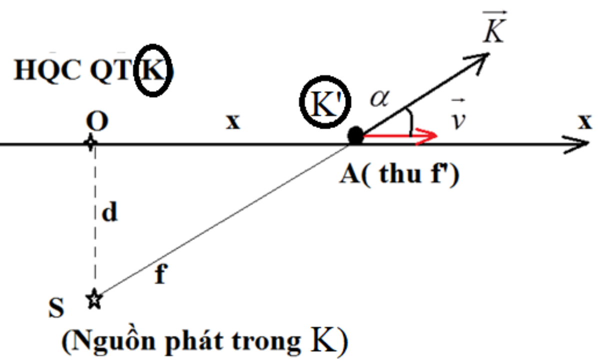
Khi đó $f' = f\frac{1-\beta\cos\alpha}{\sqrt{1-\beta^2}} \Leftrightarrow \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{\lambda'}\frac{1-\frac{v}{c}}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} \Rightarrow v \approx -0,236c$

Dấu trừ chứng tỏ otô đang lùi về phía người quan sát.

**Bài 6.** Trong bài này, hệ hqcqt K đặt ở O hoặc ở S là như nhau. Do vậy hệ K ở O thì thấy $\vec{K}$ tạo trục Ox một góc $\alpha$; $\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{d^2 + x^2}}$ và do đó $\beta = \frac{v_{K'K}}{c} = \frac{\pm v}{c}$ ( dấu trừ khi A lại gần O; dấu công khi A đi ra xa O)




Nghĩa là ta biết chăc góc $\alpha$ tạo giữa véc tơ $\vec{K}$ và trục Ox trong HQCQT K; nên ta áp dụng trục tiếp công thức: $f' = f\dfrac{1-\beta\cos\alpha}{\sqrt{1-\beta^2}}$




( S và O cùng hệ quy chiếu quán tính K)

Theo mô phỏng của đề bài, ta coi nguồn S trong K phát sóng với tần số f, véc tơ sóng đến A là $\vec{K}$ , $\vec{K}$ tạo với trục Ox một góc $\alpha$ . Khi đó xét trong hệ quy chiếu gắn với A( HQC K') sẽ nhận được sóng $\vec{K}'$ với góc $\alpha'$ chưa biết như hình vẽ trên.

$f' = f\dfrac{1-\beta\cos\alpha}{\sqrt{1-\beta^2}}$ ; với $\cos\alpha = \dfrac{x}{\sqrt{d^2+x^2}}$

Do vậy $f' = f\dfrac{1-\beta\dfrac{x}{\sqrt{d^2+x^2}}}{\sqrt{1-\beta^2}}$

Nếu x=0 thì ta được hiệu ứng Doppler ngang $f' = f\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \to f = f'\sqrt{1-\beta^2}$ , nghĩa là nguồn A phát sóng tần số f', máy thu S thu được tần số f.

b.Nếu v=0,8c thì $f' = f_{(-)}' = f\dfrac{1-0{,}8\dfrac{x}{\sqrt{d^2+x^2}}}{0{,}6} = f(\dfrac{5}{3} - \dfrac{4}{3}\dfrac{x}{\sqrt{d^2+x^2}})$

Nếu v=-0,8c thì $f' = f_{(+)}' = f\dfrac{1+0,8\dfrac{x}{\sqrt{d^2+x^2}}}{0,6} = f\left(\dfrac{5}{3}+\dfrac{4}{3}\dfrac{x}{\sqrt{d^2+x^2}}\right)$

**Bài 7.** ( ta phải tính đến vận tốc tương đối của nguồn phát và máy thu rồi sau đó áp dụng công thức Hiệu ứng Đốple tương đối tính)

**+Ta xét trường hợp 1: chạy cùng chiều.**

Vận tốc của nguồn đối với quan sát viên là $v_{21}$: $v_{21} = \dfrac{v_{2d}+v_{d1}}{1+\dfrac{v_{2d}v_{d1}}{c^2}} = \dfrac{v_2 - v_1}{1-\dfrac{v_2 v_1}{c^2}} = \dfrac{(\frac{3}{4}-\frac{1}{2})c}{1-\frac{3}{4}.\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{1}{4}c}{\frac{5}{8}} = \dfrac{2}{5}c$

Hay $v_{12} = -\dfrac{2}{5}c$

Ta coi Quan sát viên thuộc HQC K' chuyển đông ra xa nguồn với vận tốc v=$|v_{12}| = \dfrac{2}{5}c$ nhận được sóng $\omega$ thì nguồn N (HQCK) phát sóng $\omega_0$

Ta có $f' = f\dfrac{1-\beta\cos\alpha}{\sqrt{1-\beta^2}} \Leftrightarrow \omega = \omega_0\dfrac{1-\beta\cos\alpha}{\sqrt{1-\beta^2}} = \omega_0\dfrac{1-\frac{v}{c}.1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$

$$\omega = \omega_0\sqrt{\dfrac{1-\frac{2}{5}}{1+\frac{2}{5}}} = \omega_0\sqrt{\dfrac{3}{7}}$$

**+Ta xét trường hợp 2: chạy ngược chiều hướng về nhau.**

Ta cũng có Vận tốc của nguồn đối với quan sát viên là $v_{21}$:

$$v_{21} = \dfrac{v_{2d}+v_{d1}}{1+\dfrac{v_{2d}v_{d1}}{c^2}} = \dfrac{v_2 - v_1}{1-\dfrac{v_2 v_1}{c^2}} = \dfrac{(-\frac{3}{4})c-\frac{1}{2}c}{1-(-\frac{3}{4}).\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{-5}{4}c}{\frac{11}{8}} = -\dfrac{10}{11}c$$

Hay $v_{12} = \dfrac{10}{11}c$

Ta coi Quan sát viên thuộc HQCK' nhận sóng $\omega$ thì nguồn N(HQCK) phát sóng $\omega_0$

Khi đó ta dễ dàng thấy $\alpha = 0$ và $v_{K'K} = -\dfrac{10}{11}c \rightarrow \beta = \dfrac{v_{K'K}}{c} = -\dfrac{10}{11}$

Do đó áp dụng công thức

Ta có $f' = f\dfrac{1-\beta\cos\alpha}{\sqrt{1-\beta^2}} \Leftrightarrow \omega = \omega_0\dfrac{1-\beta\cos\alpha}{\sqrt{1-\beta^2}} = \omega_0\dfrac{1-(-\frac{10}{11}).1}{\sqrt{1-(-\frac{10}{11})^2}} = \omega_0\dfrac{1+\frac{10}{11})}{\sqrt{1-(\frac{10}{11})^2}}$

Hay $\omega = \omega_0\sqrt{\dfrac{1+\dfrac{10}{11}}{1-\dfrac{10}{11}}} = \omega_0\sqrt{21}$

**Bài 8.** 1.Tên lửa thứ nhất so với đất $v_1 = v_{1d} = 0,6c$

Nếu ta coi tên lửa là hệ quy chiếu K, phát sóng tần số f, $f = \dfrac{c}{\lambda}$ thì trái đất( hệ quy chiếu K') có $\alpha = 0; \beta = \dfrac{v_{K'K}}{c} = \dfrac{0,6c}{c}$ thu được sóng tần số f'

$$f' = f\frac{1-\beta\cos\alpha}{\sqrt{1-\beta^2}} \rightarrow \frac{c}{\lambda'} = \frac{c}{\lambda}\frac{1-0,6}{\sqrt{1-0,6^2}} \rightarrow \lambda' = \lambda\sqrt{\frac{1+0,6}{1-0,6}} = 2\lambda = 10.000A^0$$

$$f' = \frac{c}{\lambda}\frac{1-0,6}{\sqrt{1-0,6^2}} = \frac{c}{2\lambda} = 3.10^{14}\text{Hz}$$

2.Nếu coi máy thu là tên lửa 2 thuộc hệ quy chiếu K', thu sóng có tần số f''và tên lửa 1 thuộc hệ quy chiếu K.

$$v_{21} = \frac{v_{2d}+v_{d1}}{1+\dfrac{v_{2d}v_{d1}}{c^2}} = \frac{0,8c-(-0,6c)}{1-\dfrac{0,8c(-0,6c)}{c^2}} = \frac{1,4c}{1+0,48}c = \frac{1,4}{1,48}c$$

Khi đó $v_{K'K} = v_{21}$ và $\alpha = 0$ , nên $\beta = \dfrac{1,4}{1,48}$

Khi đó $f'' = f\dfrac{1-\beta\cos\alpha}{\sqrt{1-\beta^2}} = \dfrac{c}{\lambda}\dfrac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \dfrac{3.10^8}{5000.10^{-10}}\dfrac{1-\dfrac{1,4}{1,48}}{\sqrt{1-(\dfrac{1,4}{1,48})^2}}$ =1.10$^{14}$Hz

**Bài 9.**

a. Pha dao động của ánh sáng ở điểm x trong hệ K là $2\pi f(t-\dfrac{x}{c})$

Pha dao động của ánh sáng ở điểm x' trong hệ K' là $2\pi f'(t'-\dfrac{x'}{c})$

Mọi hiện tượng vật lý xảy ra trong các hệ quy chiếu quán tính phải như nhau, nên:

$$2\pi f(t-\frac{x}{c}) = 2\pi f'(t'-\frac{x'}{c})$$

Theo công thức biến đổi Lorentz:

$$2\pi f(t-\frac{x}{c}) = 2\pi f\left(\frac{t'+\dfrac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{x'+vt'}{c\sqrt{1-\beta^2}}\right) = 2\pi f'(t'-\frac{x'}{c});\ \beta = \frac{v}{c}$$

Hằng đẳng hệ số của t' và x' ở hai vế, ta thu được:

$$f' = f\frac{1-\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}} = f\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}};\ \Delta f = f - f' = f\left(1-\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\right) \qquad (1)$$

Trong (1), v là vận tốc tương đối giữa máy thu và nguồn. Coi v > 0 nếu máy thu và nguồn ra xa nhau, v < 0 nếu máy thu và nguồn lại gần nhau. Ta thấy rằng nếu máy thu ra xa nguồn thì tần số của ánh sáng mà máy thu nhận được sẽ nhỏ hơn máy thu lại gần nguồn, tần số ánh sáng mà nó thu được sẽ lớn hơn tần số ánh sáng mà nguồn phát ra.

$$\lambda' = \lambda\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = 1.10^3\sqrt{\frac{1+0,6}{1-0,6}} = 2,10^3\,\overset{o}{A}$$

b. Tìm vận tốc tương đối của 2 tên lửa đối với nhau dựa vào công thức cộng vận tốc. Coi B là một vật có vận tốc đ/v HQC K(trạm) là u=+0.8c và đ/v HQC K'(A) là u'. Vận tốc của K' đối với K là v=-0,6C

Vận tốc của tên lửa 1 đối với bệ phóng là u, của tên lửa 2 đối với bệ phóng là v và đối với tên lửa 1 là u'

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1-\frac{v}{c^2}u_x} \to \lambda'' = \lambda\sqrt{\frac{1+\beta'}{1-\beta'}} = 6.10^3\,\overset{o}{A}$$

**Bài 10.** a)Trong hệ quy chiếu gắn với con tàu K: khi tín hiệu bị phản xạ ngay tại mặt đất thì trái đất cách con tàu một khoảng cách $x_1$. Tín hiệu đi và về mất quãng đường $2x_1$, ứng với khoảng thời gian $\Delta t_0 = 40$ giây. Do đó ta có: $2x_1 = c\Delta t_0 \Rightarrow x_1 = 0,5c\Delta t_0 = 6.10^9 m$.

b) Tín hiệu phát ra tại tàu là $f_0$, tới phản xạ tại trái đất với tần số $f_1$ và thu lại ở tàu là $f_2$. Do hiệu ứng Doppler, gọi vận tốc của tàu đối với trái đất là v, ta có:

$f_1 = f_0\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}$ và $f_2 = f_1\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}$ suy ra: $f_2 = f_0\frac{c-v}{c+v} = 0,5f_0 \Rightarrow v = \frac{c}{3} = 10^8 m/s$. Đây cũng là vận tốc của trái đất so với con tàu.

c) Xét trong hệ quy chiếu con tàu K, thời điểm trái đất phản xạ tín hiệu là $t_1 = \frac{x_1}{v} = \frac{c\Delta t_0}{2v}$.

Thời điểm con tàu nhận được tín hiệu trong hệ quy chiếu K là $t_2 = t_1 + \frac{\Delta t_0}{2} = \left(\frac{c}{v}+1\right)\frac{\Delta t_0}{2}$, con tàu lúc này ở vị trí $x_2 = 0$.

Trong hệ quy chiếu K', lúc nhận tín hiệu, con tàu ở:

$x'_2 = \gamma(x_2 - vt_2) = \gamma\frac{v}{c}\left(\frac{c}{v}+1\right).\frac{c\Delta t_0}{2} = \frac{40}{\sqrt{2}}.3.10^8 = 8,5.10^9 m$.

**Bài 11.** a.Vận tốc ánh sáng đo được bởi quan sát viên trong hệ quy chiếu đứng yên đối với nước là $u_x' = \frac{c}{n}$

Vì nước chuyển động với vận tốc v so với phòng TN, nên vận tốc ánh sáng đối với HQC PTN là

$u_x$

Áp dụng phép cộng vận tốc tương đối tính, ta có:

$$u=u_x=\frac{u_x'+v}{1+u_xv/c^2}=\frac{\frac{c}{n}+v}{1+\frac{c}{n}(v/c^2)}=\frac{c}{n}\left(\frac{1+nv/c}{1+v/nc}\right)=\frac{c}{n}\left[1+\frac{n.v}{c}\frac{1-1/n^2}{1+v/nc}\right]\approx\frac{c}{n}+\left(1-\frac{1}{n^2}\right)v$$

So sánh với biểu thức $u=\frac{c}{n}+kv$ của đề ài cho, ta suy ra $\Rightarrow k=\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\approx 0,438$. So với kết quả đề cho k=0,44.

b. Tiến trình bài giải

$\Delta\lambda\to n'\to u'\to u$

Do hiệu ứng Doppler nên bước sóng của ánh sáng trong nước là λ nên chiết suất là $n=n(\lambda)$; thì bước sóng ánh sáng người quan sát đo được là $\lambda'=\lambda+\Delta\lambda$ nên chiết suất $n'=n(\lambda')$.

Và vận tốc ánh sáng trong nước là $u=\frac{c}{n}=\frac{c}{n(\lambda)}$.

Người quan sát ánh sáng có vận tốc u': $u'=\frac{c}{n(\lambda')}$.

Ta tìm $n(\lambda')\to u'\to u$ sau đó đồng nhất suy ra k

Khai triển Taylor:tìm $n(\lambda')$

$$n(\lambda')=n(\lambda+\Delta\lambda)=n(\lambda)+\frac{\frac{dn}{d\lambda}}{1!}(\lambda'-\lambda)+\frac{\frac{d^2n}{d\lambda^2}}{2!}(\lambda'-\lambda)^2+...$$

Ở đây ta lấy đến vô cùng bé bậc nhất $n(\lambda')=n(\lambda)+\frac{\frac{dn}{d\lambda}}{1!}(\lambda'-\lambda)=n(\lambda)+\frac{dn}{d\lambda}\Delta\lambda$ (1)

Theo hiệu ứng Doppler: tìm $\Delta\lambda$

$$f'=f\frac{1-\beta\cos\alpha}{\sqrt{1-\beta^2}}=f\frac{1-\beta\cos 0}{\sqrt{1-\beta^2}}=f\frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}=f\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}=f\sqrt{(1-\beta)(1+\beta)^{-1}}\approx f(1-\beta)$$

$$f'\approx f(1-\beta)=\frac{f}{1+\beta}=\frac{f}{1+\frac{v}{c/n}}=\frac{f}{1+\frac{nv}{c}}\quad(\lambda=\frac{v}{f})$$

$$\frac{\frac{c}{n(\lambda')}}{\lambda'}\approx\frac{\frac{\frac{c}{n(\lambda)}}{\lambda}}{1+\frac{nv}{c}}\Rightarrow\frac{1}{\lambda'n(\lambda')}\approx\frac{\frac{1}{\lambda n(\lambda)}}{1+\frac{nv}{c}}=\frac{1}{\lambda n(\lambda)(1+\frac{nv}{c})}$$

$$\Rightarrow\lambda'n(\lambda')\approx\lambda n(\lambda)(1+\frac{nv}{c})=(\lambda n(\lambda)+\frac{nv}{c}\lambda n(\lambda))$$

$$\Rightarrow\lambda'n(\lambda')-\lambda n(\lambda)=\frac{nv}{c}\lambda n(\lambda))$$

$$\Rightarrow\lambda'\frac{n(\lambda')}{n(\lambda)}-\lambda=\frac{nv}{c}\lambda\Rightarrow\lambda'\frac{n+dn}{n}-\lambda=\lambda'+\frac{\lambda'dn}{n}-\lambda\approx\lambda'+0-\lambda=\Delta\lambda=\frac{nv}{c}\lambda$$

Hay $\Delta\lambda = \dfrac{nv}{c}\lambda$ (2)

Theo giả thiết $n = a + \dfrac{b}{\lambda^2}$ ta có: $\dfrac{dn(\lambda)}{d\lambda} = \dfrac{-2b}{\lambda^3}$ và $\Delta\lambda = \dfrac{vn}{c}\lambda$ thay vào (1) ta được

$$n(\lambda') = n(\lambda) + \frac{dn}{d\lambda}\Delta\lambda = n(\lambda) + (\frac{-2b}{\lambda^3})\frac{vn}{c}\lambda = n(\lambda)\left[1 + (\frac{-2b}{\lambda^2})\frac{v}{c}\right] \quad (3)$$

Do đó thay vào ta được u':

$$u' = \frac{c}{n(\lambda')} = \frac{c}{n(\lambda)\left[1 + (\frac{-2b}{\lambda^2})\frac{v}{c}\right]} = \frac{c}{n(\lambda)}(1 + \frac{2b}{\lambda^2}\frac{v}{c}) = \frac{c}{n} + \frac{2bv}{n\lambda^2}. \quad (4)$$

Áp dụng phép cộng vận tốc tương đối tính, ta suy ra u

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}} = \frac{\frac{c}{n} + \frac{2bv}{n\lambda^2} + v}{1 + \frac{v}{c^2}(\frac{c}{n} + \frac{2bv}{n\lambda^2})} = \left[\frac{c}{n} + \frac{2bv}{n\lambda^2} + v\right](1 - \frac{v}{nc}).$$

$$\approx \frac{c}{n} + \left(1 - \frac{1}{n^2} + \frac{2b}{n\lambda^2}\right)v \, (5)$$

So sánh với giả thiết $u = \dfrac{c}{n} + kv$

Ta suy ra được $\Rightarrow k = 1 - \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2b}{n\lambda^2}$

**Bài 12.** Áp dụng biến đổi Lorentz $p'_x = \gamma\left(p_x - EV/c^2\right); p'_y = p_y; p'_z = p_z; E' = \gamma\left(E - p_x V\right)$ cho trường hợp của photon.

**a**. Nguồn đứng yên, máy thu chuyển động với vận tốc v:

$$hf_M = \varepsilon_M = \frac{\varepsilon_S - vp_{Sx}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1 - \frac{v}{c}\cos\theta_M}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} hf_S \Rightarrow f_M = \frac{1 - \frac{v}{c}\cos\theta_M}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} f_S$$

**b**.Nguồn chuyển động với vận tốc v, máy thu đứng yên:

$$hf_S = \varepsilon_S = \frac{\varepsilon_M - vp_{Mx}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1 - \frac{v}{c}\cos\theta_S}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} hf_M \Rightarrow f_S = \frac{1 - \frac{v}{c}\cos\theta_S}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} f_M$$

**c.** Giả sử nguồn đứng yên, máy thu chuyển động với vận tốc v. Điều này cũng giống như nguồn chuyển động với vận tốc (-v) và máy thu đứng yên. Áp dụng kết quả câu 5b cho ánh sáng, ta có: $c\cos\theta_M = \dfrac{c\cos\theta_S + v}{1 + v\cos\theta_S/c}$. Kết hợp với kết quả câu a, ta có:

$$f_M = \frac{1 - \frac{v}{c}\cos\theta_M}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} f_S = \frac{1 - \frac{v\cos\theta_S/c + v^2/c^2}{1 + v\cos\theta_S/c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} f_S = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + v\cos\theta_S/c} f_S$$

$$\Rightarrow f_S = \frac{1 + v\cos\theta_S/c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} f_M$$

Vậy kết quả câu a và câu b là phù hợp với nhau.

**d.** Giả sử ta có một máy "thu – phát" đứng yên trong hệ quy chiếu K. Khi đó, nguồn phát ra $f_S$ và máy thu nhận $f_M$. Máy "thu – phát" đứng yên này nhận tín hiệu từ nguồn với tần số $f'$ và phát ra tần số đó cho máy thu.

Từ kết quả câu a và câu b, ta có:

$$f_S = \frac{1-\frac{v}{c}\cos\theta_S}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}f' \Rightarrow f' = \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{v}{c}\cos\theta_S}f_S \text{ và } f_M = \frac{1-\frac{v}{c}\cos\theta_M}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}f' \Rightarrow f' = \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{v}{c}\cos\theta_M}f_M.$$

Từ đó suy ra biểu thức của hiệu ứng Doppler tổng quát là: $\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{v}{c}\cos\theta_M}f_M = \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{v}{c}\cos\theta_S}f_S$

**Bài 13**.a.**Tính tỉ số $\frac{f}{f_0}$:**

Khối lượng photon có tần số f được tính bởi công thức $m = \frac{hf}{c^2}$. Coi hệ photon – Trái Đất là hệ kín hai hạt, năng lượng của photon ở độ cao z gồm năng lượng $hf_0$ của nó và thế năng hấp dẫn giữa photon và Trái Đất $-G\frac{Mhf_0}{(R+z)c^2}$ (dấu – tương ứng với thế năng của lực hút)

Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng khi photon ở độ cao z và tại bề mặt Trái Đất:

$$hf_0 - G\frac{Mhf_0}{(R+z)c^2} = hf - G\frac{Mhf}{Rc^2} \quad (1)$$

với G là hằng số hấp dẫn, M và R là khối lượng và bán kính Trái Đất.

Từ (1) rút ra :

$$\frac{f}{f_0} = \frac{1-G\frac{M}{(R+z)c^2}}{1-G\frac{M}{Rc^2}} \quad (2)$$

Trong trường hợp $z \ll R$, ta làm gần đúng đến bậc nhất của $\frac{z}{R}$ với chú ý rằng $g = \frac{GM}{R^2}$ và $gR \ll c^2$:

$$\frac{f}{f_0} = \frac{1-G\frac{M}{(R+z)c^2}}{1-G\frac{M}{Rc^2}} \approx \frac{1-G\frac{M}{Rc^2}\left(1-\frac{z}{R}\right)}{1-G\frac{M}{Rc^2}} = 1+\frac{\frac{g}{c^2}z}{1-\frac{Rg}{c^2}} \approx 1+\frac{g}{c^2}z \quad (3)$$

**b.Tìm chiều chuyển động và vận tốc của nguồn thu:**

Theo (3) , photon mà nguồn hấp thụ thu được có $f > f_0$ nên theo hiệu ứng Doppler ta phải cho nguồn hấp thụ chuyển động xuống dưới. Nguồn thu sẽ thu được photon có tần số:

$$f\left(1-\frac{v}{c}\right) \equiv (f_0+\Delta f)\left(1-\frac{v}{c}\right) \quad (4)$$

Để xảy ra cộng hưởng ta phải có $(f_0 + \Delta f)\left(1 - \frac{v}{c}\right) = f_0$ (5)

Từ (5) ta có: $\left(1 + \frac{\Delta f}{f_0}\right)\left(1 - \frac{v}{c}\right) \approx 1 + \frac{\Delta f}{f_0} - \frac{v}{c} = 1$

Hay là $v = c\frac{\Delta f}{f_0}$ (6)

Ở đây ta đã bỏ qua số hạng tỉ lệ với $\frac{v}{c}\Delta f$ vì $v \ll c$.

Từ (6) và (3) thu được $\frac{v}{c} = \frac{\Delta f}{f_0} = \frac{f - f_0}{f_0} = \frac{f}{f_0} - 1 = \frac{g}{c^2}z$

và: $v = \frac{g}{c}z$

# CHƯƠNG XI
# TÍNH CHẤT HẠT ÁNH SÁNG
## XI.1. PHOTON-ÁP SUẤT ÁNH SÁNG

### 1. Các đặc trưng của photon.

Einstein cho rằng ánh sáng là dòng các "hạt" riêng biệt. Những hạt này đầu tiên Planck gọi là các lượng tử ánh sáng, còn Einstein gọi là các photon.

- Năng lượng của photon tần số $\nu$ là

$$\varepsilon = h\nu, h = 6,626.10^{-34} Js \qquad \textbf{(1.1)}$$

- Mối liên hệ giữa bước sóng $\lambda$ và tần số $\nu$ của photon:

$$\lambda\nu = c \qquad \textbf{(1.2)}$$

- Xung lượng (động lượng) của photon tính bằng công thức:

$$p = \frac{\varepsilon}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} \qquad \textbf{(1.3)}$$

- Khối lượng của photon:

Theo thuyết tương đối, năng lượng của mỗi hạt có khối lượng m, vận tốc v là:

$E = mc^2 = \dfrac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$, trong đó $m_0$ là khối lượng nghỉ, $\beta = \dfrac{v}{c}$.

Nếu hạt có vận tốc bằng c thì năng lượng của nó cũng tăng lên $\infty$ .Vì photon luôn chuyển động với vận tốc c, mà năng lượng của nó giới nội, chỉ bằng $h\nu$. Vì vậy người ta phải giả thiết rằng photon có khối lượng nghỉ bằng 0 ($m_0 = 0$) . Kết luận này không có gì là nghịch lý cả,vì không thể chọn một hệ quy chiếu nào mà đối với nó photon lại nằm yên.

Vì vậy $m_0 = 0$, còn $m = \dfrac{h\nu}{c^2}$.

Người ta viết lại các công thức trên như sau:

Gọi $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ là số sóng, véctơ $\vec{k}$ có hướng theo chiều chuyển động của photon là vectơ sóng, $\omega = 2\pi\nu$ là tần số vòng, và $\hbar = \dfrac{h}{2\pi} = 1,05.10^{-34} Js$ ( cũng gọi là hằng số Plank) thì công thức (1.1) và (1.3) được viết lại như sau:

$$\begin{cases} \varepsilon = \hbar\omega \\ \vec{p} = \hbar\vec{k} \end{cases} \qquad \textbf{(1.4)}$$

### 2. Áp suất ánh sáng.

Áp suất ánh sáng được xem như kết quả của việc truyền xung lượng của các photon cho các vật phản xạ hay hấp thụ ánh sáng.

Từ các quan điểm sao chổi,Képler (1571 – 1630) đã cho rằng ánh sáng Mặt Trời gây nên một áp lực lên đám bụi sao chổi, khiến nó bị đẩy về phía sau tạo thành một duôi sao chổi rất dài.

Theo quan điểm thuyết sóng điện từ, Maxwell đã tính được áp suất p gây ra bởi sóng điện từ tác dụng lên vật:

$$P = \frac{E}{c}(1+R)$$

Trong đó $\frac{E}{c}$ là mật độ năng lượng của ánh sáng, còn R là hệ số phản xạ của mặt được rọi sáng.

-Theo kết quả tính toán của Măcxoen, trong những ngày trời nắng, áp suất do ánh sáng Mặt Trời gây ra trên mặt đất có trị số bằng (hay khoảng) $4.10^{-3}$ N/m$^2$

-Việc phát hiện bằng thực nghiệm một áp suất có trị số nhỏ như vậy là hết sức khó khăn. Áp suất ánh sáng đã được Măcxoen tiên đoán từ năm 1874, nhưng mãi tới năm 1900, lần đầu tiên nhà bác học Nga Lebedev đã chế tạo được một dụng cụ đặc biệt cho phép phát hiện và đo được trị số của áp suất ánh sáng.

