Trường Đại học Khoa Học Tự nhiên Hà Nội

Khoa Toán-Cơ-Tin học

Bộ môn Cơ học

Người dịch: **Trần Thanh Tuấn, Nguyễn Xuân Nguyên**

DAVID MORIN

INTRODUCTION TO CLASSICAL MECHANICS

With Problems and Solutions

Hiệu đính: **PGS.TS. Đào Văn Dũng**

Hà Nội - 2013

Mục lục

Lời dịch giả

Môn cơ học lý thuyết là một môn đã được dạy trong chương trình của nhiều trường đại học từ nhiều năm trước, chủ yếu là trong các trường khoa học và kỹ thuật, và nó được đánh giá là một môn học không phải là dễ dàng để hiểu. Có hai lý do của việc này. Thứ nhất, đó là chương trình môn cơ học lý thuyết thường là khá dài và sinh viên chỉ có một thời lượng không nhiều thời gian để học cả lý thuyết và bài tập. Thứ hai là các giáo trình cơ học lý thuyết từ trước đến nay được sử dụng hầu như là được dựa trên các giáo trình của Nga, mang nặng tính hàn lâm với phần lý thuyết nặng về toán học và không nêu ra đầy đủ những ý nghĩa vật lý của từng phần lý thuyết cụ thể khi áp dụng vào các bài toán cơ học, và các bài tập đa phần khá là khó và có nhiều bài không nêu bật lên các ứng dụng của chúng liên quan đến các hiện tượng, vấn đề trong thực tế. Những điều này nói chung không giúp sinh viên hiểu sâu sắc được các vấn đề và có thể áp dụng những kiến thức được học vào việc giải quyết các bài toán thực tiễn.

Với kinh nghiệm giảng dạy môn cơ học lý thuyết nhiều năm của dịch giả, thì chỉ có một số ít sinh viên có thể hiểu hết được các nội dung trong các giáo trình mang nặng tính hàn lâm trên. Số sinh viên này đều có một nền tảng rất tốt môn vật lý nên có thể hiểu được cách thức chuyển động và các hiện tượng cơ học của hệ cơ học trong bài toán. Các sinh viên còn lại thì hầu như là không nắm chắc được vấn đề, chỉ giải được các bài toán cơ học có dạng quen thuộc theo một cách làm đã được biết và không có khả năng làm được những bài tập tương tự nhưng bị thay đổi bản chất đi một chút, và quan trọng hơn là những kiến thức đó không đọng lại lâu trong sinh viên sau khi kết thúc môn học. Quan điểm của dịch giả là để có thể giải quyết được những bài toán cơ học thì sinh viên cần phải có hai khả năng. Thứ nhất là khả năng hiểu những nội dung cơ bản của toán học, nắm rõ ý nghĩa vật lý của các nội dung toán học này. Và thứ hai là khả năng hình dung tưởng tượng được (một phần) chuyển động của các hệ cơ học. Và theo ý kiến chủ quan của dịch giả, thì khả năng thứ hai là quan trọng hơn.

Với các lý do trên, nhóm dịch giả đã biên dịch và giới thiệu cuốn sách này. Cuốn sách là giáo trình được biên soạn cho sinh viên hệ tài năng năm thứ nhất của đại học Harvard học môn cơ học cổ điển. Cuốn sách được viết theo một hình thức không quá trang trọng, trong đó các vấn đề lý thuyết được trình bày một cách chi tiết, nêu lên được những khả năng áp dụng của nó vào trong rất nhiều khía cạnh khác nhau của các bài toán thực tế.

Các hiện tượng cơ học trong cuộc sống cũng được trình bày một cách rõ ràng, dễ hiểu trong phần lý thuyết và bài tập. Với rất nhiều ví dụ và khoảng 250 bài tập có lời giải chi tiết và rất nhiều nhận xét thú vị liên quan đến chúng sẽ giúp sinh viên hiểu một cách đầy đủ về lý thuyết, về các hiện tượng cơ học tương tự trong cuộc sống xuất hiện trong các bài toán và quan trong hơn là tạo cho sinh viên một sự thích thú khi nghiên cứu làm các bài toán cơ học. Cuốn sách cũng cung cấp khoảng 350 bài tập (không có lời giải) để dành cho sinh viên làm bài tập về nhà, và để "thử thách" những bạn sinh viên có niềm đam mê giải các bài toán khó trong cơ học. Nội dung toán học trong cuốn sách cũng không nhiều. Để hiểu được toàn bộ cuốn sách, sinh viên chỉ cần được trang bị những kiến thức rất cơ bản của giải tích và đại số tuyến tính, nhưng điều quan trọng là sinh viên cần phải hiểu những ý nghĩa vật lý của những kiến thức toán học này. Những nội dung toán học cần thiết và ý nghĩa vật lý của chúng cũng được tác giả trình bày một cách ngắn gọn trong các phần phụ lục. Chú ý rằng, để giải các bài toán vật lý thì bạn chắc chắn phải dùng đến công cụ toán học. Do đó, việc hiểu ý nghĩa vật lý của các công cụ toán học này sẽ giúp bạn biết phải dùng nó như thế nào khi áp dụng vào trong các bài toán cụ thể.

Với những lý do được nêu ở trên, nhóm dịch giả tin rằng, cuốn sách này sẽ là một cuốn giáo trình tham khảo rất hữu ích cho các sinh viên (kể cả các sinh viên thuộc các chuyên ngành kỹ thuật và nghiên cứu) khi học môn Cơ học lý thuyết, và nó cũng có thể là hoàn toàn đủ để được dùng như là một cuốn giáo trình chính trong một số chương trình dạy môn Cơ học lý thuyết. Với các sinh viên học các chuyên ngành mang nặng tính hàn lâm, nó sẽ giúp các bạn hiểu được những vấn đề ứng dụng của lý thuyết vào trong các bài toán thực tế. Và với các sinh viên kỹ thuật, nó sẽ giúp các bạn hiểu sâu hơn các vấn đề các bạn đang học và có thể áp dụng vào các vấn đề phức tạp hơn trong thực tế khác. Cuốn sách cũng sẽ có ích cho những bạn học sinh giỏi vật lý ở các trường trung học, đặc biệt là các bạn học sinh chuyên môn Vật lý, khi chưa được trang bị một nền tảng toán học cao cấp tốt nhưng muốn hiểu rõ về những giải thích của các hiện tượng tự nhiên trong cuộc sống. Cuốn sách sẽ cung cấp cho các bạn một hệ thống các cơ cấu vận hành và chuyển động cơ học từ cơ bản cho đến phức tạp nhưng rất thú vị.

Nửa đầu của cuốn sách (từ Chương 1 đến Chương 9) được dịch bởi TS. Trần Thanh Tuấn, và nửa sau của cuốn sách (từ Chương 10 đến Chương 14) được dịch bởi ThS. Nguyễn Xuân Nguyên. Từ Chương 7- 9 có sự đóng góp công sức rất nhiều của ThS. Nguyễn Thị Nam. Cuốn sách được hiệu đính bởi PGS. TS. Đào Văn Dũng. Tất cả đều là cán bộ đã và đang giảng dạy môn Cơ học lý thuyết của Bộ môn Cơ học, Khoa Toán-Cơ-Tin học, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên Hà Nội.

Trong cuốn sách, giáo sư David Morin đã đưa vào khoảng 50 bài thơ ngắn hài hước để giúp bạn đọc đọc sách một cách thoải mái hơn. Các bài thơ này minh họa những tính chất vật lý của vấn đề mà giáo sư đang trình bày. Tuy nhiên, nhóm dịch giả không có khả năng để chuyển những bài thơ này sang tiếng Việt mà vẫn giữ được nội dung và mục đích của giáo sư. Do vậy, nhóm dịch giả xin lỗi bạn đọc là không dịch những bài thơ này.

Đây là một cuốn sách dày hơn 700 trang, nên mặc dù đã cố gắng nhưng việc biên dịch sẽ không thể tránh được những sai sót. Nhóm dịch giả rất mong nhận được những ý kiến đóng góp của các bạn đọc để hoàn thiện hơn cho bản dịch này.

Nhóm dịch giả cũng muốn gửi lời cảm ơn tới những người giúp cho công việc dịch cuốn sách này được hoàn thành. Đầu tiên, xin cảm ơn tới ban lãnh đạo trường Đại học Khoa học Tự nhiên Hà nội, Đại học Quốc gia Hà nội, cảm ơn Ban chủ nhiệm Khoa Toán-Cơ-Tin học và Bộ môn Cơ học, đã tạo những điều kiện tốt nhất cả về tinh thần lẫn vật chất cho công việc biên dịch. Nhóm cũng muốn gửi lời cảm ơn tới một số cán bộ giảng dạy của bộ môn Cơ học, các bạn học viên cao học và các bạn sinh viên của Khoa Toán-Cơ-Tin học đã giúp đỡ trong quá trình biên dịch, đánh máy, sửa chữa. Cụ thể là xin gửi lời cảm ơn tới ThS. Nguyễn Thị Nga của bộ môn về việc gõ các công thức và giúp đỡ dịch một số phần trong cuốn sách. Đây là một công việc rất quan trọng và tỷ mỉ. Cũng xin gửi lời cám ơn tới các bạn học viên cao học và sinh viên Nguyễn Thị Kiều, Trương Thị Thùy Dung lớp K53 A1C, Nguyễn Thu Hằng và Hoàng Anh Đức lớp K53 Toán tiên tiến, đã giúp đỡ trong việc chế bản và tìm ra những sai sót trong quá trình biên dịch. Sự giúp đỡ của các bạn đã giúp làm hoàn thiện hơn bản dịch của cuốn sách này. Cuối cùng và cũng là quan trọng nhất, nhóm biên dịch xin gửi lời cám ơn chân thành tới PGS. TS. Đào Văn Dũng, là người đã hiệu đính bản dịch và đã cho rất nhiều ý kiến góp ý quan trọng trong quá trình biên dịch.

Lời nói đầu

Cuốn sách này được viết dựa trên khóa học về cơ học của sinh viên năm thứ nhất hệ tài năng của đại học Harvard. Về cơ bản nó là hai cuốn sách được gộp lại. Đại thể thì mỗi nửa của các chương trong sách được viết dưới dạng như một cuốn sách thông thường, bao gồm phần lý thuyết, cùng với các bài tập phù hợp với các bài tập về nhà giao cho sinh viên. Nửa còn lại có dạng là một "quyển sách bài tập," với tất cả các loại bài tập (và lời giải) với độ khó thay đổi. Tôi luôn luôn nghĩ rằng việc làm các bài tập là cách tốt nhất để học lý thuyết, vì vậy nếu bạn đang tìm kiếm các bài tập để làm, thì tôi nghĩ cuốn sách này sẽ làm bạn bận rộn trong một thời gian.

Cuốn sách ở một mức độ nào đó có thể nói là kỳ quặc, vì vậy hãy để tôi ngay từ đầu nói về cách tôi tưởng tượng ra nó sẽ được dùng:

- Như là một cuốn giáo trình chủ đạo dành cho các khóa học về cơ học của sinh viên năm thứ nhất hệ tài năng. Mục đích ban đầu của tôi khi viết cuốn sách này là có một thực tế rằng không có một cuốn sách nào phù hợp với các khóa học năm đầu tiên tại trường Harvard. Vì vậy sau chín năm sử dụng các phiên bản cập nhật của bài giảng trên lớp, đây là sản phẩm đã được hoàn thành.

- Như là một cuốn sách tham khảo cho các khóa học chuẩn dành cho các sinh viên năm thứ nhất thuộc các chuyên ngành vật lý. Mặc dù cuốn sách này bắt đầu với các kiến thức cơ học đầu tiên và có thể được dùng một cách độc lập, nó không dành nhiều thời gian cho các nội dung mang tính chất mở đầu như những cuốn sách dành cho sinh viên năm thứ nhất khác. Do đó tôi không có lời khuyên gì cho việc sử dụng cuốn sách này như là cuốn giáo trình duy nhất cho một khóa học chuẩn về cơ học cho sinh viên năm thứ nhất. Tuy nhiên, nó sẽ là một cuốn sách tham khảo cực kỳ hữu ích, cả khi nó được sử dụng như là một cuốn sách bài tập cho tất cả sinh viên, và cũng như nó được sử dụng như là một cuốn giáo trình cao cấp cho những sinh viên mà muốn tìm hiểu sâu hơn về một số chủ đề nào đó.

- Như là một cuốn sách tham khảo cho các khóa học về cơ học ở mức độ cao hơn, hoặc như là một cuốn giáo trình chính mà được sử dụng cùng với một cuốn sách tham khảo khác đối với các chủ đề thêm vào mà thường được dạy trong các khóa học ở mức độ cao, như là các phương trình Hamilton, chất lỏng, hiện tượng hỗn động, phân tích Fourier, các ứng dụng của điện và từ trường, vân vân ... Với tất cả những ví dụ được làm và các thảo luận ở mức độ sâu, bạn thực sự không thể sai lầm khi sử dụng cuốn sách này cùng với một cuốn sách khác.

- Như là một cuốn sách bài tập đối với bất cứ ai thích giải các bài tập vật lý. Những người như thế này có thể là những học sinh giỏi ở cấp ba, là những người mà tôi nghĩ là có can đảm khi làm việc này, cho tới những sinh viên đại học và các học viên sau đại học là những người muốn có một số bài tập hay để suy nghĩ, cho tới những giáo sư đang tìm kiếm những bài tập mới để sử dụng trong lớp học của họ, và cuối cùng là cho tới bất cứ ai có mong muốn học vật lý thông qua việc làm các bài tập. Nếu bạn muốn, bạn có thể coi cuốn sách này như là một cuốn sách bài tập mà cũng có những phần giới thiệu về lý thuyết cho các lớp bài tập về mỗi chủ đề. Với khoảng 250 bài tập (có kèm theo lời giải) và khoảng 350 bài tập luyện tập (mà không có lời giải), cùng với tất cả các ví dụ trong sách, tôi nghĩ là bạn sẽ không tiếc về số tiền bỏ ra để mua cuốn sách này! Nhưng để đề phòng, tôi đã đưa vào 600 hình vẽ, 50 bài thơ hài hước, chín lần xuất hiện của tỷ số vàng, và một sự miêu tả ngắn về $e^{-\pi}$.

Yêu cầu tiên quyết để sử dụng cuốn sách này là cần có những nền tảng vững chắc về cơ học ở cấp ba (không yêu cầu đối với phần điện học và từ trường) và kiến thức về giải tích hàm số một biến. Có hai ngoại lệ nhỏ cho điều này. Thứ nhất, một vài mục sẽ phải dựa trên giải tích hàm nhiều biến, vì vậy tôi đã đưa ra một tóm tắt về kiến thức này trong Phụ lục B. Phần lớn những kiến thức này ở trong Mục 5.3 (mà liên quan đến curl), nhưng mục này có thể dễ dàng được bỏ qua trong lần đọc đầu tiên. Hơn nữa, có một vài phần liên quan đến các đạo hàm riêng, tích vô hướng, và tích có hướng (tất cả những phần này được tóm tắt lại ở trong Phụ lục B) sẽ xuất hiện rải rác ở trong cuốn sách. Thứ hai, một vài mục (4.5, 9.2- 9.3, và Phụ lục D và E) phụ thuộc vào các kiến thức của ma trận và các chủ đề cơ bản khác trong đại số tuyến tính. Nhưng một sự hiểu biết cơ bản về ma trận là đủ ở đây.

Một phác họa ngắn về cuốn sách là như sau. Chương 1 thảo luận về các chiến thuật khác nhau để giải các bài tập. Những điều này là cực kỳ quan trọng, vì vậy nếu bạn chỉ đọc một chương trong cuốn sách này, thì hãy đọc chương này. Bạn nên luôn ghi nhớ những chiến thuật giải toán này khi bạn đọc những phần còn lại của cuốn sách. Chương 2 nói về tĩnh học. Phần lớn chương này sẽ là quen thuộc với bạn, nhưng bạn sẽ tìm thấy một vài bài tập khá thú vị. Trong Chương 3, chúng ta sẽ biết về các loại lực và cách áp dụng $F = ma$ như thế nào. Sẽ có một chút toán học ở đây cần thiết để giải một vài phương trình vi phân đơn giản. Chương 4 liên quan đến các loại dao động và các dao động liên kết. Một lần nữa, sẽ có một lượng toán học cần thiết để giải các phương trình vi phân tuyến tính, nhưng sẽ không có cách nào để tránh không dùng chúng. Chương 5 liên quan đến định luật bảo toàn năng lượng và động lượng. Bạn có thể đã biết nhiều về điều này trước đó, nhưng chương này có rất nhiều các bài tập hay.

Trong Chương 6, chúng tôi giới thiệu về phương pháp Lagrange, là phương pháp mà khả năng cao là mới đối với bạn. Nó ban đầu trông có vẻ ghê gớm, nhưng nó thực ra là không khó tý nào. Có những nội dung khó hiểu bên trong phương pháp, nhưng điều dễ chịu là kỹ thuật áp dụng nó lại khá là dễ dàng. Tình huống ở đây là tương tự với việc lấy một đạo hàm trong toán giải tích; có những nội dung quan trọng mà phần lý thuyết được xây dựng từ chúng, nhưng việc tìm một đạo hàm thì lại khá là đơn giản.

Chương 7 nghiên cứu về các lực xuyên tâm và chuyển động của các hành tinh. Chương 8 sẽ nghiên cứu về các loại bài toán đơn giản của moment động lượng, trong đó hướng của vector moment động lượng là không đổi. Chương 9 nghiên cứu về các loại bài toán phức tạp hơn, trong đó hướng của moment động lượng sẽ thay đổi. Các con quay và các loại vật thể phức tạp khác sẽ rơi vào trong phần này. Chương 10 liên quan đến các hệ quy chiếu có gia tốc và các lực quán tính.

Các chương từ 11 đến 14 nghiên cứu về thuyết tương đối. Chương 11 liên quan đến động học tương đối- các phần tử trừu tượng bay xuyên qua không thời gian. Chương 12 nói về động lực học tương đối - năng lượng, động lượng, lực, vân vân... Chương 13 giới thiệu về phần nội dung quan trọng của "vector bốn chiều." Các nội dung trong chương này có thể được đặt vào trong hai chương trước nó, nhưng với những lý do khác nhau mà tôi nghĩ rằng sẽ là tốt nhất khi viết một chương dành riêng cho nó. Chương 14 nói về một vài chủ đề của Thuyết tương đối tổng quát. Tất nhiên sẽ là điều không thể để một chương có thể nói về thuyết này, vì vậy chúng ta sẽ chỉ xem xét một vài ví dụ cơ bản (nhưng vẫn rất thú vị). Cuối cùng, các phần phụ lục sẽ nói về những chủ đề hữu ích, nhưng cũng không liên quan gì lắm, khác nhau.

Trong cuốn sách, tôi đã đưa vào rất nhiều "Nhận xét". Những nhận xét này được viết với cỡ chữ nhỏ hơn. Chúng bắt đầu với chữ hoa nhỏ "NHẬN XÉT" và kết thúc bởi một hình ba lá (♣). Mục đích của những nhận xét này là nói những vấn đề cần phải nói, mà không làm gián đoạn mạch lập luận nói chung. Theo một nghĩa nào đó thì đây là những phần suy nghĩ "thêm", mặc dù chúng lúc nào cũng rất hữu ích trong việc hiểu những điều đang xảy ra. Thông thường chúng được viết một cách không trịnh trọng như trong các phần còn lại, và tôi dành riêng cái quyền được được sử dụng chúng để đôi khi nói lan man về những điều mà tôi thấy là thú vị, nhưng bạn lại có thể thấy là nó không có liên quan gì. Tuy nhiên, trong hầu hết các phần, những nhận xét này đưa ra những vấn đề nảy sinh một cách rất tự nhiên trong mạch thảo luận. Tôi hay sử dụng "Nhận xét" trong phần cuối của các lời giải của các bài tập, trong đó điều hiển nhiên để làm là đi kiểm tra các trường hợp giới hạn (chủ đề này được thảo luận trong Chương 1). Tuy nhiên, trong trường hợp này, những nhận xét này *không phải* là những suy nghĩ "thêm", bởi vì việc kiểm tra các trường hợp giới hạn của đáp số của bạn là điều mà bạn nên *luôn luôn* thực hiện.

Để bạn đọc cuốn sách một cách thoải mái (tôi hi vọng là như vậy!), tôi đã đưa vào các bài thơ ngắn hài hước trong suốt cuốn sách. Tôi cho rằng những bài thơ này có thể được coi là mang tính giáo dục, nhưng chúng chắc chắn không tượng trưng cho bất cứ một kiến thức ở mức độ sâu nào mà tôi có trong việc dạy vật lý. Tôi viết ra chúng với mục đích duy nhất là để làm cho mọi thứ sáng sủa hơn. Một vài bài thơ khá là hài hước. Một vài thì khá là ngớ ngẩn. Nhưng ít nhất thì tất cả chúng đều có nội dung đúng về mặt vật lý.

Như đã được đề cập ở trên, cuốn sách này chứa một lượng lớn các bài tập. Những bài tập mà có lời giải được gọi là "Bài tập," và những bài tập mà không có lời giải, mà được dùng để làm bài tập về nhà cho sinh viên, được gọi là "Bài tập luyện tập." Không có sự khác nhau cơ bản nào giữa hai loại này, ngoại trừ việc tồn tại các lời giải đã được viết ra. Tôi đã chọn việc đưa vào các lời giải cho các bài tập bởi hai lý do. Thứ nhất, sinh viên lúc nào cũng muốn thực hành làm thêm các bài tập, có lời giải, để có thể hiểu bài. Và thứ hai, tôi đã có một khoảng thời gian hết sức thú vị để viết chúng ra. Nhưng một khuyến cáo về những bài tập và những bài tập luyện tập này là: Một vài bài rất dễ, nhưng rất nhiều bài thì rất khó. Tôi nghĩ là bạn sẽ thấy chúng hoàn toàn thú vị, nhưng đừng có nản lòng nếu bạn gặp vấn đề gì trong quá trình giải chúng. Một vài bài được thiết kế để nghiền ngẫm rất nhiều giờ đồng hồ. Hoặc nhiều ngày, hoặc nhiều tuần, hoặc nhiều tháng (bởi vì tôi có thể làm chứng điều này!).

Các bài tập (và các bài tập luyện tập) được đánh dấu bởi một số các sao (thực ra là các hình hoa thị). Những bài tập khó hơn sẽ có nhiều sao hơn, theo thang bậc từ không có sao nào cho đến bốn sao. Tất nhiên, bạn có thể không đồng ý với đánh giá của tôi về độ khó của các bài tập, nhưng tôi nghĩ rằng một sự sắp xếp độ khó bất kỳ nào cũng tốt hơn là không có đánh giá gì. Với ý tưởng về việc đưa ra các sao, những bài tập một sao là những bài tập thực sự yêu cầu cần phải suy nghĩ, và những bài tập bốn sao là thực sự, thực sự, *thực sự* khó. Hãy thử một vài bài và bạn sẽ thấy điều mà tôi nói. Thậm chí là nếu bạn hiểu những vấn đề trong cuốn sách rất kỹ, thì những bài tập bốn sao (và rất nhiều những bài tập ba sao) sẽ vẫn là một thách thức cực độ. Nhưng đó là cách mà nó phải như vậy. Mục đích của tôi là tạo ra một giới hạn trên mà không thể đạt được với một số bài tập khó, bởi vì sẽ là một hoàn cảnh không may mắn nếu bạn ngồi rỗi không làm gì mà không có bài tập nào nữa để làm. Tôi hy vọng là tôi đã thành công với mục đích này.

Đối với các bài tập bạn chọn để giải, hãy cẩn thận đừng xem lời giải vội. Sẽ không có gì sai trái cả khi đặt bài tập đó qua một bên trong một thời gian rồi quay lại giải nó sau. Thực vậy, điều này có lẽ là cách tốt nhất để học mọi thứ. Nếu bạn đọc ngay lời giải khi mà ngay từ đầu bạn cảm thấy là không thể giải nó, thì có nghĩa là bạn đã lãng phí một bài tập.

NHẬN XÉT: Điều này cho tôi một cơ hội để nói về nhận xét đầu tiên của tôi. Một thực tế mà hay bị bỏ qua đó là bạn cần phải biết nhiều hơn (những) cách giải một bài toán; bạn cũng phải cần quen thuộc với rất nhiều cách *sai* trong việc giải nó. Nếu không, khi bạn gặp một bài tập mới, có thể có một số cách tiếp cận có vẻ là ổn để lựa chọn, và bạn sẽ không thể ngay lập tức loại bỏ những cách tiếp cận không tốt đi. Việc cố gắng một chút với một bài toán luôn luôn dẫn bạn vào một vài bước làm sai nào đó, và đây là một phần không thể thiếu của quá trình học tập. Để hiểu một điều nào đó, bạn không những phải biết cái gì là đúng về những thứ đúng đắn; mà bạn cũng phải biết cái gì là sai của những thứ không đúng. Việc học sẽ lấy đi rất nhiều nỗ lực của bạn, rất nhiều sai lầm sẽ xảy ra, và cũng rất nhiều mồ hôi. Chao ôi, không có con đường tắt nào để hiểu về vật lý cả. ♣

Bất kỳ cuốn sách nào mà mất đến mười năm để viết đều chắc chắn là có sự đóng góp công sức (với sự cảm kích sâu sắc) của rất nhiều người. Tôi đặc biệt cảm ơn Howard Georgi với sự giúp đỡ trong nhiều năm, với vô vàn gợi ý, với những ý tưởng cho rất nhiều bài tập, và với những kiểm tra về mặt vật lý một cách kỹ càng. Tôi cũng muốn cảm ơn Don Page vì những bình luận và gợi ý rất tỷ mỉ và thú vị của anh, và vì những phát hiện những lỗi trong những phiên bản trước. Những người bạn và đồng nghiệp của tôi khác mà đã giúp đỡ tạo ra cuốn sách được như thế này (và là những người làm cho nó thú vị hơn để viết) là John Bechhoefer, Wes Campbell, Michelle Cyrier, Alex Dahlen, Gary Feldman, Lukasz Fidkowski, Jason Gallicchio, Doug Goodale, Bertrand Halperin, Matt Headrick, Jenny Hoffman, Paul Horowitz, Alex Johnson, Yevgeny Kats, Can Kilic, Ben Krefetz, Daniel Larson, Jaime Lush, RakhiMahbubani, ChrisMontanaro, TheresaMorin, Megha Padi, Dave Patterson, Konstantin Penanen, Courtney Peterson, Mala Radhakrishnan, Esteban Real, Daniel Rosenberg, Wolfgang Rueckner, Aqil Sajjad, Alexia Schulz, Daniel Sherman, Oleg Shpyrko, David Simmons-Duffin, Steve Simon, Joe Swingle, Edwin Taylor, Sam Williams, Alex Wissner-Gross, và Eric Zaslow. Tôi chắc chắn rằng là đã quên những người khác, đặc biệt là những người từ những năm đầu tiên mà tôi không còn nhớ rõ, vì vậy hãy thông cảm nhận lời xin lỗi của tôi.

Tôi cũng rất biết ơn về công việc được thực hiện một cách rất chuyên nghiệp của ban biên tập và nhóm xuất bản tại Cambridge University Press trong việc chuyển nó thành một cuốn sách thực sự. Tôi cảm thấy rất dễ chịu khi làm việc với Lindsay Barnes, Simon Capelin, Margaret Patterson, và Dawn Preston.

Cuối cùng, và có lẽ là quan trọng nhất, tôi muốn nói lời cám ơn tới tất cả những sinh viên (cả ở Harvard và những nơi khác), những người đã cung cấp dữ liệu trong suốt thập kỷ qua. Tên của những sinh viên này có lẽ là quá nhiều để viết ra, vì vậy cho phép tôi chỉ nói lời cảm ơn tới các bạn, và tôi hy vọng là những sinh viên khác sẽ thích thú thưởng thức những điều mà các bạn đã giúp tôi tìm ra.

Bất chấp quá trình kiểm tra một cách tỉ mỉ trước khi in và rất nhiều kiểm tra cho các phiên bản trước, có nhiều nhất một xác suất nhỏ theo hàm mũ rằng cuốn sách là không có sai sót gì. Vì vậy nếu có điều gì đó nhìn có vẻ không ổn, hãy kiểm tra trang web (www.cambridge.org/9780521876223) để thấy một danh sách các lỗi đánh máy, các cập nhật, vân vân... Và hãy cho tôi biết nếu bạn phát hiện ra điều gì đó chưa được đăng ở đây. Tôi chắc chắn rằng cuối cùng tôi sẽ đăng một vài bài tập mới và các nội dung bổ sung thêm, vì vậy hãy kiểm tra trang web này để biết về những vấn đề thêm này. Thông tin về những giáo viên giảng dạy cũng sẽ tìm được trên trang web này.

Chúc bạn giải bài tập một cách vui vẻ - Tôi hy vọng bạn sẽ thấy cuốn sách là thú vị!

Chương 1

Những chiến thuật giải bài toán Cơ học

Vật lý liên quan rất nhiều đến giải quyết vấn đề. Khi bạn tiến hành những nghiên cứu hay chỉ là đọc một cuốn sách, bạn cũng sẽ phải giải một vài bài toán. Khi bạn đọc sách (kể cả cuốn sách này), có thể nói rằng bạn thực sự hiểu một vấn đề gì đó chỉ khi bạn có khả năng giải quyết những bài toán liên quan đến nó. Đọc một chủ đề nào đó là một bước cần thiết của quá trình học tập, nhưng chỉ đọc không thôi thì chưa đủ. Điều quan trọng hơn là phải dành nhiều thời gian nhất có thể để giải các bài toán, nhiều hơn thời gian chỉ để đọc sách. Việc giải bài toán là việc làm chủ động, trong khi đọc sách chỉ là việc làm thụ động. Do đó, có rất nhiều bài tập được đưa ra trong quyển sách này.

Tuy nhiên, nếu nhiều bài tập được đưa ra trong quyển sách này, thì ít nhất một vài phương pháp, chiến thuật để giải quyết chúng cũng nên được trình bày ở đây. Những chiến thuật này sẽ được trình bày ở chương đầu tiên này. Chúng là những chiến thuật mà bạn nên luôn luôn nhớ đến mỗi khi phải giải quyết một bài toán nào đó. Tất nhiên, nói chung những chiến thuật này là chưa đủ, bạn phải hiểu những ý nghĩa vật lý đằng sau những vấn đề thì mới có thể tiếp tục giải bài toán. Nhưng khi bạn kết hợp những chiến thuật này vào, bạn có thể giải quyết bài toán một cách dễ dàng.

1.1 Những chiến thuật chung

Có một vài chiến thuật chung mà bạn nên sử dụng một cách không ngần ngại mỗi khi giải một bài toán. Chúng là:

1. **Vẽ hình nếu cần thiết.**

   Trong hình vẽ, hãy đặt ký hiệu một cách rõ ràng cho tất cả những đại lượng liên quan (lực, độ dài, khối lượng, ...). Đối với một vài bài toán, việc vẽ hình là rất quan trọng. Ví dụ như trong những bài toán liên quan đến phần "giải phóng vật" (được trình bày trong Chương 3) hoặc những bài toán trong phần động học tương đối (Chương 11), việc vẽ hình có thể làm một bài toán tưởng chừng như là không thể giải được trở thành rất đơn giản. Thậm chí trong những bài toán có thể giải được mà không cần vẽ hình, thì hình vẽ cũng giúp ích rất nhiều. Một hình vẽ rõ ràng là đáng giá bằng ngàn lời nói (thậm chí là đáng giá hơn nếu bạn đặt ký hiệu cho các đại lượng!).

2. **Hãy viết ra những gì được cho trong bài toán, và những gì cần tìm.**

   Trong một bài toán đơn giản, thực ra bạn đã làm những việc này trong đầu một cách tự động. Tuy nhiên, với những bài toán phức tạp, sẽ rất hữu ích nếu bạn viết ra những điều này một cách rõ ràng. Ví dụ như, nếu có ba đại lượng phải tìm nhưng bạn mới chỉ viết ra được hai thông tin từ trong bài toán để tìm ba đại lượng này, khi đó bạn có thể chắc chắn rằng bạn cần thêm một thông tin nữa (giả sử rằng bài toán là giải được). Nó có thể là một định luật bảo toàn, hoặc phương trình của định luật II Newton $F = ma$, vân vân ....

3. **Sử dụng biến ký tự.**

   Khi bạn đang giải quyết một bài toán mà những đại lượng trong bài toán được cho dưới dạng số, bạn nên gán những số này bằng các ký tự ngay lập tức và sau đó giải bài toán bằng việc sử dụng những ký tự này. Sau khi giải ra kết quả dưới dạng ký tự, bạn có thể thay lại những giá trị số của chúng vào để nhận được kết quả số. Có rất nhiều lợi ích khi sử dụng biến ký tự:

   - NHANH CHÓNG HƠN. Sẽ nhanh hơn rất nhiều khi nhân g với ℓ bằng việc đơn giản viết chúng liền nhau trên giấy hơn là nhân chúng bằng việc sử dụng máy tính. Và khi sử dụng máy tính thì bạn phải sử dụng máy tính ít nhất vài lần trong quá trình giải bài toán.
   - MẮC ÍT LỖI HƠN. Sẽ rất dễ bấm nhầm số 9 thay vì số 8 khi sử dụng máy tính, nhưng sẽ khó mắc lỗi khi viết q thay vì viết g trên giấy.Thậm chí nếu bạn viết nhầm, bạn cũng sẽ nhanh chóng nhận ra là phải viết g bởi vì cuối cùng bạn cũng sẽ thấy rằng không có giá trị (hay đại lượng) nào của q được cho trong bài toán.
   - CHỈ PHẢI GIẢI QUYẾT BÀI TOÁN MỘT LẦN. Nếu bạn được yêu cầu thay đổi giá trị của độ dài ℓ từ 2.4 m thành 2.3 m, khi đó bạn không phải giải bài toán lại một lần nữa. Bạn đơn giản chỉ cần thay giá trị mới của ℓ vào kết quả ký tự của bạn.
   - THẤY SỰ PHỤ THUỘC MỘT CÁCH TỔNG QUÁT CỦA KẾT QUẢ VÀO CÁC ĐẠI LƯỢNG ĐÃ CHO. Ví dụ như bạn sẽ thấy kết quả của bài toán sẽ tăng theo a

và b, giảm theo c và không phụ thuộc vào d. Điều này cho thấy rằng sẽ có rất nhiều thông tin chứa đựng trong kết quả ký tự hơn là trong kết quả số. Hơn nữa, kết quả ký tự lúc nào cũng đẹp và gọn gàng hơn.

- DỄ DÀNG KIỂM TRA ĐƠN VỊ VÀ TRƯỜNG HỢP ĐẶC BIỆT. Những kiểm tra này là rất cần thiết, và bởi vì chúng rất quan trọng nên chúng ta sẽ dành toàn bộ Mục 1.2 và Mục 1.3 để thảo luận về chúng.

Tuy nhiên, cũng nên chú ý rằng, đôi khi bài toán cũng sẽ khó giải hơn khi sử dụng biến ký tự. Ví dụ như khi giải hệ ba phương trình ba ẩn, nó có thể trở nên rất cồng kềnh trừ khi chúng ta phải thay giá trị số cho các hệ số vào. Nhưng trong hầu hết các trường hợp, nói chung làm việc với biến ký tự sẽ đem lại lợi ích rất nhiều.

4. **Kiểm tra đơn vị/thứ nguyên.**

   Việc này cực kỳ quan trọng. Mục 1.2 sẽ nói rõ về vấn đề này.

5. **Kiểm tra trường hợp giới hạn và trường hợp đặc biệt.**

   Việc này cũng rất quan trọng. Mục 1.3 sẽ nói rõ hơn.

6. **Kiểm tra bậc độ lớn của kết quả nếu kết quả là số.**

   Nếu lời giải của bài toán là một kết quả số, hãy kiểm tra xem kết quả số đó có hợp lý hay không. Nếu bạn đang tính khoảng cách mà một chiếc xe bị trượt trước khi nó dừng, và bạn tính ra kết quả là một kilometer hoặc là một milli meter, thì khi đó bạn biết rằng bạn đã có thể làm sai. Những lỗi kiểu này thường hay mắc phải khi chúng ta quên một vài số mũ của 10 (ví dụ như khi chuyển đổi từ kilometer sang meter) hoặc là thay vì nhân một đại lường nào đó bạn lại đi chia đại lượng đó. Tuy nhiên, bạn cũng có thể phát hiện ra lỗi loại này bằng cách kiểm tra đơn vị.

Đôi khi bạn sẽ phải giải những bài toán mà bạn không phải tìm kết quả chính xác, bởi vì rất khó để tìm được kết quả chính xác đó hoặc chỉ vì bạn không thấy cần thiết phải tìm ra kết quả chính xác. Nhưng trong những trường hợp này, chúng ta thường có thể dự đoán một kết quả hợp lý theo bậc lũy thừa của 10. Ví dụ nếu bạn đi qua một tòa nhà và tự nhiên băn khoăn là không biết tòa nhà đấy cần bao nhiên viên gạch để xây nó, hoặc chi phí xây nên nó là bao nhiêu. Khi đó bạn có thể tự đưa ra cho mình một câu trả lời hợp lý mà không cần phải làm các phép tính phức tạp. Nhà vật lý Enrico Fermi được biết đến nhờ khả năng ước lượng mọi thứ nhanh chóng (kết quả ước lượng cùng bậc) chỉ với một số lượng phép tính ít nhất. Do đó, bài toán mà chỉ cần đưa ra một kết quả gần đúng dưới dạng số mũ của 10 được gọi là "Bài toán Fermi". Tất nhiên, trong cuộc sống, đôi khi chúng ta cần biết những kết quả chính xác hơn là những kết quả xấp xỉ của số mũ của 10.

Trong hai mục sau đây, chúng ta sẽ thảo luận về những chiến lược rất quan trọng của việc kiểm tra thứ nguyên và những trường hợp đặc biệt của kết quả. Sau đó, tại Mục

1.4, chúng ta sẽ bàn đến những kỹ thuật trong việc giải số bài toán. Bạn sẽ cần những kỹ thuật này khi bạn tìm ra một hệ các phương trình mà bạn không biết cách giải giải tích của nó. Mục 1.4 hoàn toàn khác với Mục 1.2 và Mục 1.3, trong đó hai mục đầu liên quan một cách cơ bản đến tất cả những bài toán mà bạn sẽ làm, trong khi việc giải số hệ phương trình chỉ phải thực hiện trong một vài bài tập. Tuy nhiên, nó là kỹ thuật mà bất cứ sinh viên vật lý nào cũng nên biết.

Trong tất cả ba mục này, chúng ta sẽ dùng đến rất nhiều những kết quả của những bài toán sẽ được đưa ra trong cuốn sách này. Với mục đích là để hiểu về những chiến thuật đang xét, việc tìm ra những kết quả nói trên là không quan trọng. Do đó, bạn đừng lo lắng về những ý nghĩa vật lý nằm sau những kết quả đó, sẽ có rất nhiêu cơ hội về sau cho bạn tìm hiểu về những ý nghĩa vật lý của kết quả! Mục đích chính của phần này là biết những cái gì cần làm sau khi bạn đã giải ra được kết quả của bài toán.

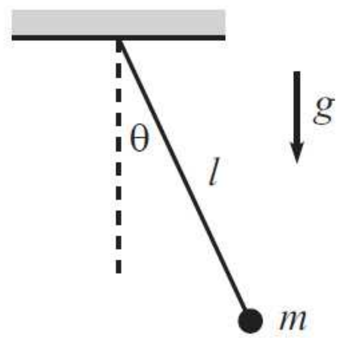
1.2 Phân tích đơn vị và thứ nguyên

Đơn vị hoặc thứ nguyên của một đại lượng là bậc của khối lượng, độ dài và thời gian bên trong đại lượng đó. Ví dụ đơn vị của vận tốc là độ dài trên thời gian. Việc xem xét đơn vị của kết quả thường là vì hai mục đích. Một là, việc xem xét đơn vị trước khi giải bài toán có thể giúp chúng ta biết một cách khái quát dạng của kết quả cần tìm với sai khác một hằng số nào đó. Hai là, kiểm tra đơn vị của kết quả sau khi giải bài toán (bạn nên *luôn luôn* làm việc này) có thể giúp chúng ta biết kết quả đó có đúng hay không. Nó sẽ không giúp để biết kết quả có chắc chắn đúng hay không nhưng nó có thể giúp chúng ta biết kết quả đó là hoàn toàn sai. Ví dụ như nếu bạn giải một bài toán mà phải tìm ra một độ dài nào đó, trong khi đó bạn lại tìm ra kết quả là một khối lượng, đó là lúc bạn phải xem lại lời giải của mình.

Trong khi giải bài tập, việc kiểm tra đơn vị của kết quả (mục đích thứ hai) là việc bạn luôn nên làm. Bây giờ chúng ta sẽ xét một vài ví dụ khá thú vị liên quan đến mục đích thứ nhất. Để giải ba ví dụ sau đây một cách chính xác, chúng ta cần sử dụng đến kết quả của những chương ở phần sau. Nhưng hãy xem chúng ta có thể giải những bài toán này đến mức nào chỉ bằng việc phân tích thứ nguyên. Chúng ta sẽ sử dụng ký hiệu "[ ]" cho thứ nguyên (đơn vị) và chúng ta ký hiệu M cho khối lượng, L cho độ dài và T cho thời gian. Ví dụ như chúng ta viết đại lượng vận tốc là $[v] = L/T$ và hằng số lực hấp dẫn là $[G] = L^3/(MT^2)$ (bạn có thể biết được thứ nguyên của hằng số lực hấp dẫn khi biết rằng Gm_1m_2/r^2 có thứ nguyên của lực, mà lực có thứ nguyên là ML/T^2 khi sử dụng công thức $F = ma$). Bạn cũng có thể sử dụng hệ đơn vị mks, nghĩa là sử dụng kg, m, s thay cho M, L, T một cách tương ứng.[1]

[1]Khi bạn kiểm tra đơn vị của kết quả, bạn sẽ phải làm việc với các ký hiệu kg, m, s. Do đó những ký hiệu này chắc chắn sẽ được dùng rất nhiều. Tuy nhiên những ký hiệu M, L và T sẽ được sử dụng ở đây

Ví dụ (Con lắc đơn): Một khối lượng m được treo vào một sợi dây không khối lượng có độ dài ℓ (xem Hình 1.1) và dao động trong mặt phẳng của trang giấy. Gia tốc gây ra bởi trọng trường là g. Chúng ta có thể có kết luận gì về tần số của dao động?



Hình 1.1:

Lời giải: Những đại lượng có thứ nguyên được cho trong bài toán là $[m] = M$, $[\ell] = L$ và $[g] = L/T^2$. Nhưng vẫn còn một đại lượng không thứ nguyên ở đây, đó là góc cực đại θ_0. Mục đích của chúng ta là tìm tần số, mà tần số có thứ nguyên là $1/T$. Tổ hợp duy nhất của các đại lượng có thứ nguyên trong bài toán mà có đơn vị $1/T$ là $\sqrt{g/\ell}$. Nhưng chúng ta không thể loại trừ khả năng phụ thuộc vào θ_0 của tần số ở đây, do đó dạng tổng quát nhất của tần số sẽ là [2]

$$\omega = f(\theta_0)\sqrt{\frac{g}{\ell}}, \tag{1.1}$$

với f là một hàm không thứ nguyên của biến không thứ nguyên θ_0.

NHẬN XÉT:

1. Trong trường hợp dao động nhỏ, $f(\theta_0)$ sẽ bằng 1, khi đó tần số dao động sẽ trở thành $\sqrt{g/\ell}$. Nhưng chúng ta không thể chứng minh điều này mà chỉ sử dụng phân tích thứ nguyên, bạn phải thực sự giải bài toán một cách chi tiết. Khi góc biên độ θ_0 là lớn, những số hạng bậc cao trong khai triển của hàm f trở nên rất quan trọng. Bài tập 4.23 sẽ đề cập đến vấn đề hiệu chỉnh hàm $f(\theta_0)$ cho dao động lớn và kết quả sẽ là $f(\theta_0) = 1 - \theta_0^2/16 + \cdots$.

vì chúng có tính chất hệ thống hơn.

[2]Thuật ngữ "tần số" ở đây có đơn vị là radian trên giây, ký hiệu bởi ω. Thực ra chúng ta đang nói đến "vận tốc góc". Chúng ta chỉ cần chia đại lượng này cho 2π (mà không ảnh hưởng đến đơn vị) để nhận được "tần số" theo nghĩa thông thường có đơn vị là số vòng trên giây (Hz), thường được ký hiệu bởi ν. Chúng ta sẽ nghiên cứu kỹ càng về dao động trong Chương 4.

2. Bởi vì chỉ có duy nhất một khối lượng trong bài toán, do đó tần số (với thứ nguyên $1/T$) không thể nào phụ thuộc vào $[m] = M$. Giả sử tần số phụ thuộc vào khối lượng đó, chúng ta không thể tìm được đại lượng nào có thể triệt tiêu khối lượng trên để có một kết quả chỉ phụ thuộc duy nhất vào thời gian.

3. Chúng ta khẳng định ở trên rằng chỉ có duy nhất một tổ hợp của những đại lượng có thứ nguyên mà có đơn vị $1/T$ là $\sqrt{g/\ell}$. Tổ hợp này dễ dàng tìm được trong bài toán (khá đơn giản) này, nhưng trong những bài toán phức tạp hơn thì những tổ hợp tương tự sẽ không thể nhìn ra được ngay. Phương pháp sau đây sẽ giúp bạn tìm được những tổ hợp phức tạp đó. Đầu tiên hãy viết ra tích của những đại lượng có thứ nguyên cùng với số mũ bất kỳ cho mỗi đại lượng (trong bài toán này là $m^a\ell^b g^c$), sau đó viết ra đơn vị của tích này phụ thuộc vào a, b và c. Nếu chúng ta muốn nhận đơn vị là $1/T$ trong bài toán này, thì ta có

$$M^a L^b \left(\frac{L}{T^2}\right)^c = \frac{1}{T}. \tag{1.2}$$

Cân bằng hệ số mũ của mỗi đơn vị trong hai vế của phương trình này, ta có

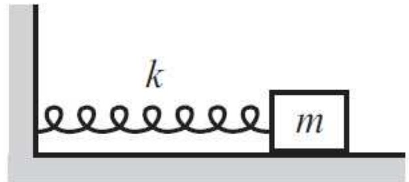
$$M : a = 0, \quad L : b + c = 0, \quad T : -2c = -1. \tag{1.3}$$

Nghiệm của hệ phương trình này là $a = 0, b = -1/2$ và $c = 1/2$, do đó ta nhận lại được kết quả $\sqrt{g/\ell}$. ♣

Chúng ta có thể nói gì về năng lượng của con lắc đơn (với gốc thế năng tại điểm thấp nhất của con lắc)? Chúng ta sẽ nghiên cứu về năng lượng ở Chương 5, nhưng điều duy nhất chúng ta cần biết ở đây đó là năng lượng có thứ nguyên là ML^2/T^2. Tổ hợp duy nhất của những hằng số có thứ nguyên trong bài toán này là $mg\ell$. Nhưng chúng ta vẫn không thể bỏ qua đại lượng θ_0, do đó năng lượng phải có dạng $f(\theta_0)mg\ell$, với f là một hàm nào đó. Đó là tất cả những gì chúng ta có thể làm với việc phân tích thứ nguyên. Tuy nhiên, nếu chúng ta chỉ cần dùng đến một chút kiến thức về vật lý, chúng ta có thể nói rằng tổng năng lượng của con lắc đơn bằng thế năng của nó tại điểm cao nhất và bằng $mg\ell(1 - \cos\theta_0)$. Sử dụng khai triển Taylor cho hàm $\cos\theta$ (xem Phụ lục A về khai triển Taylor), ta có $f(\theta_0) = \theta_0^2/2 - \theta_0^4/24 + \cdots$. Như vậy, khác với trường hợp của tần số ở trên, góc cực đại θ_0 đóng vai trò quyết định trong biểu thức năng lượng.

Ví dụ (Lò xo): Một lò xo độ cứng k được gắn một khối lượng m vào một đầu của nó (xem Hình vẽ 1.2). Lực lò xo là $F(x) = -kx$ với x là khoảng cách từ vị trí cân bằng. Chúng ta có thể kết luận gì về tần số của dao động?

Lời giải : Những đại lượng có thứ nguyên trong bài toán này là $[m] = M$, $[k] = M/T^2$ (nhận được với chú ý rằng kx là thứ nguyên của lực), và biên độ dao động là $[x_0] = L$. (Còn một đại lượng nữa là độ dài tự nhiên của lò xo, nhưng lực lò xo



Hình 1.2:

không phụ thuộc vào đại lượng này, do đó nó không thể ảnh hưởng đến kết quả.) Mục đích của chúng ta là tìm tần số mà có đơn vị là $1/T$. Tổ hợp duy nhất từ các đại lượng có thứ nguyên đã cho có đơn vị này là

$$\omega = C\sqrt{\frac{k}{m}}, \tag{1.4}$$

với C là một số không thứ nguyên. Giá trị của C thực ra bằng 1 (chúng ta đang tìm tần số ω có đơn vị là radian trên giây), nhưng điều này không thể tìm ra chỉ bằng việc phân tích thứ nguyên. Chú ý rằng, khác với bài toán con lắc đơn trước, tần số dao động trong trường hợp này không phụ thuộc vào biên độ.

Chúng ta có thể nói gì về năng lượng của lò xo? Năng lượng có đơn vị là ML^2/T^2, và tổ hợp duy nhất cho đơn vị này là Bkx_0^2, với B là một số không thứ nguyên. Thực ra $B = 1/2$, do đó tổng năng lượng của lò xo là $kx_0^2/2$.

NHẬN XÉT: Trong thực tế, lò xo không có hàm năng lượng chính xác là hàm bậc hai đối với chuyển dịch (cũng như lực là hàm tuyến tính tuân theo định luật Hooke), do đó lực thực tế có dạng $F(x) = -kx + bx^2 + \cdots$. Nếu chúng ta chỉ lấy đến số hạng thứ hai trong chuỗi này, thì chúng ta sẽ có thêm một đại lượng có thứ nguyên $[b] = M/LT^2$. Để thành lập một đại lượng có thứ nguyên là tần số, $1/T$, chúng ta cần sử dụng x_0 và b xuất hiện dưới dạng tổ hợp x_0b, bởi vì đây là cách duy nhất để loại bỏ thứ nguyên L. Sau đó chúng ta có thể thấy rằng (bằng việc sử dụng chiến thuật viết ra tích của các biến trong bài toán như đã đề cập trong nhận xét thứ ba trong ví dụ về con lắc đơn) tần số phải có dạng $f(x_0b/k)\sqrt{k/m}$, với f là một hàm nào đó. Do đó chúng ta có sự phụ thuộc của x_0 trong trường hợp này. Khi $b = 0$ kết quả phải đưa về dạng $C\sqrt{k/m}$. Do đó, f phải có dạng $f(y) = C + c_1y + c_2y^2 + \cdots$. ♣

Ví dụ (Vệ tinh quỹ đạo thấp): Một vệ tinh khối lượng m chuyển động theo một quỹ đạo tròn ngay trên bề mặt trái đất. Chúng ta có thể kết luận gì về vận tốc của vệ tinh?