Các phép đo của Lebedev đã kiểm nghiệm lại công thức (4.34) với độ chính xác khoảng 20%. Thí nghiệm này là một bằng chứng về bản chất điện từ của ánh sáng.

Theo quan điểm của thuyết lượng tử ánh sáng, thì áp suất là kết quả của sự truyền xung lượng của các phôtôn cho các vật phản xạ hay hấp thụ ánh sáng.

***Chứng minh:*** Ta xét trường hợp chùm sáng đơn sắc tần số $\nu$ chiếu vuông góc lên mặt vật. Gọi E là năng lượng của N phôtôn tới đập vuông góc trên một đơn vị diện tích bề mặt của vật trong 1 giây thì: $N = \frac{E}{h\nu}$

Khi một phôtôn bị hấp thụ một xung lượng $\frac{h\nu}{c}$. Nếu một phôtôn bị phản xạ, xung lượng của nó đổi chiều, tức là biến đổi từ $\frac{h\nu}{c}$ thành $-\frac{h\nu}{c}$, do đó nó truyền cho mặt phản xạ một xung lượng : p'=2mc=2hf/c

Vậy trong một giây, một đơn vị diện tích của mặt hấp thụ hoàn toàn nhận một xung lượng:

$$N\frac{h\nu}{c} = \frac{E}{c} \qquad (5.36)$$

Đây cũng chính là áp suất do dòng ánh sáng chiếu vuông góc gây ra trên bề mặt vật hấp thụ hoàn toàn.

Vậy $$P_{ht} = N_{ht}\frac{h\nu}{c} = \frac{E}{c} \qquad (5.37)$$

Đối với bề mặt vật phản xạ hoàn toàn, áp suất của chùm sáng chiếu vuông góc bằng:

$$P_{px} = 2N_{px}\frac{h\nu}{c} = 2\frac{E}{c} \qquad (5.38)$$

Trong trường hợp mặt của vật có hệ số phản xạ R thì trong số N phôtôn tới trong 1 giây sẽ có RN phôtôn bị phản xạ, (1 – R)N phôtôn bị hấp thụ. Kết quả là:

$$P = (1 - R)N\frac{h\nu}{c} + 2RN.\frac{h\nu}{c} = N.\frac{h\nu}{c}(1 + R)$$

Hay $P = \frac{E}{c}(1 + R)$

Đối với vật hoàn toàn trong suốt, phôtôn không thay đổi xung lượng khi truyền qua vật, nên không gây ra áp suất lên mặt vật.

Các kết quả thu được từ thuyết lượng tử ánh sáng hoàn toàn phù hợp với các kết luận về áp suất ánh sáng mà Măcxoen đã tìm được từ thuyết điện từ.

Việc phát hiện áp suất ánh sáng bằng thực nghiệm đã khẳng định ánh sáng không chỉ có năng lượng mà có cả xung lượng. Đây là một bằng chứng khẳng định tính vật chất của ánh sáng: ánh sáng cũng là một dạng của vật chất.

# HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 1.**

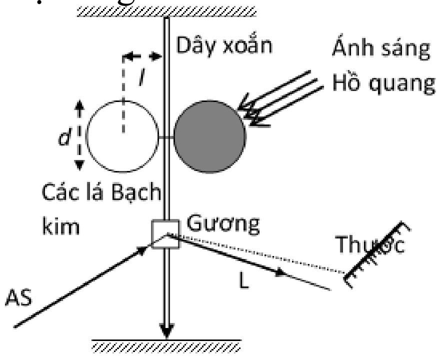
a. Theo định nghĩa áp suất, áp suất ánh sáng được tính theo công thức: $P=\frac{F}{S}$ (1), trong đó F là lực ánh sáng tác dụng lên diện tích S. Đối với lá bạch kim $S=\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2$ (d = 5mm) (2)

Gọi M là momen xoắn của sợi dây treo trên các lá bạch kim, l là khoảng cách từ tâm các lá bạch kim đến trục quay, thì :

$$M=Fl\rightarrow F=\frac{M}{l}=\frac{k\alpha}{l} \qquad (3)$$

Vì α nhỏ nên có thể xác định theo độ dịch chuyển của vệt sáng trên thước:

$$\alpha=\frac{x}{L} \qquad (4)$$



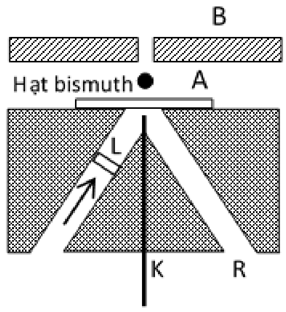

Thay (2), (3), (4) vào (1):

$$P=\frac{4kx}{\pi lLd^2}=3,85.10^{-9}N/cm^2 \qquad (5)$$

b. Theo công thức áp suất ánh sáng:

$$P=(1+R)\frac{I}{c}\rightarrow I=\frac{Pc}{1+R}=7,7.10^{-2}cm^{-2}s^{-1}$$

**Bài 2.** Trước hết chúng ta tính góc khối $\Delta\omega$ nhìn hạt bismuth từ điểm phát tia X ở bản A. Góc khối $\Delta\omega$ được tính theo bán kính r của hạt bismuth và khoảng cách d từ bản A đến hạt bismuth: $\Delta\omega=\frac{r^2\pi}{d^2}$. Góc khối này chiếm tỷ lệ bằng $\rho=\frac{\Delta\omega}{4\pi}=\left(\frac{r}{2d}\right)^2\approx\frac{1}{1,8.10^6}$ của góc khối $4\pi$ từ điểm phát tia X ở bản A.




- Nếu quan niệm tia X là sóng, thì năng lượng của nó sẽ phân bố đều trên mặt sóng cầu và phần năng lượng mà hạt bismuth nhận được sẽ chỉ bằng $\frac{1}{\rho}=\frac{10^{-6}}{1,8}\approx5,6.10^{-7}$ phần năng lượng toàn phần của chùm tia X do bản A phát ra. Phần năng lượng nhỏ bé này lại phải phân phối cho một số rất lớn electron cấu tạo nên hạt bismuth, cho nên muốn làm bật một electron ra khỏi hạt bismuth thì phải cần một thời gian rọi sáng rất lâu, hoặc bằng một cách nào đó không thể hiểu được, phải truyền tất cả năng lượng của chúng cho một electron.

- Nếu giải thích theo quan niệm hạt, thì xác suất để một hạt photon đập trúng hạt bismuth là $\frac{1}{1,8.10^6}$. Tức là cứ có 1 800 000 photon bay ra từ bản A sẽ có trung bình một photon đập trúng hạt bismuth. Nhưng trong thí nghiệm, trong một giây trung bình có 1000 photon bay ra khỏi bản A, tức là trung bình cứ sau $\tau=\frac{1800000}{1000.60}=30$ phút lại có một photon đập vào hạt bismuth và làm bật một electron từ hạt đó, làm cho hạt bismuth mất cân bằng. Tính toán này phù hợp với kết quả thu được từ thí nghiệm trên của Dobronravov và Ioffe.

**Bài 3. IPHO 1993**

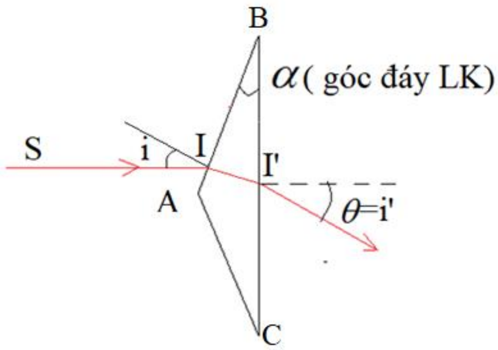
1).Vì tia SI vuông góc mặt đáy BI', nên góc tới $i=\alpha$

và góc lệch $\theta = i'$ (1)

Trên hình, ta có $\sin i = n\sin r \Leftrightarrow \sin\alpha = n\sin r \rightarrow r = \arcsin(\frac{\sin\alpha}{n})$ (2)

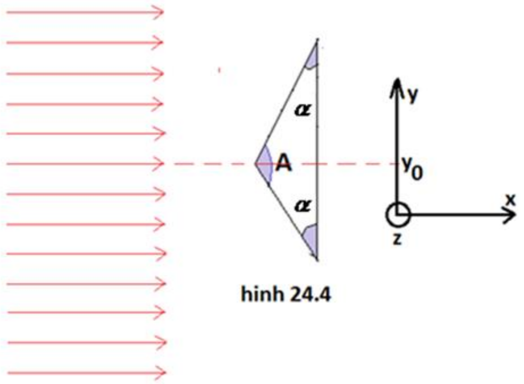
Khi đó $r' = \alpha - r = \alpha - \arcsin(\frac{\sin\alpha}{n})$ (3)

Mà tại I': $\sin i' = n\sin r' \Leftrightarrow \sin\theta = n\sin(\alpha\text{-r})$




$$\rightarrow \theta = \arc\left[n\sin\left(\alpha - \arcsin(\frac{\sin\alpha}{n})\right)\right] \quad (4)$$

2)Tìm $F_x$,$F_y$ theo $I_0$, $\theta$, h, W và $y_0$




hinh 24.4

Kực tác dụng của chùm Laser lên lăng kính và ngược chiều với tốc độ biến thiên động lượng

-Tìm biến thiên động lượng của phần Laser đi tới nửa trên lăng kính:

Gọi số phôtn rọi đến nửa trên của LK song song với trục x trong 1 đơn vị thời gian là n. Nếu năng lương một phôtn là E thì động lượng là $\vec{p_i} = \frac{E}{c}\vec{e_x}$. Pho ton rời khỏi lăng kính so với trục x lệch góc $\theta$ là $\vec{p} = \vec{p_x} + \vec{p_y}$

$$\vec{p} = \frac{E}{c}\cos\theta\vec{e_x} + \frac{E}{c}\sin\theta\vec{e_y}$$

Độ biến thiên động lượng cho 1 phôtn qua nửa trên lăn kính là

$$\Delta\vec{p} = (\frac{E}{c}\cos\theta - \frac{E}{c})\vec{e_x} - \frac{E}{c}\sin\theta\vec{e_y} \quad (5)$$

Lực tác dụng lên nửa trên lăng kính là $\vec{F}$: $\vec{F}.\Delta t = \Delta N\,\Delta\vec{p}$

$$\rightarrow \vec{F} = -\frac{\Delta N\,\Delta\vec{p}}{\Delta t} = -n\left[(\frac{E}{c}\cos\theta - \frac{E}{c})\vec{e_x} - \frac{E}{c}\sin\theta\vec{e_y}\right] \quad (6)$$

Mà $P_{up} = n_{up}E$ là công suất chùm Laser. (7)

Vậy lực tác dụng lên nửa trên lăng kính là $\rightarrow \overrightarrow{F_u} = \frac{P_u}{c}\left[(1-\cos\theta)\overrightarrow{e_x} + \sin\theta\overrightarrow{e_y}\right]$ (8)

Tương tự, lực do chùm laser tac dụng lên nửa dưới lăng kính là

$\rightarrow \overrightarrow{F_L} = \frac{P_L}{c}\left[(1-\cos\theta)\overrightarrow{e_x} - \sin\theta\overrightarrow{e_y}\right]$ (9)

Do đó lực tác dụng lên toàn lăng kính là

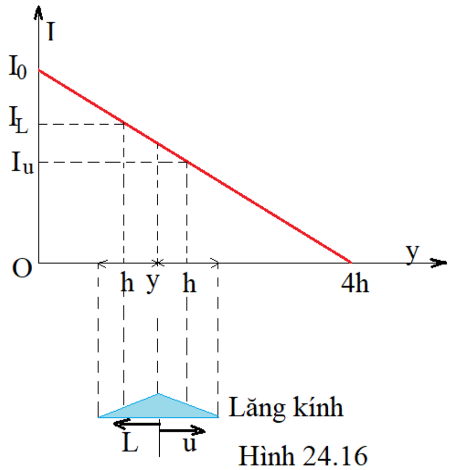
$\rightarrow \vec{F} = \overrightarrow{F_L} + \overrightarrow{F_u} = \frac{P_L + P_u}{c}(1-\cos\theta)\overrightarrow{e_x} + \frac{P_u - P_L}{c}\sin\theta\overrightarrow{e_y}$ (10)

Trong đó $\theta$ tính theo ý (4)

**Bây giờ ta tính $P_u, P_L$ theo độ rọi $I_0$.**

-Giả thiết cho độ rọi I(y) giảm tuyến tính từ đỉnh lăng kính dọc theo y về hai phía, nên:

$$0 < y < 4h \rightarrow I(y) = I_0(1 - \frac{y}{4h})$$
$$-4h < y < 0 \rightarrow I(y) = I_0(1 + \frac{y}{4h}) \quad (11)$$



Hình 24.16

Mặt khác giả thiết cho đỉnh lăng kính căchs tâm 1 đoạn $y_0$ cvà cách đáy của nó một đoạn 2h thì có 2 khả năng xảy ra:

**+Trường hợp 1**: $h \le y_0 \le 3h$ (hình 24.16) khi đó độ rọi trung bính tác dung lên phần trên và phần dưới lăng kính là $I_u, I_L$

$$I_u = I(y_0 + \frac{h}{2}) = I_0\left[1 - \frac{y_0 + \frac{h}{2}}{4h}\right] \quad ??? \quad (12)$$

$$I_L = I(y_0 - \frac{h}{2}) = I_0\left[1 + \frac{y_0 - \frac{h}{2}}{4h}\right] \quad ??? \quad (13)$$

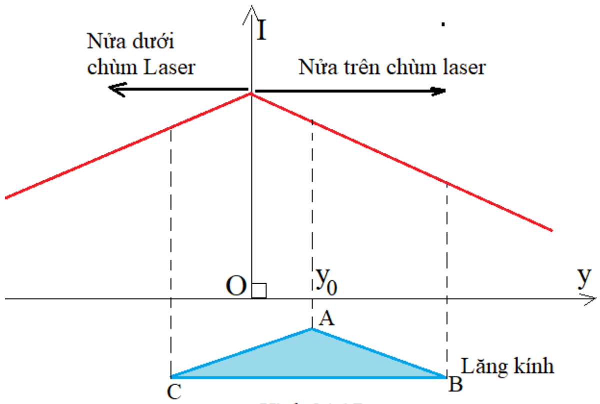
Và khi đó

$P_u = I_u.h.\mathrm{w}$ ; $P_L = I_L.h.\mathrm{w}$ (14)

Do đó $F_x = \frac{2hWI_0}{c}(1 - \frac{y_0}{4h})(1-\cos\theta)$ (15)

$F_y = -\frac{hWI_0}{4c}\sin\theta$ (16)

**+Trường hợp 2:** $0 \le y_0 \le h$ (hình 24.17) trong trường hợp này nửa dưới của lăng kính có một phần nằm trong nửa trên của chùm lade, một phần nằm trong nửa dưới của chùm lade.
khi đó độ rọi trung bính lên phần này chia làm 2 miền khác nhau là $I_{L1}, I_{L2}$



Hình 24.17

$$I_{L1} = I(\frac{y_0}{2}) = I_0(1-\frac{y_0}{8h});\ I_{L2} = I(\frac{h-y_0}{2}) = I_0(\frac{7}{8}+\frac{y_0}{8h})$$
**(17)**

**Do đó** $P_L = I_{L1}\mathrm{w}\frac{y_0}{2} + I_{L2}\mathrm{w}(\text{h-y}_0) = I_0\mathrm{w}\frac{y_0}{2} - I_0\mathrm{w}\frac{y_0^2}{16h} + I_0\mathrm{w}(\frac{7}{8}h - \frac{7}{8}y_0 + \frac{y_0}{8} - \frac{7y_0^2}{8h}$

$$P_L = hI_0\mathrm{w}(\frac{7}{8}+\frac{y_0}{4h}-\frac{y_0^2}{4h}) \qquad (18)$$

**Khi đó** $P_u$ vẫn tính teo (12) và (14)

**Ta suy ra** $P_u + P_L = hI_0\mathrm{w}(\frac{7}{4}-\frac{y_0^2}{4h});\ P_{up} - P_L = -hI_0\mathrm{w}\frac{y_0}{2h}(1-\frac{y_0}{2h})$ (19)

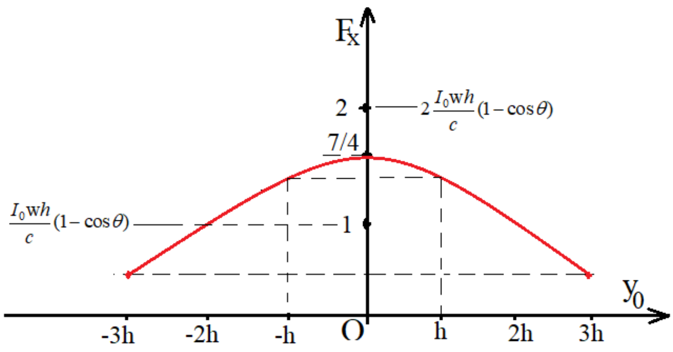
Từ đó suy ra $P_u + P_L = hI_0\mathrm{w}(\frac{7}{4}-\frac{y_0^2}{4h});\ P_u - P_L = -hI_0\mathrm{w}\frac{y_0}{2h}(1-\frac{y_0}{2h})$ (20)

Từ (10) $\vec{F} = \frac{P_L+P_u}{c}(1-\cos\theta)\vec{e_x} + \frac{P_u-P_L}{c}\sin\theta\vec{e_y}$

Do đó $F_x = \frac{P_L+P_u}{c}(1-\cos\theta) = \frac{hI_0\mathrm{w}}{c}(\frac{7}{4}-\frac{y_0^2}{4h})(1-\cos\theta)$ (21)

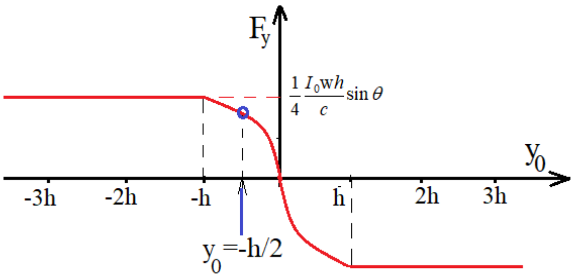
$$F_y = \frac{P_u-P_L}{c}\sin\theta = -\frac{hI_0\mathrm{w}}{c}\frac{y_0}{2h}(1-\frac{y_0}{2h})\sin\theta \qquad (22)$$

Với trường hợp lăng kính bị đẩy xuống dưới bài toáng cũng tương tự.
**Đồ thị $F_x$**:lực $F_x$ vẫ giữ như cũ



Đồ thị $F_x$ theo $y_0$

**Đồ thị $F_y$**: lực $F_y$ đổi chiều ngược lại.




Đồ thị $F_y$ theo $y_0$

3.Từ đồ thị $F_y$ theo $y_0$, ta thấy lực $F_y$ ngược chiều với trọng lực khi h<0. Với $y_0=-\frac{h}{2}$ ta áp dụng công thức $F_y$ trong trường hợp 2, nghĩa là (22) cho ta

$$F_y=-\frac{hI_0w}{c}\frac{y_0}{2h}(1-\frac{y_0}{2h})\sin\theta=P \qquad (23)$$

Khối lượng lăng kính $m=w.h.\frac{h}{\sqrt{3}}\rho=1,44.10^{-10}kg\rightarrow P=1,44.10^{-9}kg$

Góc lệch $\theta$ tính từ (4) $\theta=\arc\left[n\sin\left(\alpha-\arcsin(\frac{\sin\alpha}{n})\right)\right]=...=15,9^0\rightarrow\sin\theta=0,274$

Khi đó (23) cho ta $\frac{hI_0w}{c}\frac{y_0}{2h}(1-\frac{y_0}{2h})\sin\theta=mg\rightarrow I_0=\frac{2mgc}{wy_0(1-\frac{y_0}{2h})\sin\theta}$

$$I_0=\frac{2.1,42.10^{-9}}{10^{-3}.5.10^{-6}(1-\frac{1}{4}).0,274}=8,3.10^8W/m^2$$

Khi đó công suất chùm lade bằng độ rọi $I_0$ nhân với diện tích chùm tia

$$P=\frac{I_0}{2}.w.D=\frac{8,3.10^8}{2}.10^{-3}.80.10^{-6}=33,2W$$

4.Trong điều kiện phi trọng lượng, lăng kính sẽ nằm cân bằng tại vị trí $F_y$=0 hay khi $y_0$=0. Khi kéo lăng kính xuống dưới hoặc lên trên thì lực $F_y$ đóng vai trò lực hồi phục (ngay từ đề bài giả thiết cho lăng kính không quay nghĩa là momen lực $F_x$ bị khử)

$$F_y=-\frac{hI_0w}{c}\frac{y_0}{2h}(1-\frac{y_0}{2h})\sin\theta$$

Lúc này ta thấy $y_0=\frac{h}{20}\rightarrow(1-\frac{y_0}{2h})=1-\frac{1}{40}=1-0,025\approx1$

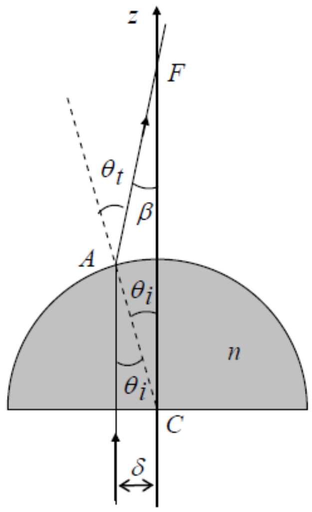
Do đó $F_y=-\frac{I_0hw}{c}\frac{y_0}{2h}(1-\frac{y_0}{2h})\sin\theta\approx-\frac{I_0hw}{c}\frac{y_0}{2h}\sin\theta=-\frac{I_0w}{2c}\sin\theta y_0$

Lăng kính dao động điều hòa dọc theo trục y: với chu kì $T=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{I_0w}{2mc}\sin\theta}}=11,2.10^{-3}s$

**Bài 5. Ipho 2003.**

Từ hình vẽ, theo định lý Snell's

$$n\sin\theta_i = \sin\theta_t \qquad (B1)$$




Vì $(\frac{\delta}{R})^3 << 1$ do vậy (B1) được viết lại

$$n\theta_i \approx \theta_t \qquad (B2)$$

Từ tam giác AFC và (B2) ta thu được

$$\beta = \theta_t - \theta_i \approx n\theta_i - \theta_i = (n-1)\theta_i \qquad (B3)$$

Gọi $f_0$ là tần số của ánh sáng tới. Nếu $n_p$ là số photon đập trên bề mặt phẳng của bán cầu trên một đơn vị diện tích trong đơn vị thời gian,

Tổng số các photon trên bề mặt phẳng diện tích $\pi\delta^2$ tâm C bán kính $\delta$ là trong mỗi đơn vị thời gian:

$\pi\delta^2 n_p$ . Công suất chiếu xạ vào phần mặt phẳng này $P = \varepsilon.\pi\delta^2 n_p = hf_0.\pi\delta^2 n_p$

Suy ra $n_p = \dfrac{P}{hf_0.\pi\delta^2}$ (B4)

Xét trên bề dày vành khăn tâm C bán kính r đến r+dr, có số photon đập vào là :

$n_p 2\pi rdr$ , tron đó $r = R\sin\theta_i \approx R\theta_i$

Do vậy: $n_p 2\pi rdr = n_p 2\pi R^2\theta_i d\theta_i$ (B5)

Độ biến thiên xung lượng trên phương Oz gây ra xung lực tác dụng lên bán cầu. Động lượng mỗi photon trên phương z trước khi đập vào $mc = \dfrac{\varepsilon}{c} = \dfrac{hf_0}{c}$ và khi thoát ra còn lại là $\dfrac{hf_0}{c}\cos\beta$

Trên vành khăn tâm C bán kính r đến r+dr có số photon đập vào tính theo (B5) gây ra xung lực trên phương Z

Động lượng $dp_z$ còn lại của các photon qua mặt vành khăn trên phương Z sau khi qua bán cầu:

$$d\mathbf{p}_z = n_p\frac{hf_o}{c}(2\pi rdr)\cos\beta \approx n_p\frac{hf_0}{c}(2\pi R^2)\left(1-\frac{\beta^2}{2}\right)\theta_i d\theta_i$$
$$\approx n_p\frac{hf_0}{c}(2\pi R^2)\left[\theta_i - \frac{(n-1)^2}{2}\theta_i^3\right]d\theta_i \qquad (B6)$$

Tổng Động lượng $F_z$ còn lại trên phương Z trong mỗi đơn vị thời gian khi qua bán cầu là

$$\mathbf{p}_z = 2\pi R^2 n_p\left(\frac{hf_0}{c}\right)\int_0^{\theta_{im}}\left[\theta_i - \frac{(n-1)^2}{2}\theta_i^3\right]d\theta_i$$
$$= \pi R^2 n_p\left(\frac{hf_0}{c}\right)\theta_{im}^2\left[1-\frac{(n-1)^2}{4}\theta_{im}^2\right] \qquad (B7)$$

Mà động lượng trước khi qua bán cầu của chùm laser là $\frac{P}{c}$ (P là công suất chùm laser trên phầm mặt tròn tâm C bán kính $\delta$). Do vậy tổng độ biến thiên động lượng chùm photon theo phương Z qua bán cầu trong một đơn vị thời gian là $(\frac{P}{c} - p_z)$, đó cũng chính lực tác dụng lên bán cầu theo phương Z.

Với $\delta$ là bán kính lớn nhất chùm laser qua bán cầu, nên góc giới hạn $\theta_i$ lớn nhất là $\theta_{im}$. Ta có

$$\tan\theta_{im} = \frac{\delta}{R} \approx \theta_{im}$$

Khi đó

$$p_z = \frac{\pi R^2 P}{\pi \delta^2 h f_0}\left(\frac{h f_0}{c}\right)\frac{\delta^2}{R^2}\left[1 - \frac{(n-1)^2\delta^2}{4R^2}\right] = \frac{P}{c}\left[1 - \frac{(n-1)^2\delta^2}{4R^2}\right] \qquad \text{(B8)}$$

Tổng lực tác dụng lên bán cầu trên phương Z phải cân bằng trọng lực bán cầu:

$$mg = \frac{P}{c} + (-F_z) = \frac{P}{c} - \frac{P}{c}\left[1 - \frac{(n-1)^2\delta^2}{4R^2}\right] = \frac{(n-1)^2\delta^2}{4R^2}\frac{P}{c} \qquad \text{(B9)}$$

Hay coong suất P của chùm laser cần thiết là

$$P = \frac{4mgcR^2}{(n-1)^2\delta^2} \qquad \text{(B10)}$$

# XI.2 HIỆN TƯỢNG QUANG ĐIỆN

**Bài 1.** a. Hiệu suất lượng tử $\eta = \frac{Ihc}{eP\lambda} = 3.10^{-3} = 0,3\%$

b. Giới hạn quang điện

Tính được $v_{0\max} = \frac{|e|BR}{m} = 4,1.10^5 m/s$

Tính được $\lambda_0 = \dfrac{hc}{\frac{hc}{\lambda} - \frac{mv_{0\max}^2}{2}} = 0,690\mu m$

**Bài 2. a.** Tốc độ ban đầu cực đại của electron quang điện $\frac{hc}{\lambda} = A + \frac{m_e v_{0\max}^2}{2}$

- Suy ra $v_{0\max} = \sqrt{\frac{2}{m_e}\left(\frac{hc}{\lambda} - A\right)} \approx 1,0273.10^6\left(\frac{m}{s}\right)$

**b.** Hiệu điện thế hãm $eU_h = \frac{m_e v_{0\max}^2}{2} \Rightarrow U_h \approx 3(V)$

- Khi đặt nguồn xoay chiều vào hai cực của tế bào quang điện, để I = 0 thì

$$U_{AK} \le -U_h \Leftrightarrow U_{AK} \le -3(V)$$

- Dùng phương pháp đường tròn tính thời gian I=0 trong một chu kỳ được $\Delta t = \frac{T}{3}$ nên trong 1 phút khoảng thời gian I = 0 là 1/3 phút = 20(s)

**Bài 3.** a.Tính $\lambda_0$

- $\frac{hc}{\lambda_1} = \frac{hc}{\lambda_0} + \frac{mv_1^2}{2}$ (1)

$\frac{hc}{\lambda_2} = \frac{hc}{\lambda_0} + \frac{mv_2^2}{2} = \frac{hc}{\lambda_0} + 4\frac{mv_1^2}{2}$ (Vì $\lambda_2 < \lambda_1$) (2)

- Từ (1) và (2): $\frac{1}{\lambda_0} = \frac{4}{3\lambda_1} - \frac{1}{3\lambda_2}$

  - Thay số $\lambda_0 \approx 0{,}659\mu m$

b. Tìm vận tốc quang e tại B.