Lời giải: Những đại lượng có thứ nguyên trong bài toán là $[m] = M$, $[g] = L/T^2$

và bán kính của trái đất $[R] = L$.[3] Mục đích của chúng ta là tìm vận tốc mà có đơn vị là L/T. Tổ hợp duy nhất của những đại lượng có thứ nguyên đã cho trong bài toán có đơn vị này là

$$v = C\sqrt{gR}. \tag{1.5}$$

Thực ra, $C = 1$.

1.3 Xấp xỉ kết quả và những trường hợp đặc biệt

Cũng như việc khảo sát đơn vị của kết quả, thì việc khảo sát bài toán trong các trường hợp giới hạn (hay trường hợp đặc biệt) là vì hai mục đích. Một là, nó có thể giúp bạn hiểu bài toán. Nếu bạn thấy khó hình dung về ứng xử của hệ đã cho, thì bạn có thể hình dung nó bằng cách, ví dụ như, cho một độ dài nào đó trở nên rất lớn hoặc rất bé và xem điều gì sẽ xảy ra. Sau khi thấy được sự ảnh hưởng của độ dài đó đối với hệ trong trường hợp tới hạn (hoặc cũng có thể bạn phát hiện ra độ dài đó không có ảnh hưởng gì đến hệ đang xét), thì bạn sẽ thấy dễ dàng hơn để hiểu ảnh hưởng của độ dài đó tới hệ nói chung. Điều này sẽ làm cho việc viết những phương trình của các đại lượng liên quan trở nên dễ dàng hơn (ví dụ như định luật bảo toàn, phương trình $F = ma$, ...), và giúp chúng ta có thể giải được bài toán. Nói tóm lại, bằng việc thay đổi rất nhiều tham số và quan sát ảnh hưởng của nó tới hệ đang xét có thể cho chúng ta rất nhiều thông tin quan trọng về hệ.

Hai là, cũng như kiểm tra đơn vị của kết quả, thì kiểm tra kết quả trong trường hợp giới hạn (hoặc trường hợp đặc biệt) là việc bạn luôn luôn nên làm. Nhưng giống như kiểm tra đơn vị, việc kiểm tra này sẽ không giúp chúng ta biết là kết quả nhận được có đúng hay không, tuy nhiên, nó có thể giúp ta biết là kết quả đó hoàn toàn sai. Nói chung thì trực giác của bạn trong những trường hợp tới hạn thường tốt hơn rất nhiều trong trường hợp tổng quát.

Sau đây là một vài ví dụ liên quan đến mục đích thứ hai. Một vài biểu thức ban đầu trong những ví dụ này được lấy từ rất nhiều những ví dụ khác trong quyển sách này, do đó hãy chấp nhận chúng tại thời điểm này. Một công cụ thường được dùng khi kiểm tra những trường hợp giới hạn là chuỗi khai triển Taylor. Bạn có thể tìm khai triễn Taylor của rất nhiều hàm số trong Phụ lục A.

Ví dụ (Quả bóng rơi): Một quả bóng chuyền bãi biển được thả rơi không vận tốc ban đầu từ độ cao h. Giả sử rằng sức cản của không khí có dạng $F_d = -m\alpha v$.

[3]Bạn có thể lập luận rằng khối lượng của trái đất, M_E, và hằng số hấp dẫn Newton, G, cũng nên xuất hiện ở đây, bởi vì lực hấp dẫn cho một chất điểm gần bề mặt trái đất theo định luật hấp dẫn của Newton là $F = GM_E m/R^2$. Nhưng bởi vì lực này có thể viết lại dưới dạng $m(GM_E/R^2) \equiv mg$, do đó chúng ta có thể coi ảnh hưởng của M_E và G nằm ở trong g.

Chúng ta sẽ thấy trong Mục 3.3 rằng vận tốc của quả bóng và vị trí của nó có dạng

$$v(t) = -\frac{g}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t}), \quad \text{và} \quad y(t) = h - \frac{g}{\alpha}\Big(t - \frac{1}{\alpha}\big(1 - e^{-\alpha t}\big)\Big). \tag{1.6}$$

Những biểu thức này khá là phức tạp, do đó chúng ta có thể viết sai một ký tự nào đó. Hoặc tệ hơn, chúng ta có thể viết sai toàn bộ biểu thức. Do đó hãy kiểm tra những trường hợp tới hạn. Nếu kết quả trong những trường hợp tới hạn này là hợp lý, thì chúng ta sẽ yên tâm hơn là kết quả vừa tìm được là đúng.

Nếu giá trị của t là rất nhỏ (chính xác hơn nếu $\alpha t \ll 1$; xem thảo luận sau ví dụ này), thì chúng ta có thể dùng chuỗi khai triển Taylor, $e^{-x} \approx 1 - x + x^2/2$, cho xấp xỉ hàm mũ của αt. Biểu thức $v(t)$ trong phương trình (1.6) trở thành

$$\begin{aligned} v(t) &= -\frac{g}{\alpha}\left(1 - \big(1 - \alpha t + \frac{(\alpha t)^2}{2} - \cdots\big)\right) \\ &\approx -gt, \end{aligned} \tag{1.7}$$

cộng với những số hạng bậc cao hơn của αt. Kết quả này là hợp lý, bởi vì khi lực cản của không khí được bỏ quả thì về cơ bản thì quả bóng sẽ rơi tự do với gia tốc g hướng xuống dưới. Với t nhỏ, phương trình (1.6) cũng cho ta

$$\begin{aligned} y(t) &= h - \frac{g}{\alpha}\left[t - \frac{1}{\alpha}\left(1 - \left(1 - \alpha t + \frac{(\alpha t)^2}{2} - \cdots\right)\right)\right] \\ &\approx h - \frac{gt^2}{2}, \end{aligned} \tag{1.8}$$

cộng với những số hạng bậc cao hơn của αt. Một lần nữa, kết quả này là hợp lý, vì quả bóng sẽ rơi tự do từ đầu, do đó khoảng cách rơi sẽ là $gt^2/2$.

Chúng ta cũng có thể kiểm tra trường hợp khi t có giá trị rất lớn (chính xác hơn là khi αt rất lớn). Trong trường hợp này thì $e^{-\alpha t}$ sẽ xấp xỉ không, do đó biểu thức vận tốc $v(t)$ trong phương trình (1.6) sẽ trở thành (chúng ta không cần khai triển Taylor trong trường hợp này)

$$v(t) \approx -\frac{g}{\alpha}. \tag{1.9}$$

Đây chính là "vận tốc giới hạn". Giá trị của nó là hợp lý, bởi vì nó là vận tốc tại đó tổng hợp lực tác dụng lên quả bóng, $-mg - m\alpha v$, bị triệt tiêu. Với t lớn, phương trình (1.6) cũng cho

$$y(t) \approx h - \frac{gt}{\alpha} + \frac{g}{\alpha^2}. \tag{1.10}$$

Hiển nhiên rằng, khi thời gian t là lớn, $g\alpha^2$ là khoảng cách (và đại lượng này đúng là có đơn vị độ dài, vì α có đơn vị là T^{-1}, và bởi vì $m\alpha v$ có đơn vị của lực) mà quả bóng của chúng ta rơi chậm hơn so với một quả bóng khác rơi với vận tốc ban đầu là vận tốc tới hạn, $-g\alpha$.

Mỗi khi bạn nhận được một kết quả xấp xỉ như bạn đã làm trong ví dụ trên, bạn sẽ đạt được một điều gì đó nhưng bạn cũng sẽ mất đi một cái gì khác. Bạn sẽ mất đi tính chính xác. Điều này là hiển nhiên vì kết quả xấp xỉ là một kết quả không chính xác. Nhưng điều bạn nhận được là sự đẹp đẽ. Kết quả xấp xỉ chắc chắn là sẽ gọn hơn (đôi lúc nó chỉ chứa một số hạng duy nhất), và điều này sẽ giúp chúng ta dễ dàng hình dung được chuyển động của hệ.

Trong ví dụ trên, thực ra sẽ không có nghĩa gì nếu chúng ta xét trường hợp giới hạn khi t rất lớn hoặc rất bé, bởi vì t là đại lượng có thứ nguyên. Liệu thời gian một năm được coi là lớn hay là bé? Thế còn một phần trăm giây thì sao? Chúng ta không thể trả lời những câu hỏi này mà không xét chúng trong một bài toán cụ thể nào đó. Một năm là rất ngắn nếu so sánh với quá trình tiến hóa của thiên hà, nhưng một phần trăm giây lại là rất dài so với một chu trình hạt nhân. Việc xét một đại lượng là bé hay lớn chỉ có nghĩa nếu đại lượng đó là một đại lượng *không thứ nguyên*. Trong ví dụ trên, đại lượng không thứ nguyên này là αt. Hằng số α có đơn vị là T^{-1}, nên $1/\alpha$ sẽ tạo thành thang chia thời gian của hệ. Do đó, nó chỉ có nghĩa nếu chúng ta xét trường hợp tới hạn khi $t \ll 1/\alpha$ (nghĩa là $\alpha t \ll 1$), hoặc khi $t \gg 1/\alpha$ (hay $\alpha t \gg 1$). Trong trường hợp giới hạn của một đại lượng không thứ nguyên có giá trị rất nhỏ, chúng ta có thể sử dụng chuỗi khai triển Taylor để khai triển biểu thức kết quả thành chuỗi lũy thừa của đại lượng nhỏ này, như chúng ta đã làm trong ví dụ trên. Đôi khi chúng ta rất tùy tiện khi nói rằng "Trong giới hạn rất nhỏ của t". Nhưng thực ra chúng ta muốn nói "Trong giới hạn của một đại lượng không thứ nguyên rất nhỏ nào đấy có t là tử số", hoặc "Trong giới hạn khi t là rất nhỏ so với một đại lượng khác cũng có đơn vị là thời gian".

NHẬN XÉT: Như đã nói ở trên, kiểm tra trường hợp đặc biệt có thể giúp chúng ta biết hoặc là (1) kết quả của chúng ta phù hợp với trực giác vật lý của chúng ta, hoặc là (2) kết quả đó sai. Nó không giúp chúng ta khẳng định kết quả đó là đúng. Điều này cũng giống như nghiên cứu khoa học. Trong thực tế, mọi thứ đều phải dẫn về việc làm thí nghiệm. Nếu bạn có một lý thuyết mà bạn nghĩ là nó đúng, thì bạn cần phải kiểm tra những dự đoán từ lý thuyết này có phù hợp với kết quả của thí nghiệm hay không. Nếu kết quả của thí nghiệm không phù hợp với kết quả dự đoán từ lý thuyết, khi đó bạn phải xem lại lý thuyết đó và cải tiến nó, giống như bạn phải xem lại lời giải bài toán và sửa lại lời giải. Mặt khác, nếu kết quả thí nghiệm là phù hợp với dự đoán của lý thuyết, thì mặc dù điều này là tốt nhưng nó cũng chỉ có nghĩa là lý thuyết của bạn *có thể* là đúng. Đó là cách mà các lý thuyết được xây dựng, một lý thuyết mới thường là một lý thuyết không thực sự chính xác, nhưng nó là một trường hợp giới hạn của một lý thuyết chính xác hơn (ví dụ như lý thuyết cơ học Newton là một trường hợp riêng của lý thuyết cơ học tương đối, trong khi lý thuyết cơ học tương đối lại là một trường hợp riêng của lý thuyết cơ học lượng tử, ...). ♣

Khi lấy xấp xỉ, làm thế nào để bạn biết là cần giữ bao nhiêu số hạng trong chuỗi khai triển Taylor? Trong ví dụ trên, chúng ta sử dụng $e^{-x} \approx 1 - x + x^2/2$. Nhưng tại sao chúng ta lại dừng ở số hạng bậc hai? Câu trả lời trung thực (nhưng khá hài hước) là "Bởi vì tôi đã làm bài toán này trước khi viết nó ra, do đó tôi biết là cần giữ bao nhiêu số hạng." Nhưng một câu trả lời đầy đủ hơn (mặc dù có thể là không giúp ích gì hơn) là trước khi làm các phép biến đổi, thực ra là không có cách nào để biết là cần giữ bao nhiêu số hạng. Do đó, bạn nên giữ lại một vài hạng và xem điều gì sẽ xảy ra. Nếu mọi thứ đều bị triệt tiêu thì bạn cần làm lại các phép toán nhưng cần thêm một số hạng nữa trong chuỗi khai triển. Ví dụ như, trong phương trình (1.8), nếu chúng ta dừng chuỗi khai triển Taylor tại $e^{-x} \approx 1 - x$, thì chúng ta sẽ nhận được $y(t) = h - 0$. Kết quả này không có ý nghĩa gì vì trong kết quả chúng ta cần sự có mặt của tham số chủ đạo (tham số này ở đây là t). Do vậy, trong trường hợp này, chúng ta phải xét thêm số hạng bậc hai $x^2/2$ ở trong chuỗi khai triển. Nếu chúng ta vẫn nhận được kết quả mà không phụ thuộc vào t (hoặc bất cứ tham số chủ đạo nào khác), thì chúng ta phải làm lại và xét thêm số hạng bậc ba $-x^3/6$. Tất nhiên, bạn có thể xét luôn nhiều số hạng, ví dụ năm số hạng, để cho an toàn. Nhưng đây chắc chắn là một chiến thuật tồi, bởi vì có thể bạn sẽ chẳng bao giờ cần đến nhiều số hạng như vậy. Do đó, hãy bắt đầu với một hoặc hai số hạng và xem kết quả ra sao. Chú ý rằng trong phương trình (1.7), thực ra chúng ta không cần đến khai triển bậc hai, do đó chúng ta chỉ cần khai triển bậc nhất $e^{-x} \approx 1 - x$ là đủ để giải bài toán. Tuy nhiên, việc dùng thêm một số hạng nữa cũng không gây ra nhiều khó khăn trong khi giải bài toán.

Sau khi bạn lấy xấp xỉ, làm thế nào để bạn biết xấp xỉ đấy là "tốt" hay không? Chúng ta biết rằng sẽ không có ý nghĩa gì nếu hỏi một đại lượng có thứ nguyên là lớn hay bé mà không so sánh nó với một đại lượng khác cùng thứ nguyên. Cũng tương tự như vậy, sẽ không có ý nghĩa gì nếu hỏi một xấp xỉ là "tốt" hay "không tốt" nếu chúng ta không đưa ra một độ chính xác mà ta muốn. Trong ví dụ trên, nếu chúng ta đang xem xét tại thời điểm t sao cho $\alpha t \approx 1/100$, thì số hạng chúng ta bỏ qua trong phương trình (1.7) là nhỏ hơn gt bởi một thừa số $\alpha t/2 \approx 1/200$. Do đó sai số chỉ ở mức 1%. Nếu sai số được coi là đủ chính xác với mục đích tính toán của bạn thì xấp xỉ bạn lấy là tốt. Nếu không, nó không phải là một phép xấp xỉ tốt và bạn cần thêm số hạng vào chuỗi khai triển cho đến khi bạn đạt được độ chính xác mong muốn.

Kết quả của việc kiểm tra các trường hợp giới hạn thông thường rơi vào hai trường hợp. Thường thì bạn đã biết trước kết quả của bài toán trong trường hợp giới hạn và việc kiểm tra này sẽ giúp bạn khẳng định thêm là kết quả bạn vừa tìm là đúng. Nhưng đôi khi bạn lại nhận được một kết quả thú vị của trường hợp tới hạn mà nó lại khác so với kết quả bạn mong đợi. Trường hợp này xảy ra trong những ví dụ sau đây.

Ví dụ (Va chạm đàn hồi giữa hai khối lượng trong trường hợp một chiều): Một khối lượng m chuyển động với vận tốc v va chạm với một khối lượng M đang đứng yên. Hai vật va chạm đàn hồi. Giả sử rằng các chuyển động xảy ra trong trường hợp một chiều. Trong Mục 5.6.1, chúng ta sẽ thấy rằng vận tốc của hai khối lượng sau va chạm là

Hình 1.3:

$$v_m = \frac{(m-M)v}{m+M}, \quad \text{và} \quad v_M = \frac{2mv}{m+M}. \tag{1.11}$$

Có ba trường hợp đặc biệt cần phải kiểm tra ở đây:

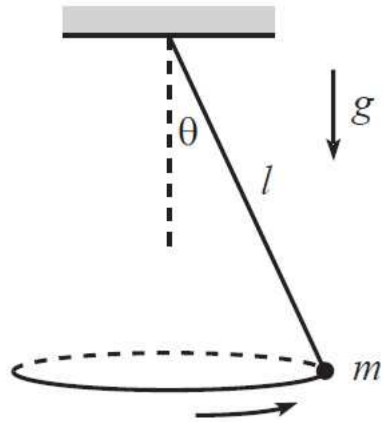
- Nếu $m = M$, thì từ phương trình (1.11) chúng ta biết rằng khối lượng m sẽ dừng lại sau va chạm, và khối lượng M sẽ chuyển động với vận tốc v của m. Điều này có thể tin được (đặc biệt là đối với những người chơi bi-a). Và kết quả này cũng sẽ trở nên rõ ràng hơn nếu bạn nhận ra rằng: sau va chạm thì cả năng lượng và động lượng của hệ được bảo toàn.
- Nếu $M \gg m$, thì khối lượng m sẽ nảy lại với vận tốc $\approx v$, và khối lượng M vẫn gần như đứng yên. Kết quả này là hợp lý vì về cơ bản thì chúng ta có thể coi khối lượng M như là một bức tường.
- Nếu $m \gg M$, thì khối lượng m sẽ tiếp tục chuyển động với vận tốc $\approx v$, và khối lượng M sẽ nhận được vận tốc $\approx 2v$. Vận tốc $2v$ này là một kết quả thú vị và không ngờ tới (kết quả này dễ hình dung hơn nếu bạn xem xét chuyển động của hệ trong hệ quy chiếu của vật nặng khối lượng m), và nó dẫn tới một vài kết quả rất hay trong Bài tập 5.23.

Ví dụ (Chuyển động tròn của con lắc đơn): Một vật được treo vào đầu một sợi dây có chiều dài ℓ. Hệ được thiết lập để vật chuyển động tròn trong mặt phẳng nằm ngang và sợi dây tạo một góc không đổi θ so với phương thẳng đứng (xem Hình vẽ 1.4). Trong Mục 3.5, chúng ta sẽ thấy rằng tần số góc ω của chuyển động sẽ là

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l\cos\theta}}. \tag{1.12}$$

Vì θ được đề cập ở đây, do đó có hai trường hợp giới hạn cần được xét:

- Nếu $\theta \to 90^o$, thì $\omega \to \infty$. Điều này là hợp lý vì vật phải quay với vận tốc rất lớn để không bị hạ xuống.



Hình 1.4:

- Nếu $\theta \to 0$, thì $\omega \to \sqrt{g/\ell}$ sẽ bằng với tần số góc của con lắc đơn thông thường (chuyển động trong mặt phẳng đứng) với biên độ nhỏ. Kết quả này rất thú vị và không phải là điều hiển nhiên. (Nhưng một khi bạn sử dụng phương trình $F = ma$ trong Chương 3, bạn sẽ tìm được kết quả này bằng việc chiếu các lực lên phương nằm ngang).

Trong những ví dụ trên, chúng ta đã kiểm tra những trường hợp giới hạn và những trường hợp đặc biệt của những kết quả chính xác. Những việc này sẽ có ích hơn (và thực ra sẽ thú vị hơn) nếu bạn kiểm tra trường hợp đặc biệt của những kết quả sai. Trong trường hợp này, bạn sẽ nhận được những thông tin rõ ràng rằng là kết quả đó bị sai. Bạn nên vui mừng khi thấy điều này, thay vì thất vọng. Một khi bạn biết kết quả mình tìm được là sai, bạn có thể xem lại lời giải và tìm ra lỗi ở chỗ nào (có thể làm bằng cách kiểm tra trường hợp giới hạn của nhiều biến để thu hẹp phạm vi của việc mắc lỗi). Dù sao đi chăng nữa, việc kiểm tra những trường hợp đặc biệt thường giúp bạn tránh được nhiều rắc rối về sau.

1.4 Giải số phương trình vi phân

Việc giải một bài toán vật lý thường dẫn đến giải một phương trình vi phân. Phương trình vi phân là phương trình liên quan đến đạo hàm (thông thường là đối với thời gian) của biến mà bạn đang tìm. Phương trình vi phân hay xuất hiện vì chúng ta hay dùng định luật hai Newton $F = ma$, hoặc $\tau = I\alpha$, hay là phương trình Lagrange mà ta sẽ xem xét ở Chương 6. Ví dụ như, khi xét bài toán vật rơi tự do, phương trình $F = ma$ sẽ cho ta phương trình $-mg = ma$. Phương trình này sau đó có thể viết lại thành $-g = \ddot{y}$, trong đó dấu chấm biểu thị cho đạo hàm theo thời gian. Đây là một phương trình vi phân khá đơn giản, và bạn có thể dễ dàng đoán được một nghiệm của nó là $y(t) = -gt^2/2$. Nếu các hằng số tích phân cũng xuất hiện trong nghiệm này thì nó có dạng tổng quát hơn là $y(t) = y_0 + v_0 t - gt^2/2$.

Tuy nhiên, phương trình vi phân của một số bài toán sẽ phức tạp hơn, và sớm hay muộn thì bạn cũng sẽ gặp một phương trình mà bạn sẽ không thể tìm được nghiệm chính xác của nó (bởi vì thực ra phương trình này là một phương trình không thể giải được hoặc là bạn không nghĩ ra cách giải). Sau khi từ bỏ ý định tìm nghiệm chính xác của nó, bạn nên tìm cách nhận được một nghiệm xấp xỉ tốt. Cũng rất may là nó khá đơn giản để viết một chương trình tính toán số ngắn gọn tìm ra nghiệm xấp xỉ của bài toán. Nếu cho máy tính chạy đủ lâu thì bạn sẽ tìm ra nghiệm xấp xỉ với độ chính xác tùy ý.

Chúng ta sẽ minh họa cách làm này bằng cách xét một bài toán điển hình mà chúng ta sẽ tìm nghiệm chính xác của nó trong Chương 4. Xét phương trình,

$$\ddot{x} = -\omega^2 x. \tag{1.13}$$

Đây là phương trình chuyển động của con lắc lò xo với tần số góc $\omega = \sqrt{k/m}$. Trong Chương 4, chúng ta thấy rằng nghiệm của phương trình này có thể viết dưới dạng

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi). \tag{1.14}$$

Bây giờ chúng ta coi như là chưa biết nghiệm chính xác này. Nếu chúng ta biết thêm thông tin về $x(0)$ và $\dot{x}(0)$ thì bằng một cách nào đó chúng ta có thể tìm ra giá trị của $x(t)$ và $\dot{x}(t)$ với bất kỳ giá trị nào về sau của t chỉ bằng cách sử dụng phương trình (1.13). Về cơ bản, nếu chúng ta được biết thời điểm ban đầu của hệ và biết cách thức mà hệ sẽ tiếp diễn, thông qua phương trình (1.13), thì chúng ta có thể biết mọi thông tin về hệ đó. Sau đây là cách mà chúng ta sẽ tìm $x(t)$ và $\dot{x}(t)$.

Cách chúng ta làm là sẽ rời rạc hóa thời gian thành các khoảng đơn vị nhỏ (gọi là ϵ), và xem cái gì sẽ xảy ra tại những điểm thời gian liên tiếp này. Nếu chúng ta biết giá trị của $x(t)$ và $\dot{x}(t)$, thì chúng ta có thể dễ dàng tìm (một cách xấp xỉ) giá trị của x tại một khoảng thời gian rất nhỏ sau đó bằng việc sử dụng định nghĩa của $\dot{x}$. Một cách tương tự, nếu chúng ta biết $\dot{x}(t)$ và $\ddot{x}(t)$, thì chúng ta có thể dễ dàng tìm ra (một cách xấp xỉ) giá trị của $\dot{x}$ tại khoảng thời gian nhỏ sau đó bằng cách sử dụng định nghĩa của $\ddot{x}$. Sử dụng định nghĩa của đạo hàm, những mối quan hệ này có thể được xấp xỉ một cách đơn giản như sau

$$\begin{aligned} x(t+\epsilon) &\approx x(t) + \epsilon\dot{x}(t), \\ \dot{x}(t+\epsilon) &\approx \dot{x}(t) + \epsilon\ddot{x}(t). \end{aligned} \tag{1.15}$$

Hai phương trình này, kết hợp với phương trình (1.13), sẽ cho ta giá trị của $\ddot{x}$ theo x. Điều này cho phép chúng ta nhận được những giá trị liên tiếp của x, $\dot{x}$ và $\ddot{x}$ theo thời gian.[4]

[4]Tất nhiên, một biểu thức của $\ddot{x}$ tương tự như trong (1.15) có thể được viết ra liên quan đến đạo

Dưới đây là một chương trình điển hình của phương pháp này.[5] (Chương trình này được viết bởi Maple, nhưng thậm chí bạn không biết gì về Maple thì ý tưởng chính trong chương trình này rất là rõ ràng.) Giả sử rằng phần tử sẽ bắt đầu chuyển động từ trạng thái đứng yên tại vị trí $x = 2$, và cho tần số góc $\omega^2 = 5$. Chúng ta sẽ sử dụng ký hiệu x_1 cho $\dot{x}$, x_2 cho $\ddot{x}$ và e cho ϵ. Bây giờ chúng ta sẽ tính giá trị của x tại thời gian, ví dụ như, $t = 3$.

```
x:=2:              # vị trí ban đầu
x1:=0:             # vận tốc ban đầu
e:=.01:            # độ dài khoảng thời gian
for i to 300 do    # thực hiện vòng lặp 300 bước (tức là 3 giây)
x2:=-5*x:          # phương trình đã cho
x:=x+e*x1:         # cách thức x thay đổi theo định nghĩa của x1
x1:=x1+e*x2:       # cách thức x1 thay đổi theo định nghĩa của x2
end do:            # lệnh của Maple để dừng vòng lặp
x;                 # in ra giá trị của x
```

Thuật toán này không cho ta giá trị chính xác của x, bởi vì x và $\dot{x}$ thực ra không biến đổi như trong những phương trình (1.15). Những phương trình này chỉ là xấp xỉ bậc nhất của chuỗi khai triển Taylor đầy đủ với các số hạng bậc cao hơn. Nói một cách khác, không có cách nào mà thuật toán trên có thể cho ta nghiệm chính xác, bởi vì có một vài chỗ nhập nhằng trong thuật toán đó. Ví dụ như hàng lệnh thứ 5 nên đặt trước hay sau hàng lệnh 7? Nghĩa là, để xác định $\dot{x}$ tại thời gian $t + \epsilon$, chúng ta nên sử dụng $\ddot{x}$ tại thời điểm t hay $t + \epsilon$? Và hàng lệnh thứ 7 nên đặt trước hay sau hàng lệnh 6? Điểm mấu chốt ở đây là với giá trị rất nhỏ của ϵ, thứ tự của các hàng lệnh sẽ không ảnh hưởng nhiều đến kết quả. Và khi $\epsilon \to 0$ thì thứ tự đó sẽ không có ảnh hưởng gì cả.

Nếu chúng ta muốn nhận được kết quả xấp xỉ tốt hơn, chúng ta có thể giảm giá trị của ϵ xuống còn 0.001 và tăng số bước trong vòng lặp lên 3000. Nếu kết quả mới về cơ bản không khác gì so với khi $\epsilon = 0.01$ thì chúng ta biết rằng chúng ta đã có kết quả rất

hàm bậc ba. Nhưng việc này sẽ đòi hỏi chúng ta phải biết về đạo hàm bậc ba và do đó phải biết về đạo hàm bậc cao hơn. Điều này sẽ dẫn đến việc chúng ta sẽ nhận được một chuỗi vô hạn các quan hệ của các bậc đạo hàm. Một *phương trình chuyển động* giống như phương trình (1.13) (thường là phương trình $F = ma$, $\tau = I\alpha$, hoặc là phương trình Lagrange) chỉ liên quan đến $\ddot{x}$ trở lại x (và có thể là $\dot{x}$), do đó chúng ta chỉ cần tạo ra các phương trình liên quan đến x, $\dot{x}$ và $\ddot{x}$ và loại bỏ những đạo hàm bậc cao hơn.

[5]Chúng tôi đã viết chương trình này một cách trực tiếp nhất mà không quan tâm đến việc nó tối ưu nhất hay chưa, bởi vì thời gian tính toán không phải là một vấn đề trong những bài toán đơn giản như thế này. Tuy nhiên, trong những hệ phức tạp hơn mà yêu cầu phải viết nhiều chương trình thì thời gian tính toán trở thành một vấn đề. Một phần chính của quá trình giải toán đó là phải phát triển chương trình lập trình sao cho nó tối ưu nhất có thể.

tốt. Trong ví dụ này, khi $\epsilon = 0.01$ chúng ta nhận được $x \approx 1.965$ sau thời gian 3 giây. Nếu chúng ta cho $\epsilon = 0.001$ thì chúng ta nhận được $x \approx 1.836$. Và nếu $\epsilon = 0.0001$, thì ta có $x \approx 1.823$. Do đó, kết quả chính xác có giá trị khoảng $x = 1.82$. Thực ra, nếu chúng ta giải bài toán trên tìm nghiệm một cách chính xác, chúng ta sẽ nhận được $x(t) = 2\cos(\sqrt{5}t)$. Thay giá trị $t = 3$ vào cho ta $x \approx 1.822$.

Thuật toán trên thật là tuyệt vời, nhưng chúng ta không nên lạm dụng nó. Đúng là rất là dễ chịu nếu chúng ta biết rằng chúng ta luôn luôn có thể nhận được một kết quả xấp xỉ số khá tốt trong trường hợp không thể tìm được kết quả nghiệm chính xác. Nhưng đầu tiên, chúng ta cũng nên luôn đặt ra là phải tìm được biểu thức nghiệm chính xác cho bài toán, vì điều này cho phép chúng ta biết được ứng xử nói chung của hệ. Và hơn nữa, không có gì tốt hơn là sự chính xác (chứ không phải là cái gần đúng). Ngày nay con người có xu hướng dựa dẫm vào máy tính quá nhiều mà không dành một chút thời gian để nghĩ về cái gì thực sự đang diễn ra trong bài toán.

1.5 Bài tập

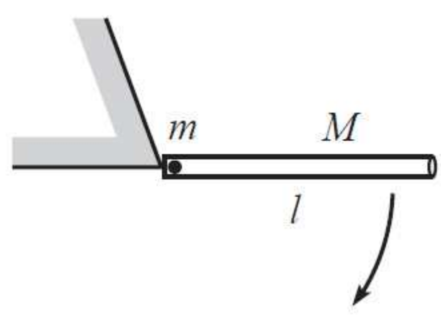
Mục 1.2: Phân tích đơn vị và thứ nguyên

1.1. Vận tốc thoát *

Như sẽ được đưa ra trong bài luyện tập 1.9 ở phần sau, hãy chỉ ra rằng vận tốc thoát khỏi trái đất là $v = \sqrt{2GM_E/R}$ nhân với một hệ số hằng số nào đó. Bạn có thể sử dụng một thực tế rằng dạng của định luật hấp dẫn Newton suy ra rằng gia tốc (và do đó cả chuyển động nói chung) của phần tử rơi tự do không phụ thuộc vào khối lượng của nó.

1.2. Vật chuyển động trong một ống *

Một ống có khối lượng M, độ dài ℓ quay tự do xung quanh một chốt tại một đầu của



Hình 1.5:

ống. Một khối lượng m được đặt bên trong ống tại đầu đó. Mặt trong ống không có ma sát. Ống được đặt nằm ngang và sau đó được thả ra (xem Hình vẽ 1.5). Gọi η là phần tỷ lệ của độ dài của ống mà khối lượng m chuyển động tới khi ống đạt được vị trí thẳng đứng. Tỷ lệ η này có phụ thuộc vào độ dài ℓ không?

1.3. Sóng truyền trong chất lỏng *

Vận tốc sóng truyền trong chất lỏng phụ thuộc như thế nào vào khối lượng riêng, ρ, và "module khối", B, (có đơn vị áp suất là lực trên đơn vị diện tích) của chất lỏng?

1.4. Ngôi sao rung *

Xét một ngôi rung có tần số là ν phụ thuộc (một cách tối đa) vào bán kính R, khối lượng riêng ρ của nó và vào hằng số hấp dẫn Newton G. Khi đó ν sẽ phụ thuộc như thế nào vào R, ρ và G?

1.5. Lực cản **

Một chất điểm có khối lượng m chuyển động với vận tốc ban đầu V chịu một lực cản phụ thuộc vào vận tốc có dạng bv^n.

(a) Với $n = 0, 1, 2, \ldots$, hãy xác định xem thời gian chất điểm chuyển động đến khi dừng lại phụ thuộc như thế nào vào m, V và b.

(b) Với $n = 0, 1, 2, \ldots$, hãy xác định xem quãng đường chất điểm chuyển động đến khi dừng lại phụ thuộc như thế nào vào m, V và b.

Hãy cẩn thận! Hãy xem kết quả bạn tìm ra có hợp lý hay không. Việc phân tích thứ nguyên chỉ cho ta kết quả với sai khác một hệ số hằng số. Đây là một bài toán mẹo khá khó nhưng đừng để nó làm nhụt chí bạn sử dụng phân tích thứ nguyên. Hầu hết những ứng dụng của phân tích thứ nguyên đều không phức tạp.

Mục 1.3: Xấp xỉ kết quả và những trường hợp đặc biệt

1.6. Tầm xa ném xiên *

Một người ném một quả bóng theo một góc nào đó để đạt được tầm xa lớn nhất với vận tốc v từ mỏm một vách đá có độ cao h. Giả sử rằng một trong các đại lượng sau đây là tầm xa lớn nhất mà quả bóng di chuyển, đó chính là đại lượng nào? (Bạn không nên giải bài toán mà chỉ kiểm tra các trường hợp đặc biệt.)

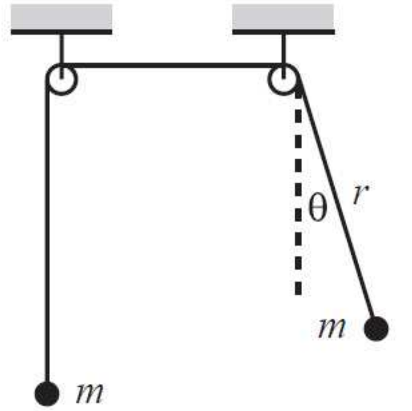
$$\frac{gh^2}{v^2}, \quad \frac{v^2}{g}, \quad \sqrt{\frac{v^2h}{g}}, \quad \frac{v^2}{g}\sqrt{1+\frac{2gh}{v^2}}, \quad \frac{v^2}{g}\left(1+\frac{2gh}{v^2}\right), \quad \frac{v^2/g}{1-\frac{2gh}{v^2}}.$$

Mục 1.4: Giải số phương trình vi phân

1.7. Hệ hai vật, trong đó một vật đu đưa **

Hai vật có khối lượng bằng nhau được nối với nhau bởi một sợi dây được treo vào ròng rọc (bỏ qua kích thước của ròng rọc) như Hình vẽ 1.6. Vật bên trái chuyển động theo phương thẳng đứng, còn vật bên phải đu đưa qua lại trong mặt phẳng của hai vật và các ròng rọc. Bài tập 6.4 sẽ chỉ ra rằng phương trình chuyển động của hệ cho r và θ (được ký hiệu như trong hình vẽ) là

$$\begin{aligned} 2\ddot{r} &= r\dot{\theta}^2 - g(1-\cos\theta), \\ \ddot{\theta} &= -\frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{r} - \frac{g\sin\theta}{r}. \end{aligned} \tag{1.16}$$



Hình 1.6:

Giả sử rằng tại thời điểm ban đầu cả hai vật đều đứng yên và vật bên phải được kéo ra một góc $10^o = \pi/18$ so với phương thẳng đứng. Nếu độ dài ban đầu của r là 1m, hỏi phải mất một thời gian bao lâu để nó đạt được độ dài là 2m? Hãy viết một chương trình để giải số bài toán này, biết rằng $g = 9.8\text{m/s}^2$.

1.6 Bài tập luyện tập

Mục 1.2: Phân tích đơn vị và thứ nguyên

1.8. Con lắc đơn trên mặt trăng
Nếu một con lắc đơn có chu kỳ dao động là 3s trên bề mặt trái đất thì nó sẽ có chu kỳ dao động là bao nhiêu nếu nó được đặt trên mặt trăng? Biết rằng $g_M/g_E \approx 1/6$.

1.9. Vận tốc thoát *
Vận tốc thoát trên bề mặt của một hành tinh được cho bởi

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}, \tag{1.17}$$

trong đó M và R tương ứng là khối lượng và bán kính của hành tinh, và G là hằng số hấp dẫn Newton. (Vận tốc thoát là vận tốc mà câu châm ngôn "Cái gì bay lên thì trước sau gì cũng phải rơi xuống" không còn đúng nữa nếu bỏ qua lực cản của không khí).

(a) Hãy viết vận tốc v phụ thuộc vào khối lượng riêng trung bình ρ, thay vì phụ thuộc vào M.

(b) Giả sử rằng khối lượng riêng trung bình của của trái đất gấp bốn lần khối lượng riêng trung bình của sao Mộc, và bán kính của sao Mộc thì gấp 11 lần bán kính của trái đất. Hỏi tỷ số v_J/v_E bằng bao nhiêu?

1.10. Ném xiên xuống dưới đồi *

Một ngọn đồi nghiêng xuống một góc θ so với phương nằm ngang. Một vật khối lượng m được ném với vận tốc ban đầu v_0 theo phương vuông góc với ngọn đồi. Khi nó rơi xuống lại ngọn đồi, gọi β là góc giữa vector vận tốc của nó và phương nằm ngang. Hỏi β phụ thuộc vào những đại lượng sau đây: θ, m, v_0 và g?

1.11. Sóng truyền trong sợi dây *

Vận tốc sóng truyền trong sợi dây phụ thuộc như thế nào vào khối lượng M, độ dài L và sức căng T của sợi dây?

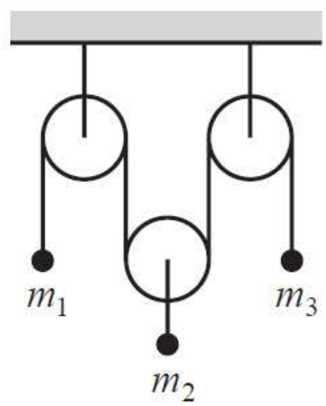
1.12. Dao động của giọt nước *

Xét dao động của một giọt nước có tần số dao động ν phụ thuộc vào bán kính R, khối lượng riêng ρ và sức căng bề mặt S của nó. Đơn vị của sức căng bề mặt là (lực)/(độ dài). Hỏi ν phụ thuộc như thế nào vào R, ρ và S?

Mục 1.3: Xấp xỉ kết quả và những trường hợp đặc biệt

1.13. Máy Atwood *

Xét mô hình máy Atwood như trong Hình vẽ 1.7. Nó bao gồm ba khối lượng và ba ròng



Hình 1.7:

rọc không ma sát. Có thể chứng minh được rằng gia tốc của khối lượng m_1 được cho bởi (tạm thời bây giờ hãy chấp nhận công thức này)

$$a_1 = g\frac{3m_2m_3 - m_1(4m_3 + m_2)}{m_2m_3 + m_1(4m_3 + m_2)}, \tag{1.18}$$

với chiều dương là chiều hướng lên trên. Hãy xác định a_1 trong những trường hợp đặc biệt sau:

(a) $m_2 = 2m_1 = 2m_3$.

(b) m_1 rất lớn so với cả m_2 và m_3.

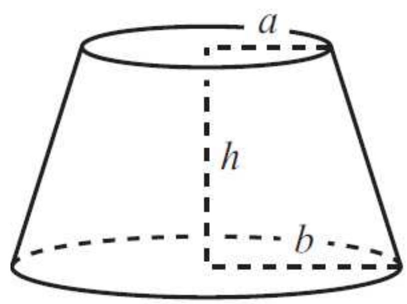
(c) m_1 rất nhỏ so với cả m_2 và m_3.

(d) $m_2 \gg m_1 = m_3$.

(e) $m_1 = m_2 = m_3$.

1.14. Hình nón cụt *

Một hình nón cụt có bán kính mặt đáy b, bán kính mặt trên a và có độ cao h như trong



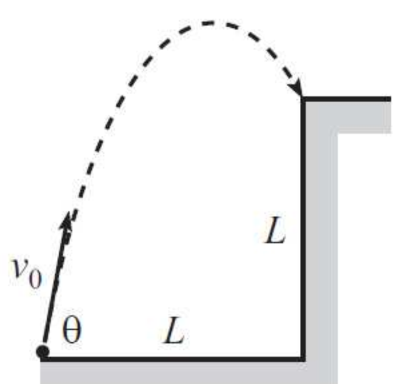
Hình 1.8:

Hình vẽ 1.8. Giả sử rằng một trong những đại lượng dưới đây là thể tích của hình nón cụt, hãy xác định đại lượng đó? (Bạn không nên giải trực tiếp bài toán, mà chỉ kiểm tra các trường hợp đặc biệt.)

$$\frac{\pi h}{3}(a^2+b^2), \quad \frac{\pi h}{2}(a^2+b^2), \quad \frac{\pi h}{3}(a^2+ab+b^2),$$
$$\frac{\pi h}{3}.\frac{a^4+b^4}{a^2+b^2}, \quad \pi hab.$$

1.15. Rơi vào cạnh vuông *

Một quả bóng được ném dưới góc nghiêng θ lên trên đỉnh một vách đá có độ cao L từ



Hình 1.9:

một điểm có khoảng cách L so với chân của vách đá như trong Hình vẽ 1.9. Giả sử rằng một trong các đại lượng dưới đây là vận tốc đầu của quả bóng sao cho nó rơi xuống đúng cạnh của vách đá, hãy xác định đại lượng đó? (Bạn không nên giải trực tiếp bài toán, mà chỉ kiểm tra các trường hợp đặc biệt.)

$$\sqrt{\frac{gL}{2(\tan\theta-1)}},\quad \frac{1}{\cos\theta}\sqrt{\frac{gL}{2(\tan\theta-1)}},\quad \frac{1}{\cos\theta}\sqrt{\frac{gL}{2(\tan\theta+1)}},$$
$$\sqrt{\frac{gL\tan\theta}{2(\tan\theta+1)}}.$$

1.16. Ném xiên có cản **

Xét một vật ném xiên chịu tác động của lực cản có dạng $\mathbf{F} = -m\alpha\mathbf{v}$. Nếu nó được ném với vận tốc đầu v_0 dưới góc nghiêng θ, thì chúng ta có thể chứng minh rằng độ cao của nó có thể biểu diễn như là một hàm của thời gian như sau (bạn hãy tạm thời chấp nhận công thức này, đây chính là Bài tập luyện tập 3.53)

$$y(t) = \frac{1}{\alpha}\left(v_0\sin\theta + \frac{g}{\alpha}\right)\left(1 - e^{-\alpha t}\right) - \frac{gt}{\alpha}. \tag{1.19}$$

Hãy chỉ ra rằng biểu thức này sẽ trở về biểu thức độ cao thông thường trong ném xiên, $y(t) = (v_0\sin\theta)t - gt^2/2$, khi α là vô cùng bé. Hãy giải thích rõ ràng khái niệm "α vô cùng bé" trong trường hợp này?

Mục 1.4: Giải số phương trình vi phân

1.17. Con lắc đơn **

Một con lắc đơn có độ dài ℓ được thả ra từ vị trí nằm ngang. Có thể chỉ ra rằng phương trình định luật II Newton theo phương tiếp tuyến $F = ma$ là (trong đó θ là góc giữa sợi dây và phương thẳng đứng)

$$\ddot{\theta} = -\frac{g\sin\theta}{l}. \tag{1.20}$$

Nếu $\ell = 1$m, và $g = 9.8\text{m/s}^2$, hãy viết một chương trình để chỉ ra rằng thời gian để con lắc chuyển động xuống dưới tới vị trí thẳng đứng là $t \approx 0.592$s. Giá trị này vào khoảng 1.18 lần giá trị $(\pi/2)\sqrt{l/g} \approx 0.502$s là thời gian con lắc chuyển động từ khi được thả ra tại vị trí rất gần với phương thẳng đứng tới vị trí thẳng đứng (đây là 1/4 giá trị của chu kỳ dao động bé $2\pi\sqrt{l/g}$ của con lắc đơn). Giá trị này cũng vào khoảng 1.31 lần giá trị $\sqrt{2l/g} \approx 0.452$s là thời gian mà một khối lượng rơi tự do xuống một độ cao ℓ.

1.18. Quãng đường dịch chuyển trong chuyển động có cản **

Một vật chịu tác động của lực cản tỷ lệ với vận tốc của nó, nghĩa là phương trình chuyển động của vật có dạng $\ddot{x} = -A\dot{x}$, trong đó A là một hằng số. Nếu vận tốc ban đầu của vật là 2m/s, và nếu $A = 1\text{s}^{-1}$, hỏi quãng đường mà vật di chuyển trong thời gian 1s? 10s? 100s? Bạn cũng nên xem giá trị của quãng đường này sẽ tiến tới giá trị nào.

Bây giờ hãy giả sử rằng vật chịu tác động của lực cản tỷ lệ với bình phương vận tốc của nó, nghĩa là phương trình chuyển động có dạng $\ddot{x} = -A\dot{x}^2$, với A là một hằng số. Nếu vận tốc ban đầu của vật là 2m/s, và nếu $A = 1\text{m}^{-1}$, hỏi quãng đường mà vật di chuyển trong thời gian 1s? 10s? 100s? Quãng đường sẽ là bao nhiêu nếu thời gian di chuyển là một số mũ nào đó của 10 có bậc cao hơn? Bạn nên chứng minh được rằng quãng đường sẽ tiếp tục tăng theo thời gian, nhưng sẽ chậm dần theo hàm log của t. (Kết quả trong hai trường hợp này sẽ trùng với kết quả trong Bài tập 1.5)

1.7 Lời giải

1.1. Vận tốc thoát

Sau khi đọc đề bài, rất có khả năng là bạn sẽ sử dụng những lập luận như trong ví dụ Vệ tinh quỹ đạo thấp trong Mục 1.2. Bạn cũng sẽ nhận được kết quả đúng, $v = C\sqrt{gR} = C\sqrt{GM_E/R}$, với C là hằng số nào đó (thực ra $C = \sqrt{2}$). Mặc dù bạn nhận được kết quả đúng nhưng những lập luận bạn dùng là hoàn toàn sai như đã đề cập trong phần chú thích của ví dụ Vệ tinh quỹ đạo thấp. Bởi vì phần tử không phải lúc nào cũng chuyển động với cùng một bán kính nên lực hấp dẫn tác động lên nó cũng sẽ thay đổi, do đó chúng ta không thể coi ảnh hưởng của M_E và G là nằm ở trong g được nữa (như chúng ta đã làm đối với ví dụ Vệ tinh quỹ đạo thấp). Sau đây ta sẽ giải bài toán này bằng những lập luận chính xác hơn.

Những đại lượng có thứ nguyên trong bài toán này là $[m] = M$, bán kính của trái đất $[R] = L$, khối lượng của trái đất $M_E = M$, và hằng số hấp dẫn Newton $[G] = L^3/MT^2$. Đơn vị của G nhận được từ định luật hấp dẫn, $F = Gm_1m_2/r^2$. Nếu chúng ta không sử dụng thêm thông tin nào nữa ngoài những đại lượng này thì không có cách nào để nhận được kết quả của vận tốc thoát có dạng $C\sqrt{GM_E/R}$, bởi vì với tất cả những gì ta biết thì có thể $(m/M_E)^7$ sẽ tham gia vào trong kết quả. Tỷ số này là không có thứ nguyên, do đó nó sẽ không ảnh hưởng gì đến đơn vị của kết quả.

Để giải được bài toán, chúng ta phải dùng một thực tế rằng lực hấp dẫn có dạng GM_Em/r^2. Điều này dẫn đến gia tốc của phần tử không phụ thuộc vào m. Hơn nữa, chuyển động của phần tử phụ thuộc vào gia tốc của nó, do đó kết quả của bài toán không thể nào phụ thuộc vào m. Như vậy chỉ có các đại lượng G, R và M_E là sẽ tham gia vào trong công thức của kết quả, và ta có thể chỉ ra rằng một tổ hợp duy nhất của ba đại lượng này mà có đơn vị vận tốc là $v = C\sqrt{GM_E/R}$.

1.2. Vật chuyển động trong một ống

Những đại lượng có thứ nguyên trong bài toán là $[g] = L/T^2$, $[\ell] = L$, $[m] = M$, và $[M] = M$. Chúng ta muốn tìm đại lượng không thứ nguyên η. Bởi vì g là đại lượng duy nhất liên quan đến thời gian nên η không thể phụ thuộc vào g. Do đó η cũng sẽ không phụ thuộc vào ℓ vì ℓ là đại lượng duy nhất còn lại liên quan đến độ dài. Vậy η chỉ còn phụ thuộc vào m và M (và do đó sẽ phụ thuộc vào tỷ số m/M vì chúng ta đang tìm kết quả là một đại lượng không thứ nguyên). Do vậy câu trả lời cho bài toán này là "Không".

Thực ra nếu bạn muốn tìm giá trị của η, chúng ta sẽ phải giải bài toán bằng phương pháp số (trong Bài tập 8.5). Một vài kết quả cho bài toán này là: Nếu $m \ll M$, thì $\eta \approx 0.349$. Nếu $m = M$, thì $\eta \approx 0.378$. Và nếu $m = 2M$, thì $\eta \approx 0.410$.

1.3. Sóng truyền trong chất lỏng

Chúng ta muốn tìm kết quả vận tốc $[v] = L/T$ từ những đại lượng $[\rho] = M/L^3$ và $[B] = [F/A] = (ML/T^2)/(L^2) = M/(LT^2)$. Chúng ta có thể tìm mò ra tổ hợp của hai đại lượng này để nhận được đơn vị mong muốn, nhưng hãy làm theo cách mà không thể nào sai được. Nếu $v \propto \rho^a B^b$, thì ta có

$$\frac{L}{T} = \left(\frac{M}{L^3}\right)^a \left(\frac{M}{LT^2}\right)^b. \tag{1.21}$$

Cân bằng số mũ của ba loại đơn vị trong hai vế của phương trình này ta có

$$M : 0 = a + b, \quad L : 1 = -3a - b, \quad T : -1 = -2b. \tag{1.22}$$

Nghiệm của hệ phương trình này là $a = -1/2$ và $b = 1/2$. Do đó, kết quả của bài toán là $v \propto \sqrt{B/\rho}$. Cũng may là chỉ có một nghiệm duy nhất của hệ ba phương trình hai ẩn trên.

1.4. Ngôi sao rung

Chúng ta muốn tìm tần số, $[\nu] = 1/T$, từ các đại lượng $[R] = L$, $[\rho] = M/L^3$, và $[G] = L^3/(MT^2)$. Đơn vị của G nhận được từ định luật hấp dẫn, $F = Gm_1m_2/r^2$. Như ở trong bài tập trước, chúng ta có thể mò ra tổ hợp của ba đại lượng này mà có đơn vị của tần số, nhưng hãy làm theo cách mà không thể sai được. Nếu $\nu \propto R^a \rho^b G^c$, thì ta có

$$\frac{1}{T} = L^a \left(\frac{M}{L^3}\right)^b \left(\frac{L^3}{MT^2}\right)^c. \tag{1.23}$$

Cân bằng số mũ của ba loại đơn vị trong hai vế của phương trình này ta có

$$M : 0 = b - c, \quad L : 0 = a - 3b + 3c, \quad T : -1 = -2c. \tag{1.24}$$

Nghiệm của hệ phương trình này là $a = 0$, và $b = c = 1/2$. Do đó, kết quả của bài toán là $\nu \propto \sqrt{\rho G}$. Như vậy là bán kính R không phụ thuộc gì vào kết quả.

> NHẬN XÉT: Chú ý sự khác biệt giữa những đại lượng trong bài toán này (R, ρ và G) và những đại lượng trong Bài tập luyện tập 1.12 (R, ρ và S). Với ngôi sao trong bài toán này, khối lượng của nó là đủ lớn để cho phép ta bỏ qua sức căng mặt ngoài S. Và trong Bài tập 1.12 đối với giọt nước, khối lượng của nó là nhỏ nên chúng ta có thể bỏ qua lực hấp dẫn, và do đó bỏ qua đại lượng G. ♣

1.5. Lực cản

(a) Hằng số b có đơn vị $[b] = [\text{Lực}][v^{-n}] = (ML/T^2)(T^n/L^n)$. Những đại lượng khác là $[m] = M$ và $[V] = L/T$. Chúng ta cũng có thêm đại lượng không thứ nguyên n. Bạn có thể chỉ ra rằng tổ hợp duy nhất của các đại lượng này mà có đơn vị của T là

$$t = f(n)\frac{m}{bV^{n-1}}, \tag{1.25}$$

với $f(n)$ là một hàm không thứ nguyên của n.

Với $n = 0$, ta có $t = f(0)mV/b$. Nó tăng đối với m và V, và giảm đối với b.

Với $n = 1$, ta có $t = f(1)m/b$. Vì vậy chúng ta *dường như* nhận được $t \sim m/b$. Tuy nhiên, điều này là hoàn toàn sai, vì t phải tăng cùng với V. Đối với vận tôc ban đầu V_1 lớn thì cần có một khoảng thời gian khác không nào đó để vật chuyển động chậm dần về vận tốc V_2, và sau đó thì chúng ta lại có bài toán y như vậy nhưng đối với vận tốc ban đầu V_2. Vậy chúng ta đã làm sai ở đâu? Cuối cùng, sau tất cả, thì việc phân tích thứ nguyên chỉ cho chúng ta biết kết quả sẽ có dạng $t = f(1)m/b$, trong đó $f(1)$ là một hệ số nào đó. Lời giải cho bài toán này sẽ là $f(1)$ là một số không xác định. Nếu chúng ta giải bài toán này bằng cách sử dụng định luật hai Newton $F = ma$, thì cuối cùng chúng ta cũng sẽ vấp phải một phép tích phân không hội tụ. Do đó, đối với vận tốc ban đầu V bất kỳ, chúng ta sẽ tìm ra thời gian chuyển động của nó là một giá trị vô hạn t.[6]

Một cách tương tự, với $n \geq 2$, sẽ có ít nhất một số mũ của V trong mẫu số của t. Kết quả này cũng không thể nào đúng được, bởi vì t không thể nào giảm đối với V. Do đó, $f(n)$ tương tự cũng phải là một giá trị vô hạn đối với tất cả những trường hợp này.

Bài học rút ra từ bài toán này là đôi khi bạn phải rất cẩn thận khi sử dụng phương pháp phân tích thứ nguyên. Thông thường thì hệ số trong kết quả của bạn có bậc 1, nhưng đôi khi nó có thể là 0 hoặc ∞.

> NHẬN XÉT: Với $n \geq 1$, biểu thức trong phương trình (1.25) vẫn còn hữu ích. Ví dụ như với $n = 2$, biểu thức $m/(Vb)$ sẽ có ích nếu bạn muốn tính thời gian chất điểm chuyển động từ vận tốc V xuống vận tốc cuối V_f. Kết quả sẽ có dạng $m/(V_\mathrm{f}b)$, sẽ phân kỳ khi $V_\mathrm{f} \longrightarrow 0$. ♣

(b) Bạn có thể chỉ ra rằng tổ hợp duy nhất của các đại lượng đã cho mà có đơn vị của L là

$$l = g(n)\frac{m}{bV^{n-2}}, \tag{1.26}$$

[6] Tổng thời gian chuyển động t thực ra là không xác định, bởi vì chất điểm sẽ không bao giờ dừng lại. Nhưng t tăng đối với V theo nghĩa là nếu t được định nghĩa là khoảng thời gian mà vận tốc của chất điểm giảm xuống một giá trị nào đó.

với $g(n)$ là một hàm không thứ nguyên của n.

Với $n = 0$, ta có $\ell = g(0)mV^2/g$, tăng đối với V.

Với $n = 1$, ta có $\ell = g(1)mV/b$, tăng đối với V.

Với $n = 2$, ta có $\ell = g(2)m/b$. Do đó chúng ta *dường như* có $\ell \sim m/b$. Tuy nhiên, giống như trong phần (a), điều này không thể đúng, bởi vì ℓ phải phụ thuộc vào vận tốc đầu V. Đối với vận tôc ban đầu V_1 lớn thì cần có một khoảng thời gian khác không nào đó để vật chuyển động chậm dần về vận tốc V_2, và sau đó thì chúng ta lại có bài toán y như vậy nhưng đối với vận tốc ban đầu V_2. Do đó, từ lập luận trong phần (a), tổng quãng đường chất điểm di chuyển là không xác định với $n \geq 2$, bởi vì hàm g là không xác định.

NHẬN XÉT: Chú ý rằng với $n \neq 1$, cả t và ℓ hoặc là xác định, hoặc là không xác định. Tuy nhiên, với $n = 1$, tổng thời gian chuyển động là vô cùng, trong khi đó tổng quãng đường chuyển động là hữu hạn. Trường hợp này thực ra xảy ra khi $1 \leq n < 2$, nếu chúng ta xem xét trường hợp n là một phân số. ♣

1.6. Tầm xa ném xiên

Tất cả các đại lượng đã cho đều có đơn vị phù hợp, do đó chúng ta sẽ giải bài toán bằng cách xem xét các trường hợp đặc biệt. Hãy xét lần lượt từng đại lượng một:

$\frac{gh^2}{v^2}$: Không đúng, bởi vì với $h = 0$ thì kết quả cũng không thể bằng không. Hơn nữa, tầm xa cũng không thể tăng đối với g. Và tệ hơn là, nó không thể bằng vô cùng khi $v \longrightarrow 0$.

$\frac{v^2}{g}$: Không đúng, bởi vì kết quả phải phụ thuộc vào h.

$\sqrt{\frac{v^2h}{g}}$: Không đúng, bởi vì kết quả sẽ bằng không khi $h = 0$.

$\frac{v^2}{g}\sqrt{1 + \frac{2gh}{v^2}}$: Không thể loại bỏ kết quả này được và thực ra nó là kết quả đúng.

$\frac{v^2}{g}(1 + \frac{2gh}{v^2})$: Không đúng, bởi vì kết quả sẽ bằng không khi $v \longrightarrow 0$ nhưng biểu thức này lại bằng $2h$ khi $v \longrightarrow 0$.

$\frac{v^2/g}{1-\frac{2gh}{v^2}}$: Không đúng, bởi vì kết quả không thể bằng vô cùng khi $v^2 = 2gh$.

1.7. Hệ hai vật, trong đó một vật đu đưa

Như trong Mục 1.4, chúng ta sẽ viết chương trình tính toán bằng ngôn ngữ Maple. Chúng ta đặt q cho θ, và ta sẽ sử dụng ký hiệu q_1 cho $\dot{\theta}$, $q2$ cho $\ddot{\theta}$. Tương tự như vậy cho r. Chúng ta sẽ chạy chương trình với $r < 2$. Một khi r vượt quá giá trị 2, chương trình sẽ ngừng chạy và in ra kết quả.

Insert lệnh của Maple ....

Chương trình này sẽ tính ra $t = 8.057$s. Nếu chúng ta dùng đơn vị tăng của thời gian là 0.0001s, chúng ta sẽ nhận được kết quả $t = 8.1377$s. Và nếu bước tăng là 0.00001s thì kết quả là $t = 8.14591$s. Do vậy, kết quả chính xác sẽ vào khoảng 8.15s.

Chương 2

Tĩnh học

Trong các quyển sách khác, phần tĩnh học thường xuất hiện ở các chương sau, sau khi phần lực và moment lực đã được thảo luận xong. Tuy nhiên, việc sử dụng lực và moment lực trong các bài toán tĩnh học là khá ít, ít nhất là so với những gì chúng ta sẽ làm ở các phần sau trong quyển sách này. Do đó, bởi vì chúng ta sẽ không cần dùng nhiều đến phương pháp mà chúng ta sẽ phát triển sau đây, ở đây tôi chỉ giới thiệu các khái niệm về lực và moment lực cơ bản cần thiết cho các bài toán tĩnh học. Điều này sẽ mở ra cho chúng ta một lớp các bài toán. Nhưng ngay cả khi các nguyên lý cơ bản của tĩnh học được phát biểu một cách nhanh chóng, các bài toán tĩnh học đôi khi cũng phải dùng đến mẹo để giải. Vì vậy, hãy làm thật nhiều bài toán để bạn có thể hiểu rõ các vấn đề.

2.1 Cân bằng lực

Trạng thái "tĩnh học" là trạng thái mà tất cả các vật trong hệ không chuyển động. Nếu một vật không chuyển động thì theo định luật thứ hai của Newton, $F = ma$ (là định luật mà chúng ta sẽ thảo luận chi tiết ở chương tiếp theo), tổng các lực ngoài tác dụng lên vật phải bằng không. Dĩ nhiên, điều ngược lại là không đúng. Tổng các lực ngoài tác dụng lên vật cũng bằng không nếu vật chuyển động với vận tốc không đổi khác không. Nhưng ở đây, chúng ta chỉ đề cập đến các bài toán tĩnh học. Mục đích chính trong bài toán tĩnh học là tìm ra là các lực khác nhau phải có dạng như thế nào để cho tổng hợp lực tác dụng lên mỗi vật phải bằng không (và tổng moment lực cũng phải bằng không, nhưng đó là chủ đề của Mục 2.2). Vì lực là một đại lượng vector nên để làm được điều này, chúng ta phải phân tích lực thành các lực thành phần. Chúng ta có thể chọn hệ tọa độ Đề các, hệ tọa độ cực hay bất kỳ một hệ tọa độ nào khác. Thông thường trong mỗi bài toán sẽ khá là rõ ràng để biết hệ tọa độ nào sẽ giúp cho việc tính toán của bạn trở nên dễ dàng nhất. Một khi đã chọn được hệ tọa độ, bạn đơn giản chỉ cần cho tổng các lực ngoài theo mỗi phương của hệ tọa độ phải bằng không.

Trong thế giới tồn tại rất nhiều loại lực khác nhau, chúng hầu hết là những lực ở cấp độ vĩ mô nhưng được sinh ra bởi những tác động vi mô phức tạp. Ví dụ, lực căng bên trong một sợi dây sinh ra bởi những lực liên kết hóa học giữ các phần tử trong dây liên kết với nhau, và những lực liên kết hóa học này là những lực điện. Trong các bài toán cơ học liên quan đến dây, chúng ta không cần thiết phải phân tích mọi chi tiết của các lực ở cấp độ phân tử này. Bạn chỉ cần gọi lực ở bên trong sợi dây là "lực căng" và xúc tiến giải bài toán. Bốn loại lực sau thường xuất hiện lặp đi lặp lại trong các bài toán:

Lực căng

Lực căng là tên gọi chung cho các lực xuất hiện bên trong một sợi dây, thanh, v.v... khi nó bị kéo. Mỗi một đoạn của sợi dây chịu tác dụng của lực căng theo cả hai hướng, trừ hai điểm cuối của nó, mà tại hai điểm cuối này chúng chịu tác dụng của một lực căng ở một phía, và của một lực khác do vật thể gắn vào nó gây ra. Trong một số trường hợp, lực căng có thể thay đổi dọc theo dây. Ví dụ "Dây quấn quanh một cột" ở cuối phần này là một minh họa rất tốt cho điều này. Trong các trường hợp khác, lực căng phải giống nhau ở mọi điểm. Ví dụ như, bên trong một sợi dây treo không có khối lượng, hoặc trong một sợi dây không khối lượng vắt trên một ròng rọc không ma sát, lực căng phải giống nhau tại mọi điểm vì nếu không sẽ tồn tại ít nhất một đoạn nào đó trên dây mà có tổng hợp lực khác không, và khi đó từ phương trình $F = ma$, đoạn dây (không khối lượng) đó sẽ có gia tốc vô cùng lớn.

Phản lực

Đây là lực vuông góc với mặt phẳng do mặt phẳng tác dụng lên vật. Thông thường hợp lực mà mặt phẳng tác dụng lên vật là tổng của phản lực và lực ma sát (xem ở phần dưới). Nhưng với các mặt không ma sát như các mặt được bôi trơn hay mặt băng, chỉ có phản lực tồn tại. Sự xuất hiện của phản lực là do mặt phẳng thực ra bị nén xuống một ít và nó ứng xử giống như một lò xo rất cứng. Bề mặt sẽ bị nén xuống cho đến khi lực đàn hồi là đủ lớn để làm cho nó không bị nén thêm nữa.

Nói chung sự khác nhau duy nhất giữa một "lực căng" và một "phản lực" chỉ là ở chiều của chúng. Cả hai loại lực này đều có thể được mô hình bởi một lò xo. Trong trường hợp lực căng, lò xo (hay một sợi dây, một thanh hay bất cứ thứ gì) bị kéo giãn ra và lực tác động lên vật thể gắn vào nó sẽ hướng vào trong lò xo. Còn trong trường hợp phản lực, lò xo bị nén, và lực tác dụng lên vật thể lại hướng ra ngoài khỏi lò xo. Những thứ giống thanh có thể sinh ra cả phản lực và lực căng. Nhưng với một sợi dây thì khó có thể có phản lực. Thực tế, trong trường hợp các vật dài và mảnh như thanh, chúng ta thường gọi lực nén là "lực căng nén", hay "lực căng âm", thay vì gọi là phản lực. Vì vậy, theo như những định nghĩa này, lực căng có thể tác động theo cả hai phương. Dù sao đi chăng nữa, nó chỉ là về mặt ngữ nghĩa mà thôi. Nếu bạn có sử dụng bất cứ tên gọi nào cho lực xuất hiện trong một thanh bị nén thì mọi người đều hiểu bạn muốn nói cái gì.

Lực ma sát
Lực ma sát là lực có phương song song với bề mặt tác động lên vật thể. Một số bề mặt, ví dụ như giấy nhám, có lực ma sát rất lớn. Còn một số khác, chẳng hạn như những bề mặt trơn, thì về cơ bản là không có lực ma sát. Có hai loại lực ma sát, gọi là lực ma sát "động" và lực ma sát "tĩnh". Lực ma sát động (mà chúng ta sẽ không đề cập đến trong chương này) xuất hiện khi hai vật có chuyển động tương đối với nhau. Một xấp xỉ khá tốt của lực ma sát động giữa hai vật là nó tỷ lệ với phản lực giữa chúng. Hệ số tỷ lệ này được gọi là μ_{k} ("hệ số ma sát động"), trong đó giá trị của μ_{k} phụ thuộc vào hai bề mặt đang xét. Vì vậy, $F = \mu_{\mathrm{k}} N$, trong đó N là phản lực. Hướng của lực ma sát là ngược chiều với chiều chuyển động.

Lực ma sát tĩnh liên quan đến hai vật ở trạng thái không có chuyển động tương đối với nhau. Trong trường hợp bài toán tĩnh, ta có $F \leq \mu_{\mathrm{s}} N$ (trong đó μ_{s} là "hệ số ma sát tĩnh"). Chú ý đến dấu bất đẳng thức. Trước khi giải một bài toán, chúng ta chỉ có thể nói được rằng lực ma sát đạt giá trị *cực đại* bằng $F_{\max} = \mu_{\mathrm{s}} N$. Trong một bài toán cho trước, nói chung giá trị của lực ma sát nhỏ hơn giá trị cực đại này. Ví dụ như, nếu một vật khối lượng M lớn nằm trên một mặt phẳng có hệ số ma sát μ_{s}, và bạn đẩy khối lượng này một lực rất nhỏ hướng về bên phải (đủ nhỏ để vật không di chuyển), thì khi đó dĩ nhiên lực ma sát không thể bằng $\mu_{\mathrm{s}} N = \mu_{\mathrm{s}} M \mathrm{g}$ hướng về bên trái. Một lực lớn như thế này sẽ làm cho vật chuyển động sang bên trái. Lực ma sát trong trường hợp này thật ra đơn giản chỉ có độ lớn bằng và có chiều theo hướng ngược chiều với lực rất nhỏ mà bạn đã tác động. Điều mà hệ số μ_{s} cho chúng ta biết là nếu bạn tác động một lực lớn hơn $\mu_{\mathrm{s}} M \mathrm{g}$ (là lực ma sát lớn nhất trên mặt nằm ngang) thì vật sẽ bắt đầu dịch chuyển sang bên phải.

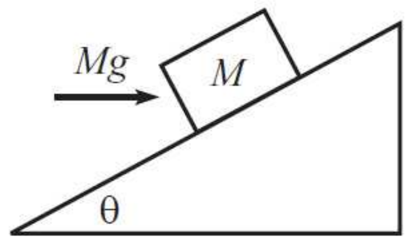
Trọng lực
Xét hai chất điểm có khối lượng M và m, cách nhau một khoảng R. Theo định luật hấp dẫn Newton thì giữa chúng xuất hiện lực hấp dẫn có độ lớn $F = GMm/R^2$, trong đó $G = 6.67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m}^3/(\mathrm{kg\ s}^2)$. Trong Chương 5, chúng ta sẽ chỉ ra rằng định luật này cũng đúng đối với các quả cầu có kích thước khác không. Nghĩa là, một quả cầu có thể được coi như một điểm có cùng khối lượng được đặt tại tâm của nó. Vì thế, một vật nằm trên bề mặt của trái đất chịu ảnh hưởng của lực hấp dẫn bằng

$$F = m\left(\frac{GM}{R^2}\right) \equiv m\mathrm{g}, \tag{2.1}$$

trong đó M là khối lượng của trái đất, và R là bán kính của trái đất. Đây là phương trình định nghĩa g. Bạn có thể kiểm tra thấy rằng khi thay các giá trị số thì chúng ta thu được $g \approx 9.8\ \mathrm{m/s^2}$. Mỗi vật thể trên bề mặt trái đất đều chịu tác dụng của một lực mg hướng xuống (g thay đổi một chút trên bề mặt trái đất, nhưng hãy bỏ qua điều này). Nếu vật thể không có gia tốc, thì phải tồn tại một lực khác xuất hiện (các phản lực, v.v...) để lực tổng hợp bằng không.

Một lực khác hay dùng nữa là lực lò xo tuân theo định luật Hooke, $F = -kx$. Nhưng chúng ta sẽ hoãn việc thảo luận về lò xo cho đến Chương 4, ở đó chúng ta sẽ giành cả chương để nghiên cứu sâu hơn về nó.

Ví dụ (Một khối nằm trên mặt phẳng nghiêng): Một vật khối lượng M nằm trên một mặt phẳng nghiêng cố định nghiêng một góc θ. Bạn tác dụng một lực theo phương nằm ngang $M\mathrm{g}$ vào vật, như chỉ ra trong Hình 2.1. Giả sử rằng lực ma sát giữa vật và mặt phẳng đủ lớn để giữ vật nằm yên. Phản lực và lực ma sát (gọi là N và F_f) mà mặt phẳng tác động lên vật bằng bao nhiêu? Nếu hệ số ma sát tĩnh là μ thì khoảng giá trị của góc θ phải bằng bao nhiêu để vật vẫn còn nằm yên trên mặt phẳng?



Hình 2.1:

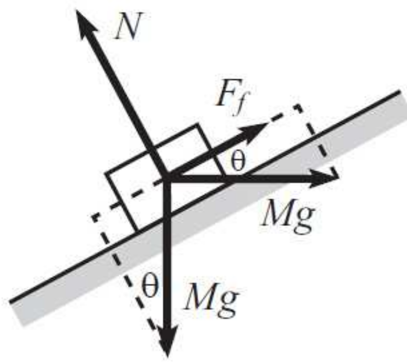
Lời giải: Phân tích các lực thành các thành phần song song và vuông góc với mặt phẳng nghiêng. (Việc phân tích lực thành các thành phần nằm ngang và thẳng đứng cũng sẽ giúp chúng ta giải được bài toán, nhưng sẽ làm cho việc tính toán dài hơn một chút.) Các lực là N, F_f, lực bạn tác dụng $M\mathrm{g}$, và trọng lượng $M\mathrm{g}$ như được chỉ ra trong Hình 2.2. Cân bằng các lực theo phương song song và vuông góc với mặt phẳng nghiêng cho ta các phương trình tương ứng là (với chiều hướng lên trên dọc theo mặt phẳng nghiêng là chiều dương),

$$\begin{aligned} F_\mathrm{f} &= M\mathrm{g}\sin\theta - M\mathrm{g}\cos\theta, \\ N &= M\mathrm{g}\cos\theta + M\mathrm{g}\sin\theta. \end{aligned} \tag{2.2}$$

NHẬN XÉT:

1. Nếu $\tan\theta > 1$, thì F_f là dương (tức là, nó hướng lên phía trên mặt phẳng mặt phẳng nghiêng). Và nếu $\tan\theta < 1$, thì F_f là âm (tức là, nó hướng xuống dưới mặt phẳng nghiêng). Chúng ta không phải lo lắng về hướng của lực này khi vẽ nó trên biểu đồ. Chỉ cần chọn một chiều là chiều dương và nếu F_f cuối cùng có giá trị âm, thì nó sẽ có chiều hướng theo chiều ngược lại.

2. Miền giá trị của F_f là từ $-M\text{g}$ đến $M\text{g}$ khi giá trị θ thay đổi từ 0 đến $\pi/2$ (hãy thuyết phục chính bản thân bạn rằng những giá trị giới hạn này là hợp lý). Coi như là một bài tập, bạn có thể chỉ ra rằng N đạt giá trị lớn nhất khi $\tan\theta = 1$, trong trường hợp này $N = \sqrt{2}M\text{g}$ và $F_\text{f} = 0$.



Hình 2.2:

3. Các hệ số $\sin\theta$ và $\cos\theta$ trong phương trình (2.2) suy ra từ các góc θ được vẽ như trong Hình 2.2. Tuy nhiên, khi giải các bài toán kiểu như bài toán này, thì rất hay mắc phải sai lầm trong khi vẽ hình và rồi gán một góc là θ khi mà thực ra nó bằng $90^\text{o} - \theta$. Vì vậy có hai lời khuyên dành cho bạn như sau: (1) Không bao giờ được vẽ một góc có giá trị gần bằng góc 45^o trong hình vẽ, vì nếu bạn làm như vậy thì bạn sẽ không thể phân biệt các góc θ với các góc $90^\text{o} - \theta$. (2) Luôn luôn phải kiểm tra các kết quả của bạn bằng cách cho góc θ bằng 0 hoặc 90^o (nói cách khác, có phải là hầu như toàn bộ một lực hoặc không có phần nào của lực đó, sẽ tác động theo một phương nào đó khi mặt phẳng nghiêng ví dụ như là có phương nằm ngang). Một khi bạn làm điều này một vài lần, bạn sẽ nhận ra rằng thậm chí bạn có thể không cần phải vẽ hình ngay khi bắt đầu giải bài toán. Vì bạn biết rằng bất cứ thành phần nào của lực cho trước cũng sẽ liên quan đến hệ số hoặc là $\sin\theta$ hoặc là $\cos\theta$, nên bạn chỉ cần chọn lấy hệ số mà nó cho kết quả đúng trong một trường hợp tới hạn nào đó. ♣

Hệ số μ cho chúng ta biết rằng $|F_\text{f}| \le \mu N$. Sử dụng phương trình (2.2), bất đẳng thức này trở thành

$$M\text{g}|\sin\theta - \cos\theta| \le \mu M\text{g}(\cos\theta + \sin\theta). \tag{2.3}$$

Dấu giá trị tuyệt đối ở đây có nghĩa là chúng ta phải xét hai trường hợp:

- Nếu $\tan\theta \ge 1$ thì phương trình (2.3) trở thành

$$\sin\theta - \cos\theta \le \mu(\cos\theta + \sin\theta) \quad \Longrightarrow \quad \tan\theta \le \frac{1+\mu}{1-\mu}. \tag{2.4}$$

  Chúng ta đã chia cả hai vế cho $1-\mu$, vì thế bất đẳng thức này chỉ đúng nếu $\mu < 1$. Nhưng nếu $\mu \ge 1$ thì từ bất đẳng thức đầu tiên chúng ta thấy rằng giá trị bất kỳ nào của θ (thỏa mãn giả thiết của chúng ta, $\tan\theta \ge 1$) đều thỏa mãn.

- Nếu $\tan\theta \le 1$ thì phương trình (2.3) trở thành

$$-\sin\theta + \cos\theta \le \mu(\cos\theta + \sin\theta) \quad \Longrightarrow \quad \tan\theta \ge \frac{1-\mu}{1+\mu}. \tag{2.5}$$

Kết hợp hai khoảng giá trị này của θ với nhau, chúng ta thu được

$$\frac{1-\mu}{1+\mu} \le \tan\theta \le \frac{1+\mu}{1-\mu}. \tag{2.6}$$

NHẬN XÉT: Với giá trị μ rất nhỏ thì cả hai cận này đều tiến tới giá trị 1, tức là góc θ phải có giá trị rất gần góc 45^o. Điều này là hợp lý. Nếu hệ số ma sát có giá trị rất nhỏ thì các thành phần theo phương dọc theo mặt phẳng nghiêng của các lực Mg nằm ngang và thẳng đứng gần như phải bị triệt tiêu; do đó $\theta \approx 45^o$. Một giá trị đặc biệt của μ là bằng 1, bởi vì từ phương trình (2.6), chúng ta thấy rằng $\mu = 1$ là giá trị tới hạn mà cho phép θ đạt được cả hai giá trị 0 và $\pi/2$. Nếu $\mu \ge 1$ thì mọi góc nghiêng của mặt phẳng nghiêng đều thỏa mãn. Chúng ta đã giả sử trong suốt ví dụ này là $0 \le \theta \le \pi/2$. Nhiệm vụ của Bài tập luyện tập 2.20 là giải quyết trường hợp khi $\theta > \pi/2$, khi đó vật sẽ nằm ở bên dưới mặt phẳng nghiêng. ♣

Bây giờ chúng ta sẽ làm một ví dụ liên quan đến một sợi dây trong đó lực căng thay đổi theo vị trí. Để giải bài toán này, chúng ta sẽ phải chia dây thành những đoạn rất nhỏ.

Ví dụ (Dây quấn quanh một cột): Một sợi dây được quấn một góc θ xung quanh một cột. Bạn giữ một đầu và kéo nó với lực kéo T_0. Đầu còn lại được nối với một vật khá lớn, ví dụ như là một con thuyền. Nếu hệ số ma sát tĩnh giữa dây và cột là μ, lực căng lớn nhất mà dây có thể tác dụng lên thuyền là bao nhiêu với giả sử rằng dây không bị trượt xung quanh cột?

Lời giải: Xét một đoạn nhỏ của dây có góc mở là $d\theta$. Gọi lực căng trong đoạn dây này là T (mà nó thay đổi không đáng kể trên đoạn dây nhỏ). Như chỉ ra trong Hình 2.3, cột tác dụng vào đoạn dây một phản lực $N_{d\theta}$ hướng ra ngoài cột. Phản lực này tồn tại để cân bằng với các thành phần hướng vào "trong cột" của lực căng dây ở hai đầu. Các thành phần lực căng hướng vào phía trong cột này có độ lớn là $T\sin d\theta/2$.[1] Do đó, $N_{d\theta} = 2T\sin(d\theta/2)$. Sử dụng xấp xỉ đối với góc nhỏ, $\sin x \approx x$, cho phép chúng ta viết lại biểu thức này là $N_{d\theta} = Td\theta$.

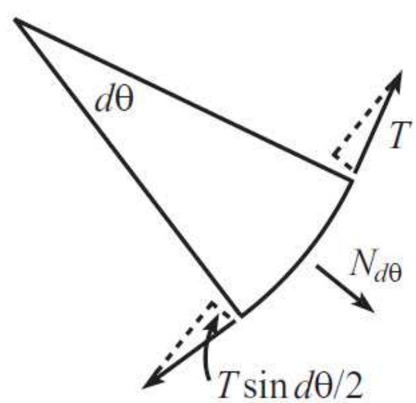
Lực ma sát trên đoạn nhỏ của dây này thỏa mãn $F_{d\theta} \le \mu N_{d\theta} = \mu T d\theta$. Lực ma sát này sinh ra do có sự khác nhau của lực căng giữa hai đầu dây. Nói cách khác, lực

[1] Thực ra một trong hai thành phần này có độ lớn là $(T + dT)\sin(d\theta/2)$, với $d\theta$ là thành phần tăng thêm của lực căng dọc theo đoạn dây nhỏ, tuy nhiên thành phần lực hướng vào trong tăng thêm này chỉ bằng $(dT)\sin(d\theta/2)$, là đại lượng vô cùng bé bậc hai nên chúng ta có thể bỏ qua.

căng bên trong đoạn dây là một hàm của θ, thỏa mãn

$$\begin{aligned} T(\theta + d\theta) &\leq T(\theta) + \mu T d\theta \\ \Longrightarrow dT &\leq \mu T d\theta \\ \Longrightarrow \int \frac{dT}{T} &\leq \int \mu d\theta \\ \Longrightarrow \ln T &\leq \mu\theta + C \\ \Longrightarrow T &\leq T_0 e^{\mu\theta}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

trong đó chúng ta đã sử dụng $T = T_0$ khi $\theta = 0$. Ở đây, lực căng trong dây thay đổi rất nhanh theo một hàm mũ. Nếu cho $\mu = 1$, thì trong trường hợp dây chỉ quấn quanh cột một phần tư vòng tròn, lực căng dây cũng sẽ tăng lên gấp $e^{\pi/2} \approx 5$ lần. Nếu dây được quấn xung quanh cột cả một vòng thì lực căng sẽ tăng lên gấp $e^{2\pi} \approx 530$ lần, và nếu như quấn hai vòng thì con số này là $e^{4\pi} \approx 300\ 000$. Không cần phải nói gì thêm, hệ số tăng lên rất lớn trong trường hợp này không phải là do sức mạnh của bạn tạo ra, mà là do kết cấu của toàn bộ hệ cột có dây quấn xung quanh nó.



Hình 2.3:

2.2 Cân bằng moment

Trong bài toán tĩnh, ngoài cân bằng các lực, chúng ta còn phải cân bằng các moment lực. Chúng ta sẽ nói nhiều hơn rất nhiều về moment lực trong các Chương 8 và Chương 9, nhưng ở đây chúng ta sẽ sử dụng một tính chất quan trọng của nó. Xét tình huống như trong Hình 2.4, trong đó ba lực vuông góc với thanh, với giả thiết là thanh vẫn đứng yên. F_1 và F_2 là các lực tác dụng tại các điểm đầu mút, và F_3 là lực tác dụng ở một điểm bên trong. Dĩ nhiên chúng ta có, $F_3 = F_1 + F_2$ vì thanh đang nằm yên. Nhưng chúng ta cũng có liên hệ sau:

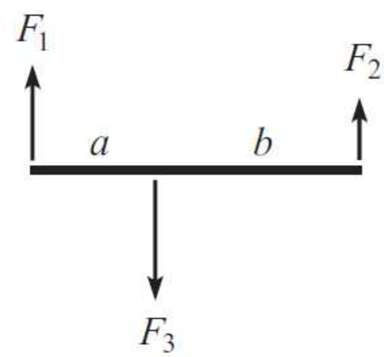
Khẳng định 2.1. *Nếu hệ đứng yên thì $F_3 a = F_2(a+b)$. Nói cách khác, các moment lực (bằng lực nhân với khoảng cách) xung quanh đầu bên trái bị triệt tiêu.*[2] *Và bạn cũng có thể chỉ ra rằng chúng bị triệt tiêu xung quanh một điểm bất kỳ khác.*

Chúng ta sẽ chứng minh khẳng định này trong Chương 8 bằng việc sử dụng moment động lượng, nhưng hãy đưa ra một cách chứng minh ngắn gọn ở đây.

Chứng minh. Chúng ta sẽ đưa vào một giả thiết hợp lý, cụ thể là, mối liên hệ giữa các lực và các khoảng cách có dạng,

$$F_3 f(a) = F_2 f(a+b), \tag{2.8}$$

trong đó $f(x)$ là một hàm cần phải tìm.[3] Sử dụng giả thiết này khi tính moment lực thay



Hình 2.4:

vì xung quanh đầu "bên trái" thành điểm đầu "bên phải" như trong Hình 2.4, ta có

$$F_3 f(b) = F_1 f(a+b). \tag{2.9}$$

Cộng hai phương trình (2.8) và (2.9), và sử dụng $F_3 = F_1 + F_2$, chúng ta thu được

$$f(a) + f(b) = f(a+b). \tag{2.10}$$

Bạn có thể chỉ ra rằng từ phương trình này chúng ta có thể suy ra $f(rx) = rf(x)$ với x bất kỳ và với số hữu tỷ r bất kỳ (xem Bài tập 2.28). Vì vậy, với giả thiết $f(x)$ là liên tục, thì nó phải là một hàm tuyến tính, $f(x) = Ax$, và đây là kết quả mà chúng ta muốn chứng minh. Hằng số A không quan trọng vì nó sẽ bị khử trong phương trình (2.8). □

Chú ý rằng khi chia phương trình (2.8) cho phương trình (2.9) chúng ta thu được $F_1 f(a) = F_2 f(b)$, và vì vậy $F_1 a = F_2 b$, có nghĩa là các moment lực xung quanh điểm đặt

[2]Một cách chứng minh khác của khẳng định này được trình bày trong Bài tập 2.11.

[3]Để đơn giản, chúng ta giả thiết mối liên hệ này là tuyến tính đối với F. Tức là, hai lực F được đặt tại một điểm thì tương đương với một lực $2F$ cũng được đặt tại điểm đó. Bạn không thể tranh cãi gì về giả thiết này.

lực của lực F_3 bị triệt tiêu. Bạn có thể chỉ ra rằng các moment lực đối với một điểm quay tùy ý bất kỳ cũng bị triệt tiêu. Khi lấy tổng các moment lực của một cơ cấu vật lý đã cho, dĩ nhiên đòi hỏi bạn phải dùng cùng một tâm quay khi tính toán mỗi moment lực.

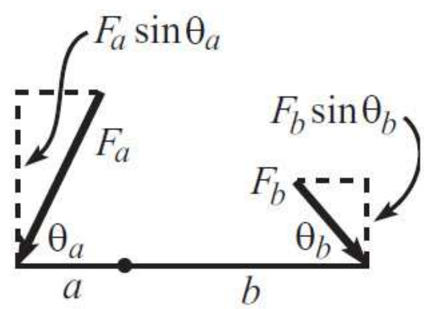
Trường hợp khi các lực không vuông góc với thanh thì khẳng định phía trên sẽ đúng đối với các thành phần của lực vuông góc với thanh. Điều này là hợp lý, bởi vì các thành phần song song với thanh thì sẽ không ảnh hưởng gì đến việc quay của thanh xung quanh điểm đang xét. Vì vậy, xem các Hình 2.5 và 2.6, đẳng thức của moment lực có thể được viết như sau

$$F_a a \sin\theta_a = F_b b \sin\theta_b. \tag{2.11}$$

Phương trình này có thể được xem xét theo hai cách:

- $(F_a \sin\theta_a)a = (F_b \sin\theta_b)b$. Nói cách khác, chúng ta có các lực nhỏ hơn với "các cánh tay đòn" đã cho như trong Hình 2.5.
- $F_a(a \sin\theta_a) = F_b(b \sin\theta_b)$. Nói cách khác, chúng ta có các lực đã cho tác dụng lên "các cánh tay đòn" nhỏ hơn như trong Hình 2.6.

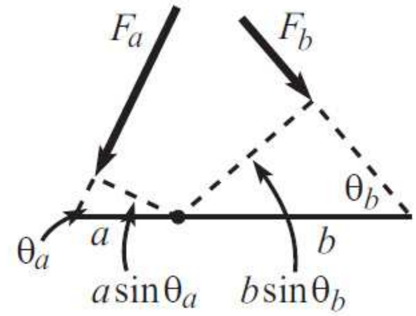
Khẳng định 2.1 chỉ ra rằng thậm chí nếu bạn chỉ tác động một lực rất nhỏ, bạn vẫn có thể cân bằng moment lực do một lực rất lớn gây ra miễn là cánh tay đòn đủ lớn. Điều này khiến cho một nhà toán học rất nổi tiếng trước đây đi đến phát biểu rằng ông có thể di chuyển cả trái đất nếu ông có một cánh tay đòn đủ lớn.



Hình 2.5:

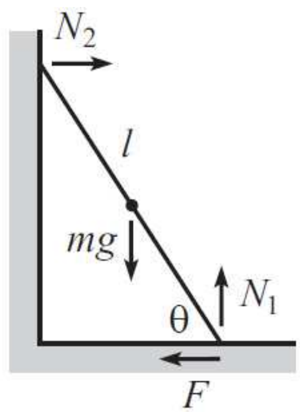
Có một thực tế rất hữu ích mà chúng ta hay sử dụng đó là moment trọng lực tác động lên thanh có khối lượng M thì bằng với moment trọng lực của một chất điểm có khối lượng M đặt tại trọng tâm của thanh. Tính đúng đắn của phát biểu này xuất phát từ thực tế là moment lực là hàm tuyến tính của khoảng cách đến tâm quay (xem Bài tập 2.27). Tổng quát hơn, moment trọng lực của một vật có khối lượng M có thể đơn giản được coi như là moment trọng lực do lực Mg đặt tại trọng tâm của vật.

Chúng ta sẽ nói nhiều hơn về moment lực trong Chương 8 và Chương 9, nhưng ở đây, trong các bài toán tĩnh chúng ta sẽ chỉ sử dụng một kết quả là các moment lực đối với một điểm bất kỳ phải bị triệt tiêu.



Hình 2.6:

Ví dụ (Thang dựa vào tường): Một cái thang dựa vào một bức tường không ma sát. Nếu hệ số ma sát của thang đối với nền là μ, hỏi góc nhỏ nhất của thang hợp với nền bằng bao nhiêu để thang không bị trượt?



Hình 2.7:

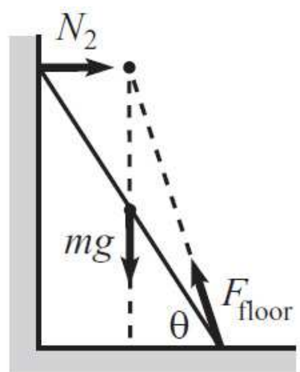
Lời giải: Giả sử thang có khối lượng m và chiều dài ℓ. Như trong Hình 2.7, chúng ta có ba lực chưa biết: lực ma sát F, và các phản lực N_1 và N_2. Và để tìm ba lực này, may mắn là chúng ta có ba phương trình: $\sum F_{\text{thẳng đứng}} = 0$, $\sum F_{\text{nằm ngang}} = 0$, và $\sum \tau = 0$ (τ là ký hiệu chuẩn cho moment lực). Xét các lực thẳng đứng, chúng ta thấy rằng $N_1 = Mg$. Còn xét các lực nằm ngang, chúng ta có $N_2 = F$. Như vậy, từ việc tìm ba ẩn chúng ta đã quy về chỉ còn phải tìm một ẩn.

Bây giờ chúng ta sẽ sử dụng $\sum \tau = 0$ để tìm N_2 (hoặc F). Nhưng đầu tiên chúng ta phải chọn một điểm "tâm quay" để tính toán các moment lực đối với điểm đó. Chúng ta chọn bất cứ điểm nào đứng yên làm tâm quay cũng được, nhưng với một số điểm nào đó thì việc tính toán sẽ dễ dàng hơn so với việc chọn các điểm khác. Nói chung, tâm quay tốt nhất là điểm mà tại đó có nhiều lực tác dụng đi qua nhất, bởi vì khi đó phương trình $\sum \tau = 0$ sẽ chứa ít số hạng nhất (do một lực bất kỳ sẽ không gây ra moment lực đối với điểm mà lực đó đi qua, vì khi đó cánh tay đòn sẽ bằng không). Trong bài toán này, có hai lực tác dụng vào điểm cuối của thang, do đó đây là điểm mà chúng ta sẽ chọn làm tâm quay (nhưng bạn nên kiểm tra lại rằng với bất cứ điểm nào khác được chọn làm tâm quay, ví dụ như điểm giữa thang hay đỉnh thang, đều cho ta cùng một kết quả). Cân bằng moment lực gây ra bởi trọng lực và lực N_2 cho ta

$$N_2 \ell \sin\theta = mg(\ell/2)\cos\theta \quad \Longrightarrow \quad N_2 = \frac{mg}{2\tan\theta}. \tag{2.12}$$

Giá trị này cũng là giá trị của lực ma sát F. Điều kiện $F \leq \mu N_1 = \mu mg$ khi đó trở thành

$$\frac{mg}{2\tan\theta} \leq \mu mg \quad \Longrightarrow \quad \tan\theta \geq \frac{1}{2\mu}. \tag{2.13}$$



Hình 2.8:

NHẬN XÉT: Chú ý rằng lực tổng hợp do nền nhà tác động lên thang sẽ hướng lên trên và tạo với nền một góc được cho bởi $\tan\beta = N_1/F = (mg)/(mg/2\tan\theta) = 2\tan\theta$. Chúng ta thấy rằng lực này *không* hướng dọc theo thang. Đơn giản là cũng không có lý do gì mà nó phải hướng dọc theo thang. Nhưng *có* một lý do rất chính đáng là nó phải hướng lên theo một góc mà có độ dốc gấp hai lần độ dốc của thang. Đây là hướng mà sẽ làm cho cả ba lực tác dụng lên thang hội tụ (nghĩa là, tất cả chúng đều đi qua một điểm), như được chỉ ra trong Hình 2.8. Việc hội tụ tại một điểm này là kết quả của một định lý đơn giản đối với các bài toán tĩnh học liên quan đến ba lực tác dụng. Chứng minh kết quả này rất đơn giản. Nếu ba lực này mà không hội tụ tại một điểm, thì một lực sẽ gây ra một moment lực khác không xung quanh điểm giao cắt của hai lực còn lại.[4]

[4]Một trường hợp ngoại lệ của lập luận này đó là khi không có hai lực nào cắt nhau cả, nghĩa là khi mà tất cả ba lực đều song song với nhau. Sự cân bằng vẫn có thể xảy ra trong trường hợp này, như chúng ta đã thấy trong Khẳng định 2.1. Nhưng bạn vẫn có thể dùng định lý về sự hội tụ lực này nếu bạn coi các đường thẳng song song sẽ gặp nhau tại vô cùng.

Định lý này cho chúng ta một cách giải nhanh để giải bài toán về thang trong những trường hợp tổng quát hơn khi trọng tâm của thang nằm tại một điểm trên thang có độ dài tỷ lệ với hệ số f so với chiều dài của thang tính từ điểm cuối của thang. Trong trường hợp này, định lý về sự hội tụ của lực cho chúng ta biết rằng góc nghiêng của lực tổng hợp do nền tác động vào thang có độ dốc là $(1/f)\tan\theta$, phù hợp với kết quả $f = 1/2$ ở phần trên. Thành phần thẳng đứng của lực tổng hợp này vẫn là mg, do đó thành phần nằm ngang (là lực ma sát) bây giờ sẽ là $fmg/\tan\theta$. Với điều kiện là lực nằm ngang này phải nhỏ hơn hoặc bằng μmg cho ta $\tan\theta \geq f/\mu$, phù hợp với kết quả khi $f = 1/2$. Bởi vì kết quả này chỉ phụ thuộc vào vị trí của trọng tâm của thang, và không phụ thuộc vào việc trọng lượng của thang được phân bố như thế nào, do đó một hệ quả của kết quả này là nếu bạn leo lên một cái thang nào đó (được tựa vào một bức tường không ma sát), thì vị trí của bạn làm cho thang dễ bị trượt nhất là vị trí ở cao hơn trọng tâm thang (bởi vì với trọng lượng của bạn thì trọng tâm của hệ gồm bạn và thang đã được nâng lên so với trọng tâm của riêng thang và do đó giá trị của f tăng lên), và thang sẽ khó bị trượt hơn nếu bạn ở vị trí thấp hơn vị trí của trọng tâm của thang. ♣

Những ví dụ mà chúng ta vừa làm ở trong chương này chỉ chứa duy nhất một vật thể. Nhưng có rất nhiều các bài tập khác mà liên quan đến nhiều hơn một vật (như những bài tập mà bạn sẽ tìm thấy trong phần bài tập và phần luyện tập của chương này), và khi đó bạn sẽ cần phải sử dụng thêm một kết quả nữa, đó là định luật thứ ba của Newton. Định luật này phát biểu là lực mà một vật A tác động lên vật B sẽ bằng và ngược chiều với lực mà vật B tác động lên vật A (chúng ta sẽ nói nhiều hơn về các định luật của Newton trong Chương 3). Do đó nếu bạn muốn tìm, ví dụ như một phản lực giữa hai vật, bạn có thể phải tìm nó bằng cách xem xét các lực mà moment lực tác động lên một trong hai vật đó, phụ thuộc vào việc bạn đã biết gì về các lực khác này tác động lên mỗi vật. Một khi bạn đã tìm ra lực bằng cách xem xét, ví dụ như, vật A, thì khi đó bạn sẽ sử dụng phản lực của nó để biết điều gì sẽ xảy ra đối với vật B. Phụ thuộc vào bài toán, thông thường việc xem xét một trong hai vật nào trước sẽ giúp ích cho bạn hơn khi xem xét vật kia trước.

Tuy nhiên, chú ý rằng nếu bạn chọn một hệ con (mà bạn sẽ khảo sát lực và moment lực đối với hệ này) mà nó chứa cả vật A và vật B, thì việc này sẽ không giúp bạn biết bất cứ điều gì về phản lực (hoặc lực ma sát) giữa hai vật. Điều này là do phản lực là một *nội lực* giữa hai vật (khi hai vật đang được xem xét như là một hệ), trong khi đó chỉ có *ngoại lực* mới được xét đến khi tính toán lực tổng và tổng moment lực tác dụng lên hệ (bởi vì các nội lực sẽ bị triệt tiêu từng cặp với nhau do định luật thứ ba của Newton).

Cách duy nhất để tính một lực nào đó là xem xét nó như là một ngoại lực của một hoặc vài hệ con nào đó.

Thường thì bạn phải có một số quyết định lựa chọn nào đó khi giải các bài toán tĩnh học. Nếu như có quá nhiều vật trong một hệ, thì bạn phải quyết định chọn những hệ con nào để cân bằng các ngoại lực và các moment lực tác động lên chúng. Và hơn nữa, bạn cũng sẽ phải quyết định chọn điểm nào là tâm quay để tính toán moment của các lực. Có rất nhiều cách chọn để giúp bạn tìm ra kết quả bạn cần, nhưng sẽ có những cách chọn giúp bạn tìm ra kết quả nhanh và dễ dàng hơn (Bài tập luyện tập 2.35 là một ví dụ tốt của điều này). Cách duy nhất để biết cách chọn nào thông minh hơn là hãy bắt đầu giải các bài tập.

2.3 Bài tập

Mục 2.1: Cân bằng lực

2.1. Dây treo

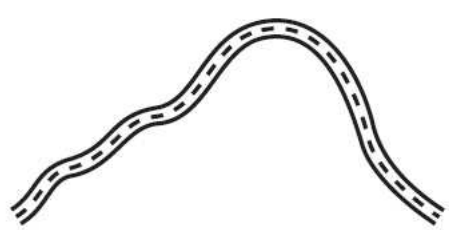
Một sợi dây có độ dài L và mật độ khối lượng trên một đơn vị độ dài là ρ được treo thẳng đứng ở một đầu. Tìm lực căng là hàm của độ cao dọc theo dây.

2.2. Vật trên mặt phẳng

Một vật nằm trên mặt phẳng nghiêng một góc θ. Giả sử lực ma sát là đủ lớn để giữ cho vật nằm yên. Hỏi các thành phần nằm ngang của lực ma sát và phản lực tác động lên vật bằng bao nhiêu? Với góc θ bằng bao nhiêu thì các thành phần nằm ngang này đạt giá trị lớn nhất?

2.3. Dây xích nằm yên *

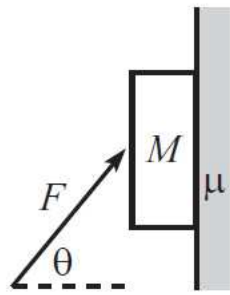
Một ống không ma sát nằm trong mặt phẳng thẳng đứng và có hình dạng là của một hàm với các điểm đầu và điểm cuối có cùng độ cao còn các điểm khác thì có độ cao tùy ý. Một sợi dây xích với khối lượng phân bố đều trên mỗi đơn vị độ dài nằm bên trong ống từ đầu này đến đầu kia, như chỉ ra trong Hình 2.9. Bằng cách xét trọng lực tổng hợp tác dụng dọc theo sợi xích, hãy chỉ ra rằng dây xích không di chuyển.



Hình 2.9:

2.4. Giữ một quyển sách *

Một quyển sách có khối lượng M được đặt áp vào một mặt tường thẳng đứng. Hệ số ma sát giữa sách và tường là μ. Bạn muốn giữ cho quyển sách không bị rơi bằng cách đẩy nó một lực F theo phương tạo với trục nằm ngang một góc θ $(-\pi/2 < \theta < \pi/2)$ như trong Hình 2.10.



Hình 2.10:

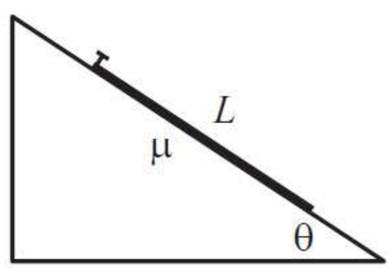
(a) Với góc θ cho trước, hỏi giá trị cực tiểu của F bằng bao nhiêu?

(b) Với góc θ bằng bao nhiêu thì giá trị cực tiểu này đạt giá trị nhỏ nhất? Giá trị nhỏ nhất của F trong trường hợp này bằng bao nhiêu?

(c) Giá trị tới hạn của góc θ bằng bao nhiêu, để nếu bạn đẩy quyển sách với góc nghiêng nhỏ hơn giá trị này thì không tồn tại lực F nào mà có thể giữ được quyển sách?