- Khi chỉ chiếu $\lambda_1$ thì: $W_{đ1} = W_{đA} = \frac{hc}{\lambda_1} - \frac{hc}{\lambda_0}$
- Theo định lí động năng: $W_{đB} - W_{đA} = eU_{AB} \Rightarrow W_{đB} = \frac{hc}{\lambda_1} - \frac{hc}{\lambda_0} + eU_{AB}$
- $\Rightarrow v_B = \sqrt{\frac{2}{m}(\frac{hc}{\lambda_1} - \frac{hc}{\lambda_0} + eU_{AB})} \approx 1{,}086.10^6 m/s$

**Bài 4.** Cường độ chùm sáng tại điểm đặt mắt cách nguồn sáng một khoảng R là

$$I = \frac{P}{S} = \frac{P}{4\pi R^2}$$

Năng lượng của chùm sáng truyền đến mắt trong 1 giây

$$W = I.s = \frac{P}{4\pi R^2}4\pi.10^{-6} = \frac{P}{R^2}10^{-6}$$

Số phôtôn lọt vào mắt trong 1 giây

$$N_0 = \frac{W}{\varepsilon} = \frac{P\lambda}{hcR^2}10^{-6}$$

Số photon lọt vào mắt trong thời gian t =0,05 s

$$N = N_1.t = \frac{P\lambda t}{hcR^2}10^{-6}$$

Điều kiện để mắt nhìn thấy nguồn sáng là

$$N = \frac{P\lambda t}{hcR^2}10^{-6} \ge 10 \Rightarrow R \le \sqrt{\frac{P\lambda t}{hc}.10^{-7}} = 173{,}313(\text{Km})$$

**Bài 5.** Khi chiếu bức xạ vào quả cầu kim loại đặt cô lập, các êlectron bị bứt ra làm cho quả cầu nhiễm điện dương, điện tích dương này tạo nên cho quả cầu 1 điện thế V tăng dần. Khi điện thế của quả cầu cực đại, những êlectron có động năng cực đại cũng bị giữ lại bởi lực điện trường, vì vậy theo định lý động năng ta có

$$-\frac{mv_{0max}^2}{2} = e(0 - V_{max}) = -e.V_{max} \Rightarrow \frac{mv_{0max}^2}{2} = e.V_{max}$$

Theo công thức Anhxtanh về hiện tượng quang điện ta có

$$hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda_0} + \frac{mv_{0max}^2}{2} = \frac{hc}{\lambda_0} + e.V_{max}$$

$$\Rightarrow V_{max} = \frac{\frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda_0}}{e} = \frac{hf - \frac{hc}{\lambda_0}}{e}$$

Áp dụng cho bức xạ thứ nhất ta được $V_{1max} = 1{,}7V$

Áp dụng cho bức xạ thứ hai ta được $V_{2max} = 2{,}4V$

Vậy điện thế cực đại của quả cầu khi chiếu đồng thời hai bức xạ là $V_{max} = V_{2max} = 2{,}4V$.

**Bài 6.** a) Vận tốc ban đầu cực đại của các quang electron là

$$v = \sqrt{\frac{2\left(\frac{hc}{\lambda} - A\right)}{m}} = \sqrt{\frac{2(\frac{6,625.10^{-34}.3.10^8}{0,3.10^{-6}} - 2,5.1,6.10^{-19})}{9,1.10^{-31}}} = 7,6.10^5 \text{ m/s}$$

b) Chỉ xét các electron bay theo phương vuông góc của bản với vận tốc ban đầu cực đại

Gọi S là quãng đường đi được xa bản M nhất của các electron nói trên, áp dụng định lí động năng tính được $S = \frac{d.mv_{0max}^2}{2eU} = 0,0144m = 1,44cm$

Vậy các electron này đến bản N gần nhất cách N 1 đoạn là $d_{min} = d - S = 2,556cm$

# XI.3 HIỆU ỨNG COMPTON
# LÝ THUYẾT

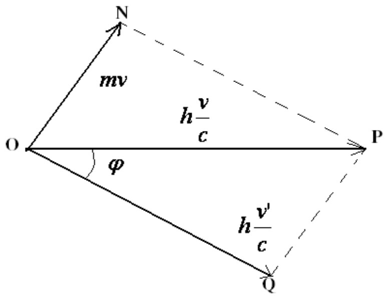
Hiệu ứng Compton chỉ có thể giải thích trên cơ sở thuyết lượng tử ánh sáng, coi chùm tia X tới là chùm hạt phôtôn.

- Hiện tượng tán xạ của chùm tia X trên các nguyên tử nhẹ được giải thích như kết quả của sự va chạm giữa phôtôn tia X và electron của các nguyên tử chất tán xạ. Trong quá trình đó các định luật bảo toàn năng lượng và bảo toàn xung lượng được thỏa mãn.
- Giả sử một phôtôn tia X tần số $\nu$ tới theo phương OP và va chạm với một electron tự do đứng yên tại O.Trong quá trình va chạm, phôtôn nhường một phần năng lượng của mình cho electron và biến thành một phôtôn khác có tần số nhỏ hơn (bước sóng dài hơn). Sau va chạm, phôtôn bị bắn đi theo phương OQ, còn electron bị bắn đi theo phương ON với vận tốc v (thường gọi là electron giật lùi)

Trước va chạm, electron có khối lượng tĩnh $m_0$ và năng lượng $m_0c^2$, sau va chạm nó có khối lượng m, năng lượng $mc^2$, với $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$. Phôtôn tới có năng lượng $h\nu$, xung lượng $\dfrac{h\nu}{c}$, còn phôtôn tán xạ có năng lượng $h\nu'$, xung lượng $\dfrac{h\nu'}{c}$

Theo định luật bảo toàn năng lượng ta có:

$$h\nu + m_0c^2 = h\nu' + mc^2 \qquad (5.30)$$




Biểu diễn động lượng của phôtôn tới, phôtôn tán xạ và electron giật lùi lần lượt bằng các vectơ $\overrightarrow{OP}; \overrightarrow{OQ}; \overrightarrow{ON}$, theo định luật bảo toàn động lượng, ta có:

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{ON}$

Do đó: $ON^2 = OP^2 + OQ^2 - 2OP.OQ.\cos\varphi$

Thay $OP = \dfrac{h\nu}{c}$, $OQ = \dfrac{h\nu'}{c}$ và ON = mv, ta rút ra

$$m^2v^2 = \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 + \left(\frac{h\nu'}{c}\right)^2 - 2.\frac{h\nu}{c}.\frac{h\nu'}{c}.\cos\varphi$$

hay: $m^2v^2c^2 = h^2\nu^2 + h^2\nu'^2 - 2.h^2\nu\nu'.\cos\varphi \qquad (5.31)$

Từ phương trình (5.30) rút ra $mc^2 = h(\nu - \nu') + m_0e^2$, bình phương cả hai vế hệ thức này, ta có

$$m^2c^4 = h^2\nu^2 + h^2\nu'^2 - 2h^2.\nu\nu' + m_0^2c^4 + 2hm_0c^2(\nu - \nu') \qquad (5.32)$$

Lấy (5.32) trừ đi (5.31) từng vế một, ta thu được:

$$m^2c^4\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = -2h^2\nu.\nu'(1 - \cos\varphi) + 2hm_0c^2(\nu - \nu') + m_0^2c^4$$

thay $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, ta cos: $m^2\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right) = m_0^2$

do đó ta thu được kết quả cuối cùng $m_0c^2(\nu - \nu') = h\nu\nu'(1 - \cos\varphi)$

Thay $(1 - \cos\varphi) = 2\sin^2\dfrac{\varphi}{2}$ và chia cả hai vế cho $m_0c\nu\nu'$, ta có

$$\frac{c}{\nu'} - \frac{c}{\nu} = \frac{h}{m_0c}.2\sin^2\frac{\varphi}{2}$$

Hay $\Delta\lambda = \lambda - \lambda' = 2\lambda_c\sin^2\dfrac{\varphi}{2}$

Trong đó $\lambda_c = \dfrac{h}{m_0c}$ gọi là bước sóng Compton, còn $\varphi$ gọi là góc tán xạ.

Thay các giá trị của hằng số h, $m_0$, c ta thu được $h/m_0c = 0,02426A^0$, phù hợp với kết quả quan sát được bằng thực nghiệm: Điều đó khẳng định sự đúng đắn của thuyết lượng tử ánh sáng.

Trong tính toán ở trên, để đơn giản ta đã giả thiết electron hoàn toàn tự do. Thực tế electron luôn luôn liên kết với nguyên tử. Vì vậy, trong công thức $\Delta\lambda = \lambda - \lambda' = 2\lambda_c\sin^2\dfrac{\varphi}{2}$ đúng ra còn phải kể đến công cần thiết bứt electron khỏi nguyên tử và công để làm nguyên tử dịch chuyển. Tuy nhiên, thực nghiệm cho thấy các electron trong tán xạ Compton thường là các electron lên kết lỏng lẻo với hạt nhân, nên trong gần đúng bậc nhất có thể coi chúng là các electron tự do.

**Bài 1**. Bài toán này cho $\theta = 180^0, \phi = 0$

⊕ $E + m_0c^2 = E' + mc^2$

$$0,3Mev + 0,511Mev = E' + \frac{0,511Mev}{\sqrt{1-\frac{v}{c^2}}}$$

$$\oplus\ \frac{E}{c} + 0 = -\frac{E'}{c} + mv = -\frac{E'}{c} + \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Giải hệ 2 phương trình trên ta được v = 0,65c

Hoặc từ phương trình Compton: $\lambda' \to \varepsilon \to v$

**Bài** 2. $\lambda' = 0,312A^0$

Theo định luật bảo toàn năng lượng:

$$\frac{hc}{\lambda} + m_0c^2 = \frac{hc}{\lambda'} + K_c + m_0c^2 \to K_c = \varepsilon - \varepsilon' = 1,6\text{Kev}$$

**Bài** 3. $K_{e\ max} \to \theta = 180^0$

+ Bài toán năng lượng: $K_{cmax} = \varepsilon - \varepsilon' = 45Kev$ (1)

+ Xung lượng: $\frac{\varepsilon}{c} = -\frac{\varepsilon'}{c} + P_e$ (2)

Giữa năng lượng và xung lượng của electron có mối liên hệ

(Công thức Einstein):

$E^2 = E_o^2 + (P_ec)^2$ ; $(E = E_0 + K_e)$

$(E_0 + K_e)^2 = E_o^2 + (P_ec)^2$ ; $(E_1 = 0,511Mev)$

$\to P_e = 0,22Mev/c$ (3)

Thế (3) vào (2):

$\to \varepsilon + \varepsilon' = 220Kev$ $\varepsilon$ và $\varepsilon$': $\varepsilon$ = 132Kev, $\varepsilon$' = 98Ke

mà $\varepsilon - \varepsilon' = 45Kev$

$\to \lambda = 9,39.10^{-2}A^0$

**Bài 4**. Động lượng của phôtôn tới là $\overrightarrow{p_1}$ , với $p_1 = \dfrac{h}{\lambda}$. Động lượng của electron bắn ra là $\overrightarrow{p_2}$ , với $p_2 = mv$. Theo đề bài $v = bv_{max}$ được tính bằng phương trình Anhxtanh:

$$\frac{mv^2{}_{max}}{2} = \frac{hc}{\lambda} - A$$

$$\rightarrow v^2 = \frac{2b}{m}\left(\frac{hc}{\lambda} - A\right)$$

Động lượng truyền cho điện cực $\Delta\vec{p} = \overrightarrow{p_1} - \overrightarrow{p_2}$ , vì $\overrightarrow{p_1}$ vuông góc $\overrightarrow{p_2}$ nên $(\Delta p)^2 = p^2{}_1 + p^2{}_2$ Suy ra:

$$\Delta p = \sqrt{\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 + 2mb^2\left(\frac{hc}{\lambda} - A\right)} \approx 3{,}43.10^{-27}\, kgm/s$$

**Bài 5.** Động năng của electron bắn ra (áp dụng định luật bảo toàn năng lượng):

$$\rightarrow E_đ = m_0\frac{c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0c^2 = h\nu - h\nu'$$

$$\rightarrow E_đ = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'} = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda + \Delta\lambda}$$

Với công thức tán xạ Cômtơn

$$\Delta\lambda = 2\lambda_c \sin^2\frac{\theta}{2}$$

Suy ra:

$$\rightarrow E_đ = \frac{hc}{\lambda}.\frac{2\lambda_c\sin^2\frac{\theta}{2}}{\lambda + 2\lambda_c\sin^2\frac{\theta}{2}} = \frac{hc}{\lambda}.\frac{\frac{2\lambda_c}{\lambda}}{\sin^2\frac{\theta}{2} + 2\lambda_c}$$

Ta thấy đạt giá trị cực đại khi $\sin^2\dfrac{\theta}{2} = 1 \rightarrow \theta = \pi$ khi đó

$$\rightarrow E_{đ\max} = \frac{hc}{\lambda}.\frac{2\lambda_c}{\lambda + 2\lambda_c}$$

Áp dụng định luật bảo toàn động lượng ta tìm được động lượng $p_e$ của electron bắn ra:

$$p_e^2 = \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda'}\right)^2 - 2\frac{h^2}{\lambda\lambda'}\cos\theta$$

Biết $\lambda' = \lambda + 2\lambda_c\sin^2\dfrac{\theta}{2}$. Tính được $p_e$.

**Bài 6.** Theo bài kết quả bài 5 ta có:

$$\rightarrow E_đ = \frac{hc}{\lambda}.\frac{2\lambda_c\sin^2\frac{\theta}{2}}{\lambda + 2\lambda_c\sin^2\frac{\theta}{2}} = \frac{hc}{\lambda}.\frac{\frac{2\lambda_c}{\lambda}}{\sin^2\frac{\theta}{2} + 2\lambda_c}$$

Ta thấy đạt giá trị cực đại khi $\sin^2\dfrac{\theta}{2} = 1 \rightarrow \theta = \pi$ khi đó

$$\rightarrow E_{đ\max}=\frac{hc}{\lambda}.\frac{2\lambda_c}{\lambda+2\lambda_c}$$

$$E_{đ\max}=\frac{hc}{\lambda}.\frac{2\lambda_c}{\lambda+2\lambda_c}$$

Suy ra:

$$\lambda=\frac{h}{mc}\left(\sqrt{1+\frac{2m_0c^2}{E_{đ\max}}}-1\right)=0{,}037\,A^0$$

**Bài 7.** Kí hiệu $\overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{p'}$, $\overrightarrow{p_e}$ lần lượt là động lượng của photon trước và sau khi tán xạ, và của electron bắn ra (ban đầu electron đứng yên). Áp dụng định luật bảo toàn động lượng:

$\overrightarrow{p}=\overrightarrow{p'}+\overrightarrow{p_e}$, Từ hình vẽ ta có:

$$tg\varphi=\frac{p'\sin\theta}{p-p'\cos\theta}$$

Với $p=\frac{h}{\lambda}$ ; $p'=\frac{h}{\lambda'}=\frac{h}{\lambda+2\lambda_c\sin^2\frac{\theta}{2}}$

Do đó $tg\varphi=\frac{\frac{h\sin\theta}{\lambda+2\lambda_c\sin^2\frac{\theta}{2}}}{\frac{h}{\lambda}+2\lambda_c\sin^2\frac{\theta}{2}}$

$$\rightarrow tg\varphi=\frac{\cot g\frac{\theta}{2}}{1+\frac{\lambda_c}{\lambda}}$$

Áp dụng định luật bảo toàn động lượng của electron bay ra là:

$$E_đ=\frac{hc}{\lambda}-\frac{hc}{\lambda'}$$

Theo đề bài $E_đ=\frac{hc}{\lambda'}$ . Suy ra:

$$\frac{hc}{\lambda}-\frac{hc}{\lambda'}=\frac{hc}{\lambda'}\qquad\rightarrow\lambda'=2\lambda$$

Theo công thức Cômtơn: $\Delta\lambda=\lambda'-\lambda=2\lambda_c\sin^2\frac{\theta}{2}=\lambda$

$$\rightarrow\frac{\lambda}{2\lambda_c}=\sin^2\frac{\theta}{2}\qquad(2)$$

Theo đề bài $\varphi+\theta=\pi/2$, do đó áp dụng hệ thức (1) ta có:

$$co\,tg\theta=\frac{\cot g\frac{\theta}{2}}{1+\frac{\lambda_c}{\lambda}}$$

$$\rightarrow tg\theta=tg\frac{\theta}{2}(1+\frac{\lambda_c}{\lambda})$$

Hay $1+\frac{\lambda_c}{\lambda}=\frac{2}{1-tg^2\frac{\theta}{2}}$

Đặt $\sin\frac{\theta}{2}$= t và thay vào trên (chú ý đến (2) ta được phương trình:

$$1+\frac{1}{2t^2}=\frac{2}{1-\frac{t^2}{1-t^2}}$$

Giải rat a được: $t^2=\frac{1}{4}=\frac{\lambda}{2\lambda_c}$

Suy ra: $\lambda=\frac{\lambda_c}{2}=\frac{1}{2}\frac{h}{mc}=0{,}012A^0$

Ta lại có:

$$\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1}{4}\rightarrow\frac{\theta}{2}=30^0\rightarrow\theta=60^0$$

**Bài 8.** Năng lượng của photon tán xạ là: $E'=\frac{hc}{\lambda'}$

Với $\lambda'=\lambda+\Delta\lambda=\lambda+2\lambda_c\sin^2\frac{\theta}{2}$

Vậy : $E'=\frac{hc}{\lambda+2\lambda_c\sin^2\frac{\theta}{2}}$, với $\lambda=\frac{hc}{E}$, E là năng lượng của photon tới, vậy

$$E'=\frac{1}{\frac{1}{E}+\frac{2\lambda_c}{hc}\sin^2\frac{\theta}{2}}=0{,}144MeV$$

**Bài 9.** Chùm tia lade tới có xung lượng: $p_1$ = E/C

Chùm tia ló có xung lượng (theo đề bài):

$$p_2=\frac{E/2}{c}=\frac{p_1}{2}$$

Xung lượng truyền cho thấu kính:

$$\overrightarrow{p}=\overrightarrow{p_1}-\overrightarrow{p_2} \qquad (1)$$

$p^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2\cos45^0$

$$p^2=\frac{E^2}{c^2}+\frac{E^2}{4c^2}-2\frac{E}{c}.\frac{E}{2c}.\frac{\sqrt{2}}{2}\rightarrow p^2=0{,}543\frac{E^2}{c^2}\quad\rightarrow p=0{,}74\frac{E}{c}=0{,}74\,p_1$$

Lực trung bình tác dụng lên thấu kính:

$$\overline{F}=\frac{p}{t}=\frac{0{,}74.0{,}4}{10^{-9}.3.10^8}\approx1N$$

Lực ấy hướng theo chiều $\overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{p}$ hợp với $\overrightarrow{p_1}$ (song song với trục chính thấu kính) một góc $\theta$. Để tìm $\theta$, chiếu hệ thức vecto (1) lên phương $\overrightarrow{p_1}$ và lên phương vuông góc với $\overrightarrow{p_1}$. Ta có:

$$p_x=p_1-\frac{1}{2}p_1\cos45^0=p_1(1-\frac{1}{2\sqrt{2}})\ ;\ p_y=\frac{1}{2}p_1\sin45^0=\frac{p_1}{2\sqrt{2}}$$

Suy ra: $tg\theta = \frac{p_y}{p_x} = \frac{1}{2\sqrt{2}-1} \approx 0,5469 \rightarrow \theta = 28^0 40'$

**Bài 10.** 1) a. Theo công thức Cômtơn:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{2h}{m_0 c}\sin^2\frac{\theta}{2} \qquad (1)$$

Với $\theta = 60^0$; h = $6,625.10^{-34}$Js; $m_0 = 9,1.10^{-31}$kg

Ta có: $\Delta\lambda = \lambda + \Delta\lambda = 1,2.10^{-12}m = 1,21pm$

Từ đó $\lambda' = \lambda + \Delta\lambda = 6,2 + 1,2 = 7,4pm$

b) Kí hiệu $m\vec{v}$, $\frac{\overrightarrow{hf}}{c}$, $\frac{\overrightarrow{hf'}}{c}$ tương ứng là động lượng của electron, của photon X tới và photon tán xạ, áp dụng định luật bảo toàn động lượng ta có

$$\frac{\overrightarrow{hf}}{c} = m\vec{v} + \frac{\overrightarrow{hf'}}{c} \qquad (2)$$

Từ đó suy ra:

$$(mv)^2 = \left(\frac{hf}{c}\right)^2 + \left(\frac{hf'}{c}\right)^2 - 2\left(\frac{hf}{c}\right)\left(\frac{hf'}{c}\right)\cos\theta$$

Với $\theta = 60^0$ ($\cos\theta = ½$); $\frac{f}{c} = \frac{1}{\lambda}$; $\frac{f'}{c} = \frac{1}{\lambda'}$

$$\rightarrow m^2v^2 = \frac{h^2}{\lambda^2\lambda'^2}(\lambda^2 + \lambda'^2 - \lambda\lambda')$$

Thay số, và chú ý rằng

$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, với $m_0 = 9,1.10^{-31}$kg

Ta được: $v^2 \approx \frac{0,995}{1,16}.10^{16} \rightarrow v = 9,26.10^7 m/s$

Ngoài ra, chiếu phương trình vectơ (2) lên phương vuông góc với phương của photon X tới, ta được:

$$\sin\varphi = \frac{h}{\lambda'.mv}\sin\theta = 0,9287 \rightarrow \varphi = 68^0 14'$$

2a) Ta có:

$$eU_2 \geq hf = \frac{hc}{\lambda}$$

$$U_{2m} = \frac{hc}{e\lambda} \approx 2,003.10^5(V) \approx 200kV$$

Từ đó tìm được: $U = U_m = \frac{U_{2m}}{k\sqrt{2}} \approx 100\sqrt{2} \approx 141,4V$

b) Ta có:

$$mc^2 = eU + m_0c^2 = \frac{hc}{\lambda} + m_0c^2$$

$$\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m_0c^2 + \frac{hc}{\lambda}$$

$$\rightarrow 1-\frac{v^2}{c^2}=\left(\frac{m_0c^2}{m_0c^2+\frac{hc}{\lambda}}\right)\approx 0,5161$$

$$\rightarrow \frac{v^2}{c^2}=0,4839 \quad \rightarrow v=0,696c\approx 2,09.10^8\, m/s$$

Chú ý: nếu tính v theo hệ thức $\frac{mv^2}{2}=\frac{hc}{\lambda}$, với $m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ thì ta được v = 2,02.$10^8$m/s, không khác nhiều so với trị số vừa tìm được ở trên

c) Để phương trình chuyển động của electron vuông góc với phương của tia X tán xạ, theo hình vẽ ta có:

$$\frac{hf'}{c}=\frac{hf}{c}\cos\theta \;\rightarrow \lambda'=\frac{\lambda}{\cos\theta}$$

Áp dụng công thức Cômtơn, ta có:

$$\Delta\lambda=\lambda'-\lambda=\frac{\lambda}{\cos\theta}-\lambda=\lambda_c(1-\cos\theta)$$

Với $\lambda_c=\frac{h}{m_0c}=2,42(pm)$

Suy ra: $\lambda=\lambda_c\cos\theta$ (6)

Như vậy, phải có $\lambda\le\lambda_c \;\rightarrow \lambda_{\max}=\lambda_c=2,42(pm)$

d) Khi đó theo định luật bảo toàn động lượng:

$$m^2v^2=\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2-\left(\frac{h}{\lambda'}\right)^2 \rightarrow \frac{m_0v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}=\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2-\left(\frac{h}{\lambda'}\right)^2 \qquad (2d.1)$$

Mặt khác theo định luật bảo toàn năng lượng ta lại có:

$$mc^2+\left(\frac{hc}{\lambda'}\right)=\left(\frac{hc}{\lambda}\right)\Rightarrow mc=\left(\frac{h}{\lambda}\right)-\left(\frac{h}{\lambda'}\right)$$

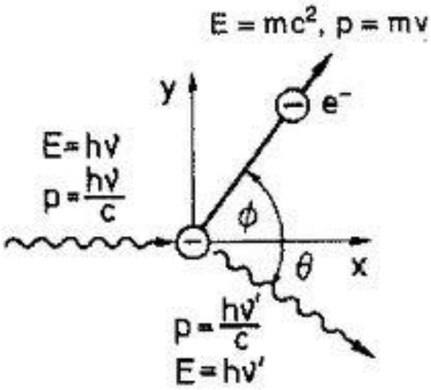
$$\frac{m_0^2c^2}{1-(\frac{v}{c})^2}=\left[\left(\frac{h}{\lambda}\right)-\left(\frac{h}{\lambda'}\right)\right]^2 \qquad (2d.2)$$

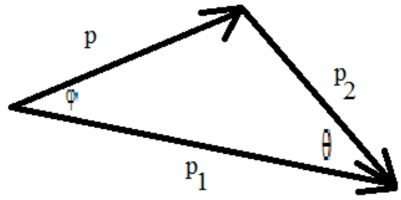
Từ (2d.1) và (2d.2) ta suy ra được $\lambda=1,803(pm)$

Từ đó: $U_{02\min}=\frac{hc}{e\lambda}\approx 690.000(V)$ ; $U_{1\min}=\frac{U_{02\min}}{k\sqrt{2}}\approx 484(V)$

**Bài 11.**

a) Hiệu ứng Compton chủ yếu chỉ xảy ra với các bước sóng cực ngắn, cỡ tia X. Do khi đó, electron trong mạng tinh thể có công thoát không đáng kể so với năng lượng của photon. Từ định luật bảo toàn động lượng và năng lượng, ta có:




$$\begin{cases}\varepsilon_1+E_e=\varepsilon_2+E\\ \overrightarrow{p_1}=\overrightarrow{p_2}+\overrightarrow{p}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\varepsilon_1-\varepsilon_2+E_e=E\\ \overrightarrow{p}=\overrightarrow{p_1}-\overrightarrow{p_2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}E^2-E_e^2=\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2-2\varepsilon_1\varepsilon_2+2E_e(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\\ p^2c^2=p_1^2c^2+p_2^2c^2-2\overrightarrow{p_1c}\,\overrightarrow{p_2c}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\varepsilon_1\varepsilon_2(1-\cos\theta)=E_e(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\Rightarrow\frac{hc}{\varepsilon_2}-\frac{hc}{\varepsilon_1}=\frac{hc}{E_e}(1-\cos\theta)\Rightarrow\Delta\lambda=2\frac{h}{m_ec}\sin^2\theta$$

b)Áp dụng định lý hàm sin, ta có: $\sin\varphi=\dfrac{p_2}{p}\sin\theta(1)$

Áp dụng định lý hàm cos, ta có: $\cos\varphi=\dfrac{p^2+p_1^2-p_2^2}{2pp_1}=\dfrac{p_1-p_2\cos\theta}{p}(2)$

Từ (1) và (2), ta có: $\cot\varphi=\dfrac{\left(1+\dfrac{\lambda_c}{\lambda}\right)(1-\cos\theta)}{\sin\theta}=\left(1+\dfrac{\varepsilon_1}{E_e}\right)\tan\dfrac{\theta}{2}$

c) Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng, ta có: $\varepsilon_1=\varepsilon_2+K_e\Rightarrow\varepsilon_1^2-2\varepsilon_1K_e+K_e^2=\varepsilon_2^2(3)$

Áp dụng định luật bảo toàn động lượng, ta có: $\overrightarrow{p_1}=\overrightarrow{p_2}+\overrightarrow{p}\Rightarrow p_1^2c^2-2p_1pc^2\cos\varphi+p^2c^2=p_2^2c^2(4)$

Ta có hệ thức liên hệ: $p^2c^2=K_e^2+2K_eE_e(5)$

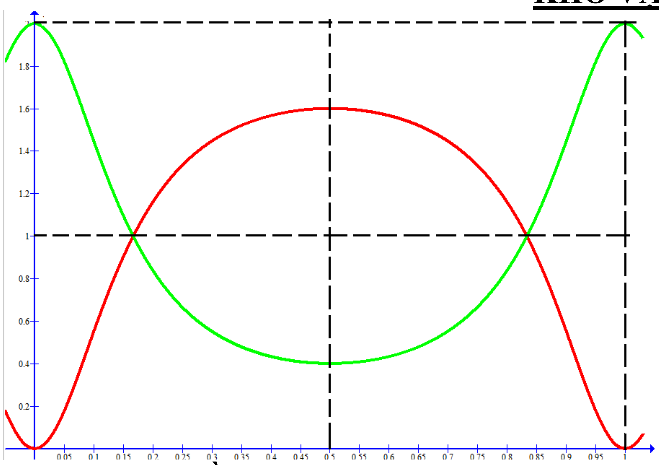
Từ (3), (4), (5) suy ra:

$$\cos\varphi\sqrt{1+2\frac{E_e}{K_e}}=1+\frac{E_e}{\varepsilon_1}\Leftrightarrow1+2\frac{E_e}{K_e}=\frac{\left(1+\dfrac{E_e}{\varepsilon_1}\right)^2}{\cos^2\varphi}\Leftrightarrow K_e=\frac{2E_e}{\left(1+\dfrac{E_e}{\varepsilon_1}\right)^2(1+\tan^2\varphi)-1}$$

d.Ta có: áp dụng kết quả của câu c

$$K_e=\frac{2\varepsilon_1\sin^2\dfrac{\theta}{2}}{2\sin^2\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{E_e}{\varepsilon_1}}=\frac{8E_e\sin^2\dfrac{\theta}{2}}{4\sin^2\dfrac{\theta}{2}+1}$$

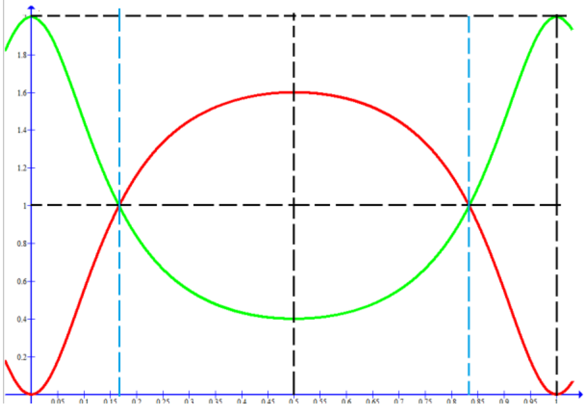
$$\varepsilon_2=\frac{\varepsilon_1}{2\dfrac{\varepsilon_1}{E_e}\sin^2\dfrac{\theta}{2}+1}=\frac{2E_e}{4\sin^2\dfrac{\theta}{2}+1}$$



Đây là dạng đồ thị của động năng electron tán xạ và năng lượng của photon tán xạ.

e.Khi vuông góc thì $\cot\varphi = \tan\theta = 3\tan\dfrac{\theta}{2} \Leftrightarrow \theta = 60^o$

Ta thấy tỉ số động năng electron tán xạ và năng lượng photon tán xạ là $4\sin^2\dfrac{\theta}{2}$ do đó, thay vào ta được động năng electron tán xạ bằng năng lượng của photon tán xạ. Ta có đồ thị sau:



Thực ra trong trường hợp này nhận cả 2 góc là 60° và 300°.

f. Điều kiện để photon tánxạ ($\lambda_2$) sinh cặp được khi và chỉ khi $\varepsilon_2 \geq 2E_e$.

Từ biểu thức $\varepsilon_2 = \dfrac{2E_e}{4\sin^2\dfrac{\theta}{2}+1} \leq 2E_e$. Vậy này($\varepsilon_2 \geq 2E_e$) chỉ xảy ra khi $4\sin^2\dfrac{\theta}{2} < 0$, dẫn đến vô lí.

Do đó photon tán xạ không thể sinh cặp trong trường hợp này. Điều này là hợp lí bởi photon tới thỏa điều kiện sinh cặp nên photon tán xạ không thể sinh cặp (do photon tán xạ có năng lượng bé hơn photon tới).

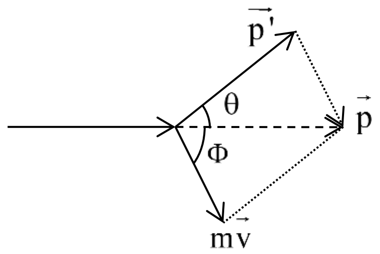
g.Ta có, để sinh cặp electron – positron thì

$$\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_1}{2\dfrac{\varepsilon_1}{E_e}\sin^2\dfrac{\theta}{2}+1} \geq 2E_e \Leftrightarrow \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4}\left(1-\frac{\varepsilon_1}{2E_e}\right) \geq \sin^2\frac{\theta}{2} \Rightarrow \theta \leq 60^o$$

**Bài 12 (hiệu ứng Compton thuận)**

1. Thật vậy, sử dụng định luật bảo toàn năng lượng và xung lượng trong quá trình tương tác: $h\nu = \dfrac{1}{2}mv^2, \dfrac{h\nu}{c} = mv \rightarrow c = \dfrac{1}{2}v$. Điều này không thể xảy ra

2. Trường hợp tương tác giữa phôtôn và êlectron tự do, do không bị hấp thụ hoàn toàn, nên phôtôn sau phản ứng giảm năng lượng và xung lượng thay đổi (tán xạ). Trường hợp này tương ứng với hiện tượng tán xạ Compton. Chúng ta sẽ đi tính toán độ dịch chuyển của bước sóng của phôtôn sau tương tác.




Sử dụng định luật bảo toàn năng lượng và xung lượng

$$\begin{cases} h\nu + m_0c^2 = h\nu' + mc^2 \quad (1) \\ \vec{p} = \vec{p}' + \vec{p}_e = \vec{p}' + m\vec{v} \quad (2) \end{cases}$$

Từ hình vẽ:

$$(mv)^2 = p^2 + p'^2 - 2pp'\cos\theta \qquad (3)$$

Thay $p = \frac{h\nu}{c}, p' = \frac{h\nu'}{c}$ vào (3) ta có:

$$m^2v^2c^2 = h^2\nu^2 + h^2\nu'^2 - 2h^2\nu\nu'\cos\theta \qquad (4)$$

Từ phương trình (1) rút ra

$$mc^2 = h\nu - h\nu' + m_0c^2 \qquad (1a)$$

Lấy bình phương hai vế (1a):

$$m^2c^4 = h^2\nu^2 + h^2\nu'^2 + m_0^2c^4 + 2h(\nu - \nu')m_0c^2 - 2h^2\nu\nu' \qquad (5)$$

Trừ (5) cho (4) từng vế:

$$m^2c^4(1 - \beta^2) = -2h^2\nu\nu'(1 - \cos\theta) + 2h(\nu-\nu')m_0c^2 + m_0^2c^4 \qquad (6)$$

vì $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ nên vế trái của (6) chính là $m_0^2c^4$, cho nên từ (6) rút ra

$$\nu\nu'(1-\cos\theta) = \frac{m_0c^2}{h}(\nu - \nu')$$

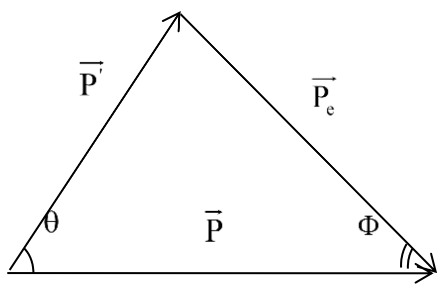
hay là:

$$\frac{c}{\nu'} - \frac{c}{\nu} = \frac{h}{m_0c}(1-\cos\theta) = \frac{2h}{m_0c}\sin^2\frac{\theta}{2}$$

vì $\nu' = \frac{c}{\lambda'}, \nu = \frac{c}{\lambda}, \Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ nên:

$$\Delta\lambda = \frac{2h}{m_0c}\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$\Delta\lambda$ gọi là độ dịch chuyển của bước sóng.




3. Tính góc "giật lùi" Φ của êlectron

- Năng lượng: $h\nu + m_0c^2 = h\nu' + W_đ + m_0c^2$ (7)

Vì $p = \frac{\varepsilon}{c} = \frac{h\nu}{c}, p' = \frac{h\nu'}{c}$ nên (7) được viết lại $p' = p - \frac{W_d}{c}$ (7a).

Theo hình vẽ: $\vec{p}' = \vec{p} - \vec{p}_e \rightarrow \cos\phi = \frac{p^2 + p_e^2 - p'^2}{2p.p_e}$ (8)

Ta còn có: $p_e^2 = \frac{W^2 - m_0^2c^4}{c^2} = \frac{(W_d + E_0)^2 - E_0^2}{c^2} = \frac{W_d^2 + 2W_dE_0}{c^2}$ (9)

Vì $W = \sqrt{p_e c^2 + m_0^2c^4}$; $E_0 = m_0c^2 = 0{,}512\,\text{MeV}$ là năng lượng nghỉ của êlectron.

Thay (7a), (9) và biểu thức $p = \frac{\varepsilon}{c}$ vào (8):

$$\cos\Phi = \frac{1 + \frac{E_0}{\varepsilon}}{\sqrt{1 + 2\frac{E_0}{W_d}}}$$

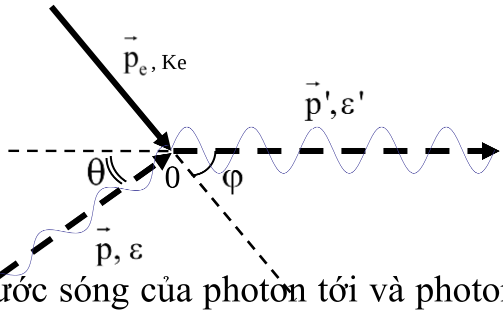
Thay số $\cos\phi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow$ Góc "giật lùi" của êlectron Φ = $30^0$.

**Bài 13 (hiệu ứng Compton nghịch)**

1. Theo định lý về động năng: $eU = W_d$

Năng lượng ε của photon tới thoả mãn:

$$\varepsilon = \frac{hc}{\lambda} \le W_d = eU \rightarrow \varepsilon = \frac{hc}{\lambda_{min}} = eU \rightarrow U = \frac{hc}{e\lambda_{min}} \approx 10^4\,\text{V}$$




2a. Gọi λ và λ' lần lượt là bước sóng của photon tới và photon tán xạ; góc φ là góc hợp bởi phương chuyển động của electron và phương truyền của photon tán xạ; góc θ - góc tán xạ là góc hợp bởi phương truyền photon tới và phương truyền của photon tán xạ.

Ký hiệu E và $p_e$ lần lượt là năng lượng toàn phần và xung lượng của electron trước va chạm, $E_0 = m_ec^2$ là năng lượng nghỉ của electron. Theo định luật bảo toàn năng lượng và xung lượng ta có:

$$\frac{hc}{\lambda} + E = m_e c^2 + \frac{hc}{\lambda'} \rightarrow E = E_0 + \varepsilon' - \varepsilon \qquad (1)$$

Hay là:

$$\sqrt{p_e^2c^2+E_0^2}=E_0+p'c-pc\rightarrow$$
$$p_e^2c^2+E_0^2=(E_0-pc)^2+p'^2c^2+2(E_0-pc)p'c \qquad \textit{(1a)}$$

$$p_e\sin\varphi=p\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}p \qquad (2)$$

$$p_e\cos\varphi+p\cos\theta=p_e\cos\varphi+\frac{p}{2}=p' \qquad (3)$$

khử φ từ các phương trình trên ta có

$$(p'-p\cos\theta)^2+p^2\sin^2\theta=p_e^2$$

Hay:

$$p_e^2\sin^2\varphi=\frac{3h^2}{4\lambda^2};\,p_e^2\cos^2\varphi=\left(\frac{h}{\lambda'}-\frac{h}{2\lambda}\right)^2\rightarrow p_e^2=\left(\frac{h}{\lambda'}-\frac{h}{2\lambda}\right)^2+\frac{3h^2}{4\lambda^2}$$

Suy ra

$$p_e^2=h^2\left(\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\lambda'^2}-\frac{1}{\lambda\lambda'}\right)=\frac{\varepsilon^2+\varepsilon'^2-\varepsilon\varepsilon'}{c^2} \qquad (4)$$

Mặt khác, từ công thức năng xung lượng Einstein $\left(E=\sqrt{p^2c^2+m_0^2c^4}\right)$, ta có (Áp dụng (1)):

$$p_e^2=\frac{E^2-E_0^2}{c^2}=\frac{\left(E_0+\varepsilon'-\varepsilon\right)^2-E_0^2}{c^2}=\frac{\varepsilon'^2+\varepsilon^2-2\varepsilon'\varepsilon-2E_0\varepsilon+2E_0\varepsilon'}{c^2} \qquad (5)$$

Từ (4) và (5):

$$\frac{\varepsilon^2+\varepsilon'^2-\varepsilon\varepsilon'}{c^2}=\frac{\varepsilon'^2+\varepsilon^2-2\varepsilon'\varepsilon-2E_0\varepsilon+2E_0\varepsilon'}{c^2}\rightarrow 2E_0\varepsilon'-2E_0\varepsilon=\varepsilon'\varepsilon$$

Hay:

$$\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{\varepsilon'}=\frac{1}{2E_0}\rightarrow\Delta\lambda=\lambda-\lambda'=\frac{h}{2m_ec}\rightarrow\lambda'=\lambda-\frac{h}{2m_ec} \qquad (6)$$

Thay $\lambda = 0{,}125$nm ta tính được $\lambda' = 0{,}1238$nm.

2b. Theo công thức tính bước sóng de Broglie, ta có:

$$\lambda_e=\frac{h}{p_e}=\frac{hc}{\sqrt{\varepsilon^2+\varepsilon'^2-\varepsilon\varepsilon'}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\lambda'^2}-\frac{1}{\lambda\lambda'}}}=0{,}1244\text{nm}$$

**Bài 14. (APHO 2007)**

LƯU Ý: Bài này chỉ cần áp dụng 3 đơn vị kiến thức sau:

+ Định luật bảo toàn động lượng hệ photon và elctron

+ Định luật bảo toàn năng lượng tương đối tính hệ photon và elctron

+ Hệ thức liên hệ giữa nằng và xung lượng tương đối tính của electron $E^2 = E_0^2 + (pc)^2$

**1**.Gọi p, E là động lượng, năng lượng trước tương tác của electron; p' và E' là động lượng,năng lượng sau tương tác của electron; gọi $h\nu$, $h\nu'$ là năng lượng photon trước và sau tương tác và tương ứng động lượng là $\frac{h\nu}{c}$, $\frac{h\nu'}{c}$

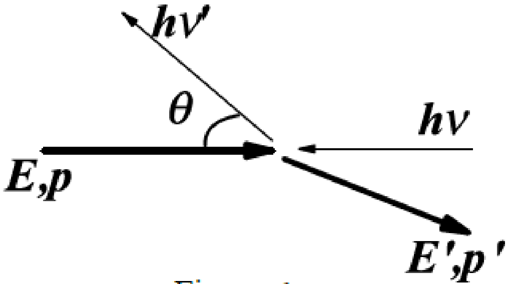



Figure 1

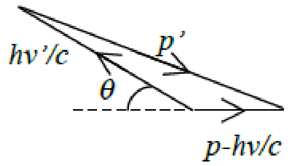



Figure 2

Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng ta có:

$$h\nu + E = h\nu' + E' \qquad (1)$$

và động lượng hệ electron và photon: $(p')^2 = (\frac{h\nu'}{c})^2 + (\text{p} - \frac{h\nu}{c})^2 + 2(\frac{h\nu'}{c})(\text{p} - \frac{h\nu}{c})\cos\theta$

$$\Leftrightarrow (p'\text{c})^2 = (h\nu')^2 + (\text{pc} - h\nu)^2 + 2(h\nu')(\text{pc} - h\nu)\cos\theta \qquad (2)$$

Hệ thức liên hệ giữa động lượng và năng lượng của electron trước và sau tương tác là:

$$E^2 = (pc)^2 + E_0^2 \qquad (3)$$

$$E'^2 = (p'c)^2 + E_0^2 \qquad (4)$$

Bằng cách rút E' từ (1) và p' từ (4) thay vào (2) ta rút ra được:

$$h\nu' = \frac{E + pc}{E + h\nu + (pc - h\nu)\cos\theta} h\nu = \frac{E + \sqrt{E^2 - E_0^2}}{E + h\nu + (\sqrt{E^2 - E_0^2} - h\nu)\cos\theta} h\nu \qquad (5)$$

Chúng ta đã giả định rằng động năng của các electron tới là cao hơn năng lượng tĩnh của nó , và năng lượng của photon tới là ít hơn năng lượng tĩnh electron nên: $\sqrt{E^2 - E_0^2} > h\nu$

Từ (5) ta dễ dang thấy để $h\nu'$ cực đại khi: $\theta = \pi$ và do đó:

$$(h\nu')_{max} = \frac{E + \sqrt{E^2 - E_0^2}}{E + 2h\nu - (\sqrt{E^2 - E_0^2})} h\nu \qquad (6)$$

**2. Ta có** $E = mc^2 = \gamma E_0$, thay vào (6) ta được:

$$(h\nu')_{max} = \frac{\gamma E_0 + \sqrt{(\gamma E_0)^2 - E_0^2}}{\gamma E_0 + 2h\nu - (\sqrt{(\gamma E_0)^2 - E_0^2})} h\nu = \frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma + 2\frac{h\nu}{E_0} - (\sqrt{\gamma^2 - 1})} h\nu$$

Vì $\gamma >> 1$, nên ta lấy gần đúng bậc nhất $(h\nu')_{max} = \dfrac{\gamma + \gamma(1 - \dfrac{1}{2\gamma^2})}{\gamma + 2\dfrac{h\nu}{E_0} - \gamma(1 - \dfrac{1}{2\gamma^2})} h\nu \approx 4\gamma^2 h\nu$ (7)

Và do đó:

Thay số với $\gamma = 200$ và $\lambda = 500nm$ ta tính được: $h\nu = \dfrac{hc}{\lambda} = 2,48eV$

$$\frac{h\nu}{E_0} = \frac{2,48}{0,511.10^6} = 4,85.10^{-6} << \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{200} = 5.10^{-3}$$

Thay vào (7) ta được $(h\nu')_{max} =\approx 4\gamma^2 h\nu = 0,4MeV$

Khi đó bước sóng photon thu được sau tán xạ ngược:

$$\lambda' = \frac{hc}{h\nu'} = \frac{1,24.10^3}{4.10^5} = 3,1.10^{-3}nm$$ ( cỡ tia X cứng)

**3.** .a. Rõ ràng là nếu electron khi tương tác nhường hết tổng động năng của nó đến photon tán xạ, thì photon sau tán xạ đạt được năng lượng tối đa trong quá trình tán xạ, cụ thể là electron đứng yên sau va chạm. Trong trường hợp này, có thể xem hình vẽ 3.

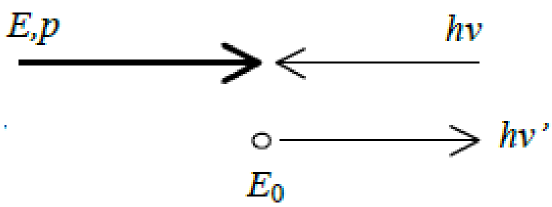


Figure 3

Khi đó áp dụng định luật bảo toàn năng lượng và động lượng:

$$\begin{cases} h\nu + E = h\nu' + E_0 & (8) \\ p - \dfrac{h\nu}{c} = \dfrac{h\nu'}{c} & (9) \end{cases}$$

Mặt khác, hệ thức liện hệ giữa năng lượng và động lượng tương đối tính của electron:

$$E^2 = (pc)^2 + E_0^2 \qquad (10)$$

Từ (8),(9) và (10) ta khử p và $h\nu'$, ta thu được:

$$h\nu = \frac{1}{2}(E_0 - E + pc) = \frac{1}{2}(E_0 - E + \sqrt{E^2 - E_0^2}) \qquad (11)$$

Thay (11) vào (8) ta được năng lượng photon: $h\nu' = \dfrac{1}{2}(E - E_0 + \sqrt{E^2 - E_0^2})$ (12)

(b) Để photon thu được nhiều năng lượng nhất từ electron sau chạm, thì sau va chạm electron phải đứng yên. Khi đó ta áp dụng định luật bảo toàn năng lượng và động lượng:

$$\begin{cases} h\nu + E = h\nu' + E_0 & (13) \\ p^2 + \left(\dfrac{h\nu}{c}\right)^2 = \left(\dfrac{h\nu'}{c}\right)^2 & (14) \end{cases}$$

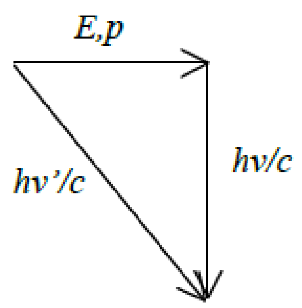


Figure 4

Mặt khác, hệ thức liên hệ giữa năng lượng và động lượng tương đối tính của electron:

$$E^2 = (pc)^2 + E_0^2 \qquad (15)$$

nên ta rút p từ (15) thay vào (14) suy ra được:

$$(h\nu')^2 = E^2 + E_0^2 + (h\nu)^2 + 2Eh\nu - 2EE_0 - 2E_0h\nu$$

Sự kết hợp với (13) ta được: $(h\nu + E - E_0)^2 = E^2 + E_0^2 + (h\nu)^2 + 2Eh\nu - 2EE_0 - 2E_0h\nu$

$\Leftrightarrow 2(E - E_0)h\nu = 2(E - E_0)\mathrm{E}_0 \to h\nu = \mathrm{E}_0$ (16)

Thay (16) vào (13) ta được năng lượng photon tán xạ là $h\nu' = E$

Vậy khi đó năng lượng photon tới phải bằng năng lượng nghỉ electron ($h\nu = \mathrm{E}_0$) thì năng lượng pho ton phản xạ bằng năng lượng toàn phần của electron trước va chạm ($h\nu' = E$)

**Bài 15.** Giả sử electron tự do hấp thụ hoàn toàn một photon

Chọn hệ qui chiếu gắn với electron trước khi hấp thu photon.

Năng lượng của hệ trước và sau khi hấp thu photon lần lượt là $mc^2 + hf; \dfrac{m}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}c^2$; với m là khối lượng nghỉ của electron

Động lượng của hệ trước và sau hấp thụ photon lần lượt

$\dfrac{hf}{c}$ ( của photon, còn electron đứng yên) và $\dfrac{m}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}v$ ( photon đã bị hấp thụ)

Bảo toàn năng lượng và bảo toàn động lượng của hệ, ta được

$mc^2 + hf = \dfrac{m}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}c^2$ (1) và $\dfrac{m}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}v = \dfrac{hf}{c}$ (2)

Nhân (2) với c, được $\dfrac{mcv}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = hf$ và kết hợp với (1) suy ra

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-\frac{mc.v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=mc^2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-\frac{v}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=1 \Rightarrow \frac{1-\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=1 \Rightarrow \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=1-\frac{v}{c}$$

$$\Rightarrow \frac{v^2}{c^2}-\frac{v}{c}=0 \Rightarrow v=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f=0 \\ v=c \end{array}\right.$$

Điều này mâu thuẫn với thuyết tương đối, vậy electron không hấp thụ hoàn toàn photon

**Bài 16.** Trong hệ qui chiếu K, photon có năng lượng $\varepsilon = hf = h\frac{c}{\lambda}$; trọng hệ $K'$, quan sát viên ghi được bức xạ có bước sóng $\lambda' = \lambda\left(1+\frac{v}{c}\right) \Rightarrow \frac{1}{f'} = \frac{\left(1+\frac{v}{c}\right)}{f}$

v>0 nếu $\vec{v}$ ngược chiều chuyển động của photon ( đi đến gần nhau); v<0 nếu $\vec{v}$ cùng chiều photon. Suy ra $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} = \frac{v}{c}$. Trong hệ qui chiếu $K'$ photon có bước sóng $\lambda'$, có năng lượng $hf' = h\frac{c}{\lambda'}$; sao cho $\frac{\Delta f}{f} = -\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = -\frac{v}{c}$. Vậy hệ thức giữa các năng lượng của photon trong hai hệ qui chiếu là $\frac{\Delta(hf)}{hf} = \frac{hf' - hf}{hf} = \frac{\Delta f}{f} = -\frac{v}{c}$

Và động lượng của photon là $p = \frac{hf}{c}$ nên hệ thức giữa các động lượng trong hai hệ qui chiếu là $\frac{\Delta p}{p} = \frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta(hf)}{hf} = -\frac{v}{c}$

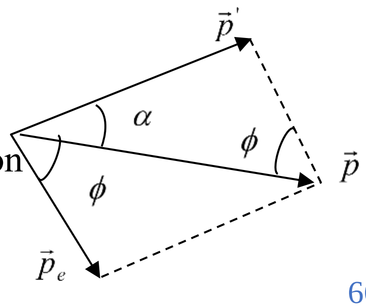
**Bài 17.**Theo định lý động năng, năng lượng của photon tới thoả mãn

$\varepsilon = hf \leq$ W$_đ$= eU

eU là năng lượng của photon có bước sóng ngắn nhất trong chùm photon

$$\Rightarrow hf_{\max} = \frac{hc}{\lambda_{\min}} = eU \Rightarrow \lambda_{\min} = \frac{hc}{eU} = \frac{6,625.10^{-34}.3.10^8}{1,6.10^{-19}.10^5} = 0,124.10^{-10}m = 0,124\overset{0}{A}$$

Động lượng của photon $p = \frac{\varepsilon}{c} = \frac{eU}{c}$ (1)




Theo định luật bảo toàn năng lượng có

$p.c + m_e c^2 = p'c + w_{de} + m_e c^2$ với p' là động lượng của photon tán xạ

Suy ra $p' = p - \frac{w_{de}}{c} = \frac{eU - w_{de}}{c}$ (2)

Bảo toàn động lượng

$\vec{p} = \vec{p}' + \vec{p}_e \Rightarrow p'^2 = p^2 + p_e^2 - 2p.p_e\cos\phi; \phi$ là góc giật lùi

Từ hệ thức tương đối tính

$$E^2 = p_e^2c^2 + m_e^2c^4 = \left(w_{de} + m_ec^2\right)^2 \Rightarrow p_e^2 = \frac{1}{c^2}\left(w_{de}^2 + 2w_{de}m_ec^2\right) \quad (4)$$

Thay 1,2,4 vào (3), ta được

$$\cos\phi = \frac{c^2}{eU}.\frac{w_{de}\left(m_e + \frac{e.U}{c^2}\right)}{\sqrt{w_{de}^2 + 2w_{de}m_ec^2}} = \frac{1 + \frac{E_0}{\varepsilon}}{\sqrt{1 + 2\frac{E_0}{w_{de}}}} \quad (5)$$

Với $E_0 = m_ec^2 = 0{,}511MeV; \varepsilon = eU = 0{,}1MeV$

Thay số được $\phi = 53^0 7'$

$$p_e^2 = p^2 + p'^2 - 2p.p'\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{p^2 + p'^2 - p_e^2}{2p.p'}$$

$\alpha$ là góc tán xạ photon

Thay (1),(2),(4) và số, ta được

$$\cos\alpha = \frac{\left(\frac{eU}{c}\right)^2 + \left(\frac{eU - w_{de}}{c}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(w_{de}^2 + 2w_{de}m_ec^2\right)}{2\left(\frac{eU}{c}\right)\left(\frac{eU - w_{de}}{c}\right)} = 1 - \frac{\frac{E_0}{\varepsilon}}{\frac{\varepsilon}{w_{de}} - 1} = 0,432$$

1) Từ (5) ta thấy $w_{de}$ max khi $\cos\phi$(max) và $\cos\phi$(max) khi $\phi = 0$

Suy ra $w_{de\max} = \frac{2E_0}{\left(1 + \frac{E_0}{\varepsilon}\right)^2 - 1} \approx 28keV$

# XI.4 CÁC MẪU NGUYÊN TỬ CỔ ĐIỂN

**Bài 1.** Cách 1: Từ định luật bảo toàn năng lượng:

$$\frac{hc}{\lambda} = E_{12} + \frac{mv^2}{2}$$

và định luật bảo toàn động lượng:

$$\frac{h}{\lambda} = mv$$

sẽ tính được vận tốc v (loại nghiệm v>c):

$$v = c\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2E_{12}}{mc^2}}\right) = c\frac{E_{12}}{mc^2},$$

ở đây chúng ta đã sử dụng gần đúng $\sqrt{1 - \frac{2E_{12}}{mc^2}} \approx 1 - \frac{E_{12}}{mc^2}$ do năng lượng kích thich $E_{12}$ nhỏ hơn rất nhiều so với năng lượng nghỉ $mc^2$. Điều này cũng cho thấy khi giải bài toán ta chỉ cần sử dụng phép gần đúng phi tương đối tính.