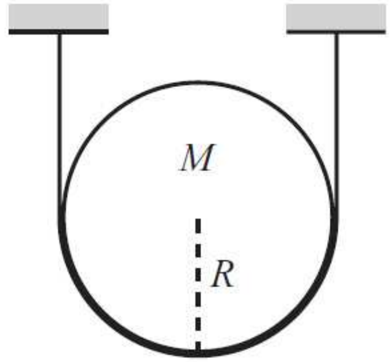
2.5. Dây trên mặt phẳng nghiêng *

Một dây có chiều dài L và mật độ khối lượng trên mỗi đơn vị độ dài là ρ nằm trên một mặt phẳng nghiêng một góc θ (xem Hình 2.11). Đầu trên của dây được đóng đinh gắn chặt vào mặt phẳng nghiêng và hệ số ma sát giữa dây và mặt phẳng nghiêng là μ. Giá trị lực căng tại đầu trên của dây có thể bằng bao nhiêu?



Hình 2.11:

2.6. Giữ đĩa **



Hình 2.12:

(a) Một đĩa có khối lượng M và bán kính R được giữ bởi một sợi dây không khối lượng, như trong Hình 2.12. Bề mặt của đĩa không có ma sát. Lực căng trong dây bằng bao nhiêu? Phản lực trên mỗi đơn vị độ dài mà dây tác động lên đĩa bằng bao nhiêu?

(b) Cho hệ số ma sát giữa đĩa và dây bây giờ là μ. Tại điểm thấp nhất của dây thì lực căng nhỏ nhất có thể bằng bao nhiêu?

2.7. Vật ở giữa các vòng tròn **

Mỗi một vật phẳng sau đây được đặt như trong Hình 2.13, giữa hai vòng tròn bán kính R không ma sát. Mật độ khối lượng trên mỗi đơn vị diện tích của vật là σ, và các bán kính đến các điểm tiếp xúc tạo một góc θ với phương nằm ngang. Trong mỗi trường hợp, hãy tìm lực nằm ngang cần phải tác dụng lên các vòng tròn để giữ cho chúng không bị tách rời nhau. Với góc θ bằng bao nhiêu thì lực này đạt giá trị lớn nhất hay giá trị nhỏ nhất?

(a) Tam giác cân có hai cạnh bên bằng nhau và bằng L.

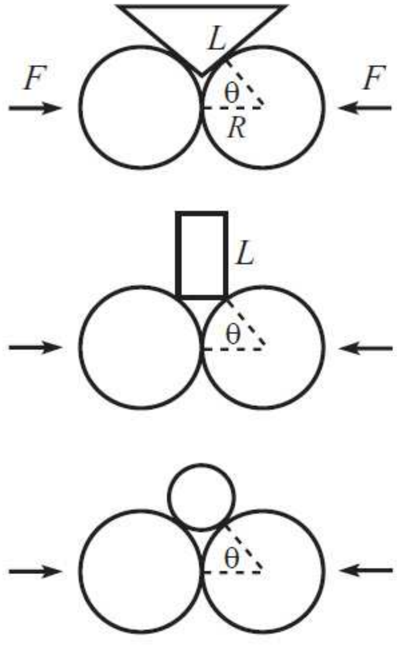
(b) Hình chữ nhật có chiều cao L.

(c) Hình tròn.

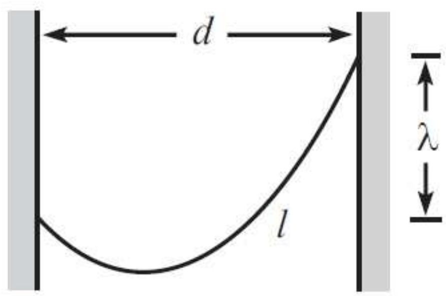
2.8. Treo xích ****

(a) Một sợi xích có khối lượng phân bố đều trên mỗi đơn vị độ dài được mắc vào hai điểm cho trước ở trên hai bức tường. Tìm hình dạng nói chung của sợi xích. Ngoài một hệ số hằng số thêm vào tùy ý, hàm mô tả hình dạng của sợi xích còn chứa một hằng số chưa biết. (Hình dạng của sợi xích treo được biết đến như là một đường *catenary*.)

(b) Hằng số chưa biết trong câu trả lời của bạn phụ thuộc vào khoảng cách nằm ngang d giữa hai bức tường, khoảng cách thẳng đứng λ giữa các điểm treo, và chiều dài ℓ của sợi xích (xem Hình 2.14). Tìm phương trình liên hệ giữa các đại lượng đã cho này để xác định hằng số chưa biết.



Hình 2.13:



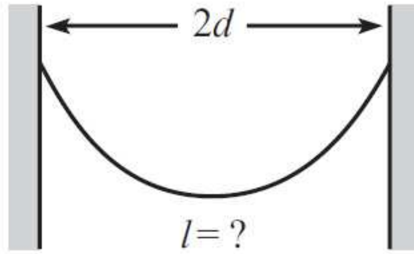
Hình 2.14:

2.9. Treo một cách nhẹ nhàng **

Một sợi xích có khối lượng phân bố đều trên mỗi đơn vị độ dài được treo vào hai điểm có cùng độ cao nằm cách nhau một khoảng $2d$ (xem Hình vẽ 2.15). Hỏi độ dài của sợi xích phải bằng bao nhiêu để cho độ lớn của lực tác dụng vào điểm treo là nhỏ nhất? Bạn có thể sử dụng kết quả về hình dạng của sợi xích khi được treo như trên có dạng, $y(x) = (1/\alpha)\cosh(\alpha x)$. Bạn cũng sẽ phải giải số phương trình để tìm ra kết quả.

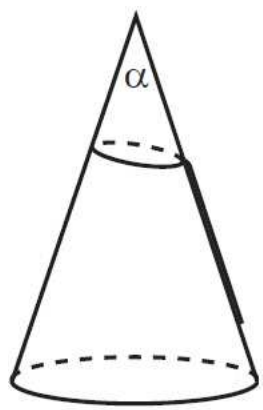
2.10. Người leo núi ****

Một người leo núi muốn leo lên một ngọn núi nhẵn không ma sát có dạng hình nón. Anh ta muốn làm điều này bằng cách quăng một sợi dây thòng lọng (là một sợi dây thừng được thắt vòng ở đầu) lên đỉnh của ngọn núi và leo lên dọc theo sợi dây này. Giả sử rằng người leo núi có chiều cao không đáng kể, sao cho sợi dây sẽ nằm dọc theo sườn núi, như chỉ ra trong Hình 2.16. Ở dưới chân núi có hai cửa hàng. Một cửa hàng bán loại thòng lọng "loại thường" (được làm bằng cách nối một sợi dây vào một vòng dây có độ dài *cố*



Hình 2.15:

định); xem Hình 2.17. Cửa hàng còn lại bán loại thòng lọng "cao cấp" (được làm bằng một sợi dây với một vòng dây có chiều dài có thể *thay đổi được*; độ dài của vòng dây có thể thay đổi mà không gây ra lực ma sát trong dây). Khi được quan sát từ mặt bên, góc của đỉnh của ngọn núi hình nón là α. Hỏi với giá trị nào của α thì người leo núi có thể trèo lên dọc theo ngọn núi này nếu anh ta sử dụng một sợi dây "loại thường"? Một sợi dây "cao cấp"? (*Gợi ý:* Kết quả trong trường hợp dùng dây "loại thường" không phải là $\alpha < 90^o$.)



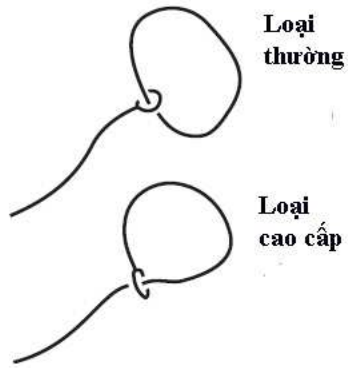
Hình 2.16:

Mục 2.2: Cân bằng moment lực

2.11. Sự cân bằng moment lực **

Bài toán này cho chúng ta một cách khác để mô tả Khẳng định 2.1 bằng việc sử dụng lập luận quy nạp. Chúng tôi sẽ giúp bạn các bước đầu, rồi sau đó bạn có thể làm được trường hợp tổng quát.

Xét một tình huống khi các lực F tác dụng hướng lên trên vào hai đầu của một thanh có độ dài ℓ, và một lực $2F$ hướng xuống dưới tác dụng vào trung điểm của thanh (xem Hình vẽ 2.18). Thanh sẽ không quay (do hệ lực là đối xứng), và nó sẽ không dịch chuyển (do tổng hợp lực tác dụng vào nó bằng không). Nếu chúng ta muốn, chúng ta có thể gắn vào thanh một tâm quay tại đầu bên trái của nó. Và nếu sau đó chúng ta bỏ đi lực F



Hình 2.17:

ở đầu bên phải và thay vào đó là một lực $2F$ tác dụng tại điểm giữa của thanh, thì khi đó hai lực $2F$ sẽ bị triệt tiêu và thanh vẫn ở vị trí cân bằng.[5] Do đó, chúng ta thấy rằng một lực F tác dụng tại điểm có khoảng cách ℓ so với tâm quay là tương đương với một lực $2F$ tác dụng vào một điểm khác có khoảng cách $\ell/2$ so với tâm quay, theo nghĩa là cả hai lực này đều có tác dụng làm triệt tiêu ảnh hưởng quay của lực $2F$ hướng xuống dưới.

Bây giờ xét tình huống khi có hai lực F có phương hướng lên trên tác dụng tại hai đầu thanh, và hai lực F khác hướng xuống tác dụng tại điểm có độ dài $l/3$ và $2l/3$ (xem Hình vẽ 2.19). Thanh sẽ không bị quay (do các lực là đối xứng), và nó cũng không dịch chuyển (vì tổng lực tác dụng lên nó bằng không). Coi thanh có một tâm quay tại đầu bên trái. Từ kết quả của phần trên, lực F tại $2l/3$ sẽ tương đương với một lực $2F$ đặt tại vị trí $l/3$. Bằng việc thay thế tương đương này, bây giờ chúng ta có một tổng hợp lực là $3F$ đặt tại vị trí $l/3$. Do đó, chúng ta thấy rằng một lực F tác dụng tại một điểm có khoảng cách ℓ tương đương với một lực $3F$ đặt tại điểm có khoảng cách $l/3$.

Nhiệm vụ của bạn bây giờ là dùng quy nạp để chỉ ra rằng một lực F đặt tại một điểm có khoảng cách ℓ sẽ tương đương với một lực nF đặt tại một điểm có khoảng cách l/n, và rồi sau đó lập luận tại sao điều này có thể được dùng để minh họa cho Khẳng định 2.1.

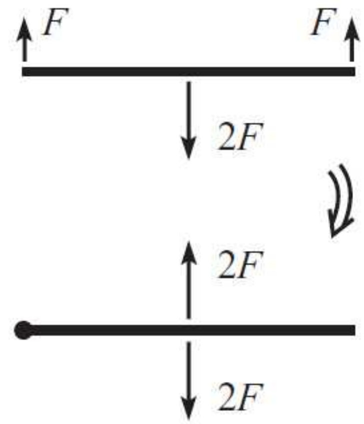
2.12. Hướng của lực căng *

Chỉ ra rằng lực căng bên trong một sợi dây mềm dễ uốn, có khối lượng hoặc là không có khối lượng, sẽ có hướng dọc theo sợi dây tại mọi điểm.

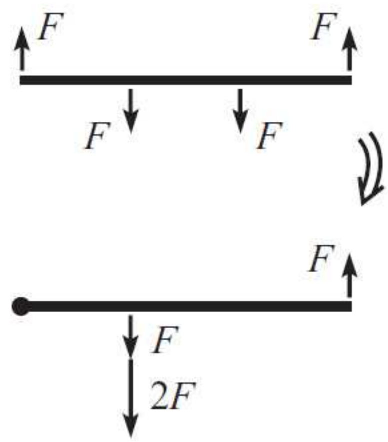
2.13. Tìm lực *

Một thanh có khối lượng M được giữ bởi các giá đỡ tại các đầu của nó, với mỗi giá đỡ tác dụng vào thanh một lực $Mg/2$. Bây giờ chúng ta đặt thêm một giá đỡ khác vào một điểm nào đó bên trong thanh, ví dụ như tại điểm nằm cách một giá đỡ ban đầu một khoảng a và cách giá đỡ còn lại một khoảng b; xem Hình vẽ 2.20. Hỏi các lực mà các giá đỡ tác dụng vào thanh bây giờ là bao nhiêu? Bài toán này có thể giải được không?

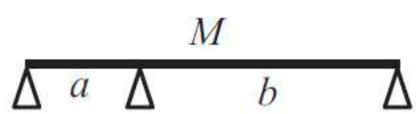
[5]Bây giờ lực tác dụng vào tâm quay của thanh bằng không, nhưng mục đích của tâm quay đơn giản chỉ là để giữ cho đầu bên trái đứng yên.



Hình 2.18:



Hình 2.19:



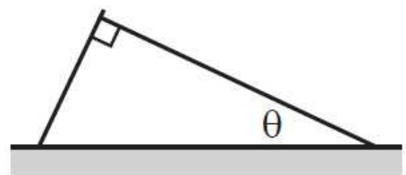
Hình 2.20:

2.14. Các thanh tựa vào nhau *

Có một thanh tựa vào một thanh khác như chỉ ra trong Hình 2.21. Hai thanh tựa vào nhau theo một góc vuông và thanh bên phải nghiêng một góc θ so với phương nằm ngang. Thanh bên trái có độ dài dài hơn một đại lượng rất nhỏ vượt qua điểm cuối của thanh bên phải. Hệ số ma sát giữa hai thanh là μ. Hai thanh đều có khối lượng riêng như nhau theo đơn vị độ dài và cả hai thanh đều được gắn chốt bản lề với mặt đất. Hỏi giá trị nhỏ nhất của góc θ là bao nhiêu để cho hai thanh này không bị rơi?

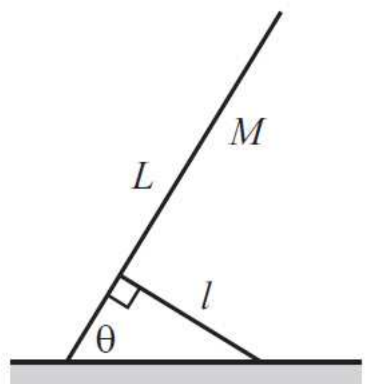
2.15. Giữ thang *

Một thang độ dài L và khối lượng M có điểm dưới cùng được gắn bản lề với mặt đất. Nó



Hình 2.21:

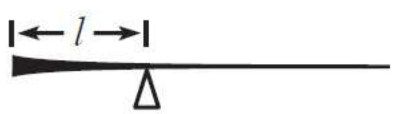
tạo với mặt đất một góc θ so với phương ngang và nó được giữ bởi một thanh không khối lượng độ dài ℓ, thanh này cũng được gắn bản lề với mặt đất (xem Hình vẽ 2.22). Thang và thanh là vuông góc với nhau. Tìm lực mà thanh tác dụng lên thang.



Hình 2.22:

2.16. Cân bằng thanh **

Cho một thanh có độ dài bán vô hạn (nghĩa là một thanh mà có độ dài vô hạn theo một hướng), hỏi khối lượng của nó phải được phân bố như thế nào theo độ dài để nó có tính chất sau: Nếu thanh bị cắt tại một điểm bất kỳ, thì nửa có độ dài bán vô hạn còn lại vẫn sẽ cân bằng khi được đặt trên một giá đỡ nằm cách điểm đầu của thanh một khoảng ℓ (xem Hình vẽ 2.23).



Hình 2.23:

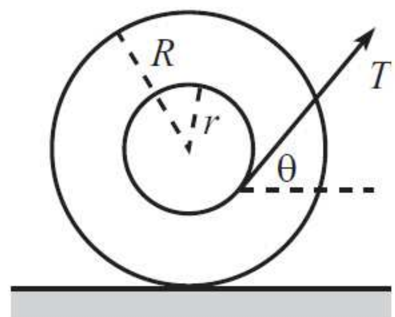
2.17. Cuộn chỉ **

Một cuộn chỉ có trục bán kính r và một vành tròn bên ngoài bán kính R lăn trên mặt nằm ngang. Một sợi chỉ được quấn xung quanh trục và được kéo bởi lực T theo phương tạo với phương nằm ngang một góc θ (xem Hình vẽ 2.24).

(a) Cho bán kính R và r, hỏi góc θ phải bằng bao nhiêu để cuộn chỉ không chuyển động? Giả sử rằng hệ số ma sát giữa cuộn chỉ và mặt nằm ngang là đủ lớn để cuộn chỉ không bị trượt.

(b) Cho R, r và hệ số ma sát μ giữa cuộn chỉ và mặt nằm ngang, hỏi giá trị lớn có thể của lực kéo T bằng bao nhiêu sao cho cuộn chỉ vẫn nằm yên?

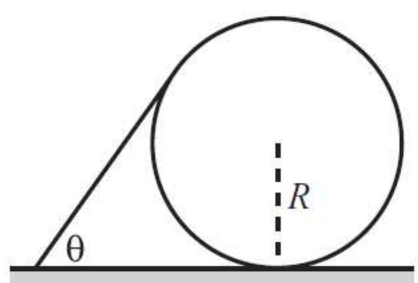
(c) Cho R và μ, hỏi bán kính r phải bằng bao nhiêu để bạn có thể làm cho cuộn chỉ bị trượt từ vị trí nằm yên với lực kéo T nhỏ nhất có thể? Nghĩa là, giá trị của r phải bằng bao nhiêu sao cho giá trị lớn nhất của T trong phần (b) là nhỏ nhất? Giá trị nhỏ nhất của T này bằng bao nhiêu?



Hình 2.24:

2.18. Thanh đặt trên hình tròn **

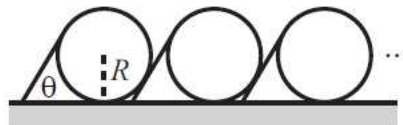
Một thanh có khối lượng riêng theo đơn vị độ dài là ρ nằm yên trên một hình tròn bán kính R (xem Hình vẽ 2.25). Thanh tạo với phương nằm ngang một góc θ và nó tiếp xúc với đường tròn tại đỉnh trên của nó. Tại mọi điểm tiếp xúc đều có ma sát, và giả sử rằng lực ma sát là đủ lớn để giữ hệ nằm yên. Hãy tìm giá trị của lực ma sát giữa mặt đất và hình tròn.



Hình 2.25:

2.19. Hệ các thanh tựa vào các hình tròn ***

Một số lượng lớn các thanh (với khối lượng riêng theo độ dài là ρ) và các hình tròn (với bán kính R) tựa vào nhau, như được cho trong Hình vẽ 2.26. Mỗi thanh tạo với phương nằm ngang một góc θ và tiếp xúc với đường tròn tiếp sau nó tại đỉnh của thanh. Các thanh được gắn bản lề với mặt đất, và không có ma sát tại bất cứ điểm tiếp xúc nào (không giống như bài toán bên trên). Trong trường hợp giới hạn khi có rất nhiều thanh và hình tròn, hỏi phản lực giữa một thanh nằm rất xa về phía bên phải và hình tròn mà nó tựa lên là bao nhiêu? Giả sử rằng hình tròn cuối cùng dựa vào một bức tường, để làm cho nó không chuyển động.



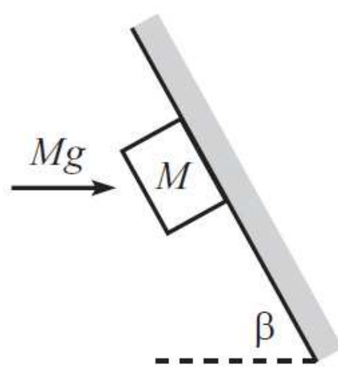
Hình 2.26:

2.4 Bài tập luyện tập

Mục 2.1: Cân bằng lực

2.20. Vật nằm bên dưới mặt phẳng nghiêng *

Một vật khối lượng M được đặt bên dưới một mặt phẳng nghiêng tạo vơi phương nằm ngang một góc β. Bạn tác dụng một lực Mg theo phương nằm ngang vào vật, như chỉ ra trong Hình 2.27. Giả sử rằng lực ma sát giữa vật và mặt phẳng nghiêng là đủ lớn để giữ vật nằm yên. Hỏi phản lực và lực ma sát (gọi chúng là N và F_{f}) mà mặt phẳng nghiêng tác dụng lên vật có giá trị là bao nhiêu? Nếu hệ số ma sát tĩnh giữa vật và mặt phẳng nghiêng là μ, hỏi với khoảng giá trị nào của β vật vẫn có thể nằm yên?



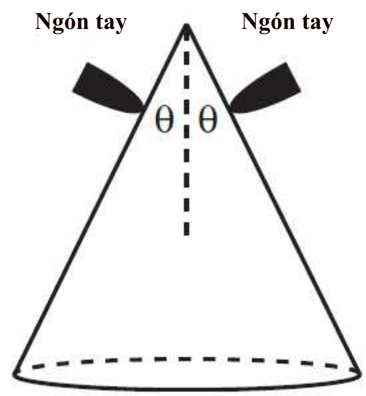
Hình 2.27:

2.21. Kéo vật *

Một người kéo một vật bởi một lực F, nghiêng một góc θ so với phương nằm ngang. Hệ số ma sát giữa vật và mặt đất là μ. Với giá trị nào của góc θ để lực F làm cho vật bắt đầu trượt có giá trị nhỏ nhất? Giá trị nhỏ nhất của lực F này là bao nhiêu?

2.22. Giữ vỏ hình nón *

Với hai ngón tay, bạn có thể giữ vỏ hình nón của một cái kem ốc quế nằm yên hướng xuống dưới, như chỉ ra trong Hình vẽ 2.28. Khối lượng của vỏ nón là m, và hệ số ma sát tĩnh giữa vỏ nón và ngón tay bạn là μ. Khi được quan sát từ mặt bên, góc của đỉnh hình nón là 2θ. Hỏi giá trị nhỏ nhất của phản lực do mỗi ngón tay của bạn tác dụng vào vỏ nón phải bằng bao nhiêu để giữ được vỏ nón? Biểu diễn theo θ, hỏi giá trị nhỏ nhất của μ phải bằng bao nhiêu để bạn vẫn có thể giữ được vỏ nón? Giả sử rằng ngón tay bạn có thể tác dụng một lực lớn tùy ý lên vỏ nón.



Hình 2.28:

2.23. Giữ quyển sách **

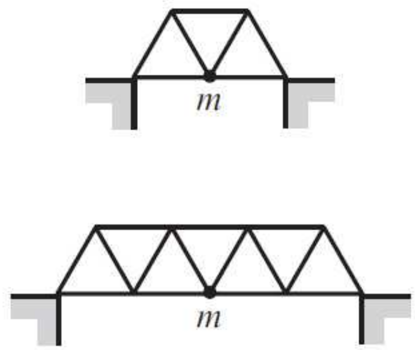
Nhiệm vụ của Bài tập 2.4 là tìm giá trị nhỏ nhất của lực để giữ quyển sách nằm yên. Hỏi giá trị lớn nhất cho phép của lực này là bao nhiêu, phụ thuộc vào θ và μ? Có một giá trị đặc biệt nào của góc nghiêng θ không? Cho trước μ, vẽ phác họa lực lớn nhất cho phép của F này trong khoảng $-\pi/2 < \theta < \pi/2$.

2.24. Những cây cầu **

(a) Xét cây cầu đầu tiên như trong Hình 2.29, được làm bởi các dầm có hình dạng tạo thành bởi ba tam giác đều. Giả sử rằng bảy dầm này là không có khối lượng và các dầm được kết nối với nhau bởi các bản lề. Nếu một xe ô tô có khối lượng m đỗ tại điểm giữa của cầu, hãy tìm lực (nói rõ là lực căng hay lực nén) xuất hiện trong mỗi dầm. Giả sử rằng hai bệ đỡ của cầu không tác dụng bất cứ lực theo phương ngang nào vào cầu.

(b) Với câu hỏi như trên, nhưng bây giờ đối với cây cầu thứ hai được chỉ ra trong Hình 2.29, tạo thành bởi bẩy tam giác đều.

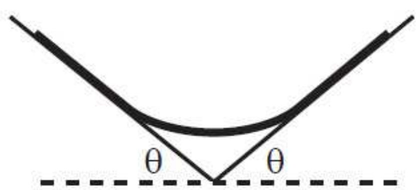
(c) Vẫn câu hỏi như trên, nhưng bây giờ xét trường hợp đặc biệt khi cây cầu được tạo thành bởi $4n - 1$ tam giác đều.



Hình 2.29:

2.25. Sợi dây nằm giữa hai mặt phẳng nghiêng **

Một sợi dây nằm giữa hai mặt phẳng nghiêng mà cả hai đều nghiêng một góc θ (bạn có thể chọn giá trị tùy ý) so với phương ngang như trong Hình 2.30. Sợi dây có khối lượng phân bố đều và hệ số ma sát giữa nó và các mặt phẳng nghiêng bằng 1. Hệ đã cho là đối xứng qua hai bên trái và phải. Hỏi tỷ lệ lớn nhất có thể của phần chiều dài sợi dây mà không chạm mặt phẳng nghiêng là bao nhiêu? Giá trị nào của θ tương ứng với giá trị tỷ số lớn nhất này?



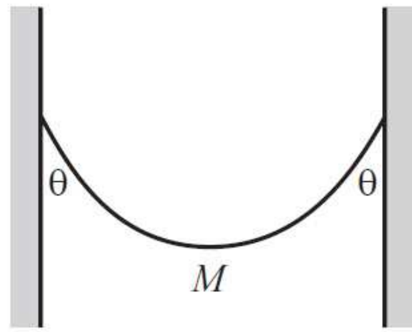
Hình 2.30:

2.26. Treo xích **

Một sợi xích khối lượng M được treo vào giữa hai bức tường, với hai đầu của nó có cùng độ cao. Sợi xích tạo một góc θ đối với mỗi bức tường, như chỉ ra trong Hình 2.31. Tìm lực căng trong sợi xích tại điểm thấp nhất của nó. Giải bài toán này theo hai cách:

(a) Xét những lực tác dụng vào một nửa sợi xích. (Đây là cách giải nhanh.)

(b) Sử dụng kết quả (xem Bài tập 2.8) là độ cao của sợi xích được cho bởi $y(x) = (1/\alpha)\cosh(\alpha x)$, và xét những lực theo phương thẳng đứng tác dụng vào một đoạn rất nhỏ tại điểm thấp nhất của sợi xích. Điều này sẽ cho bạn biết lực căng của sợi xích phụ thuộc theo α. Sau do tìm mối liên hệ của α phụ thuộc vào góc θ đã cho. (Đây là một cách giải dài.)



Hình 2.31:

Mục 2.2: Cân bằng moment

2.27. Moment lực gây ra bởi trọng lực

Một thanh nằm ngang có khối lượng M và độ dài L được gắn bản lề tại một đầu. Tính tích phân của moment lực gây ra bởi trọng lực dọc theo thanh (đối với bản lề), và chỉ ra rằng kết quả nhận được bằng với moment lực gây ra bởi một khối lượng M đặt tại tâm của thanh.

2.28. Hàm tuyến tính *

Chỉ ra rằng nếu một hàm thỏa mãn $f(a) + f(b) = f(a + b)$, thì $f(rx) = rf(x)$ đối với x bất kỳ và r là số hữu tỷ bất kỳ.

2.29. Hướng của lực *

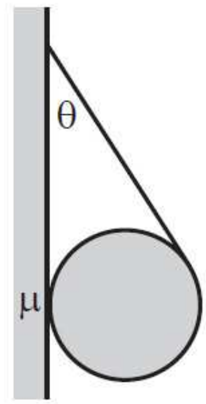
Một thanh được nối với những phần khác của một một hệ tĩnh học bởi các bản lề tại hai đầu của thanh. Chỉ ra rằng (1) nếu thanh không có khối lượng, thì lực do bản lề tác dụng vào nó có hướng dọc theo thanh, nhưng (2) nếu thanh có khối lượng, thì những lực này không nhất thiết phải có hướng dọc theo thanh.

2.30. Bóng treo trên tường *

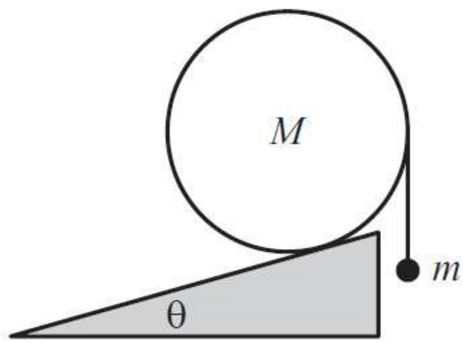
Một quả bóng được giữ bởi một sợi dây, như trong Hình vẽ 2.32, trong đó sợi dây là tiếp xúc với quả bóng. Nếu góc giữa sợi dây và tường là θ, hỏi hệ số ma sát tĩnh nhỏ nhất giữa tường và quả bóng phải bằng bao nhiêu để giữ cho quả bóng không bị rơi?

2.31. Trụ tròn và khối lượng treo *

Một trụ tròn đồng chất khối lượng M được đặt trên một mặt phẳng cố định nghiêng góc θ. Một sợi dây được buộc vào điểm ngoài cùng bên phải của trụ tròn, và một khối lượng m được treo vào sợi dây, như chỉ ra trong Hình vẽ 2.33. Giả sử rằng hệ số ma sát giữa trụ tròn và mặt phẳng nghiêng là đủ lớn để cho trụ không bị trượt. Hỏi giá trị của m, theo M và θ, bằng bao nhiêu nếu cơ hệ là đứng yên?



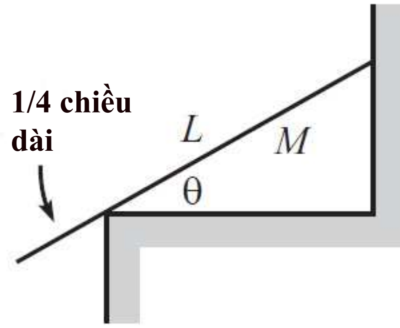
Hình 2.32:



Hình 2.33:

2.32. Thang dựa trên một cạnh vuông **

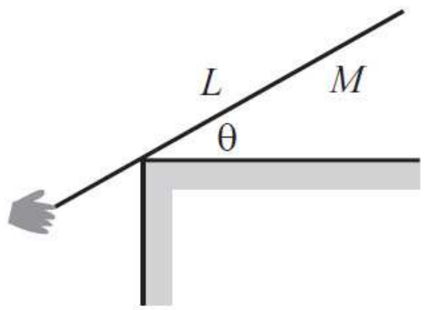
Một cái thang khối lượng M và chiều dài L tựa vào một bức tường không ma sát, với một phần tư chiều dài của thang thò ra bên ngoài một cạnh góc vuông, như chỉ ra trong Hình 2.34. Thang tạo với phương ngang một góc θ. Hỏi góc θ phải bằng bao nhiêu để cho thang vẫn đứng yên với giá trị nhỏ nhất có thể của hệ số ma sát giữa thang và cạnh góc vuông? (Với các giá trị khác nhau của θ thì thang sẽ có chiều dài khác nhau, nhưng giả sử rằng khối lượng của thang vẫn luôn bằng M.)



Hình 2.34:

2.33. Thanh dựa trên một cạnh vuông **

Bạn giữ một đầu của một thanh khối lượng M và chiều dài L bằng một đầu ngón tay của bạn. Thanh tựa trên một cạnh bàn nhẵn tại điểm có khoảng cách bằng một phần tư độ dài thanh tính từ đầu ngón tay của bạn, như trong Hình vẽ 2.35. Thanh tạo với phương ngang một góc θ. Hỏi độ lớn của lực mà ngón tay bạn phải tác dụng lên đầu thanh phải bằng bao nhiêu để giữ cho cho thanh ở vị trí như trên? Với giá trị của góc θ bằng bao nhiêu thì lực ngón tay của bạn sẽ có hướng theo phương ngang?



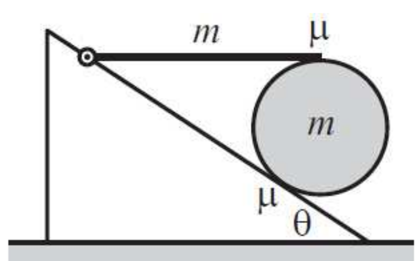
Hình 2.35:

2.34. Thanh và trụ tròn **

Một thanh nằm ngang khối lượng m có đầu bên trái của nó được gắn bản lề với một mặt phẳng nghiêng góc θ, trong khi đó đầu bên phải của nó nằm trên đỉnh một trụ tròn cũng có khối lượng m mà cũng nằm yên trên mặt phẳng nghiêng, như trong Hình vẽ 2.36. Hệ số ma sát giữa trụ tròn với cả thanh và mặt phẳng nghiêng là μ.

(a) Giả sử rằng hệ đứng yên, hỏi phản lực mà mặt phẳng nghiêng tác dụng lên trụ tròn bằng bao nhiêu?

(b) Hỏi giá trị nhỏ nhất có thể của μ (phụ thuộc theo θ) bằng bao nhiêu sao cho hệ không bị trượt tại bất cứ điểm nào?



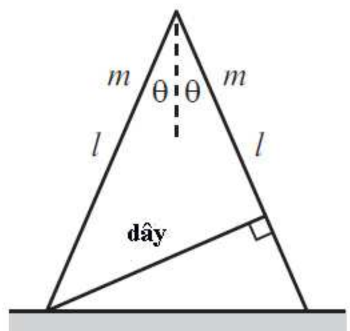
Hình 2.36:

2.35. Hai thanh và một sợi dây **

Hai thanh, mỗi thanh có khối lượng m và chiều dài ℓ, được nối với nhau bởi một bản lề tại đỉnh trên của chúng. Chúng tạo một góc θ so với phương thẳng đứng. Một sợi dây không khối lượng nối điểm cuối cùng của thanh bên trái vào thanh bên phải theo một góc vuông, như chỉ ra trong Hình vẽ 2.37. Cả hệ thống được đặt trên một mặt bàn nhẵn không ma sát.

(a) Hỏi lực căng trong dây bằng bao nhiêu?

(b) Hỏi lực do thanh bên trái tác động vào thanh bên phải tại bản lề bằng bao nhiêu? *Gợi ý:* Chú ý là bạn không cần phải tính toán nhiều trong bài toán này!



Hình 2.37:

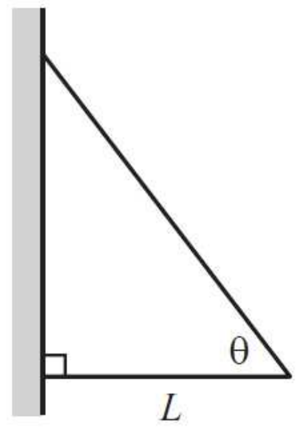
2.36. Hai thanh và bức tường **
Hai thanh được nối với nhau và với một bức tường bởi các bản lề. Thanh bên dưới nằm ngang và có chiều dài L, và hai thanh tạo một góc θ với nhau, như chỉ ra trong Hình 2.38. Nếu cả hai thanh có cùng khối lượng riêng trên một đơn vị độ dài là ρ, hãy tìm thành phần theo phương ngang và phương thẳng đứng của lực do bức tường tác dụng lên bản lề trên cùng, và chỉ ra rằng độ lớn của lực này tiến tới vô cùng trong cả hai trường hợp khi $\theta \to 0$ và $\theta \to \pi/2$.[6]

2.37. Thanh đặt trên hình tròn **
Sử dụng kết quả của Bài tập 2.18 cho cơ cấu trong Hình 2.39, hãy chỉ ra rằng nếu hệ ở trạng thái nằm yên, thì hệ số ma sát:

(a) giữa thanh và hình tròn phải thỏa mãn

$$\mu \geq \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}. \tag{2.14}$$

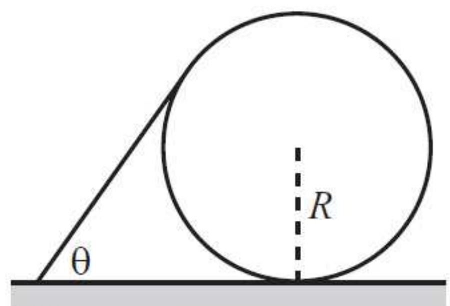
[6]Lực này do đó sẽ đạt một giá trị nhỏ nhất tại một góc nào đó ở giữa hai góc trên. Nếu bạn muốn tính toán kỹ càng, bạn có thể chỉ ra rằng giá trị nhỏ nhất này xảy ra khi $\cos\theta = \sqrt{3} - 1$, mà có nghiệm là $\theta \approx 43^o$.



Hình 2.38:

(b) giữa thanh và mặt đất phải thỏa mãn[7]

$$\mu \geq \frac{\sin\theta\cos\theta}{(1+\cos\theta)(2-\cos\theta)}. \qquad (2.15)$$



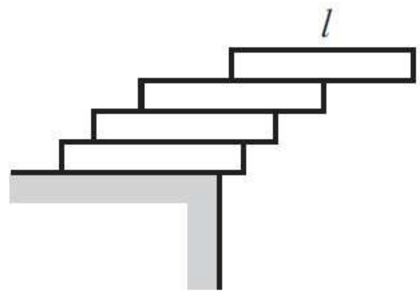
Hình 2.39:

2.38. Các khối xếp chồng lên nhau **

N khối có chiều dài ℓ được xếp chồng lên đỉnh của nhau trên một cạnh của một cái bàn, như được chỉ ra trong Hình 2.40 cho trường hợp $N = 4$. Hỏi khoảng cách theo phương ngang lớn nhất có thể của điểm ngoài cùng bên phải của khối trên cùng so với cạnh bàn bằng bao nhiêu? Kết quả này sẽ bằng bao nhiêu khi $N \to \infty$?[8]

[7] Nếu bạn muốn tính toán thêm, bạn có thể chỉ ra rằng vế phải đạt được giá trị lớn nhất khi $\cos\theta = \sqrt{3} - 1$, mà có nghiệm $\theta \approx 43^o$. (Rõ ràng là lời chú thích này giống như lời chú thích trước. Nhưng mà nó cũng đúng!) Đây là góc mà tại đó thanh sẽ dễ bị trượt trên mặt đất nhất.

[8] Hóa ra là phương pháp xếp chồng như trong Hình 2.40 (với các khối đơn giản chỉ là được xếp chồng lên nhau) không nhận được khoảng cách thò ra của khối trên cùng tối ưu. Xem Hall (2005) để biết một một thảo luận thú vị về các phương pháp khác.



Hình 2.40:

2.5 Lời giải

2.1. Dây treo

Gọi $T(y)$ là lực căng trong dây như là một hàm của độ cao. Xét một đoạn nhỏ của sợi dây nằm giữa độ cao y và $y + dy$ $(0 \le y \le L)$. Những lực tác dụng vào đoạn dây này là $T(y + dy)$ hướng lên trên, $T(y)$ hướng xuống dưới, và trọng lực $\rho g dy$ hướng xuống dưới. Bởi vì sợi dây đang nằm yên, nên ta có $T(y + dy) = T(y) + \rho g dy$. Khai triển biểu thức này tới bậc nhất của dy ta có $T'(y) = \rho g$. Lực căng của dây tại điểm dưới cùng của nó bằng không, do đó tích phân từ $y = 0$ tới vị trí y ta có

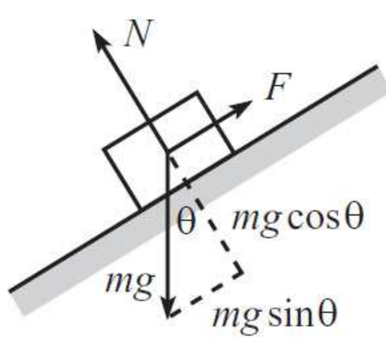
$$T(y) = \rho g y. \tag{2.16}$$

Để kiểm tra lại, tại đầu trên của sợi dây chúng ta có $T(L) = \rho g L$, bằng trọng lực của toàn bộ sợi dây, và đây là kết quả hợp lý.

Bằng cách làm khác, bạn có thể đơn giản chỉ cần viết ra kết quả là $T(y) = \rho g y$, với nhận xét rằng lực căng trong sợi dây tại một điểm đã cho là lực giữ toàn bộ trọng lượng của phần dây nằm dưới điểm này.

2.2. Vật trên mặt phẳng

Cân bằng các lực, như được chỉ ra trong Hình 2.41, theo phương song song và phương vuông góc

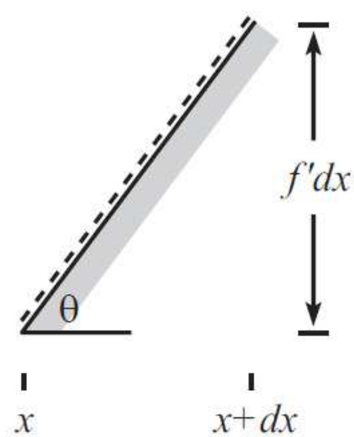


Hình 2.41:

với mặt phẳng nghiêng, chúng ta thấy rằng $F = mg\sin\theta$ và $N = mg\cos\theta$. Các thành phần nằm ngang của hai lực này là $F\cos\theta = mg\sin\theta\cos\theta$ (hướng về bên phải), và $N\sin\theta = mg\cos\theta\sin\theta$ (hướng về bên trái). Hai thành phần này có giá trị bằng nhau, và nó phải như vậy, bởi vì tổng lực tác dụng theo phương ngang lên vật bằng không. Để tìm giá trị cực đại của $mg\sin\theta\cos\theta$, chúng ta có thể lấy đạo hàm, hoặc chúng ta có thể viết giá trị này dưới dạng $(mg/2)\sin(2\theta)$, và từ đó có thể thấy rằng giá trị cực đại xảy ra khi $\theta = \pi/4$. Và giá trị cực đại này bằng $mg/2$.

2.3. Dây xích nằm yên

Giả sử đường cong mô tả hình dạng của ống là $f(x)$, và giả sử tập xác định của đường cong này là từ $x = a$ tới $x = b$. Xét một đoạn nhỏ của sợi xích nằm giữa x và $x + dx$ (xem Hình vẽ 2.42). Độ dài của đoạn nhỏ này là $\sqrt{1+f'^2}dx$, do đó khối lượng của nó là $\rho\sqrt{1+f'^2}dx$, trong đó ρ là



Hình 2.42:

khối lượng riêng trên một đơn vị độ dài. Thành phần của gia tốc trọng trường theo phương dọc theo đường cong là $-\mathrm{g}\sin\theta = -\mathrm{g}f'^2/\sqrt{1+f'^2}$ (sử dụng $\tan\theta = f'$) với giá trị dương là tương ứng với trường hợp sợi xích chuyển động dọc theo đường cong từ a tới b. Do đó, lực tổng hợp dọc theo đường cong là

$$\begin{aligned}
F = \int_a^b(-\mathrm{g}\sin\theta)dm &= \int_a^b \frac{-\mathrm{g}f'}{\sqrt{1+f'^2}}\cdot\rho\sqrt{1+f'^2}dx \\
&= -\mathrm{g}\rho\int_a^b f'dx \\
&= -\mathrm{g}\rho\big(f(a)-f(b)\big) \\
&= 0. \qquad (2.17)
\end{aligned}$$

2.4. Giữ một quyển sách

(a) Phản lực do tường tác dụng vào quyển sách là $F\cos\theta$, vì vậy lực ma sát F_{f} giữ quyển sách có giá trị lớn nhất là $\mu F\cos\theta$. Những lực theo phương thẳng đứng khác tác dụng lên quyển sách là trọng lực, bằng $-Mg$, và thành phần thẳng đứng của lực F, bằng $F\sin\theta$. Nếu quyển sách nằm yên, chúng ta phải có $F\sin\theta + F_{\mathrm{f}} - Mg = 0$. Kết hợp điều này với điều kiện $F_{\mathrm{f}} \le \mu\mathrm{F}\cos\theta$ ta có

$$F(\sin\theta + \mu\cos\theta) \ge M\mathrm{g}. \tag{2.18}$$

Do đó, F phải thỏa mãn

$$F \ge \frac{M\mathrm{g}}{\sin\theta + \mu\cos\theta}, \tag{2.19}$$

với giả thiết rằng $\sin\theta + \mu\cos\theta$ là dương. Nếu giá trị này âm, thì sẽ không có giá trị nào của lực F thỏa mãn.

(b) Để tìm giá trị nhỏ nhất của giá trị cực tiểu này, chúng ta phải đi tìm giá trị cực đại của mẫu số của nó. Lấy đạo hàm mẫu số chúng ta có $\cos\theta - \mu\sin\theta = 0$, do đó $\tan\theta = 1/\mu$. Thay giá trị này của θ vào trong phương trình (2.19) chúng ta có

$$F \ge \frac{mg}{\sqrt{1+\mu^2}} \quad (\text{với } \tan\theta = 1/\mu). \tag{2.20}$$

Đây là giá trị nhỏ nhất có thể của F mà vẫn giữ được quyển sách, và góc nghiêng tương ứng của trường hợp này là $\theta = \tan^{-1}(1/\mu)$. Chúng ta thấy rằng nếu μ có giá trị rất nhỏ, thì để cực tiểu hóa lực tác dụng F của bạn, bạn về cơ bản cần phải đẩy một lực mg theo phương thẳng đứng. Nhưng nếu μ có giá trị rất lớn, nói chung bạn phải đẩy một lực mg/μ theo phương nằm ngang.

(c) Sẽ không có giá trị nào của F thỏa mãn điều kiện trong phương trình (2.19) nếu giá trị của vế phải là vô cùng (chính xác hơn là, không có giá trị nào của lực F thỏa mãn điều kiện trong phương trình (2.18) nếu hệ số của F bằng không hoặc âm). Điều này xảy ra khi

$$\tan\theta = -\mu. \tag{2.21}$$

Nếu θ có giá trị nhỏ hơn giá trị âm này, thì chúng ta sẽ không thể nào giữ được quyển sách, bất kể là bạn có tác dụng một lực lớn thế nào đi chăng nữa.

2.5. Dây trên mặt phẳng nghiêng

Thành phần theo phương dọc theo mặt phẳng nghiêng của trọng lực là $(\rho L)g\sin\theta$, và giá trị lớn nhất của lực ma sát là $\mu N = \mu(\rho L)g\cos\theta$. Do đó, bạn có thể nghĩ rằng lực căng trong dây tại đỉnh trên của dây là $\rho Lg\sin\theta - \mu\rho Lg\cos\theta$. Tuy nhiên, không nhất thiết nó phải bằng như vậy. Lực căng trong dây tại đỉnh trên của nó phụ thuộc vào cách mà sợi dây được đặt lên trên mặt phẳng nghiêng. Nếu, ví dụ như, sợi dây được đặt trên mặt phẳng nghiêng mà không bị kéo căng thì lực ma sát sẽ có hướng lên trên, và lực căng tại đỉnh của nó sẽ bằng $\rho Lg\sin\theta - \mu\rho Lg\cos\theta$.

Hoặc nó sẽ bằng không nếu $\mu\rho Lg\cos\theta > \rho Lg\sin\theta$, trong trường hợp này lực ma sát không cần thiết phải đạt tới giá trị cực đại của nó.

Mặt khác, nếu sợi dây được đặt lên trên mặt phẳng nghiêng sau khi bị kéo căng (hoặc, một cách tương đương, nó bị kéo lên trên dọc theo mặt phẳng nghiêng rồi sau đó bị đóng chặt vào mặt phẳng nghiêng tại điểm đầu của nó), thì lực ma sát sẽ có chiều hướng xuống, và lực căng tại điểm đầu dây bằng $\rho Lg\sin\theta + \mu\rho Lg\cos\theta$.

Một trường hợp đặc biệt khác xảy ra khi sợi dây được đặt lên trên một mặt phẳng nghiêng không ma sát, và sau đó hệ số ma sát được "bật lên" trở thành μ. Lực ma sát lúc đó vẫn bằng không. Việc thay đổi mặt phẳng nghiêng từ một bề mặt nhẵn (ví dụ như mặt băng) sang một bề mặt nhám (bằng một cách nào đó mà không làm cho sợi dây bị di chuyển) sẽ không làm thay đổi đột ngột giá trị của lực ma sát. Do đó, lực căng dây tại đỉnh của nó bằng $\rho Lg\sin\theta$.

Nói chung, phụ thuộc vào việc sợi dây được đặt lên mặt phẳng nghiêng như thế nào, lực căng dây tại đỉnh của nó có thể có bất cứ giá trị nào biến thiên từ giá trị cực đại $\rho Lg\sin\theta + \mu\rho Lg\cos\theta$ xuống giá trị cực tiểu $\rho Lg\sin\theta - \mu\rho Lg\cos\theta$ (hoặc 0, tùy thuộc giá trị nào lớn hơn). Nếu sợi dây được thay thế bởi một thanh (mà lực nén có thể xuất hiện trong nó), thì lực căng có thể có giá trị âm tới $\rho Lg\sin\theta - \mu\rho Lg\cos\theta$, nếu lực này là âm.

2.6. Giữ đĩa

(a) Trọng lực tác dụng lên đĩa là Mg hướng xuống dưới, và lực hướng lên trên là $2T$. Hai lực này phải cân bằng với nhau nên

$$T = \frac{M\mathrm{g}}{2}. \tag{2.22}$$

Chúng ta có thể tìm phản lực trên một đơn vị độ dài mà sợi dây tác dụng lên đĩa theo hai cách.

LỜI GIẢI THỨ NHẤT: Gọi $Nd\theta$ là phản lực tác dụng trên một cung của đĩa chắn một góc $d\theta$. Một cung như thế này có độ dài là $Rd\theta$, do đó N/R là phản lực trên một đơn vị độ dài mà chúng ta cần tìm. Lực căng dây là như nhau tại mọi điểm, bởi vì sợi dây là không có khối lượng. Do vậy tất cả mọi điểm là tương đương với nhau, và vì thế phản lực N là hằng số, không phụ thuộc vào θ. Thành phần hướng lên trên của phản lực là $Nd\theta\cos\theta$, trong đó θ được đo so với phương thẳng đứng (nghĩa là, ở đây $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$). Bởi vì tổng hợp lực trong phương hướng lên trên là Mg, chúng ta phải có

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} N\cos\theta d\theta = M\mathrm{g}. \tag{2.23}$$

Tích phân này bằng $2N$, vì vậy chúng ta có $N = Mg/2$. Do đó, phản lực trên một đơn vị độ dài, N/R, sẽ bằng $Mg/2R$.

LỜI GIẢI THỨ HAI: Xét phản lực, $Nd\theta$, trên một cung nhỏ của đĩa mà chắn một góc $d\theta$. Các lực căng tại hai đầu của đoạn dây tương ứng với cung nhỏ này hầu như là triệt tiêu nhau, nhưng thực ra không phải như vậy, bởi vì chúng có các phương hơi khác nhau một chút. Tổng khác không của chúng là đại lượng mà sẽ sinh ra phản lực tác dụng lên đĩa. Từ Hình vẽ 2.43, chúng ta thấy rằng hai lực này có tổng là $2T\sin(d\theta/2)$, hướng vào "phía trong". Vì $d\theta$ là nhỏ, chúng ta có thể sử dụng $\sin x \approx x$ với x nhỏ để xấp xỉ lực này như là $Td\theta$. Do đó, $Nd\theta = Td\theta$, và vì vậy $N = T$. Phản lực trong một đơn vị độ dài, N/R, do đó bằng T/R. Sử dụng $T = Mg/2$ từ phương trình (2.22), chúng ta có $N/R = Mg/2R$.