Cách 2: Sử dụng công thức tương đối tính cho các định luật bảo toàn năng lượng và động lượng ta có:

$$mc^2 + \frac{hc}{\lambda} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{và} \quad \frac{h}{\lambda} = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Chia hệ thức thứ hai cho hệ thức thứ nhất, ta được : $v = c\frac{hc/\lambda}{mc^2 + hc/\lambda}$. Vì năng lượng của photon bị hấp thụ nhỏ hơn nhiều năng lượng nghỉ của nguyên tử nên một cách gần đúng ta có:

$$v \approx c\frac{hc/\lambda}{mc^2} = c\frac{E_{12}}{mc^2}$$

**Bài 2.** Đây là một bài toán va chạm không đàn hồi. Nguyên tử hiđrô tới sẽ truyền một năng lượng lớn nhất có thể để ion hoá khi cả hai nguyên tử sau va chạm đứng yên trong hệ khối tâm. Động năng của khối tâm bằng:

$$\frac{p^2}{2(m_1 + m_1)} = \frac{p^2}{4m_p} = \frac{E_{ng}}{2},$$

ở đây $m_p$ là khối lượng proton, còn $E_{ng}$ là năng lượng ngưỡng của phản ứng. Năng lượng ngưỡng không thay đổi. Photon mang năng lượng nhỏ nhất nếu electron trong nguyên tử chuyển từ mức cơ bản lên mức kích thích thứ nhất. Muốn vậy nguyên tử phải hấp thụ một năng lượng

$$h\nu_{12} = hR\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}hR = \frac{E_{ng}}{2},$$

ở đây R là hằng số Rydberg. Khi ion hoá, electron chuyển từ mức cơ bản lên mức vô cùng, năng lượng ion hoá bằng $E_i = hR$. Từ đó ta tìm được

$$E_{ng} = \frac{3}{2}E_i = 20{,}4eV$$

**Bài 3**

a. Vận tốc của e trên quỹ đạo K.

* Trong chuyển động tròn đều của e quanh hạt nhân, lực điện trường giữa e và hạt nhân đóng vai trò lực hướng tâm nên $F_đ = F_{ht}$

* Khai triển : $k\frac{e^2}{r_0^2} = \frac{mv^2}{r_0} \Rightarrow v = e\sqrt{\frac{k}{mr_0}} \approx 2{,}186.10^6\ \frac{m}{s}$

b. Tính khoảng cách xa nhất còn thấy nguồn sáng.

Gọi d là khoảng cách từ người đến nguồn sáng; $d_1$ là đường kính con ngươi.

$n_0$ = 100 photon/s là số photon tối thiểu lọt vào mắt trong 1s để mắt còn nhìn thấy

* Số photon phát ra từ nguồn sáng trong 1s là $\frac{P}{\varepsilon} = \frac{P\lambda}{hc}$

Số photon lọt vào con ngươi mắt trong 1s là : $n = \frac{P\lambda}{hc}.\frac{\pi\frac{d_1^2}{4}}{4\pi d^2} = \frac{P\lambda.d_1^2}{16hcd^2}$

* Theo đề ra ta phải có $n \geq n_0 \quad \Rightarrow d \leq \sqrt{\frac{P\lambda}{16hcn_0}}.d_1$

Vậy khoảng cách lớn nhất từ người đến nguồn sáng là :

$$d_{max} = \sqrt{\frac{P\lambda}{16hcn_0}}.d_1 = \sqrt{\frac{2,4.0,6.10^{-6}}{16.6,625.10^{-34}.3.10^8.100}}.4.10^{-3} \approx 269,2.10^3\ (m)$$

**Bài 4.**

a)Theo mẫu nguyên tử Thomsonb thì điện tích dương e phân bố đều trong hình cầu bán kính $R$ nên ta có lực của điện tích dương tác dụng lên electron:

$$F = \begin{cases} -\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{e^2}{r^2}, r \geq R \\ -\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{e^2 r}{R^3}, r \leq R \end{cases}$$

Mà $F = -gradW \Rightarrow W = -\int F dr$ hay

$$W = \begin{cases} -\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{e^2}{r} + C_1, r \ge R \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{e^2 r^2}{R^3} + C_2, r \le R \end{cases}$$

Do điều kiện liên tục của $W$ và do $W = 0$ ở vô cùng nên

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = -\dfrac{3}{2}\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R} \end{cases}$$

Cuối cùng ta được:

$$W = \begin{cases} -\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{e^2}{r}, r \ge R \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{e^2 r^2}{R^3} - \dfrac{3}{2}\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R}, r \le R \end{cases}$$

Từ biểu thức trên ta thấy

$$W_{\min} = -\frac{3}{2}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R} = -E_{ion} \Rightarrow$$

$$R = \frac{3}{2}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 E_{ion}}$$

b)Tần số chuyển động của electron trên quỹ đạo bán kính $r$:

$$m\omega^2 r = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow \omega = \frac{e}{r}\sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 mr}}$$

$\Rightarrow$Bước sóng mà nguyên tử Hydro phát ra: $\lambda = \dfrac{c}{f} = \dfrac{2\pi c}{\omega}$

Hay: $\lambda = \dfrac{2\pi c}{e}\sqrt{4\pi\varepsilon_0 m r^3} \Rightarrow \quad f = \dfrac{2}{3}\dfrac{4\pi\varepsilon_0 E_{ion}}{2\pi e^2}\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

**Bài 5.**

Năng lượng nghỉ của hạt $\alpha$, $m_\alpha c^2 \approx 2000 MeV >> 0{,}4 MeV$ vì vậy ta có thể áp dụng các công thức phi tương đối tính trong bài toán này.

Theo định luật bảo toàn xung lượng ta có:

$$m_\alpha \vec{v}_0 = (m_\alpha + m_X)\vec{v}$$

$m_X$ là khối lượng hạt nhân bia.

Vì va chạm là trực diện (xuyên tâm) nên $\vec{v}$ và $\vec{v}_0$ cùng phương. Chiếu lên phương của $\vec{v}_0$ ta được

$$m_\alpha v_0 = (m_\alpha + m_X)v \Rightarrow v = \frac{m_\alpha}{m_\alpha + m_X}v_0 \qquad (1)$$

Theo định luật bảo toàn năng lượng ta có:

$$\frac{1}{2}m_\alpha v_0^2 = \frac{1}{2}(m_\alpha + m_X)v^2 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Ze^2}{d_{\min}} \qquad (2)$$

Thế (1) vào (2) ta được: $\dfrac{m_X}{m_\alpha + m_X}m_\alpha v_0^2 = \dfrac{m_X}{m_\alpha + m_X}2T = \dfrac{Ze^2}{\pi\varepsilon_0 d_{\min}}$

$$\Rightarrow d_{\min} = \frac{m_X + m_\alpha}{m_X}\frac{Ze^2}{2\pi\varepsilon_0 T}$$

Thay số ta được:

a) Trường hợp 1 $X$ là $Pb$ ta có thể coi $\dfrac{m_\alpha}{m_{Pb}} \approx 0$ khi đó $d_{\min} \approx 0{,}59\,pm$

b) Trường hợp 2 $X$ là $Li$ $d_{\min} \approx 0{,}034\,pm$

**Bài 6.**

Khi khoảng cách giữa hạt và bia là cực tiểu thì vận tốc của hạt là nhỏ nhất nhưng lực hướng tâm (lực Coulomb là lớn nhất do đó bán kính cong của quỹ đạp lúc này là nhỏ nhất:

Khoảng cách cực tiểu: $r_{\min} = \frac{a_0}{2} + \sqrt{b^2 + (\frac{a_0}{2})^2}$

Hay $r_{\min} = \frac{a_0}{2}(1 + \sqrt{1 + \cot g^2 \frac{\theta}{2}}) \Rightarrow$

$$r_{\min} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{zZe^2}{E_0}(1 + \frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}) \Rightarrow \frac{zZe^2}{4\pi\varepsilon_0 r_{\min}} = \frac{2E_0}{1 + \frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}} \qquad (*)$$

Ta lại có

$$\frac{mv^2}{2} = E_0 - \frac{zZe^2}{4\pi\varepsilon_0 r_{\min}}$$

$$\frac{mv^2}{\rho_{\min}} = \frac{zZe^2}{4\pi\varepsilon_0 r_{\min}^2} \Rightarrow 2(E_0 - \frac{zZe^2}{4\pi\varepsilon_0 r_{\min}})/\rho_{\min} = \frac{zZe^2}{4\pi\varepsilon_0 r_{\min}^2}$$

Kết hợp với (*) ta có

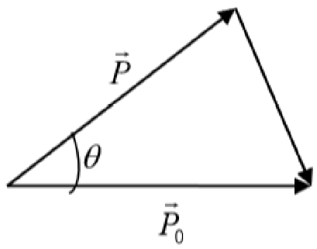
$$2(E_0 - \frac{2E_0}{1 + \frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}})/\rho_{\min} = (\frac{2E_0}{1 + \frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}})^2 \frac{4\pi\varepsilon_0}{zZe^2} \Rightarrow$$

$$\rho_{\min} = \frac{zZe^2(1 - \sin\frac{\theta}{2})(1 + \sin\frac{\theta}{2})}{8E_0\pi\varepsilon_0 \sin^2\frac{\theta}{2}} = \frac{zZe^2}{8E_0\pi\varepsilon_0}\cot g\frac{\theta}{2}$$

Vậy $\rho_{\min} = \frac{zZe^2}{8E_0\pi\varepsilon_0}\cot g\frac{\theta}{2}$

**Bài 7.**

Xung lượng mà proton truyền cho hạt nhân vàng:




$\Delta\vec{P} = \vec{P}_0 - \vec{P} \Rightarrow$

$$\Delta P = 2P_0 \sin\frac{\theta}{2}$$

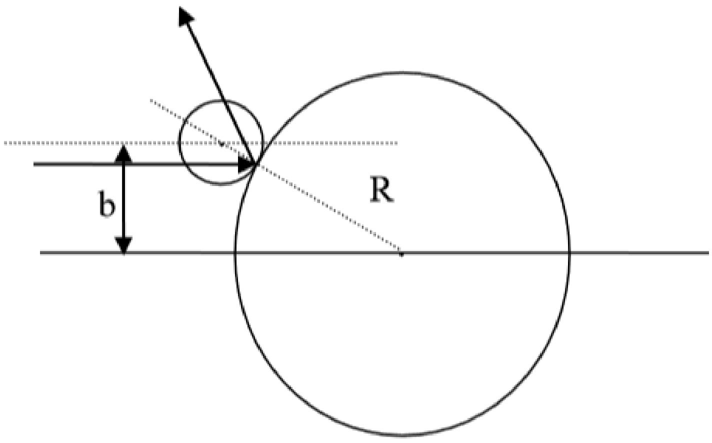
$$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1}{1+\cot g^2\frac{\theta}{2}}} = \sqrt{\frac{1}{1+\left(\frac{8\pi\varepsilon_0 E_0 b}{zZe^2}\right)^2}}$$

$$P_0 = \sqrt{2mE_0}$$

$$\Rightarrow \Delta P = 2\sqrt{\frac{2mE_0}{1+\left(\frac{8\pi\varepsilon_0 E_0 b}{zZe^2}\right)^2}}$$

Proton có z=1 nên $\Delta p = 2\sqrt{\frac{2mE_0}{1+\left(\frac{8\pi\varepsilon_0 E_0 b}{Ze}\right)^2}}$

**Bài 8.**




a) Dễ thấy $\cos\frac{\theta}{2} = \frac{b}{R+r}$

b) Từ công thức trên ta có:

$$-\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2}d\theta = \frac{1}{R+r}db$$

Số hạt tỉ đối trong khoảng từ $\theta$ đến $\theta + d\theta$

$$\frac{dn}{n} = \frac{2\pi|bdb|}{\pi b^2} = \frac{1}{2}\sin\theta d\theta$$

c) Xác suất phát hiên hạt trong phần mặt cầu phía trước: $w = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta = \frac{1}{2}$

**Bài 9.**

Vì electron dao động gần điều hòa nên năng lượng của electron là

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$$

Với $A$ là biên độ dao động:

Kết hợp với công thức mà đầu bài đã cho ta có:

$$\frac{dE}{E} = -\frac{2e^2w^2}{3c^3E}dt \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dE}{E} = -\frac{4e^2\omega^2}{3mc^3}dt$$

Tích phân hai vế ta được:

$$\ln\eta = \frac{2e^2\omega^2}{3m^2c^3}t \text{ Hay } t = \frac{3mc^3}{2e^2\omega^2}\ln\eta$$

Thay số ta được:

$t = 15ns$

**Bài 10.**

**a)** Từ điều kiện lượng tử hóa của Born ta có:

$$\oint pdq = nh \Leftrightarrow \oint mvr_n d\vartheta = 2\pi mvr_n = nh \Rightarrow m\omega_n r_n^2 = n\hbar$$

Do: $m\omega_n^2 r_n = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r_n^2} \Rightarrow \quad m\omega_n^2 r_n = \frac{n^2\hbar^2}{mr_n^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r_n^2}$

Bán kính quỹ đạo Bohr thứ $n$:

$$r_n = 4\pi\varepsilon_0\frac{n^2\hbar^2}{mZe^2} \qquad (5.20.1)$$

Vận tốc của electron trên quỹ đạo thứ $n$:

$$v_n = \omega_n r_n = \frac{n\hbar}{mr_n} \text{ hay}$$

$$v_n = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{n\hbar}$$

**b)** Động năng và năng lượng liên kết của electron ở quỹ đạo thứ $n$:

$$T_n = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{2r_n} \text{ hay } T_n = \frac{1}{(4\pi\varepsilon_0)^2}\frac{mZ^2e^4}{2n^2\hbar^2}$$

$$E_n = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{2r_n} \text{ hay } E_n = -\frac{1}{(4\pi\varepsilon_0)^2}\frac{mZ^2e^4}{2n^2\hbar^2}$$

**c)** Thế Ion hóa:

$$E = -\frac{1}{(4\pi\varepsilon_0)^2}\frac{mZ^2e^4}{2\hbar^2} \Rightarrow \text{Thế ion hóa } V = -\frac{1}{(4\pi\varepsilon_0)^2}\frac{mZ^2e^3}{2\hbar^2}$$

Thế kích thích thứ nhất:

$$E_{21} = E_2 - E_1 = \frac{1}{(4\pi\varepsilon_0)^2}\frac{mZ^2e^4}{2\hbar^2}\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}\right) \Rightarrow V_{21} = \frac{1}{(4\pi\varepsilon_0)^2}\frac{mZ^2e^3}{2\hbar^2}\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}\right)$$

Thế ion hóa V: $eV = E_{ion} \to V = \frac{1}{(4\pi\varepsilon_0)^2}\frac{mZ^2e^3}{2\hbar^2}$

Bước sóng của vạch cộng hưởng tương ứng:

$$\lambda_{21} = \frac{hc}{E_{21}}$$

Thay số vào các biểu thức trên ta sẽ thu được kết quả ghi trong bảng dưới đây:

| | $r_1(pm)$ | $v_1(10^6 m/s)$ | $T_1(eV)$ | $E_{21}(eV)$ | $V(V)$ | $V_{12}(V)$ | $\lambda_{12}(nm)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| H | 52.9 | 2.18 | 13.6 | -13.6 | 13.6 | 10.2 | 121.5 |
| $He^+$ | 26.5 | 4.36 | 54.5 | -54.5 | 54.5 | 40.8 | 30.4 |

**Bài 11.**

Momen từ quỹ đạo của electron chuyển động trên quỹ đạo thứ $n$:

$$\mu_n = I_nS_n = ef_n\pi r_n^2 \qquad (5.22.1)$$

$f_n$ là tần số chuyển động của electron trên quỹ đạo thứ $n$. Tiếp tục biến đổi (5.22.1) ta được:

$$\mu_n = e\frac{\omega_n}{2\pi}\pi r_n^2 = \frac{1}{2}e\omega_n r_n^2$$

Sử dụng các biểu thức của $\omega_n$ và $r_n$ ở các bài tập trên ta có:

$$\mu_n = \frac{1}{2}e\frac{1}{(4\pi\varepsilon_0)^2}\frac{mZ^2e^4}{n^3\hbar^3}(4\pi\varepsilon_0\frac{n^2\hbar^2}{mZe^2})^2$$

Hay $\mu_n = \frac{1}{2}\frac{e\hbar}{m}n = n\mu_B$

Momen cơ $L_n = P_\vartheta = m\omega_n r_n^2 = n\hbar$

Tỉ số giữa momen từ quỹ đạo và momen cơ:

$$\frac{\mu_n}{L_n} = \frac{e}{2m}$$

Trên quỹ đạo Bohr thứ nhất ta có:

$$\mu_1 = \mu_B$$

**Bài 12.**

**I.1. a)** Do tính đối xứng cầu của mô hình nguyên tử, điện trường $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ tại M có hướng xuyên tâm và có độ lớn chỉ phụ thuộc vào r = OM, cụ thể là:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V(r) = -\frac{dV}{dr}\frac{\vec{r}}{r} = \frac{a\exp(-br)}{r^2}(1+br)\frac{\vec{r}}{r}$$

$$E \equiv \left|\vec{E}\right| = \frac{a\exp(-br)}{r^2}(1+br) \qquad (1)$$

b) Ký hiệu q(r) là điện tích của đám mây điện tích âm nằm trong mặt cầu tâm O bán kính r. Theo định lý Gauss, thông lượng điện trường qua mặt cầu tâm O bán kính r chứa điện tích +e ở tâm và điện tích âm q(r) cho bởi biểu thức:

$$E(r)4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}(e+q(r)) \qquad (2)$$

Thay E từ (1) vào (2) ta nhận được:

$$4\pi a(1+br)e^{-br} = \frac{1}{\varepsilon_0}(e+q(r))$$

Từ đó suy ra: $q(r) = -e + 4\pi\varepsilon_0 a(1+br)e^{-br}$ (3)

**2. a)** Gọi mật độ điện tích âm tại điểm cách tâm O khoảng r là $\rho$(r). Điện tích âm trong không gian giữa hai mặt cầu có bán kính r và r + dr là:

$$\rho(r)4\pi r^2 dr = q(r+dr) - q(r) = q(r) + \frac{dq}{dr}dr - q(r) = \frac{dq}{dr}dr$$

Suy ra: $\rho(r) = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{dq}{dr}$ (4)

Thay q từ (3) vào (4), ta được:

$$\rho(r) = \frac{1}{4\pi r^2}4\pi\varepsilon_0 a e^{-br}\left[b - b(1+br)\right],$$

Hay $\rho(r) = -\frac{\varepsilon_0 ab^2}{r}e^{-br}$ (5)

b) Do tính trung hòa về điện của nguyên tử, điện tích âm tổng cộng phải bằng -e cân bằng với điện tích +e của hạt nhân, nên ta có:

$$-e=\int_0^\infty \rho(r)4\pi r^2 dr$$

Thay $\rho$(r) từ (5), ta nhận được:

$$-e=-4\pi\varepsilon_0 ab^2\int_0^\infty re^{-br}dr.$$

Lấy tích phân theo từng phần, cuối cùng ta được: $a=\dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0}$ (6)

Cách khác: Ta có $\lim\limits_{r\to 0} q(r)=0$. Sử dụng (3) ta có (6)

**3.** Dùng (6) ta có thế tĩnh điện toàn phần tại M là:

$$V(r)=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r}e^{-br}$$

Mặt khác, hạt nhân tại O gây ra tại M điện thế $\dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0 r}$. Vậy đóng góp của đám mây điện tích âm vào điện thế toàn phần là:

$$V^{'}(r)=V(r)-\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[e^{-br}-1\right] \qquad (7)$$

**4.** a) Hạt nhân có điện tích +e đặt tại O (r $\to$ 0). Tại điểm O đám mây tích điện âm gây ra điện thế $V^{'}(O)$, nên hạt nhân có năng lượng bằng:

$$W_{hn}=+eV^{'}(O)$$

Trong đó $V^{'}(O)$ là giới hạn của $V^{'}(r)$ khi r $\to$ 0. Dùng khai triển $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2}+...$

Cho $|x|<<1$, từ (7) ta có:

$$V^{'}(r)=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(1-br+\frac{b^2r^2}{2}+...-1\right)=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left(-b+\frac{b^2r}{2}+...\right)$$

Suy ra: $\quad V^{'}(O)=\lim\limits_{r\to 0}V^{'}(r)=-\dfrac{eb}{4\pi\varepsilon_0}$

Do đó: $\quad W_{hn}=+eV^{'}(O)=-\dfrac{e^2b}{4\pi\varepsilon_0}$ (8)

b) Năng lượng riêng $W_e$ của đám mây tích điện âm với mật độ □(r) bằng:

$$W_e=\frac{1}{2}\int_0^\infty V^{'}(r)\rho(r)4\pi r^2 dr \qquad (9)$$

Thay (5), (6) và (7) vào (9), ta nhận được:

$$W_e=-\frac{e^2b^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_0^\infty\left[e^{-2br}-e^{-br}\right]dr=\frac{e^2b}{16\pi\varepsilon_0}$$

Vậy, năng lượng toàn phần của nguyên tử hydro bằng:

$$W=W_{hn}+W_e=-\frac{3e^2b}{16\pi\varepsilon_0} \qquad (10)$$

**II.** Gọi $E_1$, $E_2$ tương ứng là năng lượng trước và sau khi phát photon, K và v là động năng và vận tốc giật lùi của nguyên tử; gọi $\lambda_0$ và $\lambda$ là bước sóng photon khi không kể và kể tới sự giật lùi. Theo định luật bảo toàn năng lượng:

$$E_1 = E_2 + hc/\lambda + K$$

Chú ý rằng $E_1 = E_2 + hc/\lambda_0$ ta có

$$\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\lambda K}{hc} \qquad (1)$$

Mặt khác, định luật bảo toàn động lượng cho $0 = \vec{p}_\lambda + \vec{p}_M \rightarrow p_\lambda^2 = p_M^2$

Sử dụng K = 2mp$^2$ và p $p_\lambda = h/\lambda$ ta có

$$K = \frac{h^2}{2M\lambda^2} \qquad (2)$$

Kết hợp (1) và (2) ta thu được

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{hc}{2Mc^2\lambda} = \frac{6,6.10^{-6}\overset{0}{A}}{\lambda}$$

# CHƯƠNG XII
# VẬT LÝ HẠT NHÂN
## XII.1 PHÓNG XẠ-CHUỖI PHÓNG XẠ

**Bài 1.** Số xung đếm được chính là số hạt nhân bị phân rã: $\Delta N = N_0(1-e^{-\lambda.t})$

-Tại thời điểm $t_1$: $\Delta N_1 = N_0(1-e^{-\lambda.t_1}) = n_1$

-Tại thời điểm $t_2$ : $\Delta N_2 = N_0(1-e^{-\lambda.t_2}) = n_2 = 2,3n_1$

$$1-e^{-\lambda.t_2} = 2,3(1-e^{-\lambda.t_1}) \Leftrightarrow 1-e^{-3\lambda.t_1} = 2,3(1-e^{-\lambda.t_1}) \Leftrightarrow 1+e^{-\lambda.t_1}+e^{-2\lambda.t_1} = 2,3$$

$$\Leftrightarrow e^{-2\lambda.t_1}+e^{-\lambda.t_1} - 1,3 = 0 \Rightarrow e^{-\lambda.t_1} = x > 0 \quad \Leftrightarrow X^2 + x - 1,3 = 0 \Rightarrow T = 4,71\text{ h}$$

**Bài 2.**

Số xung phát ra tỉ lệ với số nguyên tử bị phân rã.

Số nguyên tử bị phân rã trong 1 phút đầu tiên: $\Delta N_1 = N_{01} - N_1 = N_{01}(1- e^{-\lambda.\Delta t})$

Sau 2 giờ số nguyên tử còn lại là: $N_{02} = N_{01}.e^{-\lambda.t}$

Số nguyên tử bị phân rã trong khoảng thời gian $\Delta t$ = 1phút kể từ thời diểm này là: $\Delta N_2 = N_{02}(1- e^{-\lambda.\Delta t})$

$$\rightarrow \frac{\Delta N_1}{\Delta N_2} = \frac{N_{01}(1-e^{-\lambda.\Delta t})}{N_{02}(1-e^{-\lambda.\Delta t})} = \frac{N_{01}}{N_{02}} = \frac{N_{01}}{N_{01}.e^{-\lambda.t}} = e^{\lambda.t} \quad \rightarrow e^{\lambda.t} = \frac{14}{10} = 1,4 = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \lambda t = \ln\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln 2}{T}t = \ln\sqrt{2} \qquad \Rightarrow T = \frac{\ln 2}{\ln\sqrt{2}}t = 2t = 2.2 = 4 \text{ giờ.}$$

**Bài 3.** Số hạt phóng xạ lần đầu:đếm được $\Delta N = N_0(1-e^{-\lambda\Delta t'}) \approx N_0\lambda\Delta t$

( áp dụng công thức gần đúng: Khi x << 1 thì $1-e^{-x} \approx x$, ở đây coi $\Delta t << T$ nên $1 - e^{-\lambda\Delta t} = \lambda\Delta t$)

Sau thời gian 10 ngày, t = 10T/138,4, số hạt phóng xạ trong chất phóng xạ sử dụng lần đầu còn

$$N = N_0 e^{-\lambda t} = N_0 e^{-\frac{\ln 2}{T}\frac{10T}{138,4}} = N_0 e^{-\frac{10\ln 2}{138,4}}$$

. Thời gian chiếu xạ lần này Δt':ΔN' = N(1-$e^{-\lambda\Delta t'}$) = N$_0$$e^{-\frac{10\ln 2}{138,4}}$(1- $e^{-\lambda\Delta t'}$) ≈ N$_0$$e^{-\frac{10\ln 2}{138,4}}$λΔt'= ΔN

=>N$_0$$e^{-\frac{10\ln 2}{138,4}}$λΔt' = N$_0$λΔt =>Δt' = $e^{\frac{10\ln 2}{138,4}}$Δt = 1,0514 phút = 63,08 s

**Bài 4.**

1) Chu kỳ và độ phóng xạ : (1,0 điểm)

Ta có : $\frac{m_0}{m} = \frac{4,8}{1,2} = 4 = 2^2$ vậy : số chu kỳ k = 2. (2)

Do đó : t = 2T , suy ra : T = t/2 = 30/2 = 15h. (1)

- Độ phóng xạ : H = λN = $\frac{\ln 2.N_A.m}{T.A}$ (2)

- Thay số : H = $\frac{0,693.6,023.10^{23}.1,2}{15.3600.24} = 3,8647.10^{17}(Bq)$

- Tính theo (Ci) : H = $\frac{3,8647.10^{17}}{3,7.10^{10}} = 1,0445.10^7(Ci)$ (3)

2) Thời gian :

Ta có : $\frac{m_{02}}{m_{01}} = 0,125 \Rightarrow \frac{N_{02}}{N_{01}} = 0,125 \ hay \ N_{02} = \frac{N_{01}}{8}$ (4)

- Tại thời điểm t : m$_2$/ m$_1$ = 8 , vậy : $\frac{m_{02}+m}{m_1} = \frac{\frac{A_2}{N_A}.N_{02} + \Delta N\frac{A_2}{N_A}}{\frac{A_1}{N_A}.N_1} = 8$ (5)

- Do : A$_2$ = A$_1$ = 24g , nên từ (30), ta có :

$$\frac{N_{02}+N_{01}(1-e^{-\lambda t})}{N_{01}e^{-\lambda t}} = \frac{\frac{N_{o1}}{8} + N_{01}(1-e^{-\lambda t})}{N_{01}e^{-\lambda t}} = 8 \ . \qquad (6)$$

Biến đổi , ta được : e$^{\lambda t}$ = 8 , suy ra : λt = 3ln2 ;

Vậy : t = 3T = 45h (7)

**Bài 5.** Tại thời điểm t$_1$ ta có tỷ số giữa hạt chì và Pôlini

$$\frac{\Delta N_1}{N_1} = \frac{1-2^{-\frac{t_1}{T}}}{2^{-\frac{t_1}{T}}} = 7 \quad (1)$$

$$\Rightarrow 2^{-\frac{t_1}{T}} = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{t_1}{T} = 3$$

+ Tại thời điểm t$_2$ ta có tỷ số giữa hạt chì và Pôlini

$$\frac{1-2^{-\frac{t_2}{T}}}{2^{-\frac{t_2}{T}}}=63$$

$$\Rightarrow 2^{-\frac{t_2}{T}}=\frac{1}{64}\Leftrightarrow \frac{t_2}{T}=6$$

$$t_2=t_1+414\Rightarrow \frac{t_1}{T}+\frac{414}{T}=6\ (2)$$

+ Thay (1) và (2) ta được:

$$3+\frac{414}{T}=6\ \Leftrightarrow\ T=138\ (\text{ ngày đêm })$$

**Bài 6.** Phương trình phóng xạ hạt nhân: ${}^{210}_{84}Po\to\alpha+{}^{206}_{82}Pb$

Số hạt nhân chì sinh ra bằng số hạt Poloni bị phân rã: $N_{pb}=\Delta N_{Po}$

Ở thời điểm $t_1$: $\frac{N_{1Po}}{N_{1Pb}}=\frac{N_1}{\Delta N_1}=\frac{N_1}{N_0-N_1}=\frac{N_0.2^{-k1}}{N_0(1-2^{-k1})}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow k_1=2\Rightarrow t_1=2T=276$ ngày

Ở thời điểm $t_2 = t_1 + 276 = 552$ ngày

$\Rightarrow k_2=4\Rightarrow \frac{N_{2Po}}{N_{2Pb}}=\frac{N_2}{\Delta N_2}=\frac{N_2}{N_0-N_2}=\frac{N_0.2^{-k2}}{N_0(1-2^{-k2})}=\frac{2^{-4}}{1-2^{-4}}=\frac{1}{15}$

**Bài 7.** Áp dụng công thức ĐL phóng xạ ta có:

$$\frac{N_{Y_1}}{N_{1X_1}}=\frac{\Delta N_1}{N_1}=\frac{N_0(1-e^{-\lambda t_1})}{N_0e^{-\lambda t_1}}=k\Rightarrow e^{-\lambda t_1}=\frac{1}{k+1}\qquad \textbf{(1)}$$

$$k_2=\frac{N_{Y_2}}{N_{1X_2}}=\frac{\Delta N_2}{N_2}=\frac{N_0(1-e^{-\lambda t_2})}{N_0e^{-\lambda t_2}}=\frac{(1-e^{-\lambda(t_1+2T)})}{e^{-\lambda(t_1+2T)}}=\frac{1}{e^{-\lambda t_1}e^{-2\lambda T}}-1\qquad \textbf{(2)}$$

Ta có: $e^{-2\lambda T}=e^{-2\frac{\ln 2}{T}T}=e^{-2\ln 2}=\frac{1}{4}$ (3).

Thay (1), (3) vào (2) ta được tỉ lệ cần tìm: $k_2=\frac{1}{\frac{1}{1+k}\frac{1}{4}}-1=4k+3$.

**Bài** 8.

1) phản ứng phân rã của urani :

$${}^{238}_{92}U \rightarrow {}^{206}_{82}Pb + x({}^{4}_{2}He) + y({}^{0}_{-1}e)$$

Áp dụng định luật bảo toàn điện tích và bảo toàn số nuclôn ta có :

238=206+4x

92=82+2x-y

Suy ra x=8 , y=2

2a) số hạt nhân sinh ra bằng đúng với sô hạt nhân urani bị phân rã :

$N_{Pb}(t)=N_U(0)-N_U(t)=N_U(0).(1-e^{-\lambda t})$

Hay $N_{Pb} = N_U(t)(e^{\lambda t}-1)$ (vì $N_U(t) = N_U(0).e^{-\lambda t}$)

2b) Theo trên ta có : $\frac{N_{Pb(t)}}{N_U} = e^{\lambda t} - 1$

Vì $\lambda = \frac{0,693}{T} = \frac{0,693}{45.10^9}$ năm$^{-1}$ là rất nhỏ và t << T , nên $\lambda$t << 1 . Do đó ta có : $e^{\lambda t} \approx 1 + \lambda t$

Suy ra : $\frac{N_{Pb}(t)}{N_U(t)} = \lambda t$

=> $t = \frac{1}{\lambda}\frac{N_{Pb}(t)}{N_U(t)} = \frac{T}{0,693}\frac{N_{Pb}(t)}{N_U(t)}$

Theo đề bài : $m_U(t)$ = 1g ; $m_{Pb}(t)$ =10g = $10^{-2}$ g

Tù đó : $N_{Pb}(t) = \frac{m_{Pb}(t)N_A}{206}$

$N_U(t) = \frac{m_{Pb}(t)N_A}{238}$

=> $\frac{N_{Pb}(t)}{N_U(t)} = \frac{m_{Pb}(t)}{m_U(t)}\frac{238}{206} = \frac{2,38}{206}$

Từ đó tìm được :

$t = \frac{T}{0,693}\frac{2,38}{206} = \frac{4,5.10^9.2,38}{0,963.206}$

$t \approx 7,5.10^7$ năm

**Bài 9.**

a)Từ biểu thức xác định lượng chất phóng xạ còn lại sau thời gian $t$ với số hạt ban đầu là $N_0$:

$N = N_0\exp(-\lambda t)$; $\Rightarrow$ xác xuất để hạt còn tồn tại sau khoảng thời gian $t$:

$w_{cl}(t) = \exp(-\lambda t)$ $\Rightarrow$ xác xuất để hạt đó bị phân rã sau khoảng thời gian $t$:

$w(t) = 1 - \exp(-\lambda t)$.

b)Thời gian sống trung bình của hạt nhân là khoảng thời gian mà sau khoảng thời gian đó xác xuất tồn tại hạt giảm đi $e$ lần $\Rightarrow$ thời gian sống trung bình của hạt nhân:

$\tau = \frac{1}{\lambda}$.

**Bài 10.**

$$\delta = \frac{\Delta H}{H_0} = \frac{H_0 - H}{H_0} = 1 - \exp(-\lambda \Delta t)$$

Từ đó ta có:

$$\lambda = -\frac{\ln(1-\delta)}{\Delta t} \approx \frac{\delta}{\Delta t} \approx 1.1 \times 10^{-5} s^{-1};$$

Thời gian sống trung bình:

$$\tau = \frac{1}{\lambda} = -\frac{\Delta t}{\ln(1-\delta)} \approx \frac{\Delta t}{\delta} \approx 1.0 \text{ năm.}$$

**Bài 11**

Ta giả sử rằng khi bị phóng xạ các nguyên tử $U^{238}$ chuyển ngay thành hạt nhân chì bền ($Pb^{206}$). Do mỗi hạt nhân $U^{238}$ phóng xạ chỉ tạo ra một hạt nhân chì nên số lượng hạt nhân chì tạo thành cũng chính là số lượng các hạt nhân $U^{238}$ bị phóng xạ. Do đó ta có:

$$\eta = \frac{N_U}{N_{Pb}} = \frac{\exp(-\lambda t)}{1 - \exp(-\lambda t)}$$

Từ đó ta có:

$$t = \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{\eta+1}{\eta}\right) = \frac{1}{\ln 2} \ln\left(\frac{\eta+1}{\eta}\right) T \approx 2.0 \times 10^9 \text{ năm.}$$

**Bài 12.**

Tốc độ tích luỹ đồng vị $P^{32}$ trong lò phản ứng:

$$\frac{dN}{dt} = q - \lambda N$$

Giải phương trình vi phân này với điều kiện ban đầu: $N_0 = 0$ ta được:

$$N = \frac{q}{\lambda}(1 - \exp(-\lambda t))$$

Độ phóng xạ của mẫu:

$$A = \lambda N = q(1 - \exp(-\lambda t))$$

Từ đó ta có:

$$t = -\frac{1}{\lambda} \ln\left(1 - \frac{A}{q}\right) = -\frac{T}{\ln 2} \ln\left(1 - \frac{A}{q}\right) \approx 9.5 \text{ ngày đêm.}$$

**Bài 13.** Lượng tia γ phóng xạ lần đầu: $\Delta N_1 = N_0(1 - e^{-\lambda \Delta t}) \approx N_0 \lambda \Delta t$

( áp dụng công thức gần đúng: Khi x << 1 thì $1 - e^{-x} \approx x$, ở đây coi $\Delta t << T$ nên $1 - e^{-\lambda t} = \lambda \Delta t$

Sau thời gian 2 tháng, một nửa chu kì $t = T/2$, Lượng phóng xạ trong nguồn phóng xạ sử dụng lần đầu còn

$N = N_0 e^{-\lambda t} = N_0 e^{-\frac{\ln 2}{T}\frac{T}{2}} = N_0 e^{-\frac{\ln 2}{2}}$. Thời gian chiếu xạ lần này Δt'

$$\Delta N' = N_0 e^{-\frac{\ln 2}{2}}(1 - e^{-\lambda\Delta t'}) \approx N_0 e^{-\frac{\ln 2}{2}}\lambda\Delta t' = \Delta N$$

Do đó $\Delta t' = e^{\frac{\ln 2}{2}}\Delta t = 1,41.20 = 28,2$ phút.

**Bài 14.**

1.Số hạt nhân A phân rã bằng số xung β, nên tại các thời điểm $t_1$, $t_2$ số xung tương ứng là

$$n_1 = N_0 - N(t_1) = N_0(1 - e^{-\lambda t_1})$$
$$n_2 = N_0 - N(t_2) = N_0(1 - e^{-\lambda t_2})$$

Kết hợp với điều kiện $n_2 = 2,334n_1$ và $t_2 = 3t_1$, và đặt $x = e^{-\lambda t_1}$, ta tính được x = 0,75857.
Do đó, hằng số phóng xạ

$$\lambda = -\frac{\ln x}{t_1} = 1,6.10^{-6}\ s^{-1}.$$

2.Tốc độ phân rã hạt nhân A

$$-\frac{dN}{dt} = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = \lambda N$$

Vì có cùng hằng số phóng xạ λ nên tốc độ giảm số hạt B do phóng xạ được xác định tương tự, là $\lambda N_B$, với $N_B$ là số hạt nhân B tại thời điểm xét.
Sự thay đổi của số hạt nhân B tại mỗi thời điểm phụ thuộc vào số hạt nhân A phân rã (là số hạt nhân B tạo thành) và số phân rã của hạt nhân B. Do đó, tốc độ biến thiên của số hạt nhân B được xác định bởi phương trình

$$\frac{dN_B}{dt} = \lambda N_A - \lambda N_B = \lambda N_0 e^{-\lambda t} - \lambda N_B$$

Thay dạng nghiệm $N_B = (p + qt)e^{-\lambda t}$ vào phương trình trên, ta thu được $q = \lambda N_0$. Mặc khác, từ điều kiện ban đầu t = 0 thì $N_B = 0$, ta tính được p = 0. Do đó

$$N_B = \lambda N_0 t e^{-\lambda t}$$

Tại thời điểm $t_2$ = 144 giờ, ta tính được $N_B = 7,24.10^{17}$ hạt nhân B.
3.Tại thời điểm $t_2$, số hạt nhân A đã phân rã (bằng số hạt β phóng xạ)
$n_2 = N_0(1 - e^{-\lambda t_2}) = 1,127.10^{18}$ hạt
Số hạt α tạo thành bằng số hạt B phân rã
$n_\alpha = n_2 - N_B = 4,03.10^{17}$ hạt

**Cách giải 2**

1. Số phân rã β chính là số hạt nhân A đã phân rã và được tính bởi: $|\Delta N_1| = N_0(1 - e^{-\lambda t})$

Theo giả thiết ta có: $n_1 = N_0(1 - e^{-\lambda t1}) = N_0(1 - x)$ và $n_2 = N_0(1 - e^{-\lambda t2}) = N_0(1 - x^3)$

Suy ra: $\frac{n_1}{n_2} = x^2 + x + 1$

Thay số, giải phương trình và loại nghiệm âm ta được: $x = e^{-\lambda t1} = 0,7586 \Rightarrow \lambda = 5,76.10^{-3}h^{-1}$

2. Từ biểu thức đã cho trong bài: $N_B = (p + q.t)e^{-\lambda t}$ ta có:

Lúc $t = 0$, $N_B = 0 \Rightarrow p = 0 \Rightarrow N_B = q.t.e^{-\lambda t}$ (1)

Số hạt nhân B biến thiên từ thời điểm t đến thời điểm $t + dt$ (dt là vô cùng bé) là:

$dN_B = q.e^{-\lambda t}(1 - \lambda.t)dt$ (2)

Ta có số hạt nhân B sinh ra thêm do A phân rã trong khoảng thời gian dt: $dN_A = -N_0\lambda.e^{-\lambda t}.dt$

Do dt vô cùng bé nên ta có thể xem gần đúng số phân rã α do số hạt nhân B sinh thêm ra là không đáng kể.

Nghĩa là số hạt nhân B bị phân rã trong khoảng thời gian này là: $dN_2 = -N_B\lambda.e^{-\lambda t}.dt$

Vậy: $dN_B = dN_2 - dN_A = (-N_B + N_0)\lambda.e^{-\lambda t}.dt$ (3)

Từ (2) và (3) ta suy ra: $q = \lambda\frac{N_0 - N_B}{1 - \lambda.t}$

Vì q là hằng số nên biểu thức trên đúng với $t = 0 \Rightarrow q = \lambda.N_0 \Rightarrow N_B = \lambda.N_0.t.e^{-\lambda t}$

Thay số ta tính được số hạt nhân B cần tìm.

3. Số hạt α cần tìm cũng là số hạt nhân B đã phân rã:

$N_\alpha = N_0(1 - e^{-\lambda t2}) - \lambda.N_0.t_2e^{-\lambda t2}$

## Chuỗi phóng xạ

**Bài 15**. Gọi $N_0$ là số hạt nhân A ban đầu. Gọi $N_1$, $N_2$, $N_3$ lần lượt là số hạt nhân A, B, C tại thời điểm t.

Ta luôn luôn có $N_0 = N_1 + N_2 + N_3$

Lấy đạo hàm hai vế theo thời gian

$$\frac{dN_0}{dt} = \frac{dN_1}{dt} + \frac{dN_2}{dt} + \frac{dN_3}{dt} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow 0 = -\lambda_1 N_1 + \frac{dN_2}{dt} + \lambda_2 N_2$$

Với $\frac{dN_3}{dt} = \lambda_2 N_2$ chính là số hạt nhân C tạo thành trong một đơn vị thời gian;

$-\frac{dN_2}{dt}$ số hạt nhân B biến đổi trong một đơn vị thời gian( trong đó có tăng do A tạo thành B và có giảm do B tạo thành C)

$$\Rightarrow \frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2 \quad (2)$$

Từ (2) ta có đạo hàm hai vế theo thời gian:

$$\Rightarrow \frac{d^2N_2}{dt^2} = \lambda_1\frac{dN_1}{dt} - \lambda_2\frac{dN_2}{dt} \quad (3)$$

Ta khử $\frac{dN_1}{dt}$ bằng cách từ biểu thức và (2) suy ra được

$\Rightarrow \frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2 \quad \Rightarrow -\lambda_1 N_1 = -\frac{dN_2}{dt} - \lambda_2 N_2 \qquad (voi \ \frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1)$

$\Rightarrow \frac{dN_1}{dt} = -\frac{dN_2}{dt} - \lambda_2 N_2 \qquad (4)$

Thay (4) vào (3) $\Rightarrow \frac{d^2 N_2}{dt^2} = \lambda_1\left(-\frac{dN_2}{dt} - \lambda_2 N_2\right) - \lambda_2 \frac{dN_2}{dt}$

Hay $\Rightarrow \frac{d^2 N_2}{dt^2} + (\lambda_1 + \lambda_2)\frac{dN_2}{dt} + \lambda_1\lambda_2 N_2 = 0 \qquad \Rightarrow N_2'' + (\lambda_1 + \lambda_2)N_2' + \lambda_1\lambda_2 N_2 = 0 \qquad (5)$

(5) có thể suy ra nghiệm $N_2$ như sau: $N_2 = Ae^{-\alpha t} + Be^{-\beta t}$ (6)

Lúc t=0 thì $N_B$=0 thì ta suy ra được B=-A

-Thay (6) vào phương trình (5) và đạo hàm của (5) ta tự tìm được các điều kiện

$\alpha^2 - \alpha\lambda_1 = 0 \ ; \beta^2 - \beta\lambda_2 = 0 \qquad \Rightarrow \alpha = \lambda_1 \ ; \ \beta = \lambda_2$

Vậy $N_2 = Ae^{-\lambda_1 t} + Be^{-\lambda_2 t}$ (7)

+ Tìm A: Từ (6) và B=-A $\Rightarrow \frac{dN_2}{dt} = A(-\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + \lambda_2 e^{-\lambda_2 t})$

Tại t=0 thì $\Rightarrow \frac{dN_2}{dt} = A(\lambda_2 - \lambda_1)$ và $N_1=N_0$; $N_2=0$. Thay vào (2) ta suy ra được $A = \frac{\lambda_1 N_0}{\lambda_2 - \lambda_1}$

Vậy $N_2 = \frac{\lambda_1 N_0}{\lambda_2 - \lambda_1}(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})$ (8)

Điều kiện cực trị của $N_2$:

$$\frac{dN_2}{dt} = \frac{\lambda_1 N_0}{\lambda_2 - \lambda_1}(-\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}) = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{\ln\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}{\lambda_2 - \lambda_1} \qquad (9)$$

Thay (9) vào (8) ta được $N_{2max} = \frac{\lambda_1 N_0}{\lambda_2 - \lambda_1}\left[\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}} - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}}\right]$

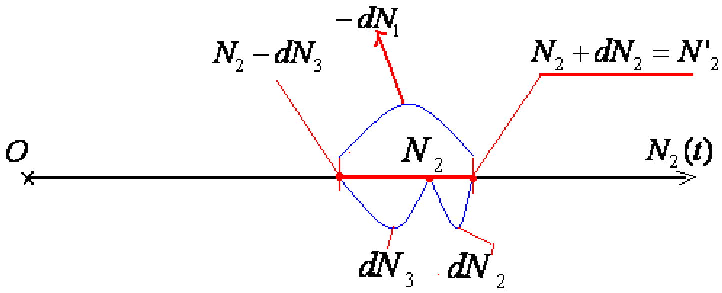
**Lưu ý:**

1. $N_2$ thay đổi rất phức tạp, nên $\frac{dN_2}{dt}$ chưa thể đạo hàm được. Vì $dN_2$ chính là độ biến thiên số hạt $N_2$( có thể tăng hoặc giảm).

2. trong khi đó $dN_3$ chính là số tăng của hạt C đúng bằng độ giảm số hạt nhân B trong khoảng thời gian dt. Do đó $\frac{dN_3}{dt} = \frac{-dN_2^*}{dt} = -(-\lambda_2 N_2) = \lambda_2 N_2$

3.Trong khoảng thời gian dt số hạt nhân B tăng lên một lượng là ($-dN_1$) nhưng lại giảm đi một lượng $dN_3$ nên có thể viết trực tiếp $dN_2$=($-dN_1$)- $dN_3$ giống như biểu thức (1).

4. Sở dĩ từ (2) suy ra (3) là do: thứ nhất $N_1$ là một hàm $e^{-\lambda_1 t}$ nên lấy tích phân ta được dạng tổng quát $Ae^{-\lambda_1 t}$. Thứ hai là từ (2) vế trái là đạo hàm $N_2$ như kết quả vế phải là $N_2$, điều này chứng tỏ $N_2$ phải là một hàm $e^{-\lambda_2 t}$, do vậy khi lấy tích phân vế trái có chứa thành phần $Be^{-\lambda_2 t}$




**Bài 16.**

1) Phương trình phân rã phóng xạ :

$$^{226}_{88}Ra \rightarrow \ ^4_2He + \ ^A_ZX$$

Áp dụng các định luật bảo toàn điện tích va bảo toàn số nuclôn , ta có A=336-4=222

Z=88-2=86

Vậy , X là hạt nhân rađôn $^{222}_{86}Rn$

Năng lượng toả ra là :

$$\Delta E = [m(Rn)\text{-}m(\alpha)\text{-}m(X)]c^2 = 5{,}96 \text{ MeV}$$

2) Kí hiệu $v_1$,$E_1$,$v_2$,$E_2$ tương ứng là vận tốc động năng của hạt α và hạt X . Áp dụng định luật bảo toàn động lương và bảo toàn năng lượng , ta có :

$0 = m_\propto \vec{v}_1 + m_X \vec{v}_2$ (1)

$E_1 + E_2 = \Delta E$ (2)

Từ (1) và (2) ta tìm đươc :

$$E_1=\frac{m_x}{m_\propto+m_x}\Delta E \approx 5{,}85 \text{ MeV}$$

$$E_2=\frac{m_\propto}{m_x} E_1\approx 0{,}11 \text{ MeV}$$

Từ đó suy ra : $v_1 = \sqrt{\frac{2E_1}{m_\propto}}$

Với $E_1 = 5{,}85.1{,}6.10^{-13}$ J ; $m_\propto = 4{,}0015.1{,}66.10^{-26}$ Kg

=>$v_1 = 1{,}68.10^7$ m/s

Và $v_2 = \frac{m_\propto}{m_x} v_1 \approx 3{,}03.10^5$ m/s

3) Sở dĩ động năng của hạt $\propto$ có các giá trị rời rạc là do : các hạt X (rađôn) được tạo nên ở trạng thái kích thích có mức năng lượng cao ; vì vậy khi trở về trạng thái cơ bản (mức năng lượng thấp nhất) chúng phat ra phôtôn tia $\gamma$ . Như vậy một phần động năng của các hạt $\propto$ bị mất đi và được thay thế bằng năng lượng hf của tia . Vì các mức năng lượng trong nguyên tử hợp thành một chuỗi rời rạc ( lượng tử hoá ) , nên động năng của các hạt $\propto$ cũng có các trị số rời rạc.

4) a) Ta có độ phóng xạ ban đầu của mẫu rađi là:

$$H_0 = \lambda_1 N_0 = \frac{0{,}963N_0}{T_1}$$

Với $T_1 = 1620$ năm = 1620.365.24.360 s

$N_0 = \frac{1}{266}.6,02.10^{23}$ hạt

Suy ra : $H_0 \approx 3,62.10^{10}$Bq ≈ 1Ci

b) Khối lượng hạt X (rađôn) không thay đổi ( xảy ra cân bằng phóng xạ ) khi số hạt nhân rađôn được tạo ra trong một đơn vị thời gian bằng số hạt nhân rađôn bị phân rã trong cùng thời gian đó .

Số hạt nhân rađôn tạo ra trong 1 giây lại bằng số hạt nhân rađi phân rã trong 1 giây ,tức là bằng độ phóng xạ mẫu rađi . Còn số hạt nhân rađôn bị phân rã trong 1 giây lại chính là độ phóng xạ của rađôn . Vậy lúc có cân bằng phóng xạ thì độ phóng xạ của rađi và rađôn bằng nhau , nghĩa là ta có :

H(Ra) = H(Rn)

=> $\lambda_1 N_{Ra} = \lambda_2 N_{Rn}$

=> $\frac{N_{Rn}}{N_{Ra}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{T_1}{T_2}$

Tỉ số các khối lượng bằng tỉ số các hạt nhân . Vì vậy khi có cân bằng phóng xạ thì khối lượng của hạt X (rađôn) là:

$\frac{m_{Rn}}{m_{Ra}} = \frac{T_1}{T_2}$ => $m_{Rn} = \frac{T_1}{T_2} m_{Ra} = \frac{3,82}{1620.365} m_{Ra}$

Vì chu kì bán rã của rađi khá lớn nên , cho đến khi xảy ra cân bằng phóng xạ , khối lượng của rađi giảm đi không đáng kể so với khối lượng ban đầu của nó , nghĩa là có thể xem như $m_{Ra} \approx 1$g

Do đó ta có : $m_{Rn} = \frac{3,82.1}{1620.365} \approx 6,46.10^{-6}$g

**Bài** 17.

1) phản ứng 1:

$^{238}_{92}U + ^{1}_{0}n \rightarrow ^{239}_{92}U$

Phản ứng 2(phóng xạ $\beta^-$)

$^{239}_{92}U \rightarrow ^{0}_{-1}e + ^{239}_{93}Np + ^{0}_{0}v$

Phản ứng 3 (phóng xạ $\beta^-$)

$^{239}_{93}Np \rightarrow ^{0}_{-1}e + ^{239}_{94}Pu + ^{0}_{0}v$

2) từ công thức $N = N_0 e^{-\lambda t}$ suy ra , khi 99% lượng chất phóng xạ biến mất thì :

$N = \frac{N_0}{100} \rightarrow \frac{N}{N_0} = \frac{1}{100} = 10^{-2}$

=> $10^{-2} = e^{-\lambda t}$ => $\lambda t = \ln 100$

=> $t = \frac{\ln 100}{\lambda} = \frac{\ln 100}{0,693} T$

Với phản ứng 2 ( phân rã của U239)

$t = \frac{\ln 100}{0,693} T_1 = \frac{\ln 100}{0,693}.23$ phút ≈ 153 phút

Với phản ứng 3 ( phân rã của neptuni ) :

$t = \frac{\ln 100}{0,693} T_2 = \frac{\ln 100}{0,693}.2,3$ ngày ≈ 15,3 ngày

Với phân rã plutôni :

$t = \frac{\ln 100}{0,693}$ T3 ≈ $1,595.10^4$ năm

Như vậy trong urani tự nhiên , thành phần đáng kể của U238 tuy không phân hạch trực tiếp vẫn có thể sử dụng làm nhiên liệu hạt nhân

Trong sự phân hạch của urani đã được làm giàu ( tăng tỉ lệ U235 từ 7‰ lên 5% đến 10% ) trong các lò phản ứng hạt nhân , các nơtrôn hoặc làm phân hạch U235 hoặc biến U238 thành plutôni cũng là nhiên liệu hạt nhân ( theo các phản ứng 1 2 3 ) Sau 1 thời gian sử dụng , tỉ lệ U235 trong các thỏi nhiên liệu giảm dần . Lúc đó người ta rút các thỏi đó ra khỏi lò phản ứng và tái chế để tách riêng plutôni . Vì khối lượng U238 lớn hơn nhiều so với U235 , nên khối lượng plutôni thu được sẽ lớn hơn so với khối lượng U235 đã phân hạch . Như vậy , rất có lợi về hiệu suất nhiên liệu.