(b) Gọi $T(\theta)$ là lực căng, như là một hàm của θ, với $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$. Lực T bây giờ phụ thuộc vào θ, bởi vì còn có lực theo phương tiếp tuyến. Hầu như mọi việc để giải bài toán này đã được làm trong ví dụ "Dây quấn quanh một cột" trong Mục 2.1. Chúng ta đơn giản là sẽ sử dụng phương trình (2.7), được viết theo các ký hiệu của bài toán này

$$T(\theta) \leq T(0)e^{\mu\theta}. \tag{2.24}$$

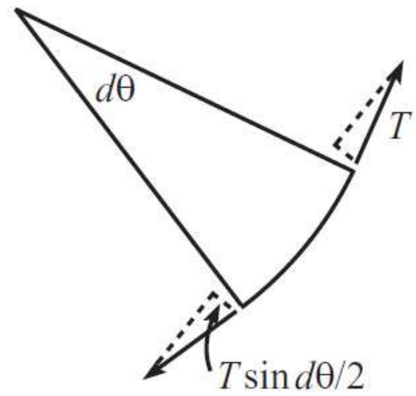
Cho $\theta = \pi/2$, và sử dụng $T(\pi/2) = Mg/2$, chúng ta có $Mg/2 \leq T(0)e^{\mu\pi/2}$. Do đó chúng ta sẽ thấy rằng lực căng tại điểm dưới cùng của dây sẽ thỏa mãn

$$T(0) \geq \frac{M\mathrm{g}}{2}e^{-\mu\pi/2}. \tag{2.25}$$

NHẬN XÉT: Giá trị nhỏ nhất của $T(0)$ tiến tới $Mg/2$ khi $\mu \to 0$, và nó phải bằng như vậy. Và nó sẽ tiến tới không khi $\mu \to \infty$, và nó phải như vậy (hãy tưởng tượng một bề mặt rất nhám, đến mức mà lực ma sát từ sợi dây gần điểm $\theta = \pi/2$ về cơ bản là đỡ toàn bộ trọng lực). Nhưng thật là thú vị, lực căng tại điểm dưới cùng của sợi dây không chính xác bằng không, mặc dù μ lớn thế nào đi chăng nữa. Về cơ bản, giá trị của T càng nhỏ thì giá trị của N cũng càng nhỏ đi. Nhưng T giảm giá trị ít hơn so với N (bởi vì N quyết định giá trị của lực ma sát). Vì vậy lực T không giảm mấy khi giá trị của nó là nhỏ, và kết quả là nó không bao giờ có thể đạt tới giá trị bằng không. ♣

2.7. Vật ở giữa các vòng tròn

(a) Gọi N là phản lực giữa các vòng tròn và tam giác. Mục đích của bài toán này là đi tìm thành phần nằm ngang của lực N, đó là, $N\cos\theta$. Từ Hình vẽ 2.44, chúng ta thấy rằng lực hướng lên trên tác dụng vào tam giác từ các phản lực là $2N\sin\theta$. Lực này phải bằng trọng lượng của tam giác, là $g\sigma$ nhân với diện tích. Bởi vì góc đáy của tam giác cân là 2θ, chiều dài của cạnh trên cùng là $2L\sin\theta$, và độ cao của cạnh này là $L\cos\theta$. Vì vậy diện tích của tam giác là $L^2\sin\theta\cos\theta$. Khối lượng của nó do đó là $\sigma L^2\sin\theta\cos\theta$. Cân bằng khối lượng



Hình 2.43:

này với thành phần hướng lên của các phản lực cho ta $N = (g\sigma L^2/2)\cos\theta$. Thành phần nằm ngang của lực N do đó bằng

$$N\cos\theta = \frac{\mathrm{g}\sigma L^2\cos^2\theta}{2}. \tag{2.26}$$

Thành phần nằm ngang này bằng không khi $\theta = \pi/2$, và nó tăng khi θ giảm, mặc dù khi đó tam giác sẽ nhỏ hơn. Nó có một tính chất rất thú vị đó là nó tiến đến một giá trị hữu hạn $g\sigma L^2/2$ khi $\theta \to 0$.

(b) Trong Hình 2.45, cạnh đáy của hình chữ nhật có độ dài $2R(1-\cos\theta)$. Khối lượng của nó do đó bằng $2\sigma RL(1-\cos\theta)$. Cân bằng trọng lượng với thành phần hướng lên trên của các phản lực, $2N\sin\theta$, cho ta $N = \sigma gRL(1-\cos\theta)/\sin\theta$. Thành phần nằm ngang của lực N do đó sẽ bằng

$$N\cos\theta = \frac{\sigma\mathrm{g}RL(1-\cos\theta)\cos\theta}{\sin\theta}. \tag{2.27}$$

Thành phần này bằng không trong cả hai trường hợp khi $\theta = \pi/2$ và khi $\theta = 0$ (bởi vì $1-\cos\theta \approx \theta^2/2$ tiến tới không nhanh hơn $\sin\theta \approx \theta$, với θ nhỏ). Lấy đạo hàm để biết khi nào giá trị này đạt cực đại, chúng ta có (sử dụng $\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta$),

$$\cos^3\theta - 2\cos\theta + 1 = 0. \tag{2.28}$$

May mắn là chúng ta dễ dàng tìm được một nghiệm của phương trình bậc ba này, đó là $\cos\theta = 1$, là giá trị mà chúng ta biết rằng đó không phải là giá trị tương ứng với giá trị cực đại. Chia cả hai vế phương trình này cho $(\cos\theta - 1)$ ta có $\cos^2\theta + \cos\theta - 1 = 0$. Nghiệm của phương trình bậc hai này là

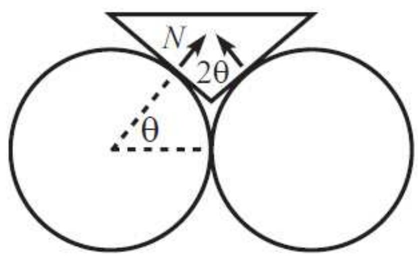
$$\cos\theta = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}. \tag{2.29}$$

Chúng ta phải chọn nghiệm với dấu dương, bởi vì chúng ta cần $|\cos\theta| \leq 1$. Do vậy kết quả của chúng ta là $\cos\theta \approx 0.618$, đây là giá trị nghịch đảo của giá trị tỷ số vàng. Góc θ khi đó sẽ là $\approx 51.8^o$.

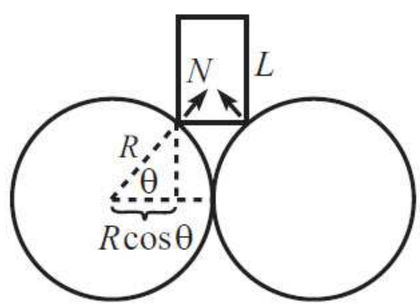
(c) Trong Hình vẽ 2.46, độ dài cạnh huyền được chỉ ra là $R\sec\theta$, vì vậy bán kính của hình tròn trên cùng sẽ là $R(\sec\theta - 1)$. Khối lượng của nó do đó sẽ bằng $\sigma\pi R^2(\sec\theta - 1)^2$. Cân bằng trọng lượng với thành phần hướng lên trên của các phản lực, $2N\sin\theta$, ta có $N = \sigma g\pi R^2(\sec\theta - 1)^2/(2\sin\theta)$. Thành phần nằm ngang của N do đó sẽ bằng

$$N\cos\theta = \frac{\sigma g\pi R^2\cos\theta}{2\sin\theta}\left(\frac{1}{\cos\theta} - 1\right)^2 = \frac{\sigma g\pi R^2(1-\cos\theta)^2}{2\sin\theta\cos\theta}. \tag{2.30}$$

Giá trị này bằng không khi $\theta = 0$ (sử dụng $\cos\theta \approx 1 - \theta^2/2$ và $\sin\theta \approx \theta$ cho giá trị θ nhỏ). Khi $\theta \to \pi/2$, giá trị này sẽ có dạng $1/\cos\theta$, và sẽ tiến ra vô cùng. Trong trường hợp giới hạn này, N có hướng gần như là thẳng đứng, nhưng nó có giá trị rất lớn đến mức mà thành phần nằm ngang của nó cũng tiến đến vô cùng.



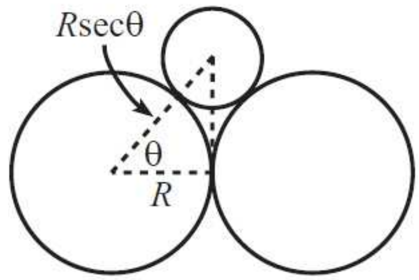
Hình 2.44:



Hình 2.45:

2.8. Treo xích

(a) Một điều cốt lõi mà bạn cần phải chú ý trong bài toán này là thành phần nằm ngang, T_x, của lực căng là như nhau trong sợi xích. Điều này là đúng vì lực tổng theo phương ngang



Hình 2.46:

của bất cứ đoạn nào của xích cũng phải bằng không. Chúng ta gọi giá trị hằng số này là $T_x \equiv C$.

Giả sử hình dạng của sợi xích được miêu tả bởi hàm $y(x)$. Vì lực căng có hướng dọc theo sợi xích tại mọi điểm trong xích (xem Bài tập 2.12), hai thành phần của lực căng này thỏa mãn $T_y/T_x = y'$, cho ta $T_y = Cy'$. Nói cách khác, T_y tỷ lệ với độ dốc của sợi xích.

Bây giờ chúng ta xét một đoạn nhỏ của xích, với hai đầu tại x và $x + dx$, như được miêu tả trong Hình 2.47. Hiệu của T_y tại hai đầu này sẽ cân bằng với trọng lượng của đoạn xích đó, $(dm)g$. Độ dài của đoạn dây này là $ds = dx\sqrt{1 + y'^2}$, do đó nếu ρ là khối lượng riêng, ta có

$$dT_y = (\rho\, ds)\mathrm{g} = \rho\mathrm{g}\, dx\sqrt{1 + y'^2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dT_y}{dx} = \rho\mathrm{g}\sqrt{1 + y'^2}. \tag{2.31}$$

Sử dụng kết quả $T_y = Cy'$ ở trên, biểu thức này trở thành $Cy'' = \rho g\sqrt{1 + y'^2}$. Đặt $z \equiv y'$, chúng ta có thể tách biến và tích phân biểu thức này để nhận được

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = \int \frac{\rho\mathrm{g}\, dx}{C} \quad \Longrightarrow \quad \sinh^{-1} z = \frac{\rho\mathrm{g}x}{C} + A, \tag{2.32}$$

trong đó A là một hằng số tích phân. Chúng ta có thể làm biểu thức này gọn hơn bằng cách định nghĩa hai hệ số mới α và a có dạng $\alpha \equiv \rho g/C$ và $a \equiv A/\alpha$. Sau đó chúng ta nhận được

$$\sinh^{-1} z = \alpha(x + a) \quad \Longrightarrow \quad z = \sinh \alpha(x + a). \tag{2.33}$$

Nhớ rằng $z \equiv dy/dz$, chúng ta có thể tích phân một lần nữa để nhận được

$$y(x) = \frac{1}{\alpha}\cosh \alpha(x + a) + h. \tag{2.34}$$

Do đó hình dạng của sợi xích là một hàm cosine hyperbolic. Hằng số h là không đóng vai trò gì quan trọng, bởi vì nó đơn giản phụ thuộc vào việc chúng ta chọn $y = 0$ tại điểm nào. Hơn nữa, chúng ta có thể triệt tiêu hằng số a nếu chúng ta chọn $x = 0$ tại vị trí là điểm thấp nhất của sợi xích (hoặc là tại đầu xích thấp nhất của sợi xích trong trường hợp hình dạng của sợi xích là đơn điệu tăng hoặc giảm). Trong trường hợp này, sử dụng phương trình (2.34), chúng ta thấy rằng $y'(0) = 0$ cho ta $a = 0$, là điều chúng ta đang cần. Sau đó chúng ta có (bỏ qua hằng số h) một kết quả đơn giản và rất gọn,

$$y(x) = \frac{1}{\alpha}\cosh(\alpha x). \tag{2.35}$$

(b) Hằng số α có thể được xác định từ vị trí của các điểm đầu xích và độ dài của xích. Như đã trình bày trong bài toán, vị trí của sợi xích có thể được miêu tả bởi (1) khoảng cách ngang d giữa hai đầu xích, (2) khoảng cách đứng λ giữa hai đầu xích, và (3) độ dài ℓ của sợi xích, như trong Hình vẽ 2.48. Chú ý rằng không phải dễ dàng để biết khoảng cách giữa các đầu sợi xích và điểm thấp nhất (là điểm mà chúng ta đã chọn tại đó $x = 0$). Nếu $\lambda = 0$, thì các khoảng cách này là $d/2$ do tính chất đối xứng. Nhưng trong các trường hợp khác, thì các khoảng cách này là không dễ để biết được.

Nếu chúng ta coi điểm cuối bên trái của sợi xích được đặt tại vị trí $x = -x_0$, thì từ thông tin đầu tiên của ba thông tin trên ở trên chúng ta biết rằng điểm đầu bên phải sẽ có vị trí tại $x = d - x_0$. Bây giờ chúng ta có hai ẩn chưa biết, x_0 và α. Thông tin thứ hai cho chúng ta biết rằng (không mất tính chất tổng quát, chúng ta coi đầu bên phải của sợi xích nằm ở vị trí cao hơn so với đầu bên trái)

$$y(d - x_0) - y(-x_0) = \lambda. \tag{2.36}$$

Và thông tin thứ ba cho ta, sử dụng phương trình (2.35),

$$\ell = \int_{-x_0}^{d-x_0} \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \frac{1}{\alpha}\sinh(\alpha x)\Big|_{-x_0}^{d-x_0}, \tag{2.37}$$

trong đó chúng ta vừa sử dụng $(d/du)\cosh u = \sinh u$, và $1+\sinh^2 u = \cosh^2 u$, và $\int \cosh u = \sinh u$. Viết phương trình (2.36) và (2.37) lại dưới dạng hiện, ta có

$$\begin{aligned} \cosh\big(\alpha(d - x_0)\big) - \cosh(-\alpha x_0) &= \alpha\lambda, \\ \sinh\big(\alpha(d - x_0)\big) - \sinh(-\alpha x_0) &= \alpha\ell. \end{aligned} \tag{2.38}$$

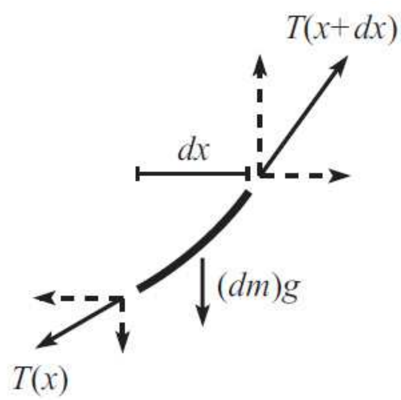
Chúng ta có thể khử x_0 bằng cách lấy hiệu của bình phương của hai phương trình này. Sử dụng các đồng nhất thức hyperbolic $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$ và $\cosh u \cosh v - \sinh u \sinh v = \cosh(u - v)$, ta thu được

$$2\cosh(\alpha d) - 2 = \alpha^2(\ell^2 - \lambda^2). \tag{2.39}$$

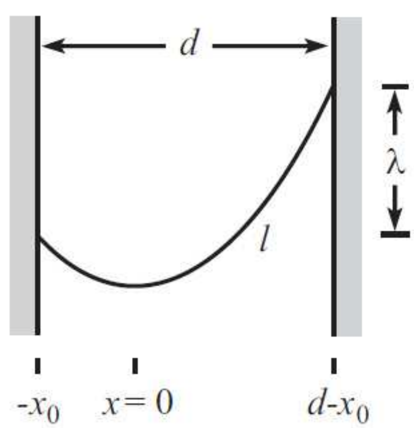
Đây là phương trình cần thiết để xác định α. Cho trước d, λ và ℓ, chúng ta có thể giải số để tìm α. Sử dụng công thức "nửa góc", bạn có thể chỉ ra rằng phương trình (2.39) có thể được viết dưới dạng

$$2\sinh(\alpha d/2) = \alpha\sqrt{\ell^2 - \lambda^2}. \tag{2.40}$$

NHẬN XÉT: Hãy kiểm tra một số trường hợp giới hạn. Nếu $\lambda = 0$ và $\ell = d$ (nghĩa là sợi xích được treo theo một đường thẳng nằm ngang), thì phương trình (2.40) sẽ trở thành $2\sinh(\alpha d/2) = \alpha d$. Nghiệm của phương trình này là $\alpha = 0$, mà thực ra sẽ tương ứng với một đường thẳng nằm ngang, bởi vì với α nhỏ, chúng ta có thể sử dụng $\cosh\epsilon \approx 1+\epsilon^2/2$ để nói rằng $y(x)$ trong phương trình (2.35) có dạng giống như $\alpha x^2/2$ (với sai khác một hằng số), mà dạng này biến đổi rất chậm theo x khi α nhỏ. Một trường hợp giới hạn khác là khi ℓ lớn hơn rất nhiều so với cả d và λ. Trong trường hợp này, phương trình (2.40) trở thành $2\sinh(\alpha d/2) \approx \alpha l$. Nghiệm của phương trình này là một giá trị α lớn (hoặc chính xác hơn là $\alpha \gg 1/d$), tương ứng với trường hợp này sợi xích sẽ bị "thõng xuống", bởi vì $y(x)$ trong phương trình (2.35) biến đổi rất nhanh theo x khi α lớn. ♣



Hình 2.47:



Hình 2.48:

2.9. Treo một cách nhẹ nhàng

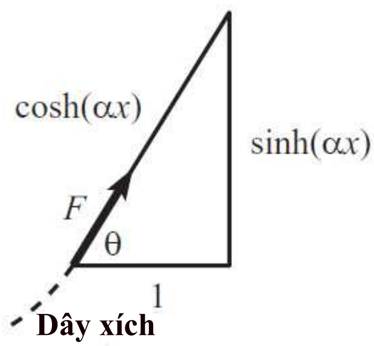
Chúng ta phải tìm khối lượng của sợi xích bằng cách tính độ dài của nó. Sau đó chúng ta phải xác định độ dốc của sợi xích tại các điểm treo của nó, vì vậy chúng ta có thể tìm các lực thành phần tại các điểm treo này. Sử dụng kết quả đã cho, $y(x) = (1/\alpha)\cosh(\alpha x)$, độ dốc của sợi xích như là một hàm của x là

$$y' = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\alpha}\cosh(\alpha x)\right) = \sinh(\alpha x). \tag{2.41}$$

Tổng độ dài của sợi xích do đó sẽ bằng (sử dụng $1 + \sinh^2 z = \cosh^2 z$)

$$\ell = \int_{-d}^{d} \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \int_{-d}^{d} \cosh(\alpha x) = \frac{2}{\alpha}\sinh(\alpha d). \tag{2.42}$$

Trọng lượng của sợi xích là $W = \rho l g$, trong đó ρ là khối lượng riêng trên một đơn vị độ dài. Mỗi



Hình 2.49:

điểm treo sẽ tác dụng một lực theo phương thẳng đứng là $W/2$. Vì vậy giá trị này sẽ bằng $F\sin\theta$, trong đó F là độ lớn của lực tác dụng tại mỗi điểm treo, và θ là góc mà sợi xích tạo với phương ngang. Bởi vì $\tan\theta = y'(d) = \sinh(\alpha d)$, từ Hình vẽ 2.49 chúng ta thấy rằng $\sin\theta = \tanh(\alpha d)$. Do đó,

$$F = \frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{W}{2} = \frac{1}{\tanh(\alpha d)}\cdot\frac{\rho g \sinh(\alpha d)}{\alpha} = \frac{\rho g}{\alpha}\cosh(\alpha d). \tag{2.43}$$

Lấy đạo hàm biểu thức này (như là hàm của α), và đặt nó bằng không để tìm giá trị nhỏ nhất của nó, ta có $\tanh(\alpha d) = 1/(\alpha d)$. Phương trình này phải được giải số. Kết quả của nó là

$$\alpha d \approx 1.1997 \equiv \eta. \tag{2.44}$$

Như vậy α được cho bởi $\alpha = \eta/d$, và do đó hình dạng của sợi xích mà sẽ làm cho lực F nhỏ nhất là

$$y(x) \approx \frac{d}{\eta}\cosh\left(\frac{\eta x}{d}\right). \tag{2.45}$$

Từ các phương trình (2.42) và (2.44), độ dài của sợi xích là $\ell = (2d/\eta)\sinh(\eta) \approx (2.52)d$. Để biết thêm xem sợi xích trông sẽ như thế nào, chúng ta có thể tính tỷ số của độ cao h và độ rộng $2d$.

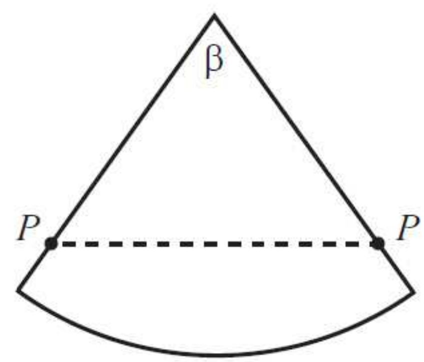
$$\frac{h}{2d} = \frac{y(d) - y(0)}{2d} = \frac{\cosh(\eta) - 1}{2\eta} \approx 0.338. \tag{2.46}$$

Chúng ta cũng có thể tính toán góc nghiêng của sợi xích tại các điểm treo, sử dụng $\tan\theta = \sinh(\alpha d)$. Biểu thức này cho ta $\tan\theta = \sinh\eta$, và do đó $\theta \approx 56.5^o$.

NHẬN XÉT: Chúng ta có thể tự hỏi rằng sợi xích có hình dạng như thế nào để cho thành phần nằm ngang hoặc thành phần thẳng đứng của lực F có giá trị nhỏ nhất. Thành phần thẳng đứng của nó, F_y, đơn giản là bằng một nửa trọng lượng của sợi xích, vì vậy chúng ta sẽ cho sợi xích là ngắn nhất có thể, đó chính là khi sợi xích nằm theo phương nằm ngang (trong trường hợp này thì lực F phải bằng vô cùng). Trường hợp này tương ứng với giá trị của $\alpha = 0$. Thành phần nằm ngang, F_x, bằng $F\cos\theta$. Từ Hình vẽ 2.49, chúng ta thấy rằng $\cos\theta = 1/\cosh(\alpha d)$. Do đó, phương trình (2.43) cho ta $F_x = \rho g/\alpha$. Giá trị này tiến tới không khi $\alpha \to \infty$, tương ứng với trường hợp khi độ dài của sợi xích bằng vô cùng, nghĩa là, khi sợi xích được thả "thõng xuống". ♣

2.10. Người leo núi

THÒNG LỌNG LOẠI THƯỜNG: Chúng ta sẽ sử dụng một thực tế là một hình nón là "phẳng",



Hình 2.50:

theo nghĩa là chúng ta có thể làm ra nó từ một mảnh giấy mà không phải gập giấy. Cắt hình nón theo một đường thẳng từ đỉnh của nó và đi qua nút thắt của thòng lọng, và trải hình nón phẳng này lên trên một mặt phẳng. Gọi hình nhận được, mà là một phần hình quạt của một hình tròn, là S (xem Hình vẽ 2.50). Nếu hình nón là rất dốc, thì S sẽ trông giống như một "miếng bánh" rất mảnh. Nếu hình nón là rất rộng, với độ dốc thoải, thì S sẽ trông giống như là một cái bánh bị cắt đi một miếng. Những điểm nằm trên hai đường biên thẳng của hình quạt S thực ra là trùng nhau. Gọi P là vị trí của điểm nút thắt của thòng lọng. Khi đó điểm P sẽ xuất hiện trên mỗi đường biên thẳng, có khoảng cách như nhau so với đỉnh của S. Gọi β là góc của hình quạt S.

Điểm quan trọng nhất của bài toán này là nhận ra rằng đường vòng quanh của vòng tròn của thòng lọng phải là một đường thẳng nằm trên S, được chỉ ra trong Hình 2.50 bởi đường chấm chấm. Điều này là đúng vì sợi dây thòng lọng sẽ có hình dạng sao cho chiều dài của nó giữa hai điểm là nhỏ nhất do là không có ma sát và việc trải hình nón lên trên một mặt phẳng không làm thay đổi khoảng cách. Nhưng một đường thẳng nối hai điểm trùng nhau P là đường có khoảng cách nhỏ nhất nếu và chỉ nếu hình quạt S là nhỏ hơn một nửa hình tròn. Do vậy điều kiện để có thể leo lên một ngọn núi như vậy là $\beta < 180^o$.

Điều kiện này sẽ như thế nào nếu nó được biểu diễn qua góc của đỉnh nón, α? Gọi C là mặt cắt hình tròn của ngọn núi, nằm cách đỉnh núi một khoảng là d (được đo dọc theo hướng bề mặt của hình nón). (Chúng ta xét đường tròn này để cho tiện về mặt hình học. Nó *không phải* là đường của vòng thòng lọng; xem nhận xét bên dưới.) Khi hình S có dạng là một hình bán nguyệt (một nửa hình tròn) thì chu vi của C sẽ bằng πd. Điều này có nghĩa là bán kính của C bằng $d/2$. Do đó,

$$\sin(\alpha/2) < \frac{d/2}{d} = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \alpha < 60^o. \tag{2.47}$$

Đây là điều kiện để cho ngọn núi có thể leo được. Nói tóm lại, với $\alpha < 60^o$ thì có thể đảm bảo rằng có một vòng thòng lọng vòng xung quanh hình nón có độ dài nhỏ hơn hai lần khoảng cách từ nó tới đỉnh.

> NHẬN XÉT: Khi quan sát từ phía mặt bên, sợi dây dường như là vuông góc với cạnh bên của ngọn núi tại điểm đối diện với nút thắt. Một sai lầm hay gặp là từ điều này suy ra điều kiện để có thể leo lên núi là $\alpha < 90^o$. Nhưng điều này là không đúng, bởi vì vòng thòng lọng không nằm trong một mặt phẳng. Việc nằm trong một mặt phẳng sẽ khiến cho vòng thòng lọng có dạng hình ellipse. Nhưng vòng thòng lọng chắc chắn phải bị xoắn tại điểm nút của nó, bởi vì phải có thành phần thẳng đứng của lực căng để giữ người leo núi. Nếu chúng ta xét bài toán này với một ngọn núi phẳng hình tam giác, thì điều kiện để leo được sẽ là $\alpha < 90^o$. ♣

THÒNG LỌNG CAO CẤP: Nếu ngọn núi là rất dốc, thì người leo núi có thể trượt xuống dưới bởi vì vòng thòng lọng mở rộng ra. Nếu ngọn núi là thoải, thì người leo núi có thể trượt xuống bởi vì vòng thòng lọng thu nhỏ lại. Tình huống duy nhất mà người leo núi không trượt xuống là khi sự thay đổi vị trí của điểm nút dọc theo bề mặt ngọn núi chính xác bằng sự thay đổi của chiều dài của vòng thòng lọng.

Trải hình nón lên trên một mặt phẳng giống như điều chúng ta đã làm trong trường hợp thòng lọng loại thường. Dựa vào hình quạt S trong mặt phẳng, điều kiện trên có nghĩa là nếu chúng ta di chuyển P một khoảng cách ℓ lên trên (hoặc xuống dưới) dọc theo phương của ngọn núi, thì khoảng cách giữa hai điểm trùng nhau P phải giảm (hoặc tăng) một độ dài ℓ. Do đó, trong Hình vẽ 2.50, chúng ta phải có một tam giác cân, vì vậy $\beta = 60^o$.

Giá trị của góc đỉnh α bằng bao nhiêu tương ứng với giá trị này? Giống như phần trong trường hợp thòng lọng loại thường, gọi C là mặt cắt hình tròn của ngọn núi, nằm cách một khoảng d (đo dọc theo cạnh của hình nón) so với đỉnh. Khi đó $\beta = 60^o$ suy ra rằng chu vi của C bằng $(\pi/3)d$. Từ đó suy ra rằng bán kính của C là $d/6$. Do đó,

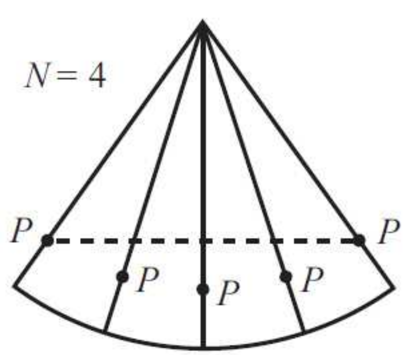
$$\sin(\alpha/2) = \frac{d/6}{d} = \frac{1}{6} \quad \Longrightarrow \quad \alpha \approx 19^o. \tag{2.48}$$

Đây là điều kiện để ngọn núi này có thể leo được. Chúng ta thấy rằng chỉ có chính xác một giá trị của góc ở đỉnh để có thể leo được ngọn núi. Do đó thòng lọng loại thường có ích hơn rất nhiều so với thòng lọng loại cao cấp được yêu thích, tất nhiên với giả thiết rằng bạn đang dùng nó để leo núi, mà không phải dùng nó để, ví dụ như, lùa gia súc.

NHẬN XÉT: Một cách khác để nhận được kết quả $\beta = 60^o$ là bằng việc chú ý rằng lực căng của sợi dây theo ba hướng từ điểm nút có cùng độ lớn, bởi vì thòng lọng cao cấp được làm từ một sợi dây liên tục. Do đó ba lực này phải tạo với nhau một góc 120^o (để triệt tiêu lực tổng hợp tại điểm nút có khối lượng bằng không). Điều này suy ra $\beta = 60^o$ như trong Hình 2.50. ♣

MỘT SỐ NHẬN XÉT THÊM: Với mỗi loại thòng lọng, chúng ta có thể đăt ra câu hỏi: Với góc ở đỉnh bằng bao nhiêu để có thể leo lên trên ngọn núi đó khi chúng ta sử dụng sợi dây được quấn N lần xung quanh đỉnh của ngọn núi? Chúng ta có thể trả lời câu hỏi này ở đây theo một cách tương tự như trên.

Đối với thòng lọng loại thường, trải hình nón N lần lên trên một mặt phẳng, như chỉ ra trong Hình vẽ 2.51 với $N = 4$. Hình vẽ nhận được là, S_N, một phần hình quạt của một hình tròn, mà phần hình quạt này được chia ra thành N phần hình quạt nhỏ bằng nhau, mỗi phần là hình ảnh của hình nón khi trải nó ra trên mặt phẳng một lần. Như phần trên, S_N phải nhỏ hơn một nửa hình tròn. Chu vi của hình tròn C (được định nghĩa như ở phần trên) do đó phải nhỏ hơn $\pi d/N$. Vì vậy, bán kính của C phải nhỏ hơn $d/2N$. Do đó,



Hình 2.51:

$$\sin(\alpha/2) = \frac{d/2N}{d} = \frac{1}{2N} \quad \Longrightarrow \quad \alpha < 2\sin^{-1}\left(\frac{1}{2N}\right). \tag{2.49}$$

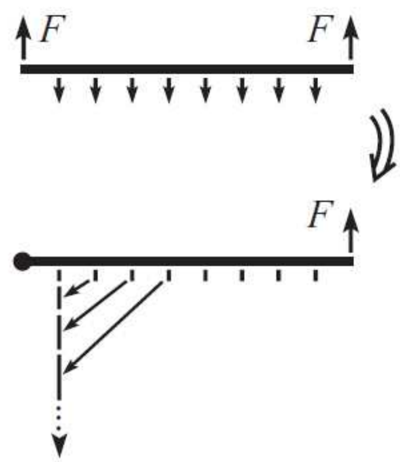
Đối với thòng lọng cao cấp, một lần nữa trải hình nón N lần lên trên một mặt phẳng. Từ các lập luận ở phần trên, chúng ta phải có $N\beta = 60^o$. Do đó chu vi của C phải là $\pi d/3N$, và vì vậy bán kính của nó phải là $d/6N$. Do đó,

$$\sin(\alpha/2) = \frac{d/6N}{d} = \frac{1}{6N} \quad \Longrightarrow \quad \alpha < 2\sin^{-1}\left(\frac{1}{6N}\right). \tag{2.50}$$

♣

2.11. Sự cân bằng moment lực

Việc chứng minh bằng quy nạp như sau. Giả sử rằng chúng ta đã chỉ ra được rằng một lực F



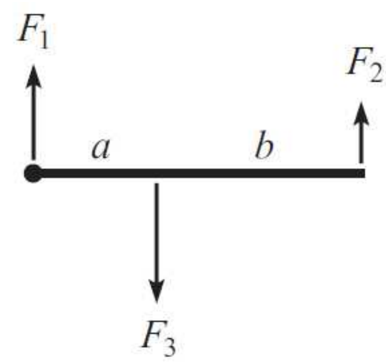
Hình 2.52:

tác dụng tại điểm có khoảng cách là d tương đương với một lực kF tác dụng tại một điểm có khoảng cách là d/k, với tất cả các số nguyên k nhỏ hơn hoặc bằng $n-1$. Bây giờ chúng ta muốn chỉ ra rằng điều này cũng đúng với $k = n$.

Xét một tình huống được chỉ ra trong Hình 2.52. Các lực F tác dụng tại hai đầu của thanh, và các lực $2F/(n-1)$ tác dụng tại các điểm có độ dài là jl/n (với $1 \le j \le n-1$). Thanh không quay (do tính chất đối xứng của các lực), và nó cũng không dịch chuyển (vì lực tổng hợp tác dụng lên nó bằng không). Giả sử thanh có một tâm quay tại đầu bên trái. Thay thế các lực bên trong bởi lực tương đương của chúng đặt tại điểm l/n (xem Hình 2.52) cho chúng ta lực tổng hợp ở điểm này là

$$\frac{2F}{n-1}\left(1+2+3+\cdots+(n-1)\right) = \frac{2F}{n-1}\left(\frac{n(n-1)}{2}\right) = nF. \tag{2.51}$$

Do đó chúng ta thấy rằng một lực F tác dụng tại một điểm có khoảng cách ℓ là tương đương với một lực nF đặt tại điểm có khoảng cách l/n, như đã được chỉ ra.



Hình 2.53:

Bây giờ chúng ta sẽ chỉ ra rằng Khẳng định 2.1 là đúng, cho bất kỳ khoảng cách a và b nào (xem Hình 2.53). Xét một thanh được gắn bản lề tại đầu bên trái của nó, và gọi ϵ là một khoảng cách rất bé (là nhỏ so với a). Khi đó một lực F_3 tại điểm có khoảng cách a sẽ tương đương với với một lực $F_3(a/\epsilon)$ đặt tại điểm có khoảng cách ϵ.[9] Nhưng một lực $F_3(a/\epsilon)$ đặt tại khoảng cách ϵ là tương đương với một lực $F_3(a/\epsilon)(\epsilon/(a+b)) = F_3a/(a+b)$ đặt tại khoảng cách $(a+b)$. Lực tương đương đặt tại khoảng cách $(a+b)$ này phải triệt tiêu lực F_2 cũng đặt tại đó, bởi vì thanh là đang nằm yên. Do đó, chúng ta có $F_3a/(a+b) = F_2$, và chúng ta đã chứng minh khẳng định trên.

2.12. Hướng của lực căng

Xét một đoạn rất nhỏ của sợi dây, và xem xét moment lực xung quanh một đầu của nó. Bất cứ lực nào tác dụng lên đoạn dây tại đầu này đều không sinh ra moment lực. Nếu lực căng tại đầu kia có hướng lệch với hướng dọc theo sợi dây một góc hữu hạn nào đó, thì nó sẽ gây ra một moment lực. Nhưng moment lực này không thể bị triệt tiêu bởi moment lực nhỏ hơn sinh ra bởi trọng lực có độ lớn rất bé của đoạn dây, bởi vì trọng lực này tỷ lệ với độ dài rất nhỏ của đoạn dây này. Do đó, lực căng dây phải có hướng dọc theo sợi dây. Nó thực ra có hướng dọc theo hướng của sợi dây tại đầu đoạn dây nhỏ mà nó tác dụng, chứ không phải là hướng theo hướng của sợi dây tại đầu mà chúng ta đang dùng để tính moment lực, bởi vì sợi dây đang bị uốn (giả sử rằng nó không nằm theo phương thẳng đứng). Vì vậy lực căng sẽ gây ra một moment lực nhỏ để cân bằng với moment lực gây ra bởi trọng lực.

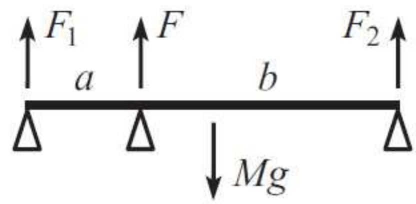
Lập luận này không còn đúng đối với thanh cứng, bởi vì thanh có thể gây ra moment lực hữu hạn xung quanh đầu của đoạn nhỏ do các lực *tại* đầu đó, vì đầu đó của thanh thực ra là một mặt cắt có kích thước hữu hạn. Sẽ có tác động của lực cắt bên trong thanh, và những lực

[9] Về mặt kỹ thuật, chúng ta có thể sử dụng lập luận trong đoạn văn trước để nói điều này xảy ra chỉ nếu khi a/ϵ là một số nguyên nhưng bởi vì a/ϵ là rất lớn, nên chúng ta có thể đơn giản chỉ cần chọn lấy số nguyên gần nó nhất, và sai số sẽ là rất nhỏ và có thể bỏ qua được.

cắt rất lớn tác dụng với các tay đòn nhỏ (tương ứng đối với điểm giữa của mặt cắt) này sẽ sinh ra các moment lực hữu hạn.

2.13. Tìm lực

Trong Hình vẽ 2.54, gọi các lực do các giá đỡ tác dụng lên thanh là F_1 và F_2, và gọi lực do giá



Hình 2.54:

đỡ bên trong tác dụng lên là F. Khi đó

$$F_1 + F_2 + F = M\text{g}. \tag{2.52}$$

Cân bằng các moment lực xung quanh đầu bên trái và đầu bên phải thanh chúng ta có,

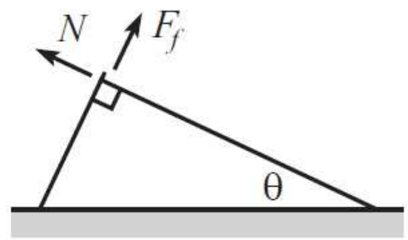
$$\begin{aligned} Fa + F_2(a+b) &= M\text{g}\frac{a+b}{2}, \\ Fb + F_1(a+b) &= M\text{g}\frac{a+b}{2}, \end{aligned} \tag{2.53}$$

trong đó chúng ta đã sử dụng một thực tế là thanh có thể được coi như là một khối lượng chất điểm đặt tại trọng tâm của nó. Chú ý rằng phương trình cho cân bằng moment lực xung quanh trọng tâm là thừa; nó được nhận lại bằng cách lấy hiệu của hai phương trình trên và sau đó chia cho 2. Và bạn cũng có thể kiểm tra rằng phương trình cân bằng moment lực xung quanh bản lề ở giữa cũng có dạng là một tổ hợp tuyến tính của hai phương trình trên.

Mặc dù nó có vẻ như chúng ta có ba phương trình và ba ẩn, nhưng thực ra chúng ta chỉ có hai phương trình, bởi vì tổng của các phương trình trong (2.53) cho ta phương trình (2.52). Do đó, bởi vì chúng ta có hai phương trình và ba ẩn, nên hệ phương trình này là không xác định. Giải các phương trình trong (2.53) cho F_1 và F_2 phụ thuộc vào F, chúng ta thấy rằng các lực có thể có giá trị bằng

$$(F_1, F, F_2) = \left(\frac{M\text{g}}{2} - \frac{Fb}{a+b}, F, \frac{M\text{g}}{2} - \frac{Fa}{a+b}\right). \tag{2.54}$$

Nhìn lại vấn đề thì nó cũng hợp lý khi các lực này là không xác định. Bằng cách thay đổi độ cao của giá đỡ mới một khoảng rất nhỏ, chúng ta có thể làm cho lực F có giá trị bất kỳ từ 0 tới giá trị $Mg(a+b)/2b$, là giá trị khi thanh không còn tựa vào giá đỡ bên trái (với giả thiết là $b \geq a$).



Hình 2.55:

2.14. Các thanh tựa vào nhau

Gọi M_{l} là khối lượng của thanh bên trái, và gọi M_{r} là khối lượng của thanh bên phải. Khi đó, $M_{\mathrm{l}}/M_{\mathrm{r}} = \tan\theta$. Gọi N và F_{f} là phản lực và lực ma sát giữa hai thanh (xem Hình 2.55). Lực F_{f} có giá trị cực đại bằng μN. Cân bằng các moment lực trên thanh bên trái (xung quanh điểm tiếp xúc của nó với mặt đất) cho ta $N = (M_{\mathrm{l}}g/2)\sin\theta$. Cân bằng các moment lực trên thanh bên phải (xung quanh điểm tiếp xúc của nó với mặt đất) cho ta $F_{\mathrm{f}} = (M_{\mathrm{r}}g/2)\cos\theta$. Do đó điều kiện $F_{\mathrm{f}} \leq \mu N$ sẽ là

$$M_{\mathrm{r}}\cos\theta \leq \mu M_1 \sin\theta \quad \Longrightarrow \quad \tan^2\theta \geq \frac{1}{\mu}, \tag{2.55}$$

trong đó chúng ta đã sử dụng $M_{\mathrm{l}}/M_{\mathrm{r}} = \tan\theta$. Kết quả này có thể được kiểm tra trong hai trường hợp giới hạn: Trong trường hợp giới hạn khi $\mu \to 0$, chúng ta thấy rằng θ phải rất gần $\pi/2$, và điều này là hợp lý. Và trong trường hợp giới hạn khi $\mu \to \infty$ (nghĩa là các thanh rất dính), chúng ta thấy rằng θ có thể rất nhỏ, và điều này cũng hợp lý.

2.15. Giữ thang

Gọi F là lực mà chúng ta đang muốn tìm. Lực F phải có hướng dọc theo thanh, bởi vì nếu không thì nó sẽ gây ra một moment lực tác dụng lên thanh (không khối lượng) xung quanh đầu bên phải của thanh, và điều này sẽ mâu thuẫn với giả thiết thanh đang đứng yên. Xét các moment lực tác dụng lên thang xung quanh tâm quay tại điểm dưới cùng của nó. Trọng lực sinh ra moment lực theo chiều quay kim đồng hồ có giá trị là $Mg(L/2)\cos\theta$, và lực F do thanh tác dụng sinh ra moment lực có chiều ngược chiều kim đồng hồ và có độ lớn $F(l/\tan\theta)$. Cân bằng hai moment lực này chúng ta có

$$F = \frac{M\mathrm{g}L}{2\ell}\sin\theta. \tag{2.56}$$

NHẬN XÉT: Lực F tiến về giá trị không khi $\theta \to 0$ và nó phải như thế.[10] Và F tăng tới giá trị $MgL/2l$ khi $\theta \to \pi/2$, và điều này cũng không phải là hiển nhiên lắm (moment lực cần thiết từ thanh là rất nhỏ, nhưng cánh tay đòn cũng rất nhỏ). Tuy nhiên, trong trường hợp

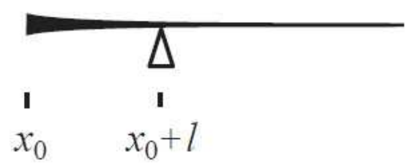
[10]Với $\theta \to 0$, chúng ta sẽ phải kéo dài thang bằng một đoạn không khối lượng, bởi vì thanh sẽ phải ở rất xa về phía bên phải của thang để vẫn còn vuông góc với thang.

đặc biệt khi thang là hoàn toàn thẳng đứng, thì không cần thiết phải tác dụng một lực nào. Bạn có thể thấy rằng các tính toán của chúng ta ở trên không có giá trị trong trường hợp đặc biệt này, bởi vì chúng ta đã chia cho $\cos\theta$, mà giá trị này bằng không khi $\theta = \pi/2$.

Phản lực của thanh tại điểm quay (mà bằng thành phần thẳng đứng của lực F, bởi vì thanh là không khối lượng) bằng $MgL\sin\theta\cos\theta/2l$. Giá trị này đạt giá trị lớn nhất bằng $MgL/4l$ khi $\theta = \pi/4$. ♣

2.16. Cân bằng thanh

Giả sử thanh kéo dài ra vô cùng theo chiều dương của x, và giả sử nó bị cắt tại $x = x_0$. Khi đó tâm quay sẽ được đặt tại vị trí $x = x_0 + l$ (xem Hình 2.56). Gọi khối lượng riêng của thanh là $\rho(x)$. Điều kiện để tổng moment của trọng lực xung quanh điểm $x_0 + l$ bằng không là



Hình 2.56:

$$\tau = \int_{x_0}^{\infty} \rho(x)\,(x - (x_0 + \ell))\,\mathrm{g}dx = 0. \tag{2.57}$$

Chúng ta muốn giá trị này bằng không với mọi giá trị của x_0, do đó đạo hàm của τ đối với biến x_0 phải bằng không. τ phụ thuộc vào x_0 đồng thời tại cận của tích phân và trong biểu thức của tích phân. Khi lấy đạo hàm, với sự phụ thuộc đầu tiên của τ chúng ta phải tìm giá trị của biểu thức bên trong tích phân tại cận x_0, trong khi đó với sự phụ thuộc sau chúng ta phải lấy đạo hàm của hàm bên trong tích phân đối với x_0, và sau đó lấy tích phân. (Để nhận được cả hai thành phần này, chúng ta chỉ cần thay x_0 bởi $x_0 + dx_0$ và khai triển biểu thức tới giá trị bậc nhất của dx_0.) Chúng ta nhận được

$$0 = \frac{d\tau}{dx_0} = \mathrm{g}\ell\rho(x_0) - \mathrm{g}\int_{x_0}^{\infty} \rho(x)dx. \tag{2.58}$$

Lấy đạo hàm phương trình này đối với x_0 ta có $\ell\rho'(x_0) = -\rho(x_0)$. Nghiệm của phương trình này là (chúng ta viết lại x thay cho giá trị bất kỳ của x_0)

$$\rho(x) = Ae^{-x/\ell}. \tag{2.59}$$

Do đó chúng ta có thể thấy rằng khối lượng riêng giảm theo hàm mũ đối với x. Giá trị của ℓ càng nhỏ thì thanh rơi xuống càng nhanh. Chú ý rằng khối lượng riêng của thanh tại điểm quay bằng $1/e$ lần khối lượng riêng của nó tại đầu bên trái. Và bạn có thể chỉ ra rằng $1 - 1/e \approx 63\%$ khối lượng của thanh tập trung ở giữa đầu bên trái và điểm quay.

2.17. Cuộn chỉ

(a) Gọi F_{f} là lực ma sát gây ra bởi mặt nằm ngang. Cân bằng lực theo phương ngang tác dụng vào cuộn chỉ ta có (xem Hình 2.57)

$$T\cos\theta = F_{\mathrm{f}}. \tag{2.60}$$

Cân bằng moment lực xung quanh tâm của cuộn chỉ cho ta

$$Tr = F_{\mathrm{f}}R. \tag{2.61}$$

Từ hai phương trình này suy ra

$$\cos\theta = \frac{r}{R}. \tag{2.62}$$

Do kết quả này là rất đẹp nên nó gợi ý cho chúng ta một cách giải nhanh chóng để nhận lại được nó. Và thực vậy, chúng ta thấy từ Hình vẽ 2.58 rằng $\cos\theta = r/R$ là góc mà đường kéo dài của lực căng đi qua điểm tiếp xúc của cuộn chỉ với mặt nằm ngang. Bởi vì trọng lực và lực ma sát không gây ra moment lực xung quanh điểm tiếp xúc này, nên tổng moment lực xung quanh điểm này bằng không, và cuộn chỉ vẫn đứng yên.

(b) Phản lực gây ra bởi mặt nằm ngang là

$$N = M\mathrm{g} - T\sin\theta. \tag{2.63}$$

Sử dụng phương trình (2.60), bất đẳng thức $F_{\mathrm{f}} \le \mu N$ trở thành

$$T\cos\theta \le \mu(M\mathrm{g} - T\sin\theta) \quad \Longrightarrow \quad T \le \frac{\mu M\mathrm{g}}{\cos\theta + \mu\sin\theta}, \tag{2.64}$$

trong đó θ được cho trong phương trình (2.62).

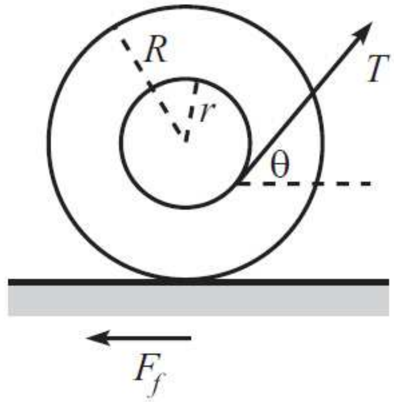
(c) Giá trị lớn nhất của lực T được cho trong phương trình (2.64). Giá trị này phụ thuộc vào θ, mà θ lại phụ thuộc vào r. Chúng ta muốn tìm giá trị của r làm cho giá trị lớn nhất của T nhỏ nhất. Lấy đạo hàm đối với θ, chúng ta tìm được giá trị của θ làm cho mẫu số trong phương trình (2.64) đạt giá trị cực đại được cho bởi $\tan\theta_0 = \mu$. Sau đó bạn có thể chỉ ra rằng giá trị của T tại θ_0 này là

$$T_0 = \frac{\mu M\mathrm{g}}{\sqrt{1+\mu^2}}. \tag{2.65}$$

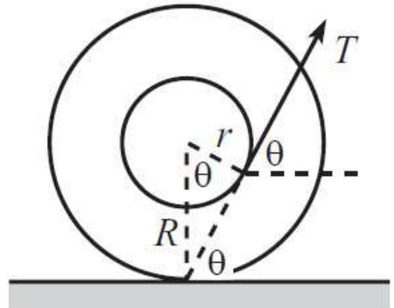
Để tìm giá trị tương ứng của r, chúng ta có thể dùng phương trình (2.62) để viết $\tan\theta = \sqrt{R^2 - r^2}/r$. Sau đó từ mối liên hệ $\tan\theta_0 = \mu$ chúng ta nhận được

$$r_0 = \frac{R}{\sqrt{1+\mu^2}}. \tag{2.66}$$

Đây là giá trị của r để nhận được cận trên nhỏ nhất của T. Trong trường hợp giới hạn khi $\mu = 0$, chúng ta có $\theta_0 = 0$, $T_0 = 0$, và $r_0 = R$. Và trong trường hợp giới hạn khi $\mu = \infty$, chúng ta có $\theta_0 = \pi/2$, $T_0 = Mg$, và $r_0 = 0$.