**Bài 18.**

1)$\lambda_1 N_1$ là số hạt nhân 1 bị phân rã , cũng chính là số hạt nhân 2 sinh ra do chất 1 phân rã ; $\lambda_2 N_2$ là số hạt nhân 2 bị mất đi do phân rã . Như vậy hệ thức (1) nói lên rằng : số hạt nhân 2 sinh ra bằng số hạt nhân 2 mất đi . Điều đó có nghĩa là số hạt nhân 2 được giữ không thay đổi ( cân bằng phóng xạ)

2) a) Phương trình phân rã của rađi

$$^{226}_{88}Ra \rightarrow {}^{4}_{2}He + {}^{222}_{86}Rn$$

b) số hạt nhân rađôn chứa trong m = $6{,}47.10^{-6}$ g rađôn là :

$$N_{Rn} = \frac{m}{A(Rn)}N_A = \frac{6.47.10^{-6}.6{,}025.10^{23}}{222}$$

=> $N_{Rn} = 1{,}756.10^{16}$ hạt

Theo đề bài , độ phóng xạ của lượng rađôn đó là :

H = $3{,}7.10^{10}$ phân rã/giây = $\lambda_{Rn}R_{Rn}$

Suy ra $\lambda_{Rn} = \frac{H}{N_{Rn}}$ = $2{,}11.10^{-6}$ s = 0,1823 ngày

Từ đó :

$$T_{Rn} = \frac{0{,}963}{\lambda_{Rn}} \approx 3{,}8 \text{ ngày}$$

Khối lượng rađi giảm đi đáng kể nên $m_{Ra} \approx 1$ g và trong đó chứa số hạt nhân $N_{Ra}$:

$$N_{Ra} = \frac{1}{226}N_A \approx 2{,}7.10^{21} \text{ hạt}$$

Áp dụng hệ thức (1) trong đề bài ta có:

$$\lambda_{Ra}R_{Ra} = \lambda_{Rn}R_{Rn}$$

Hay $T_{Rn}N_{Ra} = T_{Ra}N_{Rn}$

Suy ra : $T_{Ra} = \frac{T_{Rn}N_{Ra}}{N_{Rn}} = \frac{3{,}8.2{,}7.10^{21}}{1{,}756.10^{16}}$ ngày

=> $T_{Ra} \approx 5{,}843.10^{5}$ ngày ≈ 1600 năm

c) Để đơn giản hoá , ta kí hiệu $N_0$ , N tương ứng là các số hạt nhân rađi ban đầu và ở thời điểm t , ta có :

$$\frac{N}{N_0} = e^{-\lambda_{Rn}t} = e^{\frac{0{,}693}{T_{Ra}}} = e^{-0{,}433.10^{-3}}$$

=> $\frac{N}{N_0} \approx 0{,}999567$

Như vậy , độ giảm tương đối của số hạt nhân rađi sau 1 năm là :

$$\frac{N_0 - N}{N_0} = 0{,}000433 \approx 0{,}43\ \%$$

d) lượng rađôn giữ không đổi , vẫn là :

m = $6{,}47.10^{-6}$ g

**Bài 19.**

Hạt nhân $A_2$ do hạt nhân $A_1$ phóng xạ thành, đồng thời hạt nhân $A_2$ cũng bị phóng xạ nên tốc độ tích luỹ đồng vị phóng xạ $A_2$:

$$\frac{dN_2}{dt} = -\frac{dN_1}{dt} - \lambda_2 N_2$$

a)Theo định luật phóng xạ ta có:

$$N_1 = N_{01}\exp(-\lambda_1 t)$$

Do đó:

$$\frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_{01}\exp(-\lambda_1 t) - \lambda_2 N_2$$

Giải phương trình trên với điều kiện ban đầu: $N_{02} = 0$ ta được:

$$N_2(t) = N_{01}\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\left[\exp(-\lambda_1 t) - \exp(-\lambda_2 t)\right] \quad (*);$$

Đây chính là định luật tích tụ của đồng vị phóng xạ $A_2$ theo thời gian.

b)Độ phóng xạ $H_2 = \lambda_2 N_2$ của đồng vị phóng xạ $A_2$đạt cực đại khi độ tích tụ của nó đạt cực đại, để có điều này thì:

$\frac{dN_2}{dt} = 0$ (**), thế (*) vào (**) ta được:

$$\lambda_1\exp(-\lambda_1 t) - \lambda_2\exp(-\lambda_2 t) = 0$$

Hay $t = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\ln\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)$.

**Bài 20.**

Đồng vị bền $A_3$ do đồng vị $A_2$ phóng xạ mà thành nên, định luật tích tụ đồng vị phóng xạ $A_3$ tuân theo phương trình:

$$\frac{dN_3}{dt} = \lambda_2 N_2 \quad (*)$$

Về cơ bản hiện tượng vật lý trong bài này giống hệt bài trên nên ta có:

$$N_2(t) = N_{01}\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\left[\exp(-\lambda_1 t) - \exp(-\lambda_2 t)\right] \quad (**);$$

Thế (**) vào (*) ta được:

$$\frac{dN_3}{dt} = N_{01}\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}\left[\exp(-\lambda_1 t) - \exp(-\lambda_2 t)\right]$$

Giải phương trình trên với điều kiện ban đầu $N_3 = 0$ ta được:

$$N_3 = N_{01}\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}\left[\frac{1}{\lambda_1}\left(1 - \exp(-\lambda_1 t)\right) - \frac{1}{\lambda_2}\left(1 - \exp(-\lambda_2 t)\right)\right]$$

Hay: $N_3 = N_{01} + N_{01}\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}\left[\frac{\exp(-\lambda_2 t)}{\lambda_2} - \frac{\exp(-\lambda_1 t)}{\lambda_1}\right]$.

**Bài 21.**

Các phương trình phóng xạ trong chuỗi:

$Bi^{210} \xrightarrow[\lambda_1]{} Po^{210} + \beta^+$

$Po^{210} \xrightarrow[\lambda_2]{} Pb^{206} + \alpha$

Do đó ta có: Độ phóng xạ $\beta^+$ của chế phẩm $Bi^{210}$:

$H_\beta = \lambda_1 N_0 \exp(-\lambda_1 t)$, $N_0 = \dfrac{m_0 N_A}{\mu}$ là chế phẩm $Bi^{210}$ lúc đầu:

Do đs ta có:

$$H_\beta = \lambda_1 \frac{m_0 N_A}{\mu} \exp(-\lambda_1 t) \approx 0.72 \times 10^{11} \text{ hạt/s.}$$

Tương tự bài 19 ta có: $N_{Po}(t) = N_{01} \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}[\exp(-\lambda_1 t) - \exp(-\lambda_2 t)]$

Do đó ta có độ phóng xạ $\alpha$ của chế phẩm:

$$H_\alpha = \lambda_2 N_{Po} = \frac{m_0 N_A}{\mu} \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}[\exp(-\lambda_1 t) - \exp(-\lambda_2 t)] \approx 1.46 \times 10^{11} \text{ hạt/s.}$$

# XII. NĂNG LƯỢNG HẠT NHÂN VÀ PHƯƠNG TRÌNH PHẢN ỨNG HẠT NHÂN.

**Bài** 1. 1)Phương trình phân rã phóng xạ :

$${}^{212}_{83}Bi \rightarrow {}^{4}_{2}He + {}^{A}_{Z}X$$

Áp dụng các định luật bảo toàn điện tích và bảo toàn số nuclôn , ta có A=212-4=208 ; Z=83-2=81.

Vậy X là hạt nhân tali ${}^{208}_{81}Tl$

2) Năng lượng của phản ứng phân rã phóng xạ :

$$\Delta E = [m(Bi)-m(\alpha)-m(X)]c^2 = 6,35 \text{ MeV}$$

Kí hiệu $W_\alpha$ và $W_X$ là động năng của hạt α và hạt nhân tali , áp dụng định luật bảo toàn năng lượng ta có :

$$m(Bi)c^2 = [m(\alpha)c^2 + W_\alpha] + [m(X)c^2 + W_X]$$

Suy ra $W_\alpha + W_X = \Delta E = 6,35$ MeV (1)

Mặt khác , áp dụng định luật bảo toàn động lượng ta có:

$$m_\alpha \vec{v}_\alpha + m_X \vec{v}_X = 0$$

$=> m_\alpha^2 v_\alpha^2 = m_x^2 v_x^2$

$=> m_\alpha W_\alpha = m_x W_x$ (2)

Từ (1) và (2) ta tìm được :

$$W_\alpha = \frac{m_X}{m_\alpha + m_x}\Delta E = 6,23 \text{ MeV}$$

3. Thực nghiệm lại cho thấy : 70% hạt α có động năng 6,09 MeV . Sở dĩ có sự sai biệt một lượng 6,23-6,09 = 0,14 MeV , đó là vì năng lượng chênh lệch đó đã dung để kích thích hạt nhân tali được tạo thành ,đưa nó lên mức năng lượng cao .Khi hạt nhân tai trở về trạng thái

cơ bản , nó sẽ phát ra một phôtôn , đó là tia γ . Để kiểm chứng dự đoán này , ta hãy tính bước song của phôtôn ứng với độ chênh lệch năng lượng , ta có :

$$Hf=\frac{hc}{\lambda}=0{,}14 \text{ MeV}$$

$$=> \lambda=\frac{hc}{0{,}14.1{,}6.10^{-13}}=8{,}87.10^{-12}\text{m} = 0{,}09 \text{ Å}$$

Trị số này của λ ứng với phôtôn tia γ

**Bài 2.** 1) số nguyên tử chứa trong 1mg rađi bằng

$$\frac{10^{-3}N_A}{226}=\frac{10^{-3}.6{,}02.10^{23}}{226} \text{ nguyên tử}$$

Số nguyên tử rađi trong mẫu đó bị phân rã trong 1s là

$$n_0=\frac{10^{-3}.6{,}02.10^{23}}{226}\,\frac{1}{2300.365.86400}$$

$=>n_0 = 3{,}67.10^7$ nguyên tử

2) Điện tích của tụ điên sau 1 giờ là :

$$Q = CU = 8.10^{-9}.21.1 = 1{,}688.\ 10^{-7}C$$

Điện tích này do các hạt ∝ đi tới bản tụ điện tạo nên . Biết mỗi nguyên tử rađi khi phân rã sẽ phát ra 4 hạt ∝ , nên số hạt ∝ đã tới bản tụ điện trong 1 giờ là :

$$N = 4.n_0.3600 = 5{,}2848.\ 10^{11} \text{ hạt}$$

Tổng điện tích của các hạt ∝ nàt bằng $Q = Nq_\propto$

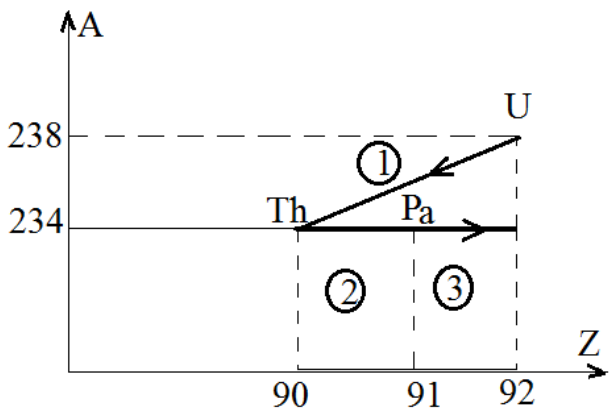
Suy ra điện tích của một hạt ∝ :

$$q_\propto=\frac{Q}{N}=\frac{1{,}688.10^{-7}}{5{,}2848.10^{11}}=3{,}2.10^{-19}\ C$$

**Bài** 3.

1) Trong phân rã 1 , hạt nhân con có Z=90 , giảm 2 đơn vị so với urani , ở trước hạt nhân mẹ 2 ô trong bảng tuần hoàn Menđêlêep , đồng thời có số khối A giảm đi 4 đơn vị . Vậy đó là phóng xạ ∝ . Ta có phương trình :

$$^{238}_{92}U \to {}^{234}_{90}Th + {}^{4}_{2}He \qquad (1)$$



Hình 2.14

Các phân rã 2 và 3 đều có Z tăng lên 1 đơn vị và số khối không đổi nên đều thuộc loại phóng xạ . Hơn nữa , ngoài hạt $\beta^-$(electron) đượnc phát ra , còn xuất hiện các hạt phản notrinô ($^0_0v$)

Vậy ta có phương trình :

Phân rã 2 : $^{234}_{90}Th \to {}^{234}_{91}Pa + {}_{-1}^{0}e + {}^0_0v$ (2)

Phân rã 3 : $^{234}_{91}Pa \to {}^{234}_{92}X + {}_{-1}^{0}e + {}^0_0v$ (3)

Hạt nhân X có Z=92 . Vậy đó là một đồng vị của urani : urani 234 ($^{234}_{92}U$)

Phương trình phân rã (3) có dạng đầy đủ là : $^{234}_{91}Pa \to {}^{234}_{92}U + {}_{-1}^{0}e + {}^0_0v$

2) các hạt nhân ∝ có độnh năng lớn hơn ( 4,195 MeV ) ứng với các hạt thôri sinh ra ở trạng thái không kích thích ( trạng thái mức năng lượng thấp ) . Còn các hạt ∝ có động năng nhỏ (4,147 MeV) lại ứng với hạt nhân thôri sinh ra ở trạng thái kích thích (mức năng lượng cao) . Bởi vì một phần năng lượng của phản ứng dung để kích thích thôri nên động năng của hạt ∝ mới bị giảm .

Khi thôi chuyển từ mức năng lượng cao về mức năng lượng thấp (mức cơ bản) nó sẽ phát ra một phôtôn hf . Năng lượng của phôtôn này có trị số bằng hiệu hai động năng cảu các hạt ∝ , tức là :

$$hf = \frac{hc}{\gamma} = 4{,}195 – 4{,}147 = 0{,}048 \text{ MeV}$$

=> $$\frac{hc}{\gamma} = 0{,}048.1{,}6.10^{-13}\text{J}$$

Từ đó tính được bước song của tia γ

$$\gamma = \frac{hc}{0{,}048.1{,}6.10^{-13}} \approx 2{,}95.10^{-11}\text{m}$$

Hay γ = 0,259 Å

**Bài 4.**

Phương trình phóng xạ:

$Po^{200} \rightarrow Pb^{196} + \alpha$

Theo định luật bảo toàn momen động lượng ta có:

$\vec{p}_{Po} = \vec{p}_{Pb} + \vec{p}_{\alpha} \Rightarrow$

Do khối lượng của hai hạt nhân con tạo thành đều là khá lớn nên vận tốc của nó là rất nhỏ so với vận tốc của ánh sáng trong chân không nên ta có thể áp dụng các công thức phi tương đối tính để giải bài toán này.

$p_{Pb} = p_{\alpha} \Rightarrow$ vận tốc dật lùi của hạt nhân con:

$$v_{Pb} = \frac{p_{Pb}}{M_{Pb}} = \frac{p_{\alpha}}{M_{Pb}}$$

Hay $v_{Pb} = \frac{1}{M_{Pb}}\sqrt{2M_{\alpha}T_{\alpha}} \approx 3.4\times10^5 m/s$;

$$\frac{T_{Pb}}{T_{\alpha}} = \frac{\dfrac{p_{Pb}^2}{2M_{Pb}}}{\dfrac{p_{\alpha}^2}{2M_{\alpha}}} = \frac{M_{\alpha}}{M_{Pb}}$$

Hay $\frac{T_{Pb}}{T_{\alpha}} = \frac{M_{\alpha}}{M_{Pb}}$ (*)

Theo định luật bảo toàn năng lượng ta có:

$E = T_{Pb} + T_{\alpha}$ (**)

Từ (*) và (**) ta có:

Năng lượng toàn phần của phản ứng:

$$E = \frac{M_{\alpha} + M_{Pb}}{M_{Pb}}T_{\alpha}$$

$$T_{Pb} = \frac{M_{\alpha}}{M_{\alpha} + M_{Pb}}E \approx \frac{M_{\alpha}}{M_{Po}}E \Rightarrow \eta = \frac{T_{Pb}}{E} = \frac{M_{\alpha}}{M_{Po}} = 0.020.$$

**Bài 5.**

Phương trình phóng xạ của hạt nhân $Po^{210}$:

$Po^{210} \to Pb^{206} + \alpha$

Do tất cả các hạt nhân con đều được tạo thành ở trạng thái cơ bản nên năng lượng sinh ra do các phản ứng bằng tổng động năng của các hạt nhân con tạo thành sau phản ứng. Mặt khác do các hạt nhân con tạo thành sau phản ứng đều có khối lượng khá lớn và năng lượng mà phản ứng tỏa ra là rất nhỏ so với năng lượng nghỉ của mỗi hạt nên ta sẽ áp dụng các công thức phi tương đối tính để giải bài toán này.

Áp dụng kết quả bài 5.183 ta có: $\frac{T_{Pb}}{T_\alpha} = \frac{M_\alpha}{M_{Pb}}$ $\Rightarrow$ Tỷ số giữa động năng của hạt $\alpha$ và năng lượng toàn phần sinh ra sau mỗi phản ứng tỏa ra:

$$\frac{T_\alpha}{E} = \frac{M_{Pb}}{M_{Pb} + M_\alpha} \approx \frac{M_{Pb}}{M_{Po}} \Rightarrow E = \frac{M_{Po}}{M_{Pb}} T_\alpha .$$

Lượng Polonium đã phóng xạ ở thời điểm $t$:

$N_{px} = N_0(1 - \exp(-\lambda t))$ $\Rightarrow$ Nhiệt lượng tỏa ra do sự phóng xạ $\alpha$ của hạt nhân nguyên tử Polonium:

$$Q = N_{Px}E = N_0 \frac{M_{Po}}{M_{Pb}}[1 - \exp(-\lambda t)]T_\alpha$$

Thay số ta được:

$Q = 1.6MJ$

**Bài 6.**

Động năng $E_0 = 7.0MeV$ là rất nhỏ so với năng lượng nghỉ của hạt $\alpha$ (cỡ $4000MeV$) vì vậy nên ta coi rằng chuyển động của hạt $\alpha$ trong trường hợp này vẫn tuân theo các quy tắc phi tương đối tính, nghĩa là:

a) $v_0 = \sqrt{2ME_0}$ , trong đó: $M$ là khối lượng hạt $\alpha$ .

$\Rightarrow$ quãng đường bay trung bình của hạt $\alpha$ kể trên:

$R = 0.98 \times 10^{-27} v_0^3 = 0.98 \times 10^{-27} \sqrt{(2ME_0)^3} \approx 6.1(cm)$ .

b)Giả sử năng lượng trung bình còn lại của $\alpha$ sau khi vượt một quãng đường $l$ là $E$ ta có:

$\frac{R - l}{R} = \sqrt{\left(\frac{E}{E_0}\right)^3}$ từ đó ta có:

$$E = E_0 \sqrt[3]{\left(\frac{R - l}{R}\right)^2}$$

Để tạo ra một cặp Ion cần tiêu tốn một năng lượng $\Delta E$ nào đó. Do vậy số cặp Ion trung bình mà hạt $\alpha$ này sinh ra sau khi vượt một đoạn đường $l$ là:

$$N_l = \frac{E_0 - E}{\Delta E} = \left[1 - \sqrt[3]{\left(\frac{R-l}{R}\right)^2}\right]\frac{E_0}{\Delta E}$$

**Bài** 7. Phản ứng hạt nhân :

$${}^4_2He + {}^{14}_7N \rightarrow {}^1_1H + {}^{17}_8O$$

Khi hạt proton bay vào từ trường : $\vec{v}_p = \vec{v}_\parallel + \vec{v}_\perp$

Trong đó : $v_\parallel = v_p \sin\propto$ ; $v_\perp = v_p \cos\propto$

Lực Loren là lực hướng tâm : $\frac{m_p {v^2}_\parallel}{r} = q_p v_p B$ (1)

Bước của đường xoắn ốc : $h = v_1 \frac{2\pi r}{v_\parallel} = \frac{2\pi r \cos\propto}{\sin\propto}$ (2)

$=>tg\propto = \frac{2\pi r}{h} = \sqrt{3} => \propto = 60^0$ (*)

$=>g(\vec{v}_p,\vec{v}_x) = \beta = 30^0$

Với $\propto = 60^0$ và (1) => $v_p = \frac{q_p v_p B}{m_p \sin^2\propto} = 2.10^{-7}$m/s

$=>K_p = 2{,}07$ MeV

+ xét phản ưng hạt nhân :

Định luật bảo toàn năng lượng : $K + \Delta E = K_p + K_X$

$=>K_\propto = K_X + 3{,}28$ (3)

Định luật bảo toàn động lượng : $\vec{p}_\propto = \vec{p}_p + p_X$

$=>m_\propto K_\propto = m_X K_X + m_p K_p + \sqrt{m_X K_X m_p P_p}\cos 30^0$

$=>4K_\propto = 2{,}07 + 17K_X + 10{,}27\sqrt{K_X}$ (4)

Từ (3) và (4) => $\sqrt{K_X} = 0{,}608$ => $K_X = 0{,}37$ MeV

Do đó $K_\propto = 3{,}65$ MeV

$=>v_\propto = \sqrt{\frac{2K_\propto}{m_\propto}} = \sqrt{\frac{2.3{,}65}{4.931}}3.10^8 \approx 1{,}33.10^7$ m/s

Điện thế do vòng dây tròn tích điện đều gây ra ở 1 điểm M trên trục : $V_M = \frac{kQ}{\sqrt{R^2+l^2}}$

(chia nhỏ vòng dây thành n phần mỗi phần có điện tích $\Delta Q = \frac{Q}{n}$ để có thể coi $\Delta Q$ là điện tích điểm)

$=>V_M = n\frac{k\Delta Q}{\sqrt{R^2+l^2}} = \frac{kQ}{\sqrt{R^2+l^2}}$ )

Từ định lí động năng :

$0 - k_X = q_X(\frac{kQ}{\sqrt{R^2+l^2}} - \frac{kQ}{R})$

$Q = \frac{k_X}{kq_X(\frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{R^2+l^2}})}$

Thay số ta được : $Q \approx 7{,}7\ \mu C$

**Bài** 8.

1) ${}^{235}_{92}U + {}^1_0n \rightarrow {}^A_{54}X + {}^{94}_ZY + 2({}^1_0n)$

Áp dụng định luật bảo toàn điện tích và bảo toàn số nuclôn ta có :

A= 236 – (94 + 2) = 140

Z= 92 – 54 = 38

Hạt X có Z = 54 là hạt nhân xênôn $^{140}_{54}Xe$

Hạt Y có Z = 38 là ạt nhân strongti $^{94}_{38}Sr$

Phương trình phản ứng viết lại đầ đủ là

$$^{235}_{92}U + ^{1}_{0}n \rightarrow ^{140}_{54}Xe + ^{94}_{38}Sr + 2(^{1}_{0}n)$$

Năng lượng toả ra :

$\Delta E = \Delta m.c^2 = 0{,}00445.c^2 \approx 6{,}648.10^{-13}$ J

Động năng của 1 nơtrôn thứ cấp :

$E_d = \frac{\Delta E}{2} = 3{,}323.10^{-13}$ J

Suy ra vận tốc của nơtrôn thứ cấp :

$V_n = \sqrt{\frac{2E_d}{m_n}} = 2.10^7$ m/s

2) sự va chạm của nơtrôn với nguyên tử cacbon không làm biến đổi các hạt nên khối lượng các hạt được bảo toàn . Bởi vì năng lượng được bảo toàn nên động năngcũng được bảo toàn . Ta có :

$$\frac{m_n v_n^2}{2} = \frac{m_c v_c^2}{2} + \frac{m_n v_n'^2}{2} \qquad (1)$$

Với $v_c$ và $v'_n$ là vận tốc của hạt cacbon và hạt nơtrôn sau va chạm

áp dụng định luật bảo toàn động lượng ( các hạt sau va chạm có vận tốc cùng phương ) :

$$m_n v_n = m_c v_c + m_n v'_n \qquad (2)$$

biết $\frac{m_c}{m_n} = 12$ và các vectơ $\vec{v_c}$ , $\vec{v_n}$ ngược hướng , từ (1) và (2) tìm được :

$v_c = \frac{v_c}{6{,}5} \approx 3{,}08.10^6$ m/s

vận tốc này của nơtrôn thứ cấp sau 1 lần va chạm với nguyên tử cacbon , vẫn còn là quá lớn để tạo nên sự phân hạch của urano sau khi hấp thụ nơtrôn này . Tuy nhiên , nhờ sự va chạm nhiều lần lien tiếp của nơtrôn thứ cấp với các nguyên tử cacbon , nên cuối cùng vận tốc của nơtrôn này giảm đi rất nhiều và ta có các nơtrôn chậm có thể gây ra sự phân hạch.

3a) phản ứng hấp thụ nơtrôn châm của U238:

$$^{238}_{92}U + ^{1}_{0}n \rightarrow ^{239}_{92}U$$

Kết quả là ta thu được đồng vị không bền urani 239

Áp dụng định lật bảo toàn động lượng :

$m_n v_n = (m_n + m_U) v_U$

=> $v_U = \frac{m_n}{m_n + m_U} v_n$

=> $v_U \approx \frac{1}{239} v_n = \frac{2000}{239} \approx 8{,}4$ m/s

b) phản ứng phân rã của urani 239:

$$^{239}_{92}U \rightarrow ^{239}_{94}Pu + 2(^{A}_{Z}X)$$

Áp dụng định luật bảo toàn điện tích và bảo toàn số nuclôn ta có : A=0 ; Z=1 . Vậy hạt X la $\beta^-$(electron) . Như vậy U239 có tín phóng xạ β:

Phương trình phản ứng đầy đủ :

$$^{239}_{92}U \rightarrow ^{239}_{94}Pu + 2(^{0}_{-1}e) + (^{0}_{0}v)$$

**Bài** 9.
1) phương trình phóng xạ $\beta^-$ có phát ra hạt $\beta^-$ ( hạt positron) và notrinô . Phương trình phân rã phóng xạ của oxi 14 :

$${}^{14}_{8}O \to {}^{0}_{-1}e + {}^{A}_{Z}X + {}^{0}_{0}v$$

Áp dụng định luật bảo toàn điện tích và bảo toàn số nuclôn ta co : A= 14 ; Z = 7
Như vậy hạt nhân X chính là hạt nhân nitơ ${}^{14}_{7}Ni$
Phương trình đầy đủ của phản ứng phân rã :

$${}^{14}_{8}O \to {}^{0}_{-1}e + {}^{14}_{7}Ni + {}^{0}_{0}v$$

2) Nếu coi như phản ứng không kèm theo sự phát ra hạt notrinô thi động năng của hạt $\beta^-$ là cực đại . Bởi vì , theo đề bài , động năng của hạt nhân nitơ không đáng kể , nên áp dụng định luật bảo toàn năng lượng , ta tìm được động năng cực đại $E_{đmax}$ của hạt $\beta^-$:

$$E_{đmax} = \Delta E = [m(O) - m(N) - 2m(\beta^+)]c^2$$

=> $E_{đmax} = 4{,}598$ MeV

Vận tốc tương ứng của hạt $\beta^-$ là :

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2E_{dmax}}{m(\beta^+)}} = 1{,}3.10^9 \text{ m/s}$$

ta thấy $v_{max} > c$ (=$3.10^8$ m/s) , đó là 1 điều vô lí không thể chấp nhận được
điều này co thể giải thích được một cách dễ dàng . Đó là vì , với vận tốc rất lớn , có thể so sánh được với vận tốc ánh sang thì ta phải sử dụng các công thức của cơ học tương đối ; theo đó , động năng của hạt , có vận tốc v và có khối lượng nghỉ $m_0$ , được tính theo công thức :

$$E_đ = (\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}})c^2 = (\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}})m_0c^2$$

($m_0c^2 = E_0$ là động năng nghỉ của hạt : $\beta = \frac{v}{c}$
Áp dụng vào trường hợp hạt $\beta^-$ , theo đề bài $m_0 = 0{,}511$ MeV/$c^2$ , ta có

$E_đ = (\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}})$ (0,511 MeV/$c^2$).$c^2$ = 4,592MeV

=> $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1 + \frac{4{,}958}{0{,}511} \approx 10$

=> $\beta = \frac{v}{c} = \sqrt{0{,}99} \approx 0{,}995$

Vậy , vận tốc cực đại của hạt $\beta^-$ bằng 99,5% vận tốc ánh sang c
3) khi trong sự phân rã có phat tia $\gamma$ , thì 1 phần động năng của positron đã bị chuyển thành năng lượng của phôtôn $\gamma$ . Phôtôn $\gamma$ này được phát ra do hạt nhân con của nitơ sinh ra ở trạng thái kích thích có năng lượng cao . Khi chuyển về trạng thái cơ bản hạt nhân nitơ phát năng lượng ở dưới dạng phôtôn . Như vậy , độ chênh lệch giữa 2 mức năng lượng là:

$\Delta E = hf = \frac{hc}{\lambda}$ với $\lambda = 5{,}364.10^{-13}$m

=> $\Delta E = 3{,}702.10^{-13}$ J = 2,314MeV

Động năng cực đại của hạt $\beta^-$ trong trường hợp này chỉ còn :

$$E_{đmax} = 4{,}952 - 2{,}314 = 2{,}284 \text{ MeV}$$

**Bài 10. a)** Ta có $\Delta E = (m_U + m_n - m_{Mo} - m_{La} - 2m_n)c^2 = (234{,}99 - 94{,}88 - 138{,}87 - 1{,}01)\frac{931MeV}{c^2}.c^2$

= 214,13 MeV = 214,13. 1,6.$10^{-13}$ = 342,608.$10^{-13}$ J ≈3,43.$10^{-11}$ J

**b)** - Trong 1g U235 có số hạt U235 bằng : $N = \frac{m}{A}N_A = \frac{1}{235}.6,023.10^{23}$ hạt

- Năng lượng toả ra khi 1g U235 phân hạch hết bằng : $E = N.\Delta E = \frac{1}{235}.6,023.10^{23}.3,43.10^{-11} = 8,79.10^{10}$ J

- Lượng năng lượng này bằng K (kWh) : $K = \frac{8,79.10^{10}}{3,6.10^{6}} \approx 2,44.10^{4}$ J

- Lượng than cần đốt để thu được lượng năng lượng kể trên bằng :

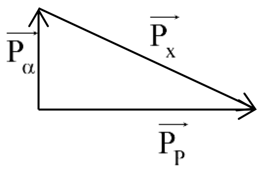
$m = \frac{E}{q} = \frac{8,79.10^{10}}{2,93.10^{7}} = 3.10^{3}$ kg

**c)** - Sự cố tại một số lò phản ứng hạt nhân của nhà máy điện nguyên tử ở Fukushima do thảm hoạ động đất và sóng thần đang dấy lên mối lo ngại chung về sự rò rỉ phóng xạ. Tuy nhiên điều đáng lo ngại có liên quan đến hiện tượng phân hạch hạt nhân là nếu không hạ được nhiệt độ của lò thì các thanh nhiên liệu có chứa U235 đã được làm giàu sẽ tan chảy và nếu các khối tan chảy nhập với nhau đến vượt khối lượng tới hạn thì sẽ là một trong những điều kiện để phản ứng phân hạch dây truyền xảy ra ở mức vượt hạn (s > 1).

- Khối lượng tới hạn phụ thuộc vào tỉ lệ U235 được làm giàu. Nhưng tỉ lệ U235 được làm giàu dùng làm nhiên liệu của lò phản ứng thường không cao, nên để vượt khối lượng tới hạn mà gây nên phản ứng vượt hạn là không dễ xảy ra.

**Bài 11.** Theo định luật bảo toàn động lượng ta có:

$$\vec{p}_p = \vec{p}_\alpha + \vec{p}_X .$$




Vì $\vec{v}_p \perp \vec{v}_\alpha$ ⇨ $\vec{p}_p \perp \vec{p}_\alpha$ ⇨ $p_X^2 = p_p^2 + p_\alpha^2$

⇨ $2m_X\frac{1}{2}m_Xv_X^2 = 2m_p\frac{1}{2}m_pv_X^2 + 2m_\alpha\frac{1}{2}m_\alpha v_X^2$

hay $2m_XW_{đX} = 2m_pW_{đp} + 2m_\alpha W_{đ\alpha}$

⇨ $W_{đX} = \frac{W_{đp} + 4W_{đ\alpha}}{6}$ = 3,575 MeV.

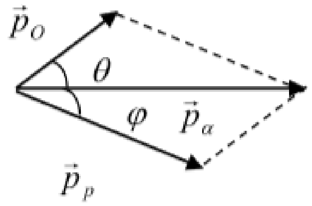
Theo định luật bảo toàn năng lượng ta có:

$(m_p + m_{Be})c^2 + W_{đp} = (m_\alpha + m_X)c^2 + W_{đ\alpha} + W_{đX}$

Năng lượng tỏa ra:

$\Delta W = (m_p + m_{Be} - m_\alpha - m_X)c^2 = W_{đ\alpha} + W_{đX} - W_{đp}$ = 2,125 MeV.

**Bài 12.**




Phương trình phản ứng:

$N^{14} + \alpha \to p + O^{17}$

Ta giả sử rằng ban đầu hạt nhân $N^{14}$ đứng yên:

Theo định luật bảo toàn động lượng ta có:

$\vec{p}_\alpha = \vec{p}_O + \vec{p}_p \Rightarrow$

$$\begin{cases} p_O \sin\theta = p_p \sin\varphi \\ p_O \cos\theta + p_p \cos\varphi = p_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{M_O T_O}\sin\theta = \sqrt{M_p T_p}\sin\varphi \\ \sqrt{M_O T_O}\cos\theta = \sqrt{M_\alpha T_\alpha} - \sqrt{M_p T_p}\cos\varphi \end{cases} \quad (*)$$

Bình phương hai vế từng phương trình của (*) rồi cộng lại ta được:

$$M_O T_O = M_p T_p + M_\alpha T_\alpha - 2\sqrt{M_p M_\alpha T_p T_\alpha}\cos\varphi \Rightarrow$$

$$M_O T_O = M_p T_p + M_\alpha T_\alpha - 2\sqrt{M_p M_\alpha T_p T_\alpha}\cos\varphi \Rightarrow$$

$$T_O = \frac{1}{M_O}\left(M_p T_p + M_\alpha T_\alpha - 2\sqrt{M_p M_\alpha T_p T_\alpha}\cos\varphi\right)$$

Từ định luật bảo toàn năng lượng ta có, năng lượng của phản ứng:

$$E = T_p + T_O - T_\alpha$$

$$\Rightarrow E = T_p + \frac{1}{M_O}\left(M_p T_p + M_\alpha T_\alpha - 2\sqrt{M_p M_\alpha T_p T_\alpha}\cos\varphi\right) - T_\alpha$$

Hay: $$E = \left(1 + \frac{M_p}{M_O}\right)T_p - \left(1 - \frac{M_\alpha}{M_O}\right)T_\alpha - \frac{2}{M_O}\sqrt{M_p M_\alpha T_p T_\alpha}\cos\varphi$$

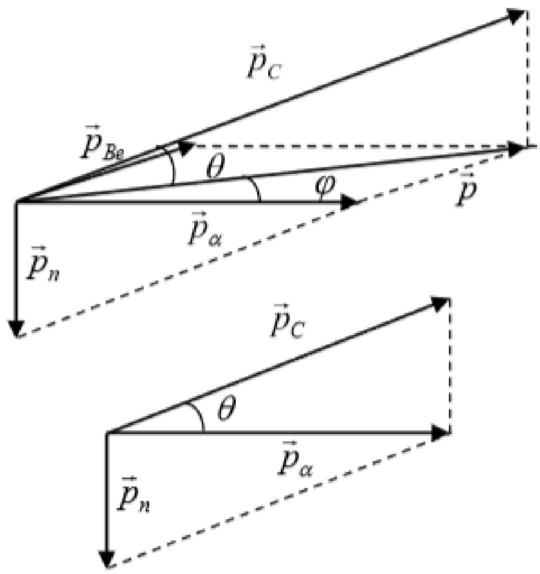
Thay số ta được:

$E \approx -1.2 MeV$ .

**Bài 13.**

Phương trình phản ứng: $Be^9 + \alpha \to n + C^{12}$;

Ta giả sử rằng các thông số của bài toán đã được thể hiện trên hình vẽ. Ta thấy rằng nếu ban đầu xung lượng của hạt nhân $Be^9$ khác không thì bài toán sẽ rất phức tạp. Ta sẽ tìm cách giải bài toán trong trường hợp ban đầu hạt nhân $Be^9$ đứng yên.




Xung lượng toàn phần của hệ:

$\vec{p} = \vec{p}_\alpha$

Theo định luật bảo toàn xung lượng và định luật bảo toàn năng lượng ta có:

$$\begin{cases} \vec{p}_C + \vec{p}_n = \vec{p}_\alpha \\ T_C + T_n = T_\alpha + Q \end{cases} \quad (*)$$

Vì $\vec{p}_n$ vuông góc với $\vec{p}_\alpha$ nên ta có:

$$p_C^2 = p_n^2 + p_\alpha^2 \iff M_C T_C = M_n T_n + M_\alpha T_\alpha \ (**)$$

Từ (*) và (**) ta có:

$$M_C(T_\alpha + Q - T_n) = M_n T_n + M_\alpha T_\alpha$$

Hay: $T_n = \dfrac{M_C Q + (M_C - M_\alpha)T_\alpha}{M_C + M_\alpha}$

Vì $T_\alpha = T$ ta có: $T_n = \dfrac{Q + \left(1 - \dfrac{M_\alpha}{M_C}\right)T}{1 + \dfrac{M_\alpha}{M_C}}$;

Thay số ta được: $T_n = 8.5MeV$.

**Bài 14 .** Trước khi giải bài toán này chúng ta hãy tìm mối liên hệ giữa các động năng $E_k$ và $E_{k*}$ của một hệ chất điểm trong hệ phòng thí nghiệm và trong hệ khối tâm. Theo công thức cộng vận tốc thì đối với chất điểm thứ i của hệ ta có $\vec{v}_i = \vec{V} + \vec{v}_{i*}$ , ở đây $\vec{V}$ là vận tốc khối tâm của hệ. Khi đó động năng của hệ trong hệ phòng thí nghiệm bằng:

$$E_k = \sum \frac{m_i \vec{v}_i^2}{2} = \sum \frac{m_i (\vec{V} + \vec{v}_{i*})^2}{2} = \sum \frac{m_i \vec{V}^2}{2} + \sum \frac{m_i \vec{v}_{i*}^2}{2} + \vec{V} \sum m_i \vec{v}_{i*}$$

Tổng $\sum m_i \vec{v}_{i*} = 0$, do vận tốc khối tâm trong hệ khối tâm thì phải bằng không. Như vậy:

$$E_k = \frac{MV^2}{2} + E_{k*}. \text{ ở đây } M = \sum m_i$$

Vậy động năng của hệ trong hệ phòng thí nghiệm bằng động năng của hệ trong hệ khối tâm cộng với $\dfrac{MV^2}{2}$.

Bây giờ ta sẽ bắt tay vào việc giải Bài toán 3. Kí hiệu động lượng của hạt $\alpha$ trước khi va chạm là $\vec{p}_0$. Động năng khối tâm của hệ

$$\frac{MV^2}{2} = \frac{p_0^2}{2(m_{He} + m_N)} = \frac{m_{He}}{m_{He} + m_N} E_{ng}$$

không thay đổi trong quá trình phản ứng, vì động lượng của một hệ kín được bảo toàn và do đó năng lượng này không góp phần vào các biến đổi hạt nhân. Như vậy năng lượng ngưỡng phải thoả mãn điều kiện:

$$E_{ng} = Q + \frac{m_{He}}{m_{He} + m_N} E_{ng}$$

Từ đó

$$E_{ng} = \frac{m_{He} + m_N}{m_N} Q = 1{,}45 MeV$$

Như vậy, chúng ta nhận thấy rằng động năng hạt tới nhỏ nhất khi các hạt tạo thành sau phản ứng đứng yên trong hệ khối tâm.

**Bài 15**. 1.a. Ký hiệu $\vec{v_b}$ , $\vec{v_B}$ và $\vec{u_b}$ , $\vec{u_B}$ là vận tốc các hạt b và B đối với hệ quy chiếu phòng thí nghiệm và đối với hệ quy chiếu gắn với khối tâm G của hệ hạt (b, B). Ta có:

$$\vec{v}_G = \frac{m_b\vec{v}_b + m_B\vec{v}_B}{m_b + m_B}\ ;\ \vec{v}_b = \vec{u}_b + \vec{v}_G\ ;\ \vec{v}_B = \vec{u}_B + \vec{v}_G$$

Từ đó: $W_0 = \frac{1}{2}\left[m_b(\vec{u}_b + \vec{v}_G)(\vec{u}_b + \vec{v}_G) + m_B(\vec{u}_B + \vec{v}_G)(\vec{u}_B + \vec{v}_G)\right]$

$$= \frac{1}{2}\left[(m_b u_b^2 + m_B u_B^2) + v_G^2(m_b + m_B) + 2\overrightarrow{v_G}(m_b\vec{u}_b + m_B\vec{u}_B)\right]$$

Số hạng: $(m_b\vec{u}_b + m_B\vec{u}_B)$ là tổng động lượng của hệ (b, B) đối với hệ quy chiếu gắn với G, nên bằng 0.

Do đó, ta có:

$$W_0 = \frac{1}{2}\left[(m_b u_b^2 + m_B u_B^2) + (m_b + m_B)v_G^2\right] = W_G + \frac{1}{2}(m_b + m_B)v_G^2 \quad (1)$$

b. Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng:

$$W_a + (m_a + m_A)c^2 = (m_b + m_B)c^2 + W_0$$

$$\rightarrow W_a = W + W_0$$

Vì W có giá trị xác định nên ta có:

$$W_{a\min} = W + W_{0\min} \qquad (2)$$

Theo (1): $W_0$ có giá trị nhỏ nhất khi $W_G$ triệt tiêu, khi đó:

$W_{0\min} = \frac{1}{2}v_G^2(m_b + m_B)$ và hai hạt b và B đứng yên trong hệ quy chiếu gắn với G, hay $v_b = v_B = v_G$.

Để tính $U_G$, áp dụng định luật bảo toàn động lượng:

$$m_a v_{a\min} = m_b v_b + m_B v_B = (m_b + m_B)v_G$$

$$\rightarrow v_G = \frac{m_a v_{a\min}}{m_b + m_B} \qquad (3)$$

$$\rightarrow v_b = v_B = \frac{m_a v_{a\min}}{m_b + m_B}$$

Từ đó: $W_{0\min} = \frac{1}{2}U_G^2(m_b + m_B) = \frac{1}{2}m_a v_{a\min}^2 \frac{m_a}{m_b + m_B} = W_{a\min}\frac{m_a}{m_b + m_B}$

Thay vào (2):

$$W_{a\min} = W + W_{a\min}\frac{m_a}{m_b + m_B}$$

Hay:
$$W_{ng} = W + W_{ng}\frac{m_a}{m_b + m_B} \qquad (4)$$
$$\rightarrow W_{ng} = \left(\frac{m_b + m_B}{m_b + m_B - m_a}\right)W$$

Theo đề bài: $m_b + m_B \approx m_a + m_A$, và $m_b + m_B - m_a \approx m_A$,

Nên một cách gần đúng, ta có: $W_{ng} = \left(\dfrac{m_a + m_A}{m_A}\right)W$ (4.a)

2. a. Thay số ta có:

Với phản ứng (1): $W_1 = 13,44MeV; W_{ng1} = 14,28MeV$

Với phản ứng (2): $W_2 = 5,23MeV; W_{ng2} = 5,26MeV$

b. Ta có: $W_C = k\dfrac{(Ze).e}{r}$ , trong đó $r = R + R_0 = R_0(A^{1/3} + 1)$ ; $k = 9.10^9$ đvSI

Với phản ứng 1: Z = 8, A = 16: $W_{C1} = 1,463.10^{-13} J = 2,34MeV$

Với phản ứng 2: Z = 83, A = 209: $W_{C2} = 7,706.10^{-13} J = 12,33MeV$

Nhận xét: Với phản ứng (1), ta thấy $W_{ng1} \gg W_{C1}$, nên phản ứng (2) ít có cơ may xảy ra ở năng lượng ngưỡng vì hạt proton không thể lại gần hạt nhân ${}^{209}_{83}Bi$ .

**Bài 16**. 1. áp dụng định luật bảo toàn điện tích và bảo toàn số nuclôn tìm được: A = 95; Z = 53 Năng lượng tỏa ra:

$$\Delta E = \Delta mc^2 = 0,006675u.c^2$$

Động năng của mỗi nơtron thứ cấp

$$E_d = \frac{\Delta E}{3} = \frac{0,00675u.c^2}{3} = 3,352.10^{-13} J$$

Vận tốc của nơtron thứ cấp :

$v_n = \sqrt{\dfrac{2E_d}{m_n}}$ với $m_n$=1,008665 u

$$\Rightarrow v_n \approx 2,00.10^7 m/s$$

2. Trong mỗi va chạm của nơtron với một nguyên tử cácbon:

$$m_n v_n = m_c v_c - m_n v_n'$$

(vì sau va chạm các hạt chuyển động cùng phương)

$$\frac{m_n v_n^2}{2} = \frac{m_c v_c^2}{2} + \frac{m_n v'^2_n}{2}$$

Với: $\dfrac{m_c}{m_n} \approx 12$ tìm được: $v_n' = \dfrac{11}{13} v_n$

Giả sử sau N lần va chạm, nơ tron thứ cấp trở thành nơ tron nhiệt có năng lượng cỡ $k_BT_0 \approx$ 0,026 eV ($k_B$= $1,381.10^{-23}J.K^{-1}$); notron nhiệt có vận tốc :

$$v_0 = \sqrt{\frac{2.0,026.1,6.10^{-19}}{1,008665.1,66.10^{-27}}} \approx 2,23.10^3 m/s$$

Ta có:

$$\left(\frac{11}{13}\right)^N v_n = v_0$$

Rút ra $$N = \frac{\ln v_n - \ln v_0}{\ln 13 - \ln 11} \approx 55$$

3a. $^{238}_{92}U + ^1_0n \rightarrow ^{239}_{92}U$

áp dụng định luật bảo toàn động lượng, đồng vị urani 239 không bền có vận tốc:

$$v \approx \frac{m_n}{m_n + m_u} v_0 \approx 9,33 m/s$$

3b. Phản ứng phân rã của urani 239

$$^{239}_{92}U \rightarrow ^{239}_{94}P_u + 2(^A_ZX)$$

áp dụng định luật bảo toàn điện tích và bảo toàn số nuclon, ta có:

A = 0; Z = - 1. Vậy hạt X là electron, nghĩa là U239 có tính phóng xạ $\beta^-$. Do đó phương trình phản ứng đầy đủ là:

$$^{239}_{92}U \rightarrow ^{239}_{94}Pu + 2(^0_{-1}e) + 2(^0_0\bar{\nu})$$

với $\nu$ là phản notrinô.

Động năng cực đại của electron:

$$2E_{d\,max} = \Delta E = [m(U) + m_n - m(Pu) - 2m_e]c^2$$

$$E_{d\,max} = 3,001.10^{-13} J$$

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2E_{d\,max}}{m_e}} \approx 8,13.10^8 m/s > c$$

$\Rightarrow$ **vô lý**!

Vì với vận tốc lớn phải áp dụng thuyết tương đối:

$$E_d = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)m_ec^2 \text{ với } \beta = \frac{v}{c}$$

Thay số rút ra

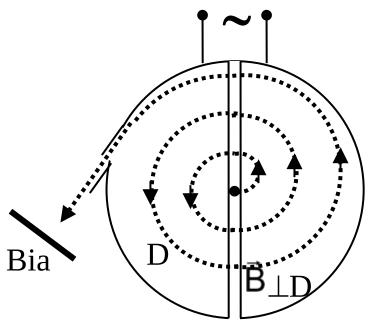
$$\beta = 0,7335$$

$$v \approx 2,2.10^8 m/s < c$$

**Bài 17 .** 1. Trong lòng D chỉ có từ trường tác dụng, lực Lorenxơ lên hạt $\vec{F} = 2e\vec{v} \wedge \vec{B}$, $e > 0$ là điện tích nguyên tố.

Lực Lorenxơ $\vec{F} \perp \vec{v}$ nên là lực hướng tâm $\frac{m_\alpha v^2}{R} = 2evB$

Suy ra quỹ đạo của hạt α là nửa vòng tròn, bán kính $R=\frac{m_\alpha v}{2eB}$ (1).




$\vec{B}$ hướng từ phía trước ra phía sau (đi vào) mặt phẳng hình vẽ.

2. Hạt α đi được một vòng thì $U$ phải đổi chiều 2 lần, tức là chu kì chuyển động của hạt α và chu kì đổi chiều của U phải bằng nhau

$$T=\frac{2\pi R}{v}=\frac{\pi m_\alpha}{eB}\rightarrow f=\frac{1}{T}=\frac{eB}{\pi m_\alpha},\quad \left(\omega_\alpha=2\pi f=\frac{2eB}{m_\alpha}\right)$$

(2).

$$f=\frac{eB}{\pi m_\alpha}=\frac{1,6.10^{-19}.1}{3,14.6,64.10^{-27}}\approx 7,67MHz$$

Cứ mỗi một lần đi qua khe, hạt α lại thu thêm được một động năng bằng $2eU$. Như vậy nếu hạt α qua khe lần thứ n và đi trên nửa vòng tròn n, động năng của hạt α tăng thêm một lượng $2neU$. Động năng ban đầu của hạt là $K_0=\frac{1}{2}m_\alpha v_0^2$. Như vậy động năng của hạt α khi đi trên nửa vòng tròn n là $K=K_0+2neU=\frac{1}{2}m_\alpha v_0^2+2neU=\frac{1}{2}m_\alpha v_n^2$. Vận tốc của hạt α khi đi trên nửa vòng tròn n là

$$v_n=\sqrt{v_0^2+\frac{4neU}{m_\alpha}} \quad (3).$$

Theo (1) bán kính của nửa vòng tròn n là

$$R_n=\frac{m_\alpha v_n}{2eB}=\frac{m_\alpha\sqrt{v_0^2+\frac{4neU}{m_\alpha}}}{2eB} \quad (4)$$

Từ (4) suy ra $n=\frac{m_\alpha}{4eU}\left[\left(\frac{2eBR_n}{m_\alpha}\right)^2-v_0^2\right]=\frac{6,64.10^{-27}}{4.1,6.10^{-19}.2.10^5}\left[\left(\frac{2.1,6.10^{-19}.1.0,5}{6,64.10^{-27}}\right)^2-10^{14}\right]\approx 24$ lượt

Số vòng mà hạt α đã chuyển động là ≈ 12.

Từ (3) suy ra sau 12 vòng, vận tốc của hạt α là $v\approx 2,4.10^7 m/s$.

3a. Khi vận tốc của hạt tăng, do hiệu ứng tương đối tính khối lượng của hạt α tăng theo hệ thức Einstein $m=\frac{m_\alpha}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$, nên tốc độ góc của nó theo (2) giảm. Thành thử nếu tần số f của U giữ không đổi thì hạt α đến khe chậm hơn trước, đáng lẽ vào lúc tăng tốc thì lại đi ngược chiều điện trường và sẽ bị hãm.

3b. $\omega_\alpha=\frac{2eB}{m}=\frac{2eB}{m_\alpha}\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}=2\pi f\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$

3c. $R_{max}=\frac{mv}{2eB}=\frac{m_\alpha v}{2eB\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}=\frac{6,64.10^{-27}.10^8}{2.1,6.10^{-19}.1.\sqrt{1-\left(\frac{10^8}{3.10^8}\right)^2}}\approx 2,2m.$

**Bài 18 (APHO 2000)**

1.-Từ năng lượng Prôtôn ta suy ra vận tốc Prôtôn bé nên động năng và động lượng phải tính theo CH cổ điển.

- Nếu quan quan niệm là bức xạ thì động năng và động lượng phải tính theo CHTĐT.

1.Nếu bức xạ phát ra là photon ta có phương trình phản ứng

${}_2^4\alpha+{}_4^9Be\rightarrow{}_6^{13}C+\gamma$

Photon va chạm đàn hồi với Proton. Gọi $p_\gamma, p_{\gamma'}$ là động lượng trước và sau va chạm của photon. Gọi p' là động lượng proton sau va cham $p'=m_pv$

Bảo toàn động lượng ta có $\overrightarrow{p_\gamma}=\overrightarrow{p_{\gamma'}}+\overrightarrow{p'}$

p' cực đại khi va chạm trực diện và photon phải bật ngược lại hướng cũ.

Ta lấy chiều dương là chiều của photon tới: $p_\gamma=-p_{\gamma'}+p'=-p_{\gamma'}+m_pv$ (1)

Bảo toàn năng lượng trong phản ứng $p_\gamma c=p_{\gamma'}c+\frac{m_p}{2}v^2$ ( cổ điển) (2)

Hoặc tương đối tính thì $p_\gamma c=p_{\gamma'}c+\left(\frac{m_p}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-m_p\right)c^2$ (2')

*Nếu giải theo Cổ điển $\frac{m_p}{2}v^2$=5,7MeV

$\frac{m_pc^2}{2}\frac{v^2}{c^2}=5,7Mev\rightarrow\frac{938\frac{MeV}{c^2}}{2}\frac{v^2}{c^2}=5,7Mev\rightarrow v=0,11c$, ta suy ra được v=0,11c

Khi đó động lương proton là $m_pv=m_pc^2\frac{v}{c^2}=938MeV\frac{0,11c}{c^2}=102\frac{MeV}{c}$

Thay vào (1) ta được $p_\gamma+p_{\gamma'}=102\frac{MeV}{c}$ (1)'

Và từ (2) $p_\gamma c-p_{\gamma'}c=\frac{m_p}{2}v^2=5,7Mev$ (2)'

Từ (1') và (2') ta suy ra được $p_\gamma c=53,85Mev$ hay $\lambda=\frac{h}{p_\gamma}=1,5.10^{-14}m$

Bước sóng này quá nhỏ so với bước sóng tia $\gamma$ $(10^{-11}m)$

2 LƯU Ý

.-Từ năng lượng Prôtôn ta suy ra vận tốc Prôtôn bé nên động năng và động lượng phải tính theo CH cổ điển.

- Nếu quan quan niệm LÀ HẠT X thì động năng và động lượng phải tính theo CHCĐ.

Gọi $\vec{p}$ là động lượng hạt X, $\vec{p}$' là động lượng X sau va chạm; $\overrightarrow{p_p}'$ là động lượng proton sau va chạm. Proton có độngnăng lớn nhất khi hạt X va chạm trực diện và bật ngược lại:

Theo định luật bảo toàn động lượng : $\vec{p} = \vec{p}' + \overrightarrow{p_p}'$

Chọ chiều dương là chiều của $\vec{p}$, khi đó p= $p_p$'-p' (1)

Bảo toàn động năng $\frac{p^2}{2m} = \frac{p'^2}{2m} + \frac{p_p^2}{2m_p}$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $p = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{m_p} + 1\right)\sqrt{2m_p E_p}$ (3)

Tương tự hkhi hạt X va chạm với ${}^{14}_{7}N$ và có khối lượng $m_N$ thì

$p = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{m_N} + 1\right)\sqrt{2m_N E_N}$ (4)

Giải hệ phương trình (3), (4) ta được $E_p = 5,7MeV;\ E_N = 1,42MeV;$

Với $m \approx 1,00108u$ ; $E = 5,7MeV$

Dố chính là nowtron. Phương trình đứng của phản ứng hạt nhân là

${}^{4}_{2}\alpha + {}^{9}_{4}Be \rightarrow {}^{12}_{6}C + {}^{1}_{0}n$

---------------HẾT -----------------