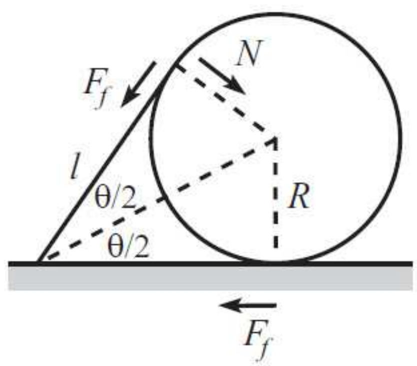


Hình 2.57:



Hình 2.58:

2.18. Thanh đặt trên hình tròn



Hình 2.59:

Gọi N là phản lực giữa thanh và đường tròn, và gọi F_{f} là lực ma sát giữa mặt đất và hình tròn (xem Hình 2.59). Khi đó chúng ta có thể ngay lập tức thấy rằng lực ma sát giữa thanh và đường tròn cũng là F_{f}, bởi vì moment lực do hai lực ma sát này tác dụng lên đường tròn phải bị triệt tiêu. Chúng ta đã vẽ tất cả các lực tác dụng lên đường tròn. Bởi định luật thứ ba của Newton, N và F_{f} tác dụng lên thanh tại đỉnh của nó theo hướng ngược lại.

Bằng việc xem xét các moment lực tác dụng lên thanh xung quanh điểm tiếp xúc của nó với mặt đất, chúng ta có $Mg(\ell/2)\cos\theta = Nl$, trong đó $M = \rho l$ là khối lượng của thanh, và ℓ là độ dài của nó. Do đó, $N = (\rho lg/2)\cos\theta$. Cân bằng các lực theo phương ngang tác dụng lên đường tròn cho ta $N\sin\theta = F_{\rm f} + F_{\rm f}\cos\theta$, vì vậy chúng ta có

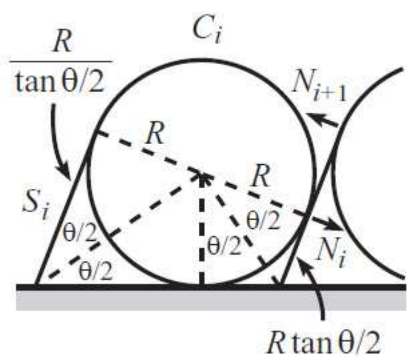
$$F_{\rm f} = \frac{N\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{\rho\ell {\rm g}\sin\theta\cos\theta}{2(1+\cos\theta)}. \tag{2.67}$$

Nhưng từ Hình vẽ 2.59 chúng ta có $\ell = R/\tan(\theta/2)$. Sử dụng đồng nhất thức $\tan(\theta/2) = \sin\theta/(1+\cos\theta)$, cuối cùng chúng ta nhận được

$$F_{\rm f} = \frac{1}{2}\rho {\rm g} R\cos\theta. \tag{2.68}$$

Trong trường hợp giới hạn khi $\theta \to \pi/2$, lực $F_{\rm f}$ sẽ tiến về giá trị không, và giá trị này là hợp lý. Trong trường hợp giới hạn khi $\theta \to 0$ (tương ứng với trường hợp thanh rất dài), lực ma sát sẽ tiến về giá trị $\rho g R/2$, đây là kết quả không phải là hiển nhiên lắm.

2.19. Hệ các thanh tựa vào các hình tròn



Hình 2.60:

Gọi S_i là thanh thứ i, và gọi C_i là hình tròn thứ i. Các phản lực mà C_i nhận được từ S_i và S_{i+1} là bằng nhau về độ lớn, bởi vì chỉ có hai lực này tác dụng các lực theo phương ngang vào hình tròn nhẵn, do vậy chúng phải bị triệt tiêu. Gọi N_i là phản lực này.

Xét các moment lực tác dụng lên S_{i+1} đối với bản lề trên mặt đất. Các moment lực được gây ra bởi N_i, N_{i+1}, và trọng lực của S_{i+1}. Từ Hình vẽ 2.60, chúng ta thấy rằng N_i tác dụng tại một điểm nằm cách bản lề một khoảng $R\tan(\theta/2)$. Bởi vì thanh có độ dài là $R/\tan(\theta/2)$, điểm này nằm ở vị trí có tỷ số $\tan^2(\theta/2)$ ở phía trên của thanh. Do đó, cân bằng các moment lực tác dụng lên S_{i+1} cho ta

$$\frac{1}{2}M{\rm g}\cos\theta + N_i\tan^2\frac{\theta}{2} = N_{i+1}. \tag{2.69}$$

N_0 là bằng không do cách chúng ta định nghĩa, vì vậy ta có $N_1 = (Mg/2)\cos\theta$ (như trong bài tập trước). Nếu chúng ta sử dụng phương trình (2.69) một cách liên tiếp, chúng ta thấy rằng

N_2 bằng $(Mg/2)\cos\theta(1+\tan^2(\theta/2))$, và N_3 bằng $(Mg/2)\cos\theta(1+\tan^2(\theta/2)+\tan^4(\theta/2))$, và cứ tiếp tục như vậy. Nói chung,

$$N_i = \frac{M\mathrm{g}\cos\theta}{2}\left(1+\tan^2\frac{\theta}{2}+\tan^4\frac{\theta}{2}+\cdots+\tan^{2(i-1)}\frac{\theta}{2}\right). \tag{2.70}$$

Trong trường hợp giới hạn khi $i\to\infty$, chúng ta có thể viết tổng vô hạn của cấp số nhân này một cách ngắn gọn là

$$N_\infty \equiv \lim_{i\to\infty} N_i = \frac{M\mathrm{g}\cos\theta}{2}\left(\frac{1}{1-\tan^2(\theta/2)}\right). \tag{2.71}$$

Chú ý rằng đây là nghiệm của phương trình (2.69), với $N_i = N_{i+1}$. Vì vậy nếu tồn tại một giới hạn, giới hạn này phải là nghiệm này. Sử dụng $M=\rho R/\tan(\theta/2)$, chúng ta có thể viết lại N_∞ dưới dạng

$$N_\infty = \frac{\rho\,\mathrm{R}\,\mathrm{g}\cos\theta}{2\tan(\theta/2)}\left(\frac{1}{1-\tan^2(\theta/2)}\right). \tag{2.72}$$

Đồng nhất thức $\cos\theta=\cos^2(\theta/2)-\sin^2(\theta/2)$ sau đó có thể được dùng để viết kết quả này dưới dạng

$$N_\infty = \frac{\rho\,\mathrm{R}\,\mathrm{g}\cos^3(\theta/2)}{2\sin(\theta/2)}. \tag{2.73}$$

NHẬN XÉT: N_∞ tiến đến vô cùng khi $\theta\to\infty$, kết quả này là hợp lý, bởi vì các thanh khi đó là rất dài. Tất cả các N_i về cơ bản là bằng một nửa trọng lượng của thanh (để triệt tiêu moment lực gây ra bởi trọng lực đối với tâm quay). Khi $\theta\to\pi/2$, chúng ta thấy từ phương trình (2.73) rằng N_∞ tiến dần đến $\rho R\mathrm{g}/4$, và điều này không hiển nhiên một chút nào; các phản lực N_i bắt đầu với $N_1=(M\mathrm{g}/2)\cos\theta\approx 0$, nhưng dần dần tăng lên đến $\rho R\mathrm{g}/4$, bằng một phần tư trọng lượng của một thanh. Chú ý rằng lực theo phương nằm ngang phải tác dụng vào hình tròn cuối cùng nằm rất xa ở bên phải là $N_\infty\sin\theta=\rho\,\mathrm{R}\,\mathrm{g}\cos^4(\theta/2)$. Giá trị này biến thiên từ $\rho R\mathrm{g}$ khi $\theta\to 0$ đến $\rho R\mathrm{g}/4$ khi $\theta\to\pi/2$ ♣

Chương 3

Sử dụng $F = ma$

Mục đích chung của cơ học cổ điển là xác định cái gì sẽ xảy ra với một tập các vật thể được cho trong một trạng thái vật lý nào đó. Để tìm hiểu điều này, chúng ta cần biết cái gì làm cho các vật thể chuyển động. Có hai cách chính để làm việc này. Cách thứ nhất mà chắc chắn bạn đã quen thuộc, đó là sử dụng các định luật của Newton. Đây là chủ đề của chương này. Cách thứ hai là cách cải tiến hơn đó là phương pháp Lagrange. Đây là chủ đề của Chương 6. Chú ý rằng mỗi phương pháp là hoàn toàn đủ để giải bất kỳ bài toán nào, và cả hai đều đưa ra kết quả cuối cùng giống nhau. Nhưng chúng được dựa trên những nguyên lý rất khác nhau. Chúng ta sẽ nói kỹ hơn về điều này trong Chương 6.

3.1 Các định luật Newton

Năm 1687 Newton công bố ba định luật của ông trong cuốn sách *Principa Mathematica*. Những định luật này khá là trực quan, mặc dù tôi cho rằng có thể có tranh cãi khi gán tính từ "trực quan" cho một loạt các phát biểu mà đã không được viết ra cho đến thời điểm 300 năm trước. Dù sao đi nữa, những định luật này có thể được phát biểu như sau.

- **Định luật thứ nhất**: Một vật thể sẽ chuyển động với vận tốc không đổi (có thể bằng không) cho tới khi nó chịu tác dụng bởi một lực nào đó.

- **Định luật thứ hai**: Biến thiên động lượng theo thời gian của vật thể bằng lực tác dụng lên vật thể.

- **Định luật thứ ba**: Với mỗi lực tác động lên một vật thể, có một lực bằng và ngược chiều với lực đó tác động lên vật thể khác.

Chúng ta có thể thảo luận cả ngày về các mệnh đề này với vấn đề là ở mức độ nào chúng là các định luật vật lý, và ở mức độ nào mà chúng là các định nghĩa. Sir Arthur Eddington đã từng đưa ra nhận xét khá là tiêu cực rằng định luật thứ nhất về cơ bản có nghĩa "mọi chất điểm tiếp tục trạng thái tĩnh hoặc chuyển động đều theo một đường thẳng ngoại trừ trường hợp nó không làm như thế nữa." Tuy nhiên, mặc dù ba định luật này ban đầu có vẻ như chúng thiên về nội dung ở một mức độ nào đó nhưng thực ra chúng có ý nghĩa hơn rất nhiều so với những ngụ ý trong nhận xét của Eddington. Chúng ta hãy xem xét từng định luật một.[1]

Định luật thứ nhất

Một điều mà định luật này đưa ra là một định nghĩa của lực không. Thêm nữa nó cũng đưa ra một định nghĩa về *hệ quy chiếu quán tính*, mà được định nghĩa một cách đơn giản như một hệ quy chiếu trong đó định luật thứ nhất đúng; bởi vì thuật ngữ "vận tốc" được sử dụng, chúng ta phải nêu ra hệ quy chiếu nào chúng ta đang sử dụng để đo vận tốc. Định luật một *không* đúng đối với một hệ quy chiếu bất kỳ. Ví dụ, nó không đúng trong hệ quy chiếu quay.[2] Một cách trực giác, một hệ quy chiếu quán tính là hệ quy chiếu chuyển động với vận tốc không đổi. Nhưng điều này không rõ ràng, vì ta phải nói hệ quy chiếu này sẽ chuyển động với vận tốc không đổi *đối với* cái gì. Nếu đặt tất cả những thứ này sang một bên, một hệ quy chiếu quán tính được định nghĩa như một dạng đặc biệt của hệ quy chiếu trong đó định luật thứ nhất là đúng.

Như vậy, điều chúng ta có bây giờ là hai định nghĩa liên quan với nhau về "lực" và "hệ quy chiếu quán tính". Không có nhiều nội dung vật lý ở đây. Nhưng điểm quan trọng là định luật này đúng cho *tất cả* các chất điểm. Vậy nếu chúng ta có một hệ quy chiếu trong đó một chất điểm tự do chuyển động với vận tốc không đổi, thì *tất cả* các chất điểm tự do khác sẽ chuyển động với vận tốc không đổi. Đây là một phát biểu có chứa nội dung vật lý. Chúng ta không thể có một loạt các chất điểm tự do chuyển động với vận tốc không đổi trong khi một chất điểm nào khác đang chuyển động tùy ý.

Định luật thứ hai

Động lượng được định nghĩa[3] là $m\mathbf{v}$. Nếu m là hằng số[4] thì định luật thứ hai nói rằng

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}, \tag{3.1}$$

[1]Phần này trình bày quan điểm của tôi về những phần nào trong ba định luật này là những định nghĩa và phần nào chuyển tải nội dung. Nhưng bạn nên coi tất cả những điều này không phải là hoàn toàn đúng. Bạn có thể xem thêm ở các tài liệu của Anderson (1990), Keller (1987), O'Sullivan (1980), và Eisenbud (1958).

[2]Chúng ta có thể thay đổi một chút sao cho các định luật của Newton vẫn sẽ đúng trong hệ quy chiếu này, nếu ta cho thêm vào một lực "ảo" mới. Nhưng chúng ta sẽ bàn đến vấn đề này trong Chương 10.

[3]Tất nhiên chúng ta không dùng lý thuyết tương đối để xem xét mọi thứ ở đây. Trong Chương 12 chúng ta sẽ đưa ra biểu diễn tương đương của $m\mathbf{v}$ trong lý thuyết tương đối

[4]Chúng ta sẽ giả thiết là trong chương này khối lượng m là hằng số. Nhưng đừng lo, chúng ta sẽ có rất nhiều bài tập liên quan đến khối lượng thay đổi (như trong bài tập phần tên lửa) trong Chương 5.

ở đó $\mathbf{a} \equiv d\mathbf{v}/dt$. Định luật này chỉ đúng trong hệ quy chiếu quán tính mà được định nghĩa bởi định luật thứ nhất.

Bạn có thể nghĩ rằng định luật hai chỉ đơn thuần đưa ra định nghĩa về lực, nhưng nó có nhiều hơn vậy. Có một hàm ý trong định luật này rằng "lực" là cái gì đó mà sự tồn tại của nó không phụ thuộc hoàn toàn vào chất điểm có khối lượng "m" xuất hiện trong định luật (định luật thứ ba bên dưới sẽ giải thích điều này rõ hơn). Ví dụ như, lực lò xo không phụ thuộc gì vào chất điểm mà nó tác dụng. Và lực hấp dẫn, GMm/r^2, phụ thuộc một phần vào chất điểm mà nó tác dụng và một phần vào một cái gì khác (khối lượng khác).

Nếu bạn cảm thấy thích tạo ra các định nghĩa, thì bạn có thể định nghĩa một đại lượng mới, $\mathbf{G} = m^2\mathbf{a}$. Đây là điều hoàn toàn phù hợp để làm; bạn không thể sai trong việc đưa ra một định nghĩa (trừ khi bạn đã định nghĩa đại lượng đó là một cái gì khác). Tuy nhiên, định nghĩa này là hoàn toàn vô dụng. Bạn có thể định nghĩa nó cho mọi chất điểm trên thế giới này, và cho gia tốc bất kỳ nào, nhưng vấn đề ở đây là định nghĩa này không có ý nghĩa gì cả. Đơn giản là không có đại lượng nào trên thế giới này mà cho các gia tốc theo tỷ lệ $4-1$ khi "tác dụng" lên các khối lượng m và $2m$. Đại lượng $\mathbf{G}$ không có ý nghĩa với bất cứ cái gì trừ chất điểm mà bạn đang định nghĩa đại lượng này cho nó. Nội dung chính mà định luật thứ hai phát biểu là có tồn tại một đại lượng $\mathbf{F}$ mà cho giá trị $m\mathbf{a}$ như nhau khi tác dụng vào các chất điểm khác nhau. Phát biểu về sự tồn tại của một thứ như thế này nằm ngoài khả năng của một định nghĩa.

Tương tự như vậy, chú ý rằng định luật thứ hai nói rằng $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, mà không nói rằng, ví dụ như, $\mathbf{F} = m\mathbf{v}$, hoặc $\mathbf{F} = md^3\mathbf{x}/dt^3$. Ngoài việc chúng không phù hợp với thực tế, những biểu diễn này còn mâu thuẫn với định luật thứ nhất. $\mathbf{F} = m\mathbf{v}$ sẽ nói rằng một vận tốc khác không sẽ cần phải có một lực tác động, điều này mâu thuẫn với định luật thứ nhất. Và $\mathbf{F} = md^3\mathbf{x}/dt^3$ sẽ nói rằng một chất điểm chuyển động với gia tốc không đổi (thay cho vận tốc không đổi) trừ khi chịu tác dụng bởi một lực, điều này cũng mâu thuẫn với định luật thứ nhất.

Cũng như định luật thứ nhất, rất quan trọng để nhận ra rằng định luật thứ hai cũng đúng cho *tất cả* các chất điểm. Nói cách khác, với cùng một lực (ví dụ, cùng một lò xo được kéo ra cùng một khoảng cách) tác dụng vào hai chất điểm với khối lượng m_1 and m_2, thì phương trình (3.1) nói rằng các gia tốc của chúng liên hệ với nhau bởi

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1}. \tag{3.2}$$

Hệ thức này đúng với mọi lực thông thường. Do đó, một khi chúng ta đã sử dụng một lực để tìm tỷ số khối lượng của hai vật thể, thì chúng ta sẽ biết tỷ lệ gia tốc a của chúng khi chúng chịu tác dụng của bất kỳ lực nào khác. Dĩ nhiên, chúng ta vẫn chưa định nghĩa *khối lượng*. Nhưng phương trình (3.2) đưa ra một phương pháp thực nghiệm để xác định khối lượng của vật thể theo một chuẩn (gọi là, 1 kg) khối lượng. Việc chúng ta phải làm là so sánh gia tốc của nó với gia tốc của khối lượng chuẩn, khi chúng chịu tác dụng của cùng một lực.

Chú ý rằng $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ là một phương trình vector, vì vậy thực chất nó có ba phương trình. Trong hệ tọa độ Đề Các, ba phương trình này sẽ là $F_x = ma_x$, $F_y = ma_y$, và $F_z = ma_z$.

Định luật thứ ba

Một điều mà định luật này nói là nếu chúng ta có hai chất điểm cô lập tương tác với nhau bởi một lực nào đó, thì gia tốc của chúng có chiều ngược nhau và tỷ lệ nghịch với khối lượng của chúng. Theo một nghĩa tương đương, định luật thứ ba nói rằng tổng động lượng của một hệ cô lập là bảo toàn (nghĩa là không phụ thuộc vào thời gian). Để thấy điều này, xét hai chất điểm, mỗi chất điểm chỉ tương tác với chất điểm kia và không tương tác với chất điểm nào khác nữa trong không gian. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}_{\text{tổng}}}{dt} &= \frac{d\mathbf{p}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} \\ &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2, \end{aligned} \tag{3.3}$$

ở đó $\mathbf{F}_1$ và $\mathbf{F}_2$ lần lượt là lực tác dụng lên m_1 và m_2. Điều này chỉ ra rằng bảo toàn động lượng (nghĩa là, $d\mathbf{p}_{\text{tổng}}/dt = 0$) tương đương với định luật ba của Newton (nghĩa là, $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$). Lập luận trên vẫn đúng với hệ gồm nhiều hơn hai chất điểm, nhưng chúng ta sẽ để dành trường hợp tổng quát này, cùng với nhiều vấn đề khác của động lượng cho Chương 5.

Không có nhiều điều được định nghĩa trong định luật này, vì vậy đây là một định luật chỉ mang nội dung thuần túy. Dù sao, nó không thể là một định nghĩa, bởi vì nó không phải lúc nào cũng đúng. Nó đúng với dạng lực đẩy và kéo, nhưng nó không đúng với lực từ. Trong trường hợp lực từ, động lượng sẽ bị chuyển vào trong trường điện từ (do đó tổng động lượng của các chất điểm *và* của trường điện từ là được bảo toàn). Nhưng chúng ta sẽ không xét trường điện từ ở đây, mà chỉ xét đến các chất điểm. Vì vậy định luật thứ ba sẽ luôn đúng trong bất kỳ bài toán nào.

Định luật thứ ba chứa một thông tin cực kỳ quan trọng. Nó nói rằng chúng ta sẽ không bao giờ thấy một chất điểm tăng tốc trừ khi cũng có một số chất điểm khác tăng tốc ở nơi nào đó. Chất điểm khác có thể ở rất xa, như hệ trái đất-mặt trời, nhưng nó luôn luôn tồn tại ở đâu đó. Chú ý rằng nếu chúng ta chỉ được cho định luật thứ hai, thì hoàn toàn có thể là sẽ có một chất điểm cho trước được gia tốc một cách tức thời mà không có gì khác xảy ra trong vũ trụ, miễn là cũng với một chất điểm như vậy nhưng có khối lượng gấp đôi thì nó có gia tốc bằng một nửa khi nó được đặt cùng vị trí, v.v... Tất cả điều này là đúng ở mức độ của định luật thứ hai. Chúng ta sẽ nói rằng một lực với một giá trị nào đó đang tác dụng vào một vị trí, và mọi thứ là phù hợp. Nhưng định luật ba nói rằng đơn giản đây không phải là cách mà thế giới (ít nhất thế giới chúng ta sống) vận hành. Theo một ý nghĩa nào đó, một lực mà không có một lực đối ngẫu dường như là một điều thần kỳ, trong khi đó một lực với lực đối ngẫu đi kèm bằng và ngược dấu với nó có bản chất “nguyên nhân và kết quả”, mà dường như (và hiển nhiên) có ý nghĩa vật lý hơn.

Tuy nhiên cuối cùng, chúng ta không nên coi trọng quá nhiều đến các định luật Newton, vì mặc dù chúng là một thành tựu về kiến thức vượt trội và đúng đối với mọi hiện tượng vật lý phổ thông nhưng chúng chỉ là các định luật của một lý thuyết gần đúng. Vật lý Newton là một trường hợp giới hạn của lý thuyết tương đối và cơ học lượng tử, mà hai lý thuyết này cũng chỉ là những trường hợp giới hạn các lý thuyết chính xác hơn mà hiện tại chưa được tìm ra. Cái cách mà các chất điểm (hoặc sóng, hoặc sợi dây, hoặc bất cứ thứ gì) tương tác ở mức độ cơ bản nhất trong thực tế thì chắc chắn là không giống cái thứ mà chúng ta gọi là lực.

3.2 Biểu đồ vật thể tự do

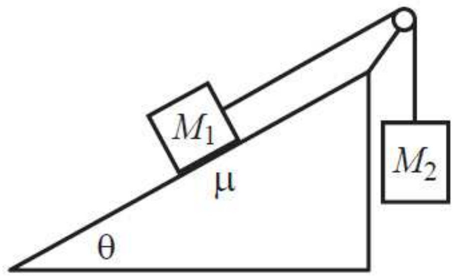
Định luật mà cho phép chúng ta sử dụng một cách định lượng là định luật thứ hai. Cho trước một lực, chúng ta có thể áp dụng phương trình $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ để tìm gia tốc. Và khi đã biết gia tốc, chúng ta có thể xác định ứng xử của vật thể đã cho (nghĩa là, vị trí và vận tốc), miễn là chúng ta được cho trước vị trí và vận tốc ban đầu. Quá trình này đôi khi khá là mất thời gian, nhưng có hai dạng cơ bản thường xảy ra.

- Trong rất nhiều bài toán, tất cả những thứ bạn được cho trước là một trạng thái vật lý (ví dụ, một khối nằm yên trên một mặt phẳng, các sợi dây kết nối các khối lượng,v.v...), và bạn phải tìm các lực tác dụng lên các vật thể bằng việc sử dụng phương trình $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Các lực thường có các hướng khác nhau, vì vậy sẽ rất dễ xảy ra trường hợp chúng ta không thể xác định hết được chúng. Do đó có một phương pháp hữu ích là tách các vật thể riêng rẽ ra và vẽ tất cả các lực tác dụng lên mỗi phần tử của chúng. Đây là chủ đề của mục này.

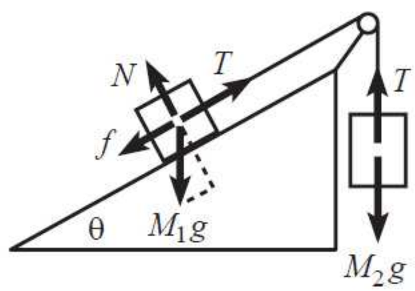
- Trong các bài toán khác, bạn được *cho trước* lực tác động như là một hàm hiển của thời gian, của vị trí, hoặc của vận tốc, và công việc bây giờ lập tức trở thành việc giải phương trình $F = ma \equiv m\ddot{x}$ (ở đây chúng ta chỉ xét trường hợp một chiều). Những *phương trình vi phân* này có thể rất khó (hoặc không thể) giải để tìm nghiệm chính xác. Đây là chủ đề của Mục 3.3.

Chúng ta hãy xem xét ở đây dạng đầu tiên của hai dạng cơ bản này, ở đó chúng ta có một trạng thái vật lý được đưa ra và chúng ta phải xác định tất cả các lực xuất hiện trong trạng thái vật lý này. Thuật ngữ *biểu đồ vật thể tự do* được dùng để biểu thị cho một biểu đồ với tất cả các lực được vẽ lên một vật thể đã cho. Sau khi vẽ một biểu đồ như vậy cho mỗi vật trong kết cấu, chúng ta đơn giản viết các phương trình $F = ma$ cho tất cả các vật. Kết quả sẽ là một hệ phương trình tuyến tính với tất cả các lực và các gia tốc khác nhau là ẩn cần tìm, mà sau đó chúng ta có thể giải hệ này. Quá trình này tốt nhất là được miêu tả qua một ví dụ.

Ví dụ (Một mặt phẳng và các khối lượng): Khối lượng M_1 được giữ trên một mặt phẳng nghiêng một góc θ, và khối lượng M_2 được treo ở cạnh bên. Hai khối lượng được nối với nhau bởi một dây không có khối lượng chạy trên một ròng rọc không khối lượng (xem Hình 3.1). Hệ số ma sát động giữa M_1 và mặt phẳng nghiêng là μ. M_1 được thả từ trạng thái đứng yên. Giả sử rằng M_2 đủ lớn sao cho M_1 được kéo lên phía hướng lên trên mặt phẳng nghiêng, hỏi gia tốc của các khối lượng là bao nhiêu? Tính sức căng của dây?



Hình 3.1:



Hình 3.2:

Lời giải: Thứ nhất chúng ta phải vẽ tất cả các lực tác dụng lên hai khối lượng. Chúng được chỉ ra trong Hình **3.2**. Các lực tác dụng lên M_2 là trọng lực và lực căng. Các lực tác dụng lên M_1 là trọng lực, lực ma sát, lực căng, và phản lực. Chú ý lực ma sát hướng xuống dưới, bởi vì chúng ta giả sử M_1 chuyển động lên trên.

Sau khi vẽ tất cả các lực, bây giờ chúng ta có thể viết tất cả các phương trình $F = ma$. Khi xét M_1, chúng ta có thể phân tích các lực thành các thành phần nằm ngang và thẳng đứng, nhưng sẽ thuận tiện hơn nhiều khi sử dụng các thành phần song song và vuông góc với mặt phẳng.[5] Hai thành phần này của phương trình

[5]Khi giải quyết các bài toán liên quan đến mặt phẳng nghiêng, thông thường một trong hai hệ tọa độ này sẽ thuận tiện hơn rất nhiều so với hệ tọa độ kia. Đôi khi chúng ta không biết trước được tọa độ nào là tốt hơn nhưng nếu mọi thứ trở lên rối rắm với một hệ tọa độ thì bạn hãy thử lại với hệ tọa độ kia.

$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, cùng với phương trình $F = ma$ theo trục thẳng đứng của M_2 cho

$$\begin{aligned} T - f - M_1 g \sin\theta &= M_1 a, \\ N - M_1 g \cos\theta &= 0, \\ M_2 g - T &= M_2 a, \end{aligned} \tag{3.4}$$

ở đây chúng ta đã sử dụng thực tế là hai khối lượng có cùng gia tốc (và chúng ta định nghĩa chiều dương của M_2 là hướng xuống dưới). Chúng ta cũng đã sử dụng thực tế là lực căng dây bằng nhau ở hai đầu dây, bởi vì nếu không thì sẽ có một tổng hợp lực tác động lên một phần nào đó của sợi dây mà sẽ làm cho nó có gia tốc là vô hạn do dây không có khối lượng.

Có bốn ẩn trong hệ phương trình (3.4) (đó là T, a, N, và f), nhưng chỉ có ba phương trình. Rất may mắn là chúng ta còn có phương trình thứ tư: $f = \mu N$, vì ta đã giả sử rằng M_1 chuyển động, vì vậy chúng ta có thể sử dụng công thức cho lực ma sát động. Thay biểu thức này vào trong phương trình thứ hai ở trên ta có $f = \mu M_1 g \cos\theta$. Khi đó phương trình thứ nhất trở thành $T - \mu M_1 g \cos\theta - M_1 g \sin\theta = M_1 a$. Cộng phương trình này với phương trình thứ ba giúp chúng ta tìm được gia tốc a và ta có

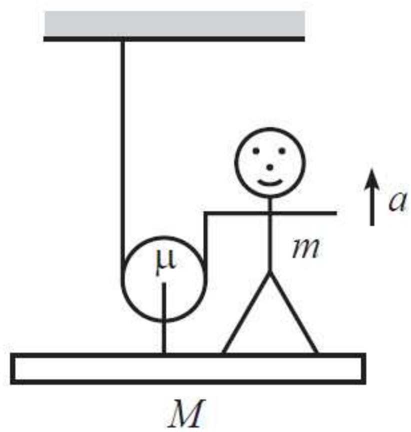
$$a = \frac{g(M_2 - \mu M_1 \cos\theta - M_1 \sin\theta)}{M_1 + M_2} \quad \Longrightarrow \quad T = \frac{M_1 M_2 g(1 + \mu \cos\theta + \sin\theta)}{M_1 + M_2}. \tag{3.5}$$

Chú ý rằng để cho M_1 chuyển động nhanh dần lên trên (nghĩa là, $a > 0$), chúng ta phải có $M_2 > M_1(\mu \cos\theta + \sin\theta)$. Điều này có thể thấy được từ việc xem xét các lực theo hướng dọc theo mặt phẳng nghiêng.

> NHẬN XÉT: Nếu chúng ta giả sử rằng M_1 là đủ lớn để nó trượt xuống dưới thì lực ma sát sẽ hướng lên phía trên, và chúng ta sẽ có (như bạn có thể kiểm tra),
>
> $$a = \frac{g(M_2 + \mu M_1 \cos\theta - M_1 \sin\theta)}{M_1 + M_2}, \quad \text{và} \quad T = \frac{M_1 M_2 g(1 - \mu \cos\theta + \sin\theta)}{M_1 + M_2}. \tag{3.6}$$
>
> Để cho M_1 chuyển động xuống dưới nhanh dần (tức là, $a < 0$), ta phải có $M_2 < M_1(\sin\theta - \mu \cos\theta)$. Do đó, điều kiện của M_2 để hệ chuyển động không có gia tốc (nghĩa là vật chỉ nằm yên ở đó, với giả thiết là vật bắt đầu từ trạng thái tĩnh) là
>
> $$M_1(\sin\theta - \mu \cos\theta) \le M_2 \le M_1(\sin\theta + \mu \cos\theta). \tag{3.7}$$
>
> Nếu μ rất nhỏ, thì M_2 nhất thiết phải bằng $M_1 \sin\theta$ nếu hệ ở trạng thái cân bằng. Phương trình (3.7) cũng cho chúng ta biết là nếu $\tan\theta \le \mu$, thì M_1 sẽ không trượt xuống, thậm chí nếu $M_2 = 0$. ♣

Trong các bài toán như bài toán trên, khá là rõ ràng để nhận biết là vật nào bạn nên tách ra và vẽ các lực tác dụng lên nó. Nhưng trong các bài toán khác, khi mà có rất nhiều các hệ con khác nhau mà bạn có thể lựa chọn, bạn phải cẩn thận khi xác định các lực liên quan tác động lên mỗi hệ con mà bạn đã chọn. Việc chọn hệ con nào sẽ phụ thuộc vào các đại lượng mà bạn cần phải tìm. Hãy xét ví dụ sau.

Ví dụ (Bệ và ròng rọc): Một người đứng trên một hệ gồm bệ và ròng rọc, như được chỉ ra trong Hình **3.3**. Các khối lượng của bệ, người, và ròng rọc[6] lần lượt là M, m, và μ.[7] Dây không có khối lượng. Người đó kéo dây để có gia tốc a hướng lên trên. (Giả sử rằng bệ bằng cách nào đó được giữ sao cho luôn cân bằng, ví dụ như là nó có hai đầu chuyển động không ma sát dọc theo hai đường ray.) Tìm sức căng của dây, phản lực giữa người và bệ, và sức căng của thanh nối ròng rọc và bệ.



Hình 3.3:

Lời giải: Để tìm lực căng trong sợi dây, chúng ta đơn giản là xét hệ con gồm tất cả hệ (trừ giá đỡ). Nếu chúng ta hình dung đặt hệ trong một hộp đen (để nhấn mạnh rằng chúng ta không cần quan tâm đến các nội lực trong hệ), thì các lực chúng ta nhìn thấy *lộ ra* ngoài hộp là ba lực trọng lượng (Mg, mg, và μg) hướng xuống dưới, và lực căng dây T hướng lên trên. Sử dụng $F = ma$ cho toàn bộ hệ ta có

$$T - (M + m + \mu)g = (M + m + \mu)a \quad \Longrightarrow \quad T = (M + m + \mu)(g + a). \qquad (3.8)$$

[6]Giả thiết rằng khối lượng của ròng rọc tập trung tại tâm của nó, do đó chúng ta không phải quan tâm đến ảnh hưởng của chuyển động quay của nó (chủ đề của Chương 8).

[7]Tôi phải xin lỗi các bạn là phải dùng ký hiệu μ cho khối lượng ở đây bởi vì ký hiệu này thường được sử dụng cho hệ số ma sát. Lý do là bởi vì có quá nhiều ký hiệu cho "m" ở đây.

Để tìm phản lực N giữa người và bệ, cũng như lực căng f trên thanh nối giữa ròng rọc và bệ, sẽ là không đủ khi chúng ta xét toàn bộ hệ. Lý do là bởi vì các lực này là các nội lực trong hệ đang xét này, do đó chúng sẽ không xuất hiện trong bất cứ phương trình $F = ma$ nào (chỉ chứa các ngoại lực). Vì vậy chúng ta phải xét đến các hệ con:

- Chúng ta sử dụng phương trình $F = ma$ cho người. Các lực tác dụng lên người là trọng lực, phản lực từ bệ, và lực căng từ dây (kéo xuống dưới từ tay người). Vậy ta có
$$N - T - mg = ma. \tag{3.9}$$

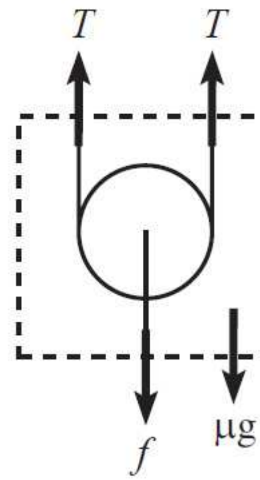
- Bây giờ sử dụng phương trình $F = ma$ cho bệ. Các lực tác dụng lên bệ là trọng lực của bệ, phản lực từ người, và lực của thanh hướng lên trên. Vậy ta có
$$f - N - Mg = Ma. \tag{3.10}$$

- Bây giờ sử dụng phương trình $F = ma$ cho ròng rọc. Các lực tác dụng lên ròng rọc là trọng lực, lực hướng xuống từ thanh, và *hai* lực căng của dây (vì dây kéo ròng rọc lên với cả hai bên). Vậy ta có
$$2T - f - \mu g = \mu a. \tag{3.11}$$

Chú ý rằng nếu chúng ta lấy tổng cả ba phương trình trên, chúng ta sẽ thu được phương trình $F = ma$ trong (3.8), điều này phải xảy ra vì toàn bộ hệ là tổng của ba hệ con ở trên. Các phương trình (3.9)– (3.11) là ba phương trình với ba ẩn, T, N, và f. Tổng của chúng suy ra T trong (3.8), và các phương trình (3.9) và (3.11) lần lượt cho ta,
$$N = (M + 2m + \mu)(g + a), \quad \text{và} \quad f = (2M + 2m + \mu)(g + a). \tag{3.12}$$

NHẬN XÉT: Bạn cũng có thể thu được các kết quả này bằng cách xét các hệ con khác các hệ con chúng ta đã chọn ở trên. Ví dụ như, bạn có thể chọn hệ ròng rọc cùng với bệ, v.v... Nhưng dù bạn chọn cách tách hệ như thế nào đi chăng nữa, bạn sẽ cần phải có ba phương trình $F = ma$ độc lập với nhau để giải ra ba ẩn, T, N, và f.

Trong các bài như bài toán này, sẽ rất dễ bỏ qua một số lực nào đó, ví dụ như thành phần thứ hai của lực căng dây T trong phương trình (3.11). Để an toàn



Hình 3.4:

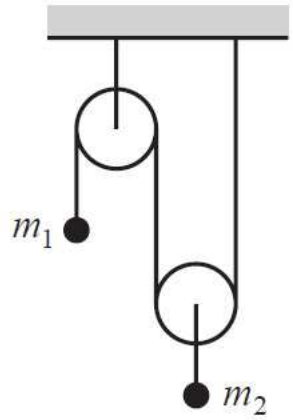
chúng ta nên luôn tách mỗi hệ con, vẽ một hộp quanh nó, và sau đó vẽ các lực mà "lộ" ra từ hộp đó. Nói cách khác, hãy vẽ biểu đồ vật thể tự do. Hình 3.4 thể hiện biểu đồ vật thể tự do cho hệ con chỉ chứa ròng rọc. ♣

Có một lớp các bài toán khác, tương tự như ví dụ trên, có tên gọi là *máy Atwood*. Máy Atwood là tên gọi cho hệ bất kỳ bao gồm các khối lượng, dây, và ròng rọc.[8] Trong trường hợp tổng quát ròng rọc và dây có thể có khối lượng, nhưng trong chương này chúng ta chỉ xét trường hợp chúng không có khối lượng. Như chúng ta sẽ thấy ở ví dụ sau, có hai bước cơ bản trong việc giải các bài toán Atwood: (1) viết tất cả các phương trình $F = ma$, và (2) tìm liên hệ giữa các gia tốc của các vật khác nhau với chú ý rằng độ dài của (các) sợi dây là không đổi, một thực tế mà chúng ta gọi là "sự bảo toàn chiều dài của dây."

Ví dụ (Máy Atwood): Xét hệ ròng rọc như trong Hình 3.5, với các khối lượng m_1 và m_2. Các sợi dây và các ròng rọc là không có khối lượng. Hỏi gia tốc của các khối lượng là bao nhiêu? Sức căng của dây là bao nhiêu?

Lời giải: Thứ nhất phải chú ý rằng lực căng T là như nhau tại mọi điểm của sợi dây không khối lượng, vì nếu không sẽ có một gia tốc vô hạn của một vài phần của sợi dây. Từ đó suy ra rằng lực căng trên dây ngắn được nối với m_2 là $2T$. Điều này phải xảy ra vì tổng lực tác dụng lên trên ròng rọc bên phải phải bằng không, nếu không nó sẽ có gia tốc vô hạn vì ròng rọc là không khối lượng. Vậy các phương trình

[8] George Atwood (1746-1807) là một trợ giáo tại Cambridge University. Ông đã xuất bản bản miêu tả đầu tiên về máy Atwood vào năm 1784. Để biết thêm về lịch sử của máy Atwood, xem Greenslade (1985).



Hình 3.5:

$F = ma$ cho hai khối lượng là (với chiều dương là chiều hướng lên trên)

$$\begin{aligned} T - m_1 g &= m_1 a_1, \\ 2T - m_2 g &= m_2 a_2. \end{aligned} \tag{3.13}$$

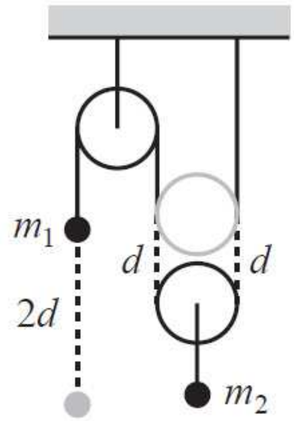
Chúng ta có hai phương trình với ba ẩn a_1, a_2 và T. Vậy chúng ta cần một phương trình nữa. Phương trình này là "sự bảo toàn chiều dài của dây" sẽ cho ta liên hệ của a_1 và a_2. Nếu chúng ta hình dung dịch chuyển m_2 và ròng rọc bên phải lên trên một khoảng d, thì một độ dài $2d$ của dây bị biến mất từ hai phần của dây cuộn vào ròng rọc phải. Phần dây này phải di chuyển đến đâu đó, vì vậy nó sẽ chuyển đến phần dây giữ m_1 (xem Hình 3.6). Do đó, m_1 sẽ đi xuống một khoảng $2d$. Nói cách khác, $y_1 = -2y_2$, ở đó y_1 và y_2 được đo từ các vị trí ban đầu của các khối lượng. Đạo hàm hai lần biểu thức này cho ta mối liên hệ giữa a_1 và a_2,

$$a_1 = -2a_2. \tag{3.14}$$

Kết hợp với phương trình (3.13), bây giờ chúng ta có thể giải ra a_1, a_2, và T. Kết quả là

$$a_1 = g\frac{2m_2 - 4m_1}{4m_1 + m_2}, \quad a_2 = g\frac{2m_1 - m_2}{4m_1 + m_2}, \quad T = \frac{3m_1 m_2 g}{4m_1 + m_2}. \tag{3.15}$$

NHẬN XÉT: Có rất nhiều trường hợp giới hạn và trường hợp đặc biệt mà chúng ta có thể kiểm tra ở đây. Một số trường hợp như : (1) Nếu $m_2 = 2m_1$, thì phương trình (3.15) cho $a_1 = a_2 = 0$, và $T = m_1 g$. Các khối lượng trong trường hợp này là đứng yên. (2) Nếu $m_2 \gg m_1$, thì phương trình (3.15) cho $a_1 = 2g$, $a_2 = -g$, và $T = 3m_1 g$. Trong trường hợp này, m_2 về cơ bản là rơi tự do, trong khi đó m_1 bị giật mạnh lên trên với gia tốc $2g$. Giá trị của T là giá trị cần để tạo ra lực tổng hợp trên m_1 bằng $m_1(2g)$, vì $T - m_1 g = 3m_1 g - m_1 g = m_1(2g)$. Bạn có thể kiểm tra trường hợp $m_1 \gg m_2$.



Hình 3.6:

Trong trường hợp tổng quát mà có N khối lượng thay vì chỉ có hai, thì biểu thức của "sự bảo toàn chiều dài của dây" là một phương trình liên hệ tất cả N gia tốc. Một cách đơn giản nhất để nhận được biểu thức liên hệ này là bằng cách tưởng tượng chuyển động của N *-1* khối lượng, mỗi khối lượng có một giá trị chuyển động tùy ý, và sau đó xem điều gì xảy ra với khối lượng cuối cùng. Chú ý rằng các chuyển động tùy ý này hiển nhiên *không* phải là các chuyển động thực của các khối lượng. Điều này không có gì là lạ vì phương trình về "bảo toàn của dây" không có gì liên quan tới N phương trình $F = ma$. Sự kết hợp của tất cả N *+ 1* phương trình là cần thiết để giới hạn các chuyển động của hệ trở về một chuyển động duy nhất. ♣

Trong các bài tập và các bài tập luyện tập của chương này, bạn sẽ gặp một số dạng đặc biệt của máy Atwood. Nhưng dù chúng phức tạp đến mức nào, thì cũng chỉ có hai bước cần làm để giải quyết chúng, như đã đề cập ở trên: viết các phương trình $F = ma$ cho các khối lượng (mà có thể cần đến liên hệ của các lực căng ở các sợi dây khác nhau), và sau đó tìm liên hệ giữa các gia tốc của các khối lượng, sử dụng "sự bảo toàn chiều dài của dây."

3.3 Giải phương trình vi phân

Bây giờ chúng ta sẽ xem xét dạng bài toán mà ở đó chúng ta được cho trước lực như là một hàm của thời gian, vị trí, hoặc vận tốc và bài toán của chúng ta là phải giải phương trình vi phân $F = ma \equiv m\ddot{x}$ để tìm vị trí, $x(t)$, như một hàm của thời gian.[9] Trong những

[9]Trong một vài cơ cấu, như trong bài tập 3.11, lực tác dụng sẽ không được cho trước nên bạn phải tự tìm ra nó có dạng như thế nào. Nhưng phần cốt lõi của bài tập vẫn là việc giải phương trình vi phân

phần sau đây, chúng ta sẽ phát triển một số kỹ thuật để giải các phương trình vi phân. Việc hiểu được và áp dụng các kỹ thuật này sẽ giúp chúng ta hiểu thêm được rất nhiều các cơ cấu.

Cũng có thể lực F đã cho là một hàm của các đạo hàm bậc cao của x, cùng với các đại lượng t, x, và $v \equiv \dot{x}$. Nhưng các trường hợp này không xảy ra nhiều, vì vậy chúng ta sẽ không quan tâm đến chúng. Do đó phương trình vi phân $F = ma$ chúng ta sẽ phải giải là (ở đây chúng ta sẽ chỉ xét một chiều)

$$m\ddot{x} = F(t, x, v). \tag{3.16}$$

Trong trường hợp tổng quát, phương trình này không thể được giải chính xác để tìm ra $x(t)$.[10] Nhưng với hầu hết các bài toán mà chúng ta sẽ xét thì phương trình vi phân này có thể giải ra nghiệm chính xác. Các bài chúng ta gặp thường sẽ rơi vào một trong ba trường hợp đặc biệt, đó là, khi F là một hàm chỉ của t, hoặc chỉ của x, hoặc chỉ của v. Trong tất cả các trường hợp này, chúng ta sẽ phải cần đến các điều kiện đầu, $x_0 \equiv x(t_0)$ và $v_0 \equiv v(t_0)$, để nhận được biểu nghiệm cuối cùng. Các điều kiện đầu sẽ xuất hiện trong các cận lấy tích phân của các tích phân như trong các thảo luận sau đây.[11]

Chú ý: Bạn có thể chỉ đọc lướt qua một trang rưỡi tiếp theo, và sẽ xem lại khi cần. Đừng cố gắng nhớ các bước khác nhau ở đây. Chúng ta đưa ra chúng chỉ để trình bày hết các trường hợp. Điểm mấu chốt ở đây có thể tóm tắt khi nói rằng đôi khi bạn muốn viết $\ddot{x}$ như dv/dt, và đôi khi bạn sẽ muốn viết nó như là vdv/dx (xem phương trình (3.20)). Sau đó bạn "đơn giản" là tách biến và lấy tích phân phương trình vi phân. Chúng ta sẽ xét qua ba trường hợp đặc biệt, và sau đó sẽ làm một số ví dụ.

- *F chỉ là hàm của t : $F = F(t)$.*

  Bởi vì $a = d^2x/dt^2$, chúng ta phải lấy tích phân $F = ma$ hai lần để thu được $x(t)$. Làm việc này một cách có hệ thống để có thể làm quen với cách làm tổng quát. Thứ nhất, viết $F = ma$ thành

$$m\frac{dv}{dt} = F(t). \tag{3.17}$$

sau khi tìm được dạng của nó.

[10]Bạn có thể luôn luôn tìm được $x(t)$ *bằng cách giải số* với độ chính xác tùy ý. Chủ đề này được trình bày trong Mục 1.4

[11]Không phải là ngẫu nhiên khi chúng ta cần *hai* điều kiện đầu để tìm nghiệm của phương trình vi phân bậc *hai* (theo nghĩa là đạo hàm bậc cao nhất của x trong phương trình là đạo hàm bậc hai) $F = m\ddot{x}$. Một kết quả tổng quát của lý thuyết phương trình vi phân (mà ở đây chúng ta sẽ thừa nhận nó), đó là nghiệm của một phương trình vi phân cấp n sẽ chứa n tham số tự do mà sẽ được xác định bằng các điều kiện đầu.

Sau khi tách biến và lấy tích phân hai vế chúng ta thu được[12]

$$m\int_{v_0}^{v(t)} dv' = \int_{t_0}^{t} F(t')dt'. \tag{3.18}$$

Chúng ta đặt dấu phẩy lên các biến tích phân để không bị nhầm với các giới hạn tích phân, nhưng trong luyện tập chúng ta thường không quan tâm đến chúng. Tích phân của dv' đơn giản là v', do vậy từ phương trình (3.18) chúng ta nhận được v như là một hàm của t, đó là $v(t)$. Sau đó chúng ta có thể tách biến trong phương trình $dx/dt \equiv v(t)$ và lấy tích phân để thu được

$$\int_{x_0}^{x(t)} dx' = \int_{t_0}^{t} v(t')dt'. \tag{3.19}$$

Điều này nhận được x như là một hàm của t, đó là $x(t)$. Quá trình này trông có vẻ là một cách rất cồng kềnh khi đơn giản là chỉ lấy tích phân một biểu thức hai lần. Nhưng kỹ thuật này sẽ hữu dụng hơn trong trường hợp sau.

- *F chỉ là hàm của x : $F = F(x)$.*

  Chúng ta sẽ sử dụng

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dx}{dt}\frac{dv}{dx} = v\frac{dv}{dx} \tag{3.20}$$

  để viết $F = ma$ như sau

$$mv\frac{dv}{dx} = F(x). \tag{3.21}$$

  Bây giờ tách biến và lấy tích phân hai vế để nhận được

$$m\int_{v_0}^{v(x)} v'dv' = \int_{x_0}^{x} F(x')dx'. \tag{3.22}$$

  Tích phân của v' là $v'^2/2$, vậy vế trái chứa bình phương của $v(x)$. Lấy căn bậc hai cả hai vế, điều này sẽ cho ta v như là một hàm của x, nghĩa là $v(x)$. Tách biến phương trình $dx/dt \equiv v(x)$ sẽ nhận được

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx'}{v(x')} = \int_{t_0}^{t} dt'. \tag{3.23}$$

[12] Nếu bạn chưa từng làm việc này bao giờ, thì việc nhân cả hai vế với đại lượng vô cùng bé dt có thể sẽ làm cho bạn cảm thấy không thoải mái. Nhưng thực ra việc làm này là hoàn toàn không có gì sai cả. Nếu bạn muốn, bạn có thể tưởng tượng là đang làm việc với các đại lượng nhỏ (nhưng không phải là vô cùng bé) Δv và Δt, mà đối với chúng thì việc nhân hai vế với Δt là hoàn toàn được phép. Sau đó bạn sẽ lấy tổng trên các khoảng Δt và cuối cùng là lấy giới hạn khi cho $\Delta t \to 0$ mà sẽ cho ta kết quả như trong tích phân trong phương trình (3.18).

Giả sử rằng chúng ta có thể lấy tích phân ở vế trái, khi đó phương trình này cho t là một hàm của x. Sau đó (về nguyên tắc) chúng ta có thể tìm hàm ngược để nhận được x là một hàm của t, đó là $x(t)$. Điều không may có thể xảy ra trong trường hợp này là việc tìm tích phân trong (3.23) có thể không thực hiện được. Và thậm chí nếu thực hiện được thì cũng có thể chúng ta sẽ không tìm được hàm ngược của $t(x)$ để nhận được $x(t)$.

- *F chỉ là một hàm của v: $F = F(v)$.*

  Viết $F = ma$ như sau
$$m\frac{dv}{dt} = F(v). \tag{3.24}$$
  Tách biến và lấy tích phân hai vế phương trình này nhận được
$$m\int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv'}{F(v')} = \int_{t_0}^{t} dt'. \tag{3.25}$$
  Giả sử rằng chúng ta có thể lấy tích phân trong phương trình này, chúng ta sẽ nhận được t là một hàm của v, và do đó (về nguyên tắc) sẽ nhận được v là hàm của t, tức là $v(t)$. Sau đó chúng ta có thể lấy tích phân $dx/dt \equiv v(t)$ và nhận được $x(t)$ từ
$$\int_{x_0}^{x(t)} dx' = \int_{t_0}^{t} v(t')dt'. \tag{3.26}$$
  Chú ý: Trong trường hợp $F = F(v)$, nếu chúng ta muốn tìm v như là một hàm của x, $v(x)$, thì chúng ta nên viết a là $v(dv/dx)$ và lấy tích phân
$$m\int_{v_0}^{v(x)} \frac{v'dv'}{F(v')} = \int_{x_0}^{x} dx'. \tag{3.27}$$
  Sau đó chúng ta có thể nhận được $x(t)$ từ (3.23) nếu muốn.

Khi xét đến các điều kiện đầu, chúng ta đã chọn là đặt chúng trong các cận của các tích phân trên. Nếu bạn muốn, bạn có thể chỉ lấy tích phân mà không có cận nào, và chỉ thêm một hằng số tích phân vào trong kết quả nhận được của bạn. Hằng số tích phân này sau đó sẽ được tính bằng các điều kiện đầu.

Như đã đề cập ở trên, bạn *không* cần phải ghi nhớ ba trường hợp trên, bởi vì chúng là các trường hợp khác nhau phụ thuộc vào việc bạn được cho trước cái gì và bạn cần phải tìm cái gì. Tất cả bạn phải nhớ là $\ddot{x}$ có thể được viết như là dv/dt hoặc vdv/dx. Một trong hai biểu diễn này sẽ giúp chúng ta giải bài toán (biểu diễn mà làm cho chỉ có hai trong ba biến t, x, và v xuất hiện trong phương trình vi phân của bạn). Và sau đó hãy chuẩn bị để tách biến và lấy tích phân nhiều lần khi cần.[13]

Ví dụ (Lực hấp dẫn): Một chất điểm có khối lượng m chịu tác dụng của một lực không đổi $F = -mg$. Chất điểm bắt đầu chuyển động từ trạng thái nằm yên ở độ cao h. Vì lực không đổi này đều rơi vào cả ba trường hợp trên, nên chúng ta có thể giải ra $y(t)$ theo hai cách:

(a) Tìm $y(t)$ bằng cách viết a là dv/dt.

(b) Tìm $y(t)$ bằng cách viết a là vdv/dy.

Lời giải:

(a) $F = ma$ cho $dv/dt = -g$. Nhân với dt và lấy tích phân suy ra $v = -gt + A$, với A là hằng số tích phân.[14] Điều kiện đầu $v(0) = 0$ cho $A = 0$. Do đó, $dy/dt = -gt$. Nhân với dt và lấy tích phân nhận được $y = -gt^2/2 + B$. Điều kiện đầu $y(0) = h$ cho $B = h$. Do đó,

$$y = h - \frac{1}{2}gt^2. \tag{3.28}$$

(b) $F = ma$ cho $vdv/dy = -g$. Tách biến và lấy tích phân nhận được $v^2/2 = -gy + C$. Điều kiện đầu $v(h) = 0$ cho $v^2/2 = -gy + gh$. Do đó, $v \equiv dy/dt = -\sqrt{2g(h-y)}$. Ta chọn dấu trừ trước căn thức vì chất điểm là đang rơi. Tách biến ta có

$$\int \frac{dy}{\sqrt{h-y}} = -\sqrt{2g}\int dt. \tag{3.29}$$

Điều này suy ra $2\sqrt{h-y} = \sqrt{2g}t$, ở đó chúng ta đã sử dụng điều kiện đầu $y(0) = h$. Do đó, $y = h - gt^2/2$, như ở phần (a). Trong phần (b) này, về bản chất chúng ta vừa nhận được phương trình của định lý bảo toàn năng lượng, như chúng ta sẽ thấy ở Chương 5.

Ví dụ (Quả bóng rơi): Một quả bóng bị thả rơi từ độ cao h từ trạng thái đứng

[13]Chúng ta muốn chỉ có hai biến xuất hiện trong phương trình bởi vì mục đích của chúng ta là tách biến và lấy tích phân, và bởi vì phương trình chỉ có hai vế. Nếu đó là hệ phương trình thì đó là một câu chuyện khác.

[14]Chúng ta sẽ làm ví dụ này bằng cách thêm vào hằng số tích phân và tìm hằng số tích phân này bằng điều kiện đầu. Chúng ta sẽ làm ví dụ tiếp theo bằng cách cho điều kiện đầu vào trong cận của tích phân.

yên. Giả sử rằng lực cản[15] không khí có dạng $F_{\rm d} = -\beta v$. Tìm vận tốc và độ cao như là hàm của thời gian.

Lời giải: Để đơn giản về sau, chúng ta viết lực cản dưới dạng $F_{\rm d} = -\beta v \equiv -m\alpha v$ (nếu không $1/m$ sẽ xuất hiện rất nhiều). Chọn chiều hướng lên là chiều dương của y, lực tác dụng lên quả bóng là

$$F = -mg - m\alpha v. \tag{3.30}$$

Chú ý rằng ở đây v là âm, vì quả bóng đang rơi, vậy lực cản hướng lên trên. Viết $F = mdv/dt$ và tách biến ta được

$$\int_0^{v(t)} \frac{dv'}{g + \alpha v'} = -\int_0^t dt'. \tag{3.31}$$

Tích phân phương trình này nhận được $\ln(1 + \alpha v/g) = -\alpha t$. Sau đó tác dụng hàm mũ vào cả hai vế ta có

$$v(t) = -\frac{g}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t}). \tag{3.32}$$

Viết $dy/dt \equiv v(t)$, và sau đó tách biến và lấy tích phân thu được $y(t)$, ta có

$$\int_h^{y(t)} dy' = -\frac{g}{\alpha}\int_0^t (1 - e^{-\alpha t'})dt'. \tag{3.33}$$

Do đó,

$$y(t) = h - \frac{g}{\alpha}\Big(t - \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})\Big). \tag{3.34}$$

NHẬN XÉT:

1. Hãy xét một số trường hợp giới hạn. Nếu t là rất nhỏ (chính xác hơn nếu $\alpha t \ll 1$), thì chúng ta có thể sử dụng $e^{-x} \approx 1 - x + x^2/2$ để lấy xấp xỉ gần đúng đến bậc nhất của t. Bạn có thể chỉ ra rằng phương trình (3.32) cho $v(t) \approx -gt$. Điều này hợp lý, vì ban đầu lực cản là không đáng kể, do đó quả bóng về cơ bản là rơi tự do. Và tương tự như vậy bạn cũng có thể chỉ ra rằng phương trình (3.34) cho $y(t) \approx h - gt^2/2$, mà cũng là kết quả của chuyển động rơi tự do.
   Chúng ta cũng có thể xét với t rất lớn. Trong trường hợp này, $e^{-\alpha t}$ về cơ bản là bằng không, do vậy phương trình (3.32) cho $v(t) \approx -g/\alpha$. (Đây là

[15] Lực cản không khí đại khái là tỷ lệ thuận với vận tốc v khi vận tốc là tương đối nhỏ (ví dụ như nhỏ hơn 10 m/s). Với vận tốc lớn (ví dụ như lớn hơn 100 m/s), thì lực cản được cho là tỷ lệ với v^2. Nhưng ngưỡng xấp xỉ này cũng phụ thuộc vào rất nhiều thứ và trong bất cứ trường hợp nào thì cũng có một vùng khó xác định giữa hai trường hợp.

"vận tốc tới hạn". Giá trị này là hợp lý, vì nó là vận tốc tại đó tổng hợp lực tác dụng lên quả bóng, $-mg - m\alpha v$, bằng không.) Và phương trình (3.34) cho $y(t) \approx h - (g/\alpha)t + g/\alpha^2$. Thú vị là chúng ta thấy với t lớn, g/α^2 là khoảng cách trễ mà quả bóng này rơi sau một quả bóng khác với vận tốc đầu là vận tốc tới hạn, $-g/\alpha$.

2. Có thể bạn nghĩ rằng vận tốc trong phương trình (3.32) không phụ thuộc vào m, do m không xuất hiện trong phương trình này. Tuy nhiên, m xuất hiện ẩn trong α. Đại lượng α (mà chúng ta đưa ra để công thức của chúng ta trông đẹp hơn một chút) được xác định bởi $F_d = -\beta v \equiv -m\alpha v$. Nhưng đại lượng $\beta \equiv m\alpha$ là số hạng tỷ lệ với diện tích tiết diện, A, của quả bóng. Do đó, $\alpha \propto A/m$. Hai quả bóng cùng kích thước, một quả làm từ chì và một quả làm từ xốp, có cùng tiết diện A nhưng khác khối lượng m. Vậy α là khác nhau, và chúng rơi với các tốc độ khác nhau.

   Nếu chúng ta có một quả bóng đặc với mật độ khối lượng ρ và bán kính r, thì $\alpha \propto A/m \propto r^2/(\rho r^3) = 1/\rho r$. Với các vật nặng rơi trong môi trường loãng như không khí, đại lượng α là nhỏ, vậy sức cản tác dụng lên vật là không đáng kể trong thời gian ngắn (vì nếu chúng ta tính cả số hạng bậc hai trong khai triển của v, chúng ta thu được $v(t) \approx -gt + \alpha g t^2/2$). Do đó các vật có khối lượng riêng lớn rơi nhanh với cùng tốc độ, với gia tốc bằng g. Nhưng nếu không khí đặc hơn nhiều, thì tất cả giá trị α sẽ lớn hơn, và có thể nó sẽ khiến Galileo sẽ mất thời gian hơn một chút để đi đến các kết luận của ông. ♣

3.4 Ném xiên

Xét một quả bóng được ném trong không khí, không nhất thiết phải ném quả bóng theo phương thẳng đứng. Ta sẽ bỏ qua sức cản của không khí trong phần này. Mọi thứ sẽ trở nên phức tạp hơn một chút khi xét đến cả sức cản của không khí như sẽ trình bày trong Bài tập 3.53.

Gọi x và y lần lượt là tọa độ theo phương ngang và phương thẳng đứng của quả bóng. Lực tác động vào quả bóng theo phương x là $F_x = 0$, và lực theo phương y là $F_y = -mg$. Vậy phương trình $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ sẽ cho

$$\ddot{x} = 0, \quad \text{và} \quad \ddot{y} = -g. \tag{3.35}$$

Chú ý rằng hai phương trình này là tách biệt. Nghĩa là, trong phương trình đối với $\ddot{x}$ không có ảnh hưởng của y, và ngược lại. Do đó, các chuyển động theo phương x và y là độc lập với nhau hoàn toàn. Một minh họa cổ điển của các chuyển động độc lập của x và y là như sau. Bắn một viên đạn theo phương ngang (hoặc tốt nhất là chỉ tưởng tượng bắn viên đạn theo phương ngang), và cùng lúc đó thả một viên đạn từ độ cao của súng. Viên đạn nào sẽ chạm đất trước? (Bỏ qua sức cản của không khí, độ cong của trái đất, v.v...) Câu trả lời là chúng sẽ chạm đất cùng một lúc, vì tác dụng của trọng lực lên hai chuyển động theo phương y là như nhau, độc lập với chuyển động theo phương x.

Nếu vị trí và vận tốc ban đầu là (X, Y) và (V_x, V_y), thì chúng ta có thể dễ dàng lấy tích phân phương trình (3.35) để thu được

$$\dot{x}(t) = V_x, \quad \text{và} \quad \dot{y}(t) = V_y - gt. \tag{3.36}$$

Tích phân lần nữa chúng ta nhận được

$$x(t) = X + V_x t, \quad \text{và} \quad y(t) = Y + V_y t - \frac{1}{2}gt^2. \tag{3.37}$$

Những phương trình này cho các vận tốc và các vị trí là tất cả những cái bạn cần để giải bài toán ném xiên.

Ví dụ (Ném một quả bóng):

(a) Với vận tốc ban đầu cho trước, quả bóng nên được ném với góc nghiêng bằng bao nhiêu để nó đạt được tầm xa lớn nhất khi nó chạm đất? Giả sử mặt đất là nằm ngang, và quả bóng được ném lên từ mặt đất.

(b) Góc tối ưu là bao nhiêu nếu mặt đất nghiêng hướng lên một góc β (hoặc hướng xuống, nếu β là âm)?

Lời giải:

(a) Gọi góc nghiêng là θ, và gọi vận tốc ban đầu là V. Khi đó vận tốc của quả bóng theo phương ngang luôn là $V_x = V\cos\theta$, và vận tốc ban đầu của quả bóng theo phương thẳng đứng là $V_y = V\sin\theta$. Việc đầu tiên chúng ta cần làm là tìm thời gian quả bóng chuyển động trong không khí t. Chúng ta biết rằng vận tốc của quả bóng theo phương thẳng đứng bằng không tại thời điểm $t/2$, vì lúc đó quả bóng đang chuyển động theo phương ngang tại vị trí cao nhất. Vậy phương trình thứ hai của (3.36) cho $V_y = g(t/2)$. Do đó, $t = 2V_y/g$.[16] Phương trình thứ nhất của các phương trình (3.37) cho ta biết tầm xa của quả bóng là $d = V_x t$. Sử dụng $t = 2V_y/g$ ta thu được

$$d = \frac{2V_xV_y}{g} = \frac{V^2(2\sin\theta\cos\theta)}{g} = \frac{V^2\sin 2\theta}{g}. \tag{3.38}$$

[16] Một cách khác để tìm thời gian quả bóng chuyển động trong không khí là từ phương trình thứ hai của (3.37). Từ phương trình này chúng ta biết rằng quả bóng sẽ quay trở lại mặt đất khi $V_y t = gt^2/2$. Chúng ta sẽ phải dùng cách này để giải phần (b) của bài toán, khi mà đường quỹ đạo bay của quả bóng sẽ không còn đối xứng với điểm cực đại nữa.

Thừa số $\sin 2\theta$ đạt giá trị cực đại khi $\theta = \pi/4$. Khi đó tầm xa lớn nhất là $d_{\max} = V^2/g$.

NHẬN XÉT: Với $\theta = \pi/4$, bạn có thể chỉ ra rằng độ cao lớn nhất mà quả bóng đạt được là $V^2/4g$. Giá trị này bằng một nửa độ cao lớn nhất của $V^2/2g$ (như bạn có thể chỉ ra) nếu quả bóng được ném theo phương thẳng đứng lên trên. Chú ý rằng bất cứ khoảng cách có thể nào mà bạn muốn tìm trong bài toán phải tỷ lệ với V^2/g, đây là một kết quả của phương pháp phân tích thứ nguyên. Câu hỏi duy nhất là chúng có hệ số tỷ lệ bằng bao nhiêu mà thôi. ♣

(b) Như ở phần (a), việc đầu tiên chúng ta cần làm là tìm thời gian chuyển động t của quả bóng trong không khí. Nếu mặt đất nghiêng một góc β, thì phương trình của đường thẳng nằm trên mặt đất là $y = (\tan\beta)x$. Đường quỹ đạo của quả bóng được cho phụ thuộc vào thời gian t bởi

$$x = (V\cos\theta)t, \quad \text{và} \quad y = (V\sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2, \tag{3.39}$$

trong đó θ là góc ném, được tính theo phương ngang (không phải theo mặt đất). Chúng ta phải tìm ra với giá trị nào của t mà làm cho $y = (\tan\beta)x$, vì điều này cho ta thời gian khi đường quỹ đạo của quả bóng cắt đường thẳng trên mặt đất. Sử dụng phương trình (3.39) chúng ta tìm ra $y = (\tan\beta)x$ khi

$$t = \frac{2V}{g}(\sin\theta - \tan\beta\cos\theta). \tag{3.40}$$

(Tất nhiên phương trình này cũng có nghiệm $t = 0$). Thay giá trị này vào biểu thức của x trong phương trình (3.39) ta có

$$x = \frac{2V^2}{g}(\sin\theta\cos\theta - \tan\beta\cos^2\theta). \tag{3.41}$$

Chúng ta phải tìm giá trị cực đại của biểu thức này của x. Trường hợp giá trị này đạt cực đại cũng tương đương với trường hợp tầm xa của quả bóng theo phương độ dốc đạt cực đại. Cho đạo hàm theo θ bằng không, và sử dụng các công thức $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ và $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$, chúng ta tìm được $\tan\beta = -\cos 2\theta$. Điều này có thể viết lại thành $\tan\beta = -\tan(\pi/2 - 2\theta)$. Do đó, $\beta = -(\pi/2 - 2\theta)$, vì vậy ta có

$$\theta = \frac{1}{2}(\beta + \pi/2). \tag{3.42}$$

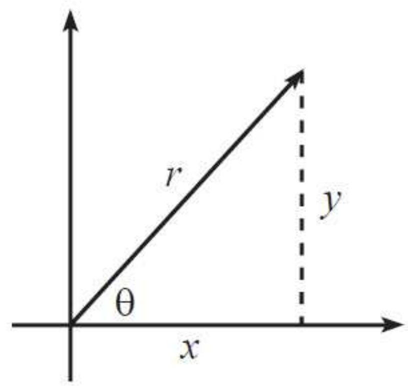
Nói cách khác, góc ném tối ưu sẽ là góc theo phương đường phân giác của góc hợp bởi giữa phương của mặt đất và phương thẳng đứng.

NHẬN XÉT:

1. Với $\beta \approx \pi/2$, ta có $\theta \approx \pi/2$, đây là giá trị phù hợp với thực tế. Với $\beta = 0$, ta có $\theta = \pi/4$, chúng ta đã tìm được giá trị này ở phần (a). Và với $\beta \approx -\pi/2$, ta có $\theta \approx 0$, phù hợp với thực tế.
2. Một phương pháp nhanh hơn để tìm được thời gian trong phương trình (3.40) là như sau. Xét hệ trục tọa độ là các trục song song và vuông góc với mặt đất; gọi các trục này là x' và y'. Vận tốc ban đầu theo phương y' là $V\sin(\theta - \beta)$, và gia tốc của quả bóng theo phương này là $g\cos\beta$. Thời gian chuyển động của quả bóng trong không khí là gấp đôi thời gian đưa quả bóng lên độ cao lớn nhất so mặt đất (được tính toán theo chiều y'), là thời điểm khi vận tốc tức thời theo phương y' là bằng không. Do đó thời gian tổng cộng mà quả bóng chuyển động trong không khí là $2V\sin(\theta - \beta)/(g\cos\beta)$, bạn có thể chỉ ra là thời gian này tương đương với thời gian trong phương trình (3.40). Chú ý rằng gia tốc $g\sin\beta$ theo phương x' không liên quan gì đến việc tính toán thời gian chuyển động của quả bóng này. Trong ví dụ này, việc sử dụng hệ tọa độ mặt phẳng nghiêng không giúp chúng ta bớt được nhiều thời gian tính toán, nhưng trong một số trường hợp (xem Bài tập 3.50) việc sử dụng hệ tọa độ mặt phẳng nghiêng sẽ giúp ích rất nhiều.
3. Một thực tế rất thú vị về chuyển động của quả bóng trong trường hợp nó đạt tầm xa lớn nhất đó là các vận tốc ban đầu và vận tốc cuối vuông góc với nhau. Đây sẽ là vấn đề trong Bài tập 3.16.
4. Thay giá trị của θ từ phương trình (3.42) vào phương trình (3.41), bạn có thể chỉ ra (sau khi biến đổi một chút) rằng tầm xa lớn nhất theo phương mặt đất là
$$d = \frac{x}{\cos\beta} = \frac{V^2/g}{1+\sin\beta}. \tag{3.43}$$
Giải ra theo V, ta có $V^2 = g(d + d\sin\beta)$. Kết quả này có thể suy ra rằng vận tốc nhỏ nhất phải ném để một quả bóng vượt qua được một bức tường có độ cao h, có khoảng cách L, so với mặt đất, được cho bởi $V^2 = g(\sqrt{L^2+h^2} + h)$. Kết quả này có thể dễ dàng được kiểm tra trong trường hợp giới hạn khi $h \to 0$ và $L \to 0$.
5. Rất nhiều kết quả về chuyển động ném xiên có thể tìm trong Buckmaster (1985). ♣

Cùng với ví dụ bắn đạn đã đề cập ở trên, một ví dụ cổ điển khác về chuyển động độc lập theo phương x và phương y là bài toán "người đi săn và con khỉ". Trong đó, một người đi săn chĩa một mũi tên (dĩ nhiên là một mũi tên đồ chơi) vào một con khỉ đang đu trên một cành cây. Con khỉ, mà nó nghĩ là nó thông minh, cố tránh mũi tên bằng cách rời tay khỏi cành cây ngay khi nó thấy mũi tên được bắn ra. Và hệ quả của việc làm này là con khỉ *sẽ* bị trúng tên, bởi vì trọng lực tác dụng lên con khỉ và mũi tên là như nhau; cả hai sẽ rơi cùng một khoảng cách so với vị trí của chúng trong trường hợp chúng ta giả sử là không có trọng lực. Và trong trường hợp không có trọng lực này thì con khỉ *sẽ* bị trúng tên, vì mũi tên ban đầu đang được chĩa vào nó. Bạn có thể làm bài toán này trong Bài tập 3.44, trong một mô hình đỡ bạo lực hơn khi thay con khỉ thành một trái cây nào đó.

3.5 Chuyển động trong một mặt phẳng, các tọa độ cực



Hình 3.7:

Khi xét các bài toán mà vật chuyển động trong một mặt phẳng, sẽ tiện lợi hơn nếu chúng ta sử dụng hệ tọa độ cực, r và θ. Hệ tọa độ này liên hệ với các tọa độ Đề Các bởi (xem Hình 3.7)

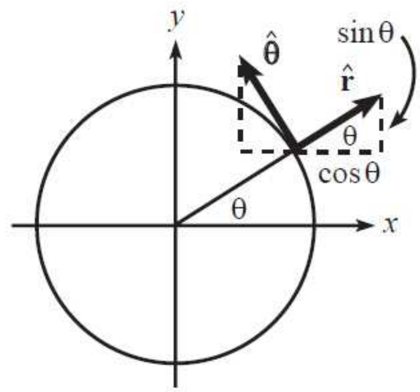
$$x = r\cos\theta, \quad \text{và} \quad y = r\sin\theta. \tag{3.44}$$

Tùy vào bài toán, việc sử dụng một trong hai tọa độ này sẽ giúp giải bài toán một cách dễ dàng hơn so với việc sử dụng hệ tọa độ kia. Thông thường từ các cơ cấu đã cho, chúng ta có thể dễ dàng biết được hệ tọa độ nào sẽ tốt hơn. Ví dụ như, nếu bài toán liên quan đến chuyển động tròn, thì tọa độ cực là lựa chọn tốt hơn. Nhưng để dùng hệ tọa độ cực, chúng ta cần phải biết định luật thứ hai của Newton được viết như thế nào trong hệ tọa độ này. Do đó, mục tiêu của mục này là xác định xem phương trình $\mathbf{F} = m\mathbf{a} \equiv m\ddot{\mathbf{r}}$ sẽ có dạng thế nào khi được viết trong hệ tọa độ cực.

Tại vị trí có tọa độ $\mathbf{r}$ trong mặt phẳng, các vector cơ sở của hệ tọa độ cực là $\hat{\mathbf{r}}$, là một vector có độ dài đơn vị chỉ theo phương bán kính hướng vào gốc tọa độ; và $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, là vector có độ dài đơn vị chỉ theo phương tiếp tuyến của chuyển động khi quay vector $\mathbf{r}$ theo chiều ngược chiều kim đồng hồ. Trong tọa độ cực, các vector có thể được viết như sau

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}. \tag{3.45}$$

Do mục đích của phần này là tìm $\ddot{\mathbf{r}}$, và từ phương trình (3.45), chúng ta sẽ phải xét đạo



Hình 3.8:

hàm của $\hat{\mathbf{r}}$ theo thời gian. Và cuối cùng chúng ta cũng sẽ cần đạo hàm của $\hat{\boldsymbol{\theta}}$. Trái ngược với hệ tọa độ Đề Các khi các vector cơ sở ($\hat{\mathbf{x}}$ và $\hat{\mathbf{y}}$) là không đổi, thì các vector cơ sở của hệ tọa độ cực ($\hat{\mathbf{r}}$ và $\hat{\boldsymbol{\theta}}$) sẽ thay đổi đối với mỗi điểm trong mặt phẳng. Chúng ta có thể tìm $\dot{\hat{\mathbf{r}}}$ và $\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}$ theo cách như sau. Khi biểu diễn qua các vector cơ sở của hệ tọa độ Đề Các, Hình 3.8 chỉ ra rằng

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{r}} &= \cos\theta\hat{\mathbf{x}} + \sin\theta\hat{\mathbf{y}}, \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} &= -\sin\theta\hat{\mathbf{x}} + \cos\theta\hat{\mathbf{y}}. \end{aligned} \tag{3.46}$$

Lấy đạo hàm theo thời gian của các phương trình trên ta có

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{r}}} &= -\sin\theta\dot{\theta}\hat{\mathbf{x}} + \cos\theta\dot{\theta}\hat{\mathbf{y}}, \\ \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} &= -\cos\theta\dot{\theta}\hat{\mathbf{x}} - \sin\theta\dot{\theta}\hat{\mathbf{y}}. \end{aligned} \tag{3.47}$$

Sử dụng phương trình (3.46), chúng ta đi đến một biểu thức gọn hơn

$$\dot{\hat{\mathbf{r}}} = \dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}, \quad \text{và} \quad \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = -\dot{\theta}\hat{\mathbf{r}}. \tag{3.48}$$

Các hệ thức này hoàn toàn dễ thấy nếu bạn xem xét cái gì sẽ xảy ra với các vector cơ sở khi $\mathbf{r}$ dịch chuyển một khoảng rất nhỏ theo phương tiếp tuyến. Chú ý rằng các vector cơ sở không thay đổi khi $\mathbf{r}$ dịch chuyển theo phương bán kính. Bây giờ chúng ta có thể bắt đầu lấy vi phân phương trình (3.45). Đạo hàm lần thứ nhất (chúng ta sử dụng quy tắc lấy đạo hàm của hàm tích) suy ra

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\hat{\mathbf{r}}} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}. \tag{3.49}$$

Điều này hợp lý vì $\dot{r}$ là vận tốc theo phương bán kính, và $r\dot{\theta}$ là vận tốc theo phương tiếp tuyến, thường được viết là $r\omega$ (ở đây $\omega \equiv \dot{\theta}$ là vận tốc góc, hoặc "tần số góc").[17] Lấy đạo hàm phương trình (3.49) chúng ta thu được

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}} &= \ddot{r}\hat{\mathbf{r}} + \dot{r}\dot{\hat{\mathbf{r}}} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\ddot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\dot{\theta}\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} \\ &= \ddot{r}\hat{\mathbf{r}} + \dot{r}(\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}) + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\ddot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\dot{\theta}(-\dot{\theta}\hat{\mathbf{r}}) \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\mathbf{r}} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\boldsymbol{\theta}}.\end{aligned} \tag{3.50}$$

Cuối cùng, đặt $m\ddot{\mathbf{r}}$ bằng $\mathbf{F} \equiv F_r\hat{\mathbf{r}} + \mathbf{F}_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}$ sẽ cho ta các lực theo phương bán kính và theo phương tiếp tuyến như sau

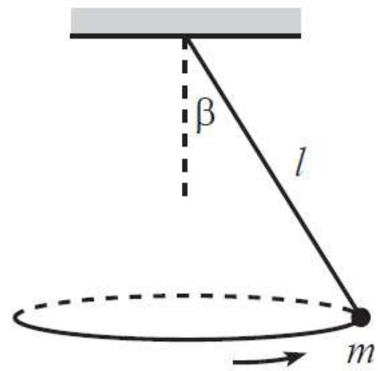
$$\begin{aligned}F_r &= m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2), \\ F_\theta &= m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}).\end{aligned} \tag{3.51}$$

(Bài tập 3.67 sẽ cho ta một cách hơi khác để nhận lại được các phương trình này.) Hãy nhìn vào mỗi một trong bốn số hạng của vế phải trong các phương trình của (3.51).

- Số hạng $m\ddot{r}$ khá là trực quan. Với chuyển động theo phương bán kính, nó đơn giản thể hiện $F = ma$ dọc theo phương bán kính.
- Số hạng $mr\ddot{\theta}$ cũng khá là trực quan. Với chuyển động tròn, nó thể hiện $F = ma$ dọc theo phương tiếp tuyến, bởi vì $r\ddot{\theta}$ là đạo hàm cấp hai của khoảng cách $r\theta$ dọc theo chu vi đường tròn.
- Số hạng $-mr\dot{\theta}^2$ cũng khá rõ ràng. Với chuyển động tròn, nó thể hiện lực hướng tâm là $-m(r\dot{\theta})^2/r = -mv^2/r$, mà là lực quen thuộc gây ra gia tốc hướng tâm, v^2/r. Bài tập 3.20 sẽ trình bày một phương pháp khác nhanh hơn để nhận lại kết quả v^2/r này.
- Số hạng $2m\dot{r}\dot{\theta}$ thì không hiển nhiên lắm. Nó liên quan đến lực *Coriolis*. Có rất nhiều cách khác nhau để xem xét số hạng này. Một cách đó là nó tồn tại để giữ moment động lượng được bảo toàn. Chúng ta sẽ nói nhiều về lực Coriolis trong Chương 10.

Ví dụ (Con lắc đơn quay tròn): Một khối lượng được treo vào một dây không khối lượng độ dài ℓ. Cơ cấu được thiết lập sao cho khối lượng chuyển động theo một đường tròn nằm ngang và dây tạo với trục thẳng đứng một góc β không đổi (xem Hình 3.9). Tần số góc ω của chuyển động này là bao nhiêu?

[17]Với $r\dot{\theta}$ là vận tốc theo phương tiếp tuyến, chúng ta phải đo θ dưới đơn vị là radian chứ không phải là độ. Khi đó $r\theta$ theo định nghĩa sẽ là vị trí của vật dọc theo chu vi của đường tròn và do đó $r\dot{\theta}$ là vận tốc dọc theo chu vi đường tròn.

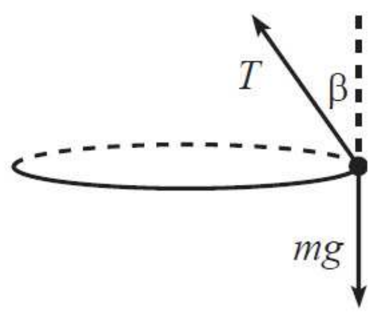


Hình 3.9:

Lời giải: Khối lượng chuyển động theo một đường tròn, do đó lực hướng tâm của chuyển động tròn này là $F_r = mr\dot{\theta}^2 \equiv mr\omega^2$ (với $r = l\sin\beta$), chiều của lực hướng vào trong. Các lực tác dụng lên khối lượng là lực căng của dây, T, và trọng lực mg (xem Hình 3.10). Khối lượng không có gia tốc theo phương thẳng đứng, vậy $F = ma$ theo phương thẳng đứng và phương bán kính tương ứng là,

$$\begin{aligned} T\cos\beta - mg &= 0, \\ T\sin\beta &= m(\ell\sin\beta)\omega^2. \end{aligned} \tag{3.52}$$

Giải ra ω ta có



Hình 3.10:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell\cos\beta}}. \tag{3.53}$$

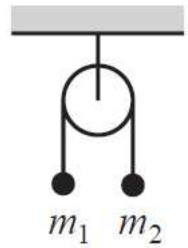
Nếu $\beta \approx 90°$, thì $\omega \to \infty$ và kết quả này là hợp lý. Và nếu $\beta \approx 0$, thì $\omega \approx \sqrt{g/\ell}$, vô tình bằng với tần số dao động của con lắc đơn có độ dài ℓ. Bài tập luyện tập 3.60 sẽ giải thích tại sao lại có kết quả này.

3.6 Bài tập

Mục 3.2: Biểu đồ vật thể tự do

3.1. Máy Atwood *

Một ròng rọc không khối lượng được treo vào một giá cố định. Một dây không khối lượng

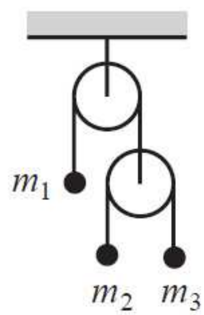


Hình 3.11:

nối hai khối lượng m_1 và m_2, vắt qua ròng rọc (xem Hình 3.11). Tìm gia tốc của các vật và sức căng của sợi dây.

3.2. Máy Atwood kép **

Một máy Atwood kép được cho như trong Hình 3.12, với các khối lượng m_1, m_2, và m_3.

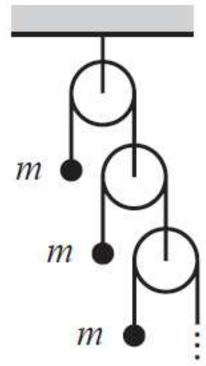


Hình 3.12:

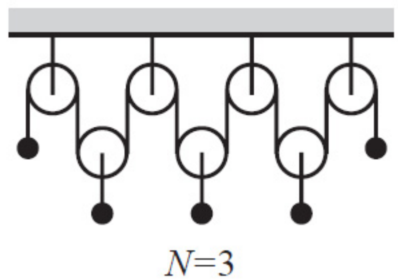
Tìm gia tốc của các vật.

3.3. Máy Atwood vô hạn ***

Xét máy Atwood vô hạn được cho như trong Hình 3.13. Trên mỗi một ròng rọc có một sợi dây vắt qua với một đầu gắn với một khối lượng và một đầu còn lại gắn với ròng rọc khác. Các khối lượng đều có khối lượng là m, và các ròng rọc và các sợi dây dây là không khối lượng. Các khối lượng được giữ cố định và sau đó được thả ra đồng thời. Hãy tìm gia tốc của khối lượng trên cùng? (Bạn có thể coi hệ vô hạn này như sau. Hãy coi nó được tạo từ N ròng rọc, với một khối lượng khác không nào đó ở vị trí của ròng rọc thứ $(N+1)$. Sau đó lấy giới hạn khi $N \longrightarrow \infty$.)



Hình 3.13:



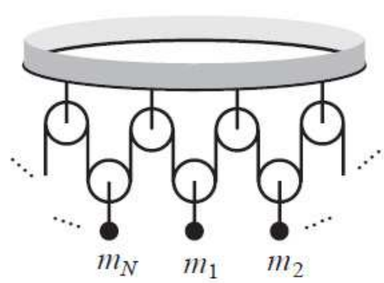
Hình 3.14:

3.4. Dãy các ròng rọc *

$N + 2$ các khối lượng bằng nhau được treo vào một hệ các ròng rọc, như được chỉ ra trong Hình 3.14. Hỏi gia tốc của các khối lượng là bao nhiêu ?

3.5. Vòng tròn các ròng rọc **

Xét một hệ các ròng rọc được cho như trong Hình 3.15. Sợi dây (có hai đầu được nối vào



Hình 3.15:

nhau) vắt trên N ròng rọc được gắn bên dưới một vòng tròn. N khối lượng $m_1, m_2, \ldots, m_n$ được gắn vào N ròng rọc khác cũng được treo vào sợi dây trên. Hỏi gia tốc của các khối lượng là bao nhiêu ?

3.6. Trượt xuống một mặt phẳng nghiêng **

(a) Một vật bắt đầu ở trạng thái nghỉ và trượt xuống một mặt phẳng nghiêng không ma sát nghiêng một góc θ. Hỏi góc θ bằng bao nhiêu để vật dịch chuyển một khoảng cách theo phương ngang cho trước trong thời gian nhỏ nhất?

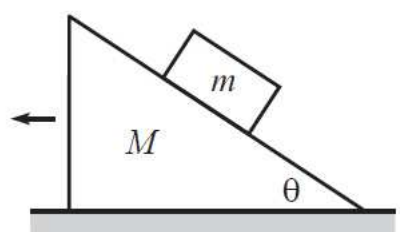
(b) Giống câu hỏi như trên, nhưng giờ chúng ta xét trường hợp có hệ số ma sát động μ giữa vật và mặt phẳng nghiêng.

3.7. Trượt ngang trên một mặt phẳng nghiêng***

Một vật được đặt trên một mặt phẳng nghiêng một góc θ. Hệ số ma sát giữa vật và mặt phẳng nghiêng là $\mu = \tan\theta$. Vật chịu một tác động để ban đầu nó chuyển động với vận tốc là V theo phương ngang trên mặt phẳng nghiêng (nghĩa là, theo phương vuông góc với chiều hướng thẳng đứng xuống mặt phẳng nghiêng). Hỏi vận tốc của vật sau một thời gian dài là bao nhiêu ?

3.8. Mặt phẳng nghiêng chuyển động***

Một khối lượng m được giữ đứng yên trên một mặt phẳng nghiêng không ma sát có khối



Hình 3.16:

lượng M và có góc nghiêng θ (xem Hình 3.16). Mặt phẳng nghiêng đứng yên trên bề mặt ngang nhẵn. Sau đó khối lượng m được thả ra. Hỏi gia tốc theo phương ngang của mặt phẳng nghiêng là bao nhiêu ?

Mục 3.3: Giải phương trình vi phân

3.9. Lực hàm mũ *

Một chất điểm khối lượng m chịu tác động của một lực $F(t) = ma_0e^{-bt}$. Vị trí và vận tốc ban đầu của nó bằng không. Tìm $x(t)$?

3.10. Lực dạng $-kx$ **

Một chất điểm khối lượng m chịu tác dụng của một lực $F(x) = -kx$, với $k > 0$. Vị trí ban đầu của chất điểm là x_0, và vận tốc ban đầu bằng không. Tìm $x(t)$?

3.11. Sợi xích rơi **

Một sợi xích dài ℓ được giữ căng trên mặt bàn nằm ngang không ma sát, với chiều dài y_0 được thả thõng xuống qua một lỗ trên mặt bàn. Sau đó sợi xích được thả ra. Tìm độ dài thõng xuống của sợi xích như là một hàm của thời gian (không cần phải xét trường hợp của t sau khi sợi xích mất liên kết với bàn). Hơn nữa, tìm vận tốc của sợi xích ngay khi nó mất liên kết với bàn.[18]

3.12. Ném một quả bóng ***

Một quả bóng được ném lên trên với vận tốc ban đầu v_0. Giả sử rằng lực cản của không khí là $F_\mathrm{d} = -m\alpha v$. Hỏi vận tốc của quả bóng, v_f, là bao nhiêu ngay trước khi nó chạm đất? (Kết quả được cho dưới dạng một phương trình dạng ẩn là đủ.) Quả bóng sẽ chuyển động trong không khí lâu hơn hay nhanh hơn so với trường hợp nó được ném trong môi trường chân không?

3.13. Cân bằng bút chì ***

Một bút chì ban đầu đứng thẳng trên đầu ngòi bút của nó và sau đó đổ xuống. Xét mô hình lý tưởng của bút chì này là một khối lượng m đặt ở đỉnh của một thanh không khối lượng dài ℓ.[19]

1. Giả sử rằng bút tạo một góc ban đầu (nhỏ) θ_0 so với trục thẳng đứng, và vận tốc góc ban đầu là ω_0. Góc nghiêng sẽ lớn dần, nhưng khi góc nghiêng là nhỏ (sao cho chúng ta có thể xấp xỉ $\sin\theta \approx \theta$), góc θ là một hàm như thế nào của thời gian?

2. Bạn nghĩ rằng là có thể (ít nhất là về mặt lý thuyết) làm bút chì cân bằng với một khoảng thời gian dài tùy ý, bằng cách tạo θ_0 và ω_0 ban đầu đủ nhỏ. Tuy nhiên, do nguyên lý bất định của Heisenberg (mà với việc cho một liên kết, chúng ta có thể biết gì về vị trí và động lượng của một chất điểm), sẽ là không thể để cân bằng một bút chì trong một khoảng thời gian lâu hơn một khoảng thời gian giới hạn nào đó. Vấn đề là bạn không thể chắc rằng bút chì ban đầu vừa đang ở vị trí thẳng đứng *lại vừa* đứng yên. Mục đích của bài toán này là xem xét một cách định lượng vấn đề này. Chắc chắn rằng thời gian giới hạn trên sẽ làm bạn bất ngờ.

   Không đi sâu vào cơ học lượng tử, chúng ta chỉ có thể nói rằng nguyên lý bất định cho rằng (với các hệ số chính xác tới bậc nhất) $\Delta x \Delta p \geq \hbar$, với $\hbar = 1.05.10^{-34}$ Js là hằng số Planck. Ý nghĩa của điều này có phần mơ hồ, nhưng chúng ta sẽ dùng nó với mục đích là cho các điều kiện ban đầu thỏa mãn $(\ell\theta_0)(m\ell\omega_0) \geq \hbar$. Và với điều kiện này, việc của bạn là phải tìm thời gian lớn nhất sao cho nghiệm $\theta(t)$ của bạn trong phần (a) có độ lớn ở dạng bậc nhất. Nói cách khác, xác định (một cách đại

[18] Giả sử rằng lỗ trên mặt bàn thực ra là một ống không ma sát được uốn dần dần thành một góc vuông, sao cho động lượng theo phương ngang của sợi xích không làm sợi xích bị bắn ngang qua lỗ. Muốn biết thêm về hiện tượng này trong một bài toán tương tự nhưng không có giả thiết trên, xem Calkin (1989).

[19] Thực ra bài toán dạng này để giải chính xác thì phải xét đến cả moment quán tính của bút chì và moment lực. Tuy nhiên với mô hình đơn giản một khối lượng chất điểm này cũng là đủ để giải bài toán này.

khái) thời gian lớn nhất mà bút chì có thể cân bằng. Giả sử rằng $m = 0.01$ kg và $\ell = 0.1$ m.

Mục 3.4: Ném xiên

3.14. Diện tích quỹ đạo lớn nhất *

Một quả bóng được ném với vận tốc v từ mặt đất. Hỏi góc ném phải bằng bao nhiêu sao cho diện tích dưới đường quỹ đạo là lớn nhất ?

3.15. Bóng nảy *

Một quả bóng được ném thẳng lên trên sao cho nó đạt độ cao h. Nó rơi xuống và nảy lên và quá trình này lặp lại nhiều lần. Sau mỗi lần nảy lên, nó sẽ đạt được một độ cao tỷ lệ với tỷ số f so với độ cao của lần nảy trước của nó. Tìm tổng quãng đường di chuyển được của quả bóng, và tổng thời gian, trước khi nó đứng yên. Vận tốc trung bình của nó trong suốt quá trình này là bao nhiêu?

3.16. Các vận tốc trực giao **

Trong trường hợp có tầm xa lớn nhất ở phần (b) trong ví dụ của Mục 3.4, hãy chỉ ra rằng vận tốc ban đầu và vận tốc cuối là vuông góc với nhau.[20]

3.17. Ném quả bóng từ vách đá **

Một quả bóng được ném với vận tốc v từ mép của một vách đá có độ cao h. Hỏi góc ném là bao nhiêu để tầm xa của quả bóng là lớn nhất? Giá trị của tầm xa lớn nhất đó là bao nhiêu? Giả sử mặt đất dưới vách đá là nằm ngang.

3.18. Chuyển hướng chuyển động **

Một quả bóng rơi từ trạng thái tĩnh từ độ cao h trên mặt đất, và nó va chạm và nảy ra với một bề mặt ở độ cao y (sau va chạm tốc độ quả bóng không thay đổi). Bề mặt được đặt nghiêng một góc nào đó sao cho sau va chạm quả bóng sẽ nảy ra theo phương nghiêng một góc θ so với phương nằm ngang. Hỏi giá trị của y và θ là bao nhiêu để bóng đạt được tầm xa lớn nhất khi nó chạm đất?

3.19. Độ dài đường quỹ đạo lớn nhất ***

Một quả bóng được ném với vận tốc v từ mặt đất. Gọi θ_0 là góc mà quả bóng được ném để chiều dài của đường quỹ đạo của nó là lớn nhất. Hãy chỉ ra rằng θ_0 thỏa mãn

$$\sin\theta_0 \ln\left(\frac{1+\sin\theta_0}{\cos\theta_0}\right) = 1. \tag{3.54}$$

[20] Bạn có thể giải kỹ càng bài toán này và tìm ra giá trị của góc của vận tốc cuối, nhưng có một cách làm nhanh hơn. Cách làm này sẽ sử dụng định lý bảo toàn năng lượng mà sẽ cho chúng ta biết là hiệu của bình phương của vận tốc ban đầu và vận tốc cuối sẽ chỉ phụ thuộc vào độ cao (thực ra chúng ta có $v_{\mathrm{i}}^2 - v_{\mathrm{f}}^2 = 2gh$, nhưng bạn không cần phải sử dụng biểu thức chính xác này). *Gợi ý:* Hãy xét đường quỹ đạo ngược.

Bạn có thể tính toán bằng số là $\theta_0 \approx 56.5°$.

Phần 3.5: Chuyển động trong một mặt phẳng, các tọa độ cực

3.20. Gia tốc hướng tâm *

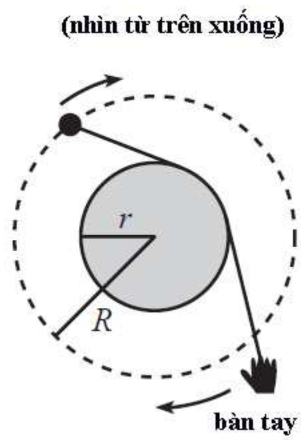
Chỉ ra rằng độ lớn của gia tốc của chất điểm chuyển động trong một vòng tròn với vận tốc không đổi là v^2/r. Thực hiện việc này bằng cách vẽ vector vị trí và vector vận tốc ở hai thời điểm gần nhau, và sau đó sử dụng các tam giác đồng dạng.

3.21. Gia tốc thẳng đứng **

Một chất điểm đứng yên trên đỉnh một vành cố định không ma sát bán kính R nằm trong một mặt phẳng thẳng đứng. Chất điểm chịu tác động của một lực đẩy rất nhỏ để nó trượt xuống vòng quanh vành. Tại điểm nào trên vành thì gia tốc của chất điểm sẽ có có phương thẳng đứng.[21] Gia tốc thẳng đứng này là bao nhiêu? *Chú ý*: Ta chưa nghiên cứu định luật bảo toàn năng lượng cho đến thời điểm này, nhưng bạn có thể sử dụng một tính chất là chất điểm có vận tốc sau khi nó rơi từ độ cao h là $v = \sqrt{2gh}$.

3.22. Quay tròn quanh một cột **

Một vật chuyển động trên một bề mặt nằm ngang không ma sát, vật được gắn vào



Hình 3.17:

đầu một sợi dây không khối lượng mà dây được cuốn một phần xung quanh một cột thẳng đứng không ma sát bán kính r (cơ cấu đã cho được nhìn từ trên xuống như trong Hình 3.17). Bạn giữ đầu kia của sợi dây. Tại thời điểm $t = 0$, vật có vận tốc v_0 theo phương tiếp tuyến dọc đường tròn đứt đoạn bán kính R. Nhiệm vụ của bạn là kéo dây để vật giữ chuyển động dọc đường tròn đứt đoạn. Bạn phải làm điều này theo cách sao cho dây vẫn luôn tiếp xúc với cột. (Tất nhiên tay bạn phải chuyển động xung quanh cột.)

[21]Một điểm có tính chất này là đáy của vành tròn. Điểm khác là đỉnh của vành khi gia tốc $a \approx 0$. Hãy tìm hai điểm khác nữa (nằm trên mỗi bên của vành).

Tìm vận tốc của vật như một hàm của thời gian? Có một giá trị đặc biệt của thời gian; đó là tại thời điểm nào và tại sao nó đặc biệt?

3.23. Một lực $F_\theta = m\dot{r}\dot{\theta}$ **

Xét một chất điểm chịu một lực là hàm của góc cực có dạng $F_\theta = m\dot{r}\dot{\theta}$. Hãy chỉ ra rằng $\dot{r} = \sqrt{A\ln r + B}$, trong đó A và B là các hằng số tích phân, được xác định từ các điều kiện đầu. (Không có ý nghĩa vật lý gì về lực này. Nó đơn giản là một lực mà phương trình $F = ma$ có thể giải được.)

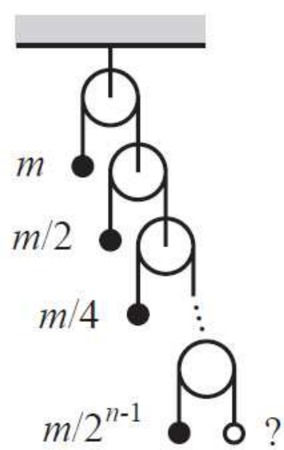
3.24. Chất điểm tự do ***

Xét một chất điểm tự do trong một mặt phẳng. Với hệ tọa độ Đề Các, sẽ dễ dàng khi dùng phương trình $F = ma$ để chỉ ra rằng chất điểm chuyển động theo một đường thẳng. Mục đích của bài toán này là chứng minh lại kết quả này theo một cách phức tạp hơn nhiều, sử dụng các tọa độ cực và phương trình (3.51). Chính xác hơn, hãy chỉ ra rằng $\cos\theta = r_0/r$ cho chất điểm tự do, trong đó r_0 là bán kính của chất điểm tại vị trí gần nhất đối với gốc cực, và θ là góc được tính so với bán kính tại vị trí gần nhất trên.

3.7 Bài tập luyện tập

Mục 3.2: Biểu đồ vật thể tự do

3.25. Một máy Atwood kỳ lạ

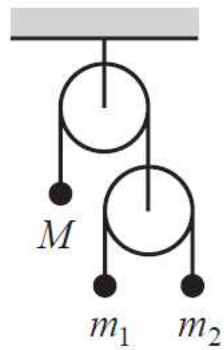


Hình 3.18:

(a) Máy Atwood trong Hình 3.18 gồm n khối lượng, $m, m/2, m/4, \ldots, m/2^{n-1}$. Các ròng rọc và các sợi dây là không khối lượng. Đặt một khối lượng $m/2^{n-1}$ vào đầu tự do của sợi dây thấp nhất. Gia tốc của các khối lượng là bao nhiêu?

(b) Loại bỏ khối lượng $m/2^{n-1}$ (sẽ là nhỏ tùy ý, với n đủ lớn) mà được gắn vào dây ở phần (a). Gia tốc của các khối lượng là bao nhiêu, khi bạn đã bỏ khối lượng rất nhỏ này?

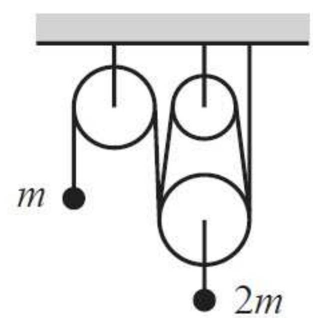
3.26. Giữ khối lượng đứng yên *



Hình 3.19:

Trong máy Atwood ở Hình 3.19, khối lượng M phải bằng bao nhiêu, theo m_1 và m_2, để nó không chuyển động?

3.27. Máy Atwood 1 *

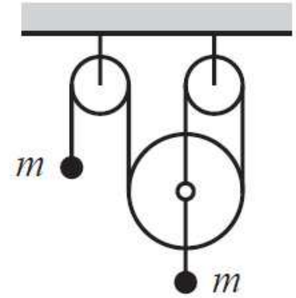


Hình 3.20:

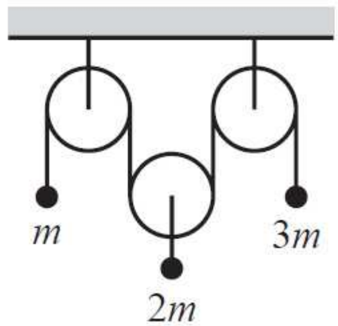
Xét máy Atwood như trong Hình 3.20. Nó chứa ba ròng rọc, một đoạn dây ngắn nối một khối lượng với ròng rọc thấp nhất, và một đoạn dây dài liên tục cuốn hai lần quanh mặt dưới của ròng rọc thấp nhất, và một lần quanh mặt trên của hai ròng rọc trên. Hai khối lượng là m và $2m$. Giả sử các phần dây nối các ròng rọc được coi là thẳng đứng. Tìm gia tốc của các khối lượng.

3.28. Máy Atwood 2 *

Xét máy Atwood như trong Hình 3.21, với hai khối lượng m. Trục của ròng rọc dưới cùng có hai đầu dây nối tới nó, như đã được chỉ ra trong hình vẽ. Tìm gia tốc của các khối lượng.



Hình 3.21:

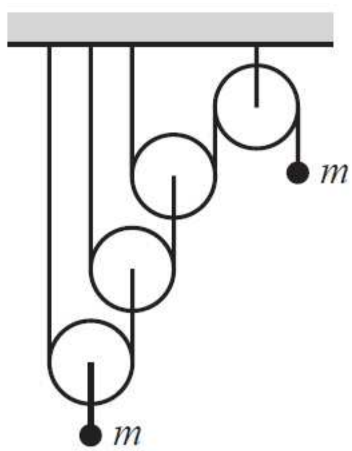


Hình 3.22:

3.29. Máy Atwood 3 *

Xét máy Atwood như trong Hình 3.22, với các khối lượng m, $2m$, và $3m$. Tìm gia tốc của các khối lượng.

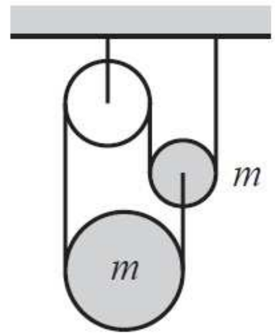
3.30. Máy Atwood 4 **



Hình 3.23:

Xét máy Atwood như trong Hình 3.23. Nếu số ròng rọc có dây quấn bên dưới chúng là N thay vì 3 như trong hình vẽ, tìm gia tốc của các khối lượng.

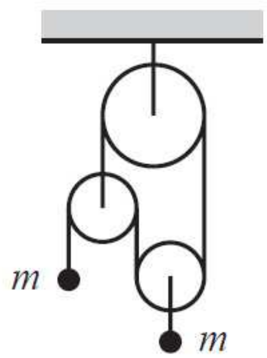
3.31. Máy Atwood 5 **



Hình 3.24:

Xét máy Atwood như trong Hình 3.24. Hai ròng rọc được tô mầu tối có khối lượng m, và dây trượt *không ma sát* dọc theo tất cả các ròng rọc (vì vậy bạn không cần phải chú ý đến chuyển động quay). Tìm gia tốc của hai ròng rọc được tô đen.

3.32. Máy Atwood 6 **

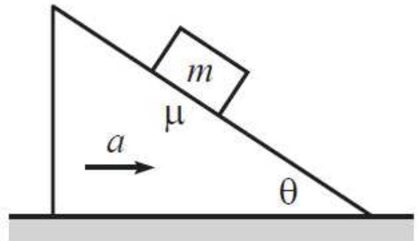


Hình 3.25:

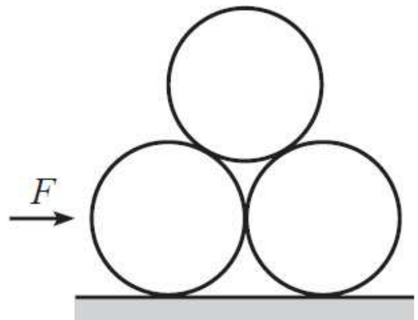
Xét máy Atwood như trong Hình 3.25. Tìm gia tốc của các khối lượng. (Đây là một máy Atwood kỳ lạ.)

3.33. Mặt phẳng nghiêng có gia tốc **

Một vật khối lượng m nằm yên trên trên một mặt phẳng nghiêng góc θ. Hệ số ma sát tĩnh giữa vật và mặt phẳng là μ. Mặt phẳng nghiêng chuyển động sang bên phải với gia tốc a (có thể âm); xem Hình 3.26. Với khoảng giá trị nào của gia tốc a sao cho vật vẫn đứng yên so với mặt phẳng? Có hai giá trị đặc biệt của θ mà được biểu diễn qua μ; hai giá trị này là bao nhiêu, và tại sao chúng lại đặc biệt?



Hình 3.26:



Hình 3.27:

3.34. Các hình trụ có gia tốc **

Ba hình trụ giống nhau được sắp xếp thành một tam giác như chỉ ra trong Hình 3.27 với hai hình trụ bên dưới nằm trên mặt đất. Mặt đất và các hình trụ là không ma sát. Bạn tác dụng một lực không đổi theo chiều ngang (hướng sang phải) vào hình trụ bên trái. Gọi a là gia tốc bạn truyền cho hệ. Với khoảng giá trị nào của a sao cho ba hình trụ vẫn tiếp xúc với nhau?

3.35. Rời khối cầu **

Một vật nhỏ đứng yên trên đỉnh của một khối cầu cố định bán kính R. Hệ số ma sát là μ. Vật được truyền một tác động sang bên sao cho nó có vận tốc góc ban đầu là ω_0. Gọi θ là góc lăn xuống từ đỉnh của khối cầu. Hãy viết phương trình $F = ma$ theo phương tiếp tuyến phụ thuộc vào θ và đạo hàm của nó? Tùy thuộc vào giá trị của ω_0, vật có thể sẽ dừng lại trên khối cầu hoặc bay ra khỏi nó. Nếu $g = 10\text{m/s}^2$, $R = 1\text{m}$, và $\mu = 1$, viết một chương trình tính toán số xác định giá trị ω_0 nhỏ nhất để vật rời khỏi khối cầu. Với trường hợp tới hạn này, xác định góc mà ở đó vật không tiếp xúc với khối cầu nữa, và miêu tả (một cách đại khái) đồ thị của $\dot{\theta}$ đối với θ. Xem Prior và Mele (2007) với nghiệm chính xác của $\dot{\theta}$ theo θ.

3.36. So sánh thời gian ***

Một vật khối lượng m được phóng lên theo bề mặt của một mặt phẳng nghiêng góc θ. Vận tốc ban đầu là v_0, và hệ số ma sát tĩnh và động cùng bằng μ. Vật lên tới điểm cao nhất rồi trượt xuống điểm ban đầu.

(a) Chỉ ra rằng để cho vật trượt xuống thay vì vẫn đứng yên ở điểm cao nhất, thì $\tan\theta$ phải lớn hơn μ.

(b) Giả sử rằng $\tan\theta > \mu$, hỏi tổng thời gian đi lên và đi xuống của vật nhiều hơn hay ít hơn tổng thời gian nó chuyển động như vậy trong trường hợp mặt phẳng là không có ma sát? Câu trả lời có phụ thuộc gì vào giá trị của θ và μ không?

(c) Giả sử rằng $\tan\theta > \mu$, chỉ ra rằng với θ cho trước thì giá trị của μ để tổng thời gian chuyển động của vật nhỏ nhất là $\mu \approx (0.397)\tan\theta$. (Bạn sẽ cần phải giải cái gì đó bằng phương pháp số.) Thời gian nhỏ nhất này bằng khoảng 90% thời gian vật chuyển động nếu mặt phẳng là không ma sát.

Mục 3.3: Giải phương trình vi phân

3.37. Lực $-bv^2$ *

Một chất điểm khối lượng m chịu tác dụng của một lực $F(v) = -bv^2$. Vị trí ban đầu bằng không, và vận tốc ban đầu là v_0. Tìm $x(t)$.

3.38. Lực kx **

Một chất điểm khối lượng m chịu tác dụng của một lực $F = kx$, với $k > 0$. Vị trí ban đầu là x_0, và vận tốc ban đầu là không. Tìm $x(t)$.

Mục 3.4: Ném xiên

3.39. Các khoảng cách bằng nhau *

Với góc ném bằng bao nhiêu thì quả bóng được ném ra sẽ có độ cao lớn nhất của nó bằng với tầm xa?

3.40. Chuyển hướng chuyển động *

Một quả bóng được thả rơi từ trạng thái tĩnh ở độ cao h. Tại độ cao y, nó nảy vào một mặt phẳng mà sau va chạm tốc độ của nó không đổi. Mặt phẳng nghiêng góc 45°, vì vậy quả bóng sau va chạm sẽ nảy ra theo phương ngang. Hỏi y phải bằng bao nhiêu để quả bóng chuyển động sau va chạm có tầm xa lớn nhất? Tầm xa lớn nhất đó là bao nhiêu?

3.41. Ném bóng trong gió *

Một quả bóng được ném theo phương ngang sang phải, từ đỉnh của một vách đá có độ cao h. Gió thổi theo phương ngang sang bên trái, và giả sử (một cách đơn giản) rằng ảnh hưởng của gió là tạo ra một lực không đổi sang bên trái, có độ lớn bằng trọng lượng quả bóng. Quả bóng được ném với tốc độ ban đầu bằng bao nhiêu để nó sẽ rơi tại chân của vách đá?

3.42. Ném bóng trong gió nữa *

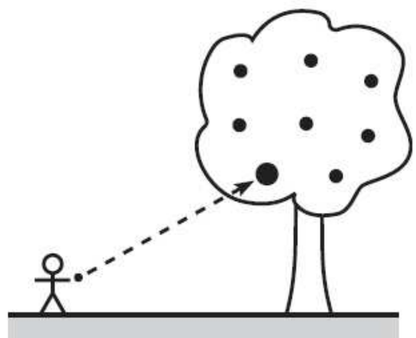
Một quả bóng được ném về phía Đông trên một bề mặt đất phẳng. Gió thổi theo phương ngang về phía Đông, và giả sử (một cách đơn giản) rằng tác động của gió là tạo ra một lực không đổi về phía Đông, có độ lớn bằng trong lượng của quả bóng. Hỏi quả bóng phải được ném với góc nghiêng θ bằng bao nhiêu để nó đạt được tầm xa lớn nhất?

3.43. Trọng lực tăng dần *

Tại $t = 0$ trên hành tinh Gravitus Increasicus, một tên lửa được bắn ra với vận tốc v_0 theo một góc θ so với phương nằm ngang. Hành tinh này là một hành tinh kì lạ, trong đó gia tốc gây ra do trọng lực tăng tuyến tính với thời gian, bắt đầu bằng không tại thời điểm tên lửa được bắn ra. Nói cách khác, $g(t) = \beta t$, ở đó β là hằng số cho trước. Hỏi tầm xa mà tên lửa chuyển động là bao nhiêu? Góc θ là bao nhiêu để tầm xa này là lớn nhất?

3.44. Quả táo Newton *

Newton đã chán ngán với những quả táo rơi lên đầu ông ấy, vì vậy ông quyết định ném

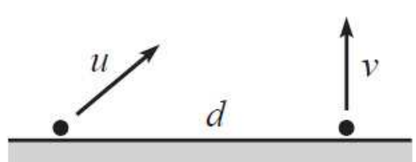


Hình 3.28:

một hòn đá vào một trong những quả táo lớn và có vẻ nguy hiểm nằm ngay trên chỗ ngồi yêu thích của ông. Do quên những kết quả về trọng lực của mình, ông đã ngắm ném hòn đá hướng thẳng vào quả táo (xem Hình 3.28). Khá là bất ngờ, quả táo lại rơi khỏi cây ngay khi ông ném hòn đá. Bằng cách tính toán độ cao của hòn đá khi nó đạt vị trí ngang bằng với quả táo, hãy chỉ ra rằng hòn đá sẽ trúng quả táo.[22]

3.45. Sự va chạm các vật được bắn ra *

Hai quả bóng được ném lên từ mặt đất từ các vị trí cách nhau một khoảng là d. Quả bên



Hình 3.29:

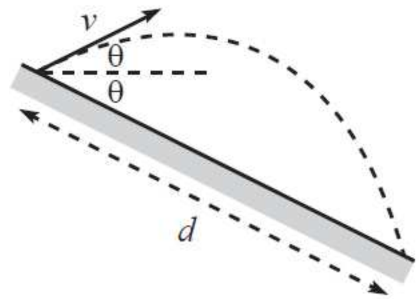
phải được ném lên theo phương thẳng đứng với vận tốc v (xem Hình 3.29). Bạn muốn

[22]Bài toán này gợi ý một cách mà William Tell và con trai của ông có thể sống sót sau sự thử thách nếu họ bị rơi xuống, mà không có thời gian để luyện tập, một hành tinh mà họ không biết gì về hằng số trọng trường của nó (với điều kiện là người con trai không quá bé hoặc hằng số g không quá lớn).

ném đồng thời quả bên trái với vận tốc phù hợp **u** sao cho nó va chạm với quả bóng bên phải khi chúng đạt vị trí cao nhất. Hỏi **u** phải bằng bao nhiêu (tính toán các thành phần nằm ngang và thẳng đứng)? Cho trước d thì giá trị của v bằng bao nhiêu để tốc độ u là nhỏ nhất?

3.46. Cùng góc nghiêng*

Một mặt phẳng nghiêng xuống dưới một góc θ so với phương ngang. Trên mặt phẳng



Hình 3.30:

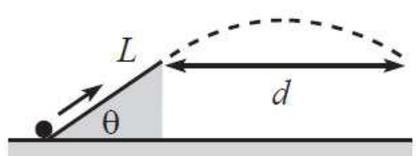
nghiêng này, một vật được ném ra với vận tốc v theo phương nghiêng một góc θ nằm trên trục nằm ngang, như đã chỉ ra trong Hình 3.30. Hỏi khoảng cách d dọc theo phương mặt phẳng nghiêng mà vật di chuyển được là bao nhiêu? Khoảng d là bao nhiêu trong trường hợp giới hạn khi $\theta \to 90°$? Hỏi góc θ bằng bao nhiêu thì vật đạt tầm xa (khoảng cách di chuyển theo phương ngang) lớn nhất?

3.47. Ném vào bức tường *

Bạn ném một quả bóng với vận tốc v_0 vào một bức tường thẳng đứng, từ một khoảng cách ℓ. Bạn phải ném quả bóng với góc nghiêng bằng bao nhiêu để nó chạm bức tường tại vị trí cao nhất có thể? Giả sử $l < v_0{}^2/g$ (vì sao?).

3.48. Bắn pháo **

Một khẩu pháo, khi chĩa thẳng đứng lên trên, sẽ bắn một đầu đạn tới độ cao lớn nhất L.



Hình 3.31:

Sau đó một đầu đạn khác được bắn với cùng vận tốc, nhưng được ngắm bắn dọc theo một mặt phẳng nghiêng có độ dài L, nghiêng một góc θ, như được chỉ ra trong Hình 3.31. Góc θ phải bằng bao nhiêu để đạn di chuyển một khoảng cách theo phương ngang lớn nhất, d, tại thời điểm nó rơi xuống một điểm có cùng độ cao so với đỉnh mặt phẳng nghiêng?

3.49. Phương vuông góc và phương ngang **

Một mặt phẳng nghiêng một góc θ xuống dưới đường thẳng nằm ngang. Một người ném một quả bóng với vận tốc v_0 từ bề mặt của mặt phẳng nghiêng. Hỏi khoảng cách dọc theo phương mặt phẳng nghiêng khi quả bóng chạm mặt phẳng nghiêng là bao nhiêu, nếu người ném quả bóng (a) theo phương vuông góc với mặt phẳng nghiêng? (b) theo phương nằm ngang?

3.50. Xe, quả bóng, và mặt phẳng nghiêng **

Một chiếc xe được giữ đứng yên trên một mặt phẳng nghiêng. Một ống được đặt trong xe sao cho trục của nó vuông góc với mặt phẳng nghiêng. Chiếc xe được thả ra, và sau đó một lúc một quả bóng được bắn ra từ ống. Hỏi cuối cùng quả bóng có rơi trở lại ống không? *Gợi ý*: Chọn hệ tọa độ phù hợp.

3.51. Vuông góc với mặt phẳng nghiêng **

Một quả đồi dốc xuống một góc β so với mặt phẳng ngang. Một vật được phóng ra với vận tốc ban đầu vuông góc với đồi. Khi nó rơi xuống lại đồi, vận tốc của nó tạo một góc θ so với phương ngang. Hỏi góc θ bằng bao nhiêu? Giá trị của góc β là bao nhiêu để giá trị của θ là nhỏ nhất? Giá trị nhỏ nhất này của θ bằng bao nhiêu?

3.52. Khoảng cách tăng dần **

1. Góc lớn nhất mà bạn có thể ném một quả bóng là bao nhiêu để khoảng cách giữa nó và bạn không bao giờ giảm trong suốt quá trình bay của nó?

2. Góc lớn nhất này bằng góc θ nhỏ nhất trong Bài tập luyện tập 3.51. Giải thích tại sao điều này đúng. (Bạn có thể trả lời câu hỏi này mà không cần thiết là đã làm bài tập đó.)

3.53. Ném xiên có lực cản ***

Một quả bóng được ném lên với vận tốc v_0 nghiêng một góc θ. Lực cản từ không khí có dạng $F_{\mathrm{d}} = -\beta v \equiv -m\alpha v$.

1. Tìm $x(t)$ và $y(t)$.

2. Giả sử rằng hệ số cản có giá trị sao cho độ lớn của lực cản lúc đầu bằng trọng lượng của quả bóng. Nếu mục đích của bạn là có x lớn nhất có thể khi y đạt giá trị lớn nhất (bạn không cần phải quan tâm đến giá trị lớn nhất của y là bao nhiêu), hãy chỉ ra rằng θ phải thỏa mãn $\sin\theta = (\sqrt{5}-1)/2$, giá trị này vô tình lại là giá trị nghịch đảo của tỷ số vàng.

Mục 3.5: Chuyển động trong một mặt phẳng, các tọa độ cực

3.54. Vệ tinh quỹ đạo thấp

Vận tốc của một vệ tinh là bao nhiêu khi quỹ đạo của nó nằm ngay trên bề mặt trái đất? Hãy đưa ra kết quả số.

3.55. Trọng lượng tại xích đạo *

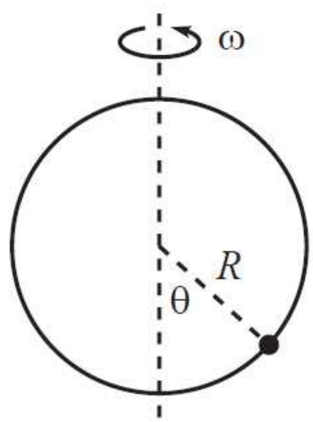
Một người đứng trên một cái cân đặt tại xích đạo. Nếu vì lý do nào đó trái đất ngừng quay nhưng vẫn giữ hình dạng như cũ, đoán xem chỉ số hiện ở trên cân sẽ tăng hay giảm? Và nó sẽ tăng hay giảm một tỷ lệ là bao nhiêu?

3.56. Nghiêng máy bay *

Một máy bay bay với vận tốc v theo một đường tròn nằm ngang bán kính R. Hỏi máy bay phải nghiêng một góc bằng bao nhiêu để bạn không cảm thấy như bạn đang bị ép vào cạnh bên ghế của bạn? Với góc nghiêng này, trọng lượng biểu kiến của bạn là bao nhiêu (đó là lực pháp tuyến mà ghế tác dụng lên bạn)?

3.57. Vành quay *

Một hạt vòng nằm trên một vành không ma sát bán kính R đang quay tròn quanh đường



Hình 3.32:

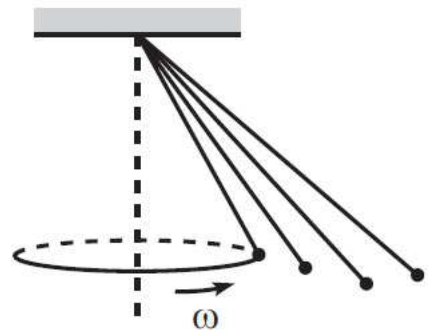
kính thẳng đứng của nó với vận tốc góc không đổi ω, như chỉ ra trong Hình vẽ 3.32. Hỏi vận tốc góc ω phải bằng bao nhiêu để hạt được giữ tại vị trí góc θ so với trục thẳng đứng? Có một giá trị đặc biệt của ω; nó là bao nhiêu, và vì sao nó đặc biệt?

3.58. Quay tròn *

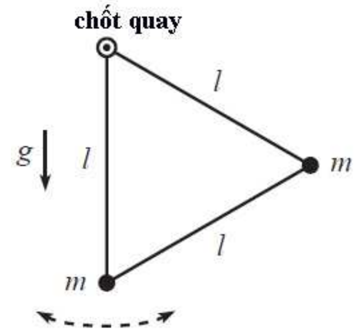
Có nhiều khối lượng được gắn bởi các sợi dây có độ dài khác nhau nối vào cùng một điểm trên trần nhà. Tất cả các khối lượng quay vòng quanh trong các đường tròn nằm ngang có bán kính khác nhau với cùng vận tốc góc ω (một vòng tròn như vậy được vẽ như trong Hình 3.33). Nếu bạn chụp một hình (từ một bên) của kết cấu này tại thời điểm khi tất cả các khối lượng nằm trong mặt phẳng của giấy (như được chỉ ra với bốn khối lượng), hỏi "đường cong" tạo bởi các khối lượng sẽ có dạng như thế nào?

3.59. Tam giác đung đưa *

Hai khối lượng m được gắn vào hai đỉnh của một tam giác đều tạo bởi ba thanh không khối lượng độ dài ℓ. Một chốt quay được gắn vào đỉnh thứ ba, và tam giác tự do đung đưa trong mặt phẳng thẳng đứng, như trong Hình 3.34. Nếu ban đầu tam giác được thả



Hình 3.33:



Hình 3.34:

ra từ trạng thái tĩnh khi một trong các cạnh của nó thẳng đứng (như đã chỉ ra trong hình vẽ), tìm lực tác dụng bên trong ba thanh (và hãy chỉ rõ đó là lực căng hay lực nén), và các gia tốc của các khối lượng, *tại thời điểm* khi nó được thả.

3.60. Con lắc tròn và con lắc đơn *

Xét con lắc tròn trong ví dụ của Mục 3.5. Gọi mặt phẳng $x - y$ là mặt phẳng ngang của chuyển động tròn. Với góc β nhỏ, thành phần F_x (gần đúng) của lực tác động lên trên khối lượng khi nó ở vị trí (x, y) trên đường tròn là bao nhiêu?

Bây giờ chúng ta xét con lắc đơn với khối lượng ở trên đung đưa trong mặt phẳng thẳng đứng chứa trục x. Gọi góc lớn nhất của con lắc đơn cũng bằng góc nhỏ β ở trên.[23] Hỏi thành phần F_x (gần đúng) của lực tác dụng lên trên khối lượng theo tọa độ x của nó là bao nhiêu?

Hai kết quả trên vừa tìm của bạn sẽ giống nhau, nghĩa là các chuyển động theo phương x của hai hệ trên là giống nhau, bởi vì khi chúng ở vị trí có tọa độ x lớn nhất ($\ell \sin\beta$), chúng có cùng vận tốc theo phương x (bằng không) và chúng ta vừa chỉ ra rằng chúng luôn có cùng gia tốc theo phương x độc lập với chuyển động bất kỳ theo phương y. Do vậy tần số góc của hai hệ phải bằng nhau. (Ta sẽ thấy trong Mục 4.2 rằng các tần số góc của con lắc đơn là $\sqrt{g/\ell}$, phù hợp với quan sát trong bài toán này.)

[23]Thực ra hai góc này không cần thiết phải bằng nhau, miễn là nó nhỏ là được. Xem Bài tập 3.10.

3.61. Bánh xe lăn tròn *

Nếu bạn vẽ một chấm nhỏ lên vành một bánh xe đang lăn, các tọa độ của chấm nhỏ này có thể được viết như sau[24]

$$(x, y) = (R\theta + R\sin\theta, R + R\cos\theta). \tag{3.55}$$

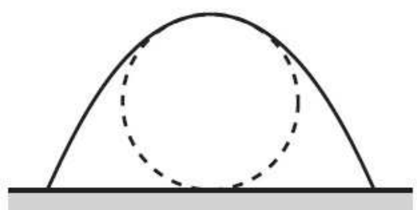
Quỹ đạo của chấm nhỏ được gọi là một đường *cycloid*. Giả sử rằng bánh xe đang lăn với vận tốc không đổi, nghĩa là $\theta = \omega t$.

1. Tìm $\mathbf{v}(t)$ và $\mathbf{a}(t)$ của chấm nhỏ.

2. Tại thời điểm chấm nhỏ ở trên đỉnh của vành bánh xe, hỏi bán kính cong của quỹ đạo là bao nhiêu? Bán kính cong của một đường cong được định nghĩa là bán kính của đường tròn trùng với với đường cong tại lân cận của điểm cho trước. *Gợi ý*: Bạn đã biết v và a.

3.62. Bán kính cong **

Một vật được bắn lên với vận tốc v nghiêng một góc θ. Hỏi bán kính cong (đã định nghĩa



Hình 3.35:

trong Bài tập 3.61) của chuyển động có dạng parabolic này là bao nhiêu

1. tại đỉnh?

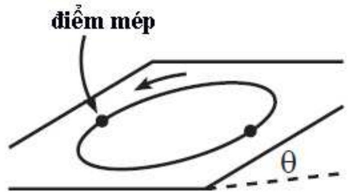
2. tại thời điểm ban đầu?

3. Vật được bắn lên với góc bằng bao nhiêu để bán kính cong tại đỉnh bằng nửa độ cao lớn nhất, như chỉ ra trong Hình 3.35?

3.63. Lái xe trên mặt đất nghiêng **

Một người lái xe gặp một bãi đỗ xe lớn bị nghiêng, ở đó góc giữa mặt đất so với phương ngang là θ. Người lái muốn lái xe theo một vòng tròn bán kính R với vận tốc không đổi. Hệ số ma sát giữa các bánh xe và mặt đất là μ.

[24]Điều này có từ việc viết tọa độ (x, y) như $(R\theta, R) + (R\sin\theta, R\cos\theta)$. Số hạng thứ nhất ở đây là vị trí của tâm bánh xe, và số hạng thứ hai là vị trí của chấm nhỏ tương ứng với tâm bánh xe, trong đó góc θ được tính theo chiều kim đồng hồ từ đỉnh của bánh xe.



Hình 3.36:

1. Hỏi vận tốc lớn nhất mà người lái có thể lái là bao nhiêu nếu anh ấy không muốn xe bị trượt?

2. Hỏi vận tốc lớn nhất người lái có thể lái là bao nhiêu, giả sử rằng anh ấy chỉ quan tâm có bị trượt hay không tại các điểm trên mép trên đường tròn (nghĩa là các điểm nằm giữa đỉnh và đáy của hình tròn; xem Hình 3.36)?

3.64. Xe trên đường nghiêng **

Một ô tô chuyển động vòng quanh một đường tròn nghiêng bán kính R. Góc nghiêng là θ, và hệ số ma sát giữa các bánh xe và đường là μ. Với khoảng giá trị nào của vận tốc để xe không bị trượt?

3.65. Gia tốc ngang **

Một hạt vòng nằm yên trên đỉnh của một vành không ma sát cố định bán kính R, vành tròn nằm trong mặt phẳng thẳng đứng. Hạt chịu một lực đẩy rất nhỏ để trượt xuống vòng quanh vành. Tại điểm nào trên vành thì gia tốc của hạt sẽ có phương nằm ngang? *Chú ý*: Ta chưa nghiên cứu về định luật bảo toàn năng lượng, nhưng bạn có thể sử dụng một thực tế là vận tốc của hạt sau khi nó rơi từ độ cao h cho trước được cho bởi $v = \sqrt{2gh}$.

3.66. Lực theo phương ngang lớn nhất **

Một hạt vòng nằm yên trên đỉnh của một vành nhẫn cố định bán kính R nằm trong mặt phẳng thẳng đứng. Hạt nhận một lực rất nhỏ để trượt xuống vòng quanh vành. Xét thành phần theo phương ngang của lực do vành tác dụng lên hạt. Tại điểm nào trên vành thì thành phần này đạt được giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất. Như trong Bài tập luyện tập 3.65, hãy sử dụng $v = \sqrt{2gh}$.

3.67. Sự dẫn ra F_r và F_θ *

Trong hệ tọa độ Đề Các, một vector nói chung được viết dưới dạng

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} = r\cos\theta\hat{\mathbf{x}} + r\sin\theta\hat{\mathbf{y}}. \tag{3.56}$$

Hãy nhận lại phương trình (3.51) bằng cách lấy đạo hàm hai lần biểu thức này của $\mathbf{r}$, và sử dụng phương trình (3.46) để chỉ ra rằng kết quả này có thể được viết dưới dạng (3.50). Chú ý rằng không như $\hat{\mathbf{r}}$ và $\hat{\theta}$, các vector $\hat{\mathbf{x}}$ và $\hat{\mathbf{y}}$ không thay đổi theo thời gian.

3.68. Một lực $F_\theta = 3m\dot{r}\dot{\theta}$ **

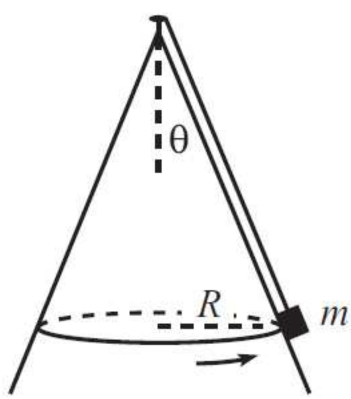
Xét một chất điểm chỉ chịu tác dụng của một lực hướng tâm dạng $F_\theta = 3m\dot{r}\dot{\theta}$. Chỉ ra rằng $\dot{r} = \pm\sqrt{Ar^4 + B}$, trong đó A và B là các hằng số tích phân, được xác định bởi các điều kiện đầu. Hơn nữa hãy chỉ ra rằng nếu chất điểm bắt đầu chuyển động với $\dot{\theta} \neq 0$ và $\dot{r} > 0$, thì nó sẽ đạt được $r = \infty$ trong một khoảng thời gian hữu hạn. (Như trong Bài tập 3.23, lực loại này không có ý nghĩa vật lý gì. Nó đơn giản chỉ làm cho phương trình $F = ma$ có thể giải được.)

3.69. Một lực $F_\theta = 2m\dot{r}\dot{\theta}$ **

Xét một chất điểm chỉ chịu tác dụng của một lực hướng tâm dạng $F_\theta = 2m\dot{r}\dot{\theta}$. Chỉ ra rằng $r = Ae^{\theta} + Be^{-\theta}$, trong đó A và B là các hằng số tích phân, xác định bởi các điều kiện đầu. (Lực này là một lực vật lý trong thực tế. Nếu bạn đặt một hạt vòng vào một thanh và quay thanh quanh một đầu của nó với tốc độ không đổi, thì lực pháp tuyến từ thanh tác dụng lên hạt sẽ là $2m\dot{r}\dot{\theta}$.[25])

3.70. Dừng lại trên một mặt nón **

Khi được quan sát từ mặt bên, hình nón như trong Hình 3.37 chắn một góc 2θ tại đỉnh



Hình 3.37:

của nó. Một vật khối lượng m được nối với đỉnh bởi một sợi dây không khối lượng và chuyển động trong một đường tròn nằm ngang bán kính R xung quanh bề mặt mặt nón. Nếu vận tốc ban đầu là v_0, và nếu hệ số ma sát động giữa vật và mặt nón là μ, thì sau bao lâu vật sẽ dừng lại? (Kết quả tìm được sẽ có vẻ hơi rắc rối một chút, nhưng bạn có thể xét một vài trường hợp giới hạn và thấy những kết quả giới hạn này khá hợp lý.)

[25] Sẽ phụ thuộc vào cái gì được gọi là có ý nghĩa "vật lý", những lực trong Bài tập luyện tập 3.68 và trong Bài tập 3.23 cũng có thể được coi là có ý nghĩa vật lý. Hai lực này tương ứng với trường hợp khi đặt một hạt vòng vào trong một thanh và quay tròn thanh này với vận tốc góc tỷ lệ với bán kính r hoặc $1/r$ của hạt vòng một cách tương ứng (vì nó khá là rõ ràng từ giá trị của $\dot{\theta}$ trong lời giải). Điều này cũng có thể được suy ra từ $\tau = dL/dt$, nhưng chúng ta sẽ không nói gì đến moment lực cho tới khi xét đến Chương 8

3.71. Chuyển động tròn của xe mô tô ***

Một người lái mô tô muốn chuyển động theo một đường tròn bán kính R trên mặt đất. Hệ số ma sát giữa các bánh xe và mặt đất là μ. Xe bắt đầu chuyển động từ trạng thái tĩnh. Hỏi khoảng cách nhỏ nhất mà xe phải di chuyển để xe đạt được vận tốc lớn nhất cho phép, nghĩa là vận tốc mà nó sẽ trượt ra khỏi vòng tròn nếu chuyển động với tốc độ lớn hơn?[26] Hãy giải bài toán này theo hai cách:

(a) Viết ra phương trình $F = ma$ theo phương hướng tâm và phương tiếp tuyến (bạn sẽ phải viết gia tốc a ở dạng vdv/dx), và sau đó cho độ lớn của lực ma sát bằng μmg trong trường hợp tối ưu. Bạn sẽ giải được bài toán từ đó.

(b) Giả sử lực ma sát tạo một góc $\beta(t)$ với phương tiếp tuyến. Viết các phương trình $F = ma$ theo phương hướng tâm và theo phương tiếp tuyến (bạn sẽ cần phải viết a dưới dạng dv/dt), và sau đó lấy đạo hàm của phương trình theo phương hướng tâm. Bạn sẽ giải được bài toán từ đó (đây là cách giải hay).

3.8 Lời giải

3.1. Máy Atwood

Gọi T là sức căng bên trong sợi dây, và gọi a là gia tốc của m_1 (với chiều dương hướng lên trên). Khi đó $-a$ là gia tốc của vật m_2. Vì vậy các phương trình $F = ma$ sẽ là

$$T - m_1 g = m_1 a, \quad \text{và} \quad T - m_2 g = m_2(-a). \tag{3.57}$$

Giải hai phương trình này cho a và T ta có

$$a = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_2 + m_1}, \quad \text{và} \quad T = \frac{2m_1 m_2 g}{m_2 + m_1}. \tag{3.58}$$

NHẬN XÉT: Khi kiểm tra lại, ta thấy gia tốc a có các giới hạn hợp lý khi $m_2 \gg m_1$, $m_1 \gg m_2$, và $m_1 = m_2$ (tương ứng là $a \approx g, a \approx -g$, và $a = 0$). Miễn là có lực căng, nếu $m_1 = m_2 \equiv m$, thì $T = mg$, và đây là giá trị lực căng hợp lý. Và nếu $m_1 \ll m_2$, thì $T \approx 2m_1 g$. Điều này là đúng vì nó làm tổng hợp lực tác dụng lên m_1 có chiều hướng lên trên bằng $m_1 g$, điều này làm cho gia tốc của nó là g hướng lên trên, phù hợp với việc mà m_2 hầu như là rơi tự do. ♣

3.2. Máy Atwood kép

Gọi lực căng bên trong sợi dây dưới là T. Khi đó lực căng bên trong sợi dây trên là $2T$ (để cho

[26] Bạn có thể xem bài toán này trong một số cũ của tạp chí *Kvant* của Nga

tổng hợp lực tác dụng lên ròng rọc bên dưới bằng không). Khi đó ba phương trình $F = ma$ là (các gia tốc có chiều dương là chiều hướng lên trên)

$$2T - m_1 g = m_1 a_1, \quad T - m_2 g = m_2 a_2, \quad T - m_3 g = m_3 a_3. \tag{3.59}$$

Sự bảo toàn độ dài của dây cho ta gia tốc của m_1 là

$$a_1 = -\frac{a_2 + a_3}{2}. \tag{3.60}$$

Điều này suy ra từ thực tế là vị trí trung bình của m_2 và m_3 chuyển động cùng một khoảng cách với ròng rọc bên dưới, trong khi ròng rọc bên dưới chuyển động với cùng khoảng cách với m_1 (nhưng ngược chiều). Bây giờ chúng ta có bốn phương trình với bốn ẩn a_1, a_2, a_3 và T. Với một vài bước biến đổi chúng ta có thể giải ra các gia tốc là

$$\begin{aligned} a_1 &= g\frac{4m_2m_3 - m_1(m_2 + m_3)}{4m_2m_3 + m_1(m_2 + m_3)}, \\ a_2 &= -g\frac{4m_2m_3 + m_1(m_2 - 3m_3)}{4m_2m_3 + m_1(m_2 + m_3)}, \\ a_3 &= -g\frac{4m_2m_3 + m_1(m_3 - 3m_2)}{4m_2m_3 + m_1(m_2 + m_3)}. \end{aligned} \tag{3.61}$$

NHẬN XÉT: Có rất nhiều trường hợp giới hạn bạn có thể kiểm tra ở đây. Một vài trường hợp đó là: (1) Nếu $m_2 = m_3 = m_1/2$, thì các gia tốc đều bằng không, kết quả này là hợp lý. (2) Nếu m_3 là rất nhỏ so với cả m_1 và m_2, thì $a_1 = -g, a_2 = -g$ và $a_3 = 3g$. Để hiểu vì sao gia tốc này bằng $3g$, hãy tin rằng nếu m_1 và m_2 đi xuống một khoảng là d, thì m_3 sẽ đi lên khoảng $3d$.

Chú ý rằng a_1 có thể được viết như sau

$$a_1 = g\left(\frac{4m_2m_3}{m_2 + m_3} - m_1\right)\bigg/\left(\frac{4m_2m_3}{m_2 + m_3} + m_1\right). \tag{3.62}$$

Dựa vào kết quả của a trong phương trình (3.58) trong Bài tập 3.1, chúng ta thấy rằng khi m_1 được xem xét ở đây, hệ ròng rọc m_2, m_3 có ảnh hưởng giống như một khối lượng $4m_2m_3/(m_2 + m_3)$. Nó sẽ có tính chất là bằng không khi một trong m_2 hoặc m_3 bằng không, và bằng $2m$ khi $m_2 = m_3 \equiv m$. ♣

3.3. Máy Atwood vô hạn

LỜI GIẢI THỨ NHẤT: Nếu độ lớn của trọng lực trên trái đất được nhân với hệ số η, thì lực căng trong các dây trong máy Atwood cũng tương tự sẽ được nhân với hệ số η. Điều này là đúng vì cách duy nhất để nhận được một đại lượng với đơn vị là sức căng (đó là đơn vị lực) là nhân một khối lượng với với g. Ngược lại, nếu bạn đặt máy Atwood lên trên một hành tinh khác và nhận ra rằng tất cả sức căng dây được nhân với hệ số η, thì chúng ta biết trọng lực ở hành tinh đó phải là ηg.

Gọi sức căng của sợi dây ở trên ròng rọc thứ nhất là T. Khi đó sức căng của sợi dây ở trên ròng rọc thứ hai là $T/2$ (vì ròng rọc là không khối lượng). Gọi gia tốc hướng xuống của ròng rọc thứ hai là a_2. Khi đó ròng rọc thứ hai có thể coi là đang được đặt trong một thế giới mà ở đó trọng lực có độ lớn $g - a_2$. Xét hệ con bao gồm tất cả các ròng rọc trừ ròng rọc trên cùng. Hệ con vô hạn này là đồng nhất với hệ vô hạn ban đầu gồm tất cả các ròng rọc. Do đó, với lập luận ở trên, ta phải có

$$\frac{T}{g} = \frac{T/2}{g - a_2}, \tag{3.63}$$

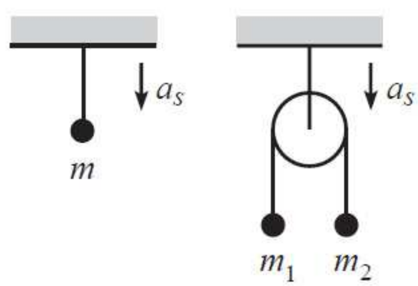
mà phương trình này cho ta $a_2 = g/2$. Nhưng a_2 cũng là gia tốc của khối lượng trên cùng, vậy kết quả của chúng ta là $g/2$.

> NHẬN XÉT: Bạn có thể chỉ ra rằng gia tốc tương đối của ròng rọc thứ hai và thứ ba là $g/4$, và của ròng rọc thứ ba và ròng rọc thứ tư là $g/8$, v.v... Do đó, gia tốc của khối lượng bên dưới rất xa trong hệ sẽ bằng $g(1/2 + 1/4 + 1/8 + \cdots) = g$, kết quả này rất có ý nghĩa trực quan.
>
> Chú ý rằng $T = 0$ cũng làm cho phương trình (3.63) là đúng. Nhưng điều này tương ứng với việc đặt một khối lượng bằng không tại đầu dây của một hệ ròng rọc vô hạn (xem lời giải thứ hai). ♣

LỜI GIẢI THỨ HAI: Xét bài toán phụ sau.

Bài toán: Hai kết cấu được chỉ ra như trong Hình 3.38. Kết cấu thứ nhất gồm một khối lượng m được treo vào một sợi dây. Kết cấu thứ hai gồm hai khối lượng, m_1 và m_2, được treo vào một sợi dây vắt qua một ròng rọc. Cho cả hai giá đỡ của hai kết cấu này có gia tốc a_s hướng xuống. Hỏi khối lượng m phải bằng bao nhiêu, biểu diễn qua m_1 và m_2, để lực căng T của sợi dây trên cùng là như nhau trong cả hai trường hợp?

Lời giải: Trong trường hợp thứ nhất, ta có



Hình 3.38:

$$mg - T = ma_s. \tag{3.64}$$

Trong trường hợp thứ hai, gọi a là gia tốc của m_2 chuyển động tương đối với giá đỡ (với chiều hướng xuống được coi là chiều dương). Khi đó ta có

$$m_1 g - \frac{T}{2} = m_1(a_s - a), \quad \text{và} \quad m_2 g - \frac{T}{2} = m_2(a_s + a). \tag{3.65}$$

Nếu chúng ta đặt $g' \equiv g - a_s$ thì chúng ta có thể viết ba phương trình trên như sau

$$mg' = T, \quad m_1 g' - \frac{T}{2} = -m_1 a, \quad m_2 g' - \frac{T}{2} = m_2 a. \tag{3.66}$$

Khử a từ hai phương trình cuối cho $T = 4m_1 m_2 g'/(m_1 + m_2)$. Sử dụng giá trị này của T vào phương trình thứ nhất chúng ta thu được

$$m = \frac{4m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \tag{3.67}$$

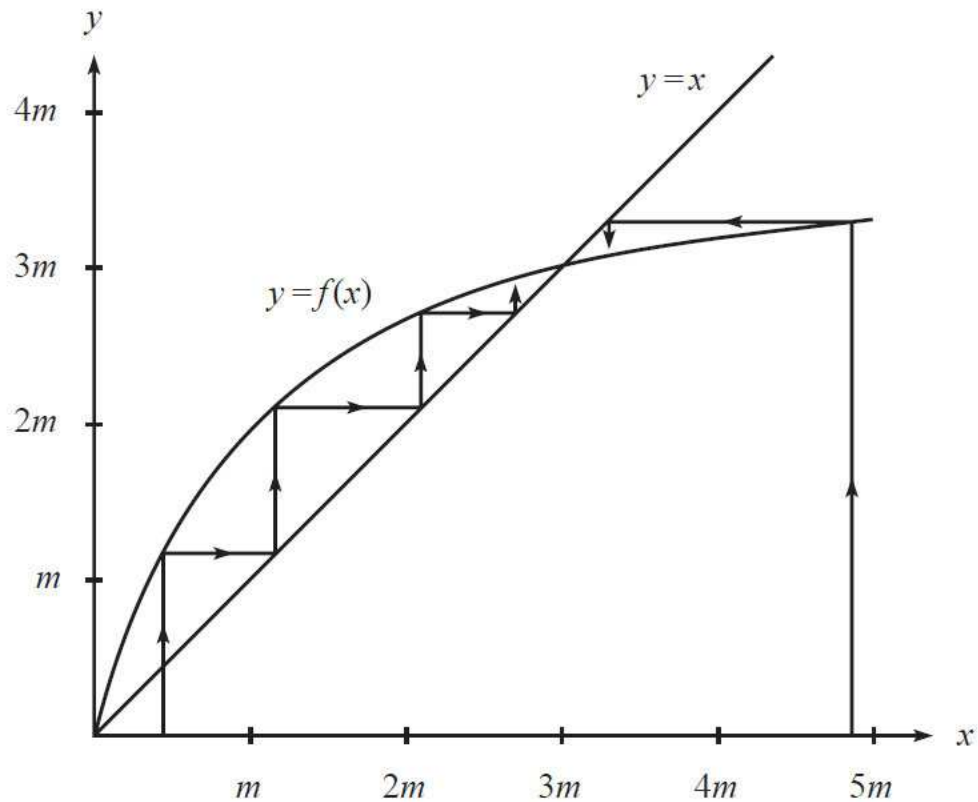
Chú ý rằng giá trị của a_s không có liên quan gì ở trong kết quả này. Một cách tương đương thì ta có giá đỡ cố định trong một thế giới mà ở đó gia tốc trọng trường là g' (xem phương trình (3.66)), và từ việc phân tích thứ nguyên, giá trị mong muốn của m không thể phụ thuộc vào g'. Bài toán phụ này chỉ ra rằng với bất cứ gia tốc a_s nào với hệ hai khối lượng bất kỳ trong trường hợp thứ hai có thể được coi như là một khối lượng m cho bởi phương trình (3.67) miễn là chúng ta chỉ quan tâm đến sợi dây phía trên.

Bây giờ hãy xét máy Atwood vô hạn của chúng ta. Giả sử rằng hệ có N ròng rọc, ở đó $N \to \infty$. Gọi khối lượng dưới cùng là x. Khi đó bài toán phụ chỉ ra rằng hai khối lượng dưới cùng, m và x, có thể coi như một khối lượng biểu kiến $f(x)$, với

$$f(x) = \frac{4mx}{m + x} = \frac{4x}{1 + (x/m)}. \tag{3.68}$$

Sau đó chúng ta có thể coi sự kết hợp của khối lượng $f(x)$ và khối lượng m tiếp theo như một khối lượng biểu kiến $f(f(x))$. Sự kết hợp này có thể được lặp đi lặp lại, cho đến khi cuối cùng chúng ta có một khối lượng m và một khối lượng $f^{(N-1)}(x)$ treo trên ròng rọc trên cùng. Vậy chúng ta phải xem xét ứng xử của $f^N(x)$ khi $N \to \infty$. Ứng xử này là rõ ràng nếu chúng ta nhìn vào đồ thị của $f(x)$ trong Hình 3.39. Ta thấy rằng $x = 3m$ là một điểm cố định của $f(x)$. Theo nghĩa là $f(3m) = 3m$. Đồ thị này chỉ ra rằng mặc dù chúng ta bắt đầu với giá trị nào của x đi chăng nữa, thì sau các bước lặp chúng ta sẽ nhận được giá trị là $3m$ (trừ khi chúng ta bắt đầu lặp với giá trị $x = 0$, đây là trường hợp chúng ta vẫn để ngỏ chưa xét). Những bước lặp này được chỉ ra trên đồ thị bởi những đường có hình mũi tên trong biểu đồ. Sau khi đạt tới giá trị $f(x)$ trên đường cong, đường thẳng lặp này sẽ di chuyển theo phương ngang tới giá trị x của $f(x)$, và sau đó theo phương thẳng đứng tới giá trị $f(f(x))$ trên đường cong, và cứ tiếp tục như thế. Do đó, vì $f^N(x) \to 3m$ khi $N \to \infty$, máy Atwood vô hạn của chúng ta sẽ tương đương với (trong trường hợp chúng ta chỉ quan tâm đến khối lượng trên cùng) hai khối lượng, m và $3m$.

Sau đó bạn có thể chỉ ra một cách nhanh chóng là gia tốc của khối lượng trên đỉnh là $g/2$. Chú ý rằng khi chúng ta chỉ quan tâm đến giá đỡ ở trên, thì toàn bộ kết cấu này sẽ tương đương với khối lượng $3m$. Do đó $3mg$ là lực tác động của giá đỡ vào toàn bộ hệ.



Hình 3.39: Bài tập 3.3, cách giải thứ hai.

3.4. Dãy các ròng rọc

Gọi m là khối lượng của các ròng rọc, và gọi T là sức căng trong sợi dây. Gọi a là gia tốc của hai khối lượng ở hai đầu, và a' là gia tốc của N khối lượng còn lại, với chiều dương là chiều hướng lên. N gia tốc này thực ra là bằng nhau, vì có cùng một tổng lực tác dụng lên tất cả N khối lượng bên trong, tổng hợp lực đó là lực $2T$ hướng lên và mg hướng xuống. Các phương trình $F = ma$ cho các khối lượng ở hai đầu và ở trong tương ứng là,

$$T - mg = ma, \quad \text{và} \quad 2T - mg = ma'. \tag{3.69}$$

Nhưng dây có độ dài cố định. Do đó,

$$N(2a') + a + a = 0. \tag{3.70}$$

Hệ số "2" ở đây đến từ thực tế rằng nếu một trong các khối lượng bên trong di chuyển lên trên một khoảng cách d, thì một đoạn $2d$ của dây bị biến mất và do đó đoạn này phải xuất hiện ở đâu đó khác (trong trường hợp này nó sẽ chuyển ra hai đoạn ở bên ngoài). Khử T từ phương trình (3.69) cho $a' = 2a + g$. Kết hợp kết quả này với phương trình (3.70) ta thu được

$$a = -\frac{Ng}{2N+1}, \quad \text{và} \quad a' = \frac{g}{2N+1}. \tag{3.71}$$

NHẬN XÉT: Với $N = 1$, ta có $a = -g/3$ và $a' = g/3$. Với N lớn, a tăng dần độ lớn và tiến tới giá trị $-g/2$ khi $N \to \infty$, và a' giảm dần về không khi $N \to \infty$. Dấu của a và a' trong phương trình (3.71) có thể gây ngạc nhiên. Bạn có thể nghĩ rằng nếu, trong trường hợp $N = 100$, thì 100 khối lượng này sẽ "thắng" hai khối lượng hai đầu, sao cho N khối lượng sẽ rơi xuống. Nhưng điều này không đúng, vì có nhiều (thực tế là $2N$) lực căng tác dụng lên N khối lượng. Chúng *không* tác dụng giống như trong trường hợp một khối lượng Nm treo bên dưới một ròng rọc. Thực ra, hai khối lượng $m/2$ ở hai đầu sẽ cân bằng với bất cứ N khối lượng m ở bên trong (với sự trợ giúp của các lực hướng lên từ dãy các ròng rọc ở bên trên). ♣

3.5. Vòng tròn các ròng rọc

Gọi T là lực căng của dây. Khi đó phương trình $F = ma$ cho m_i là

$$2T - m_i g = m_i a_i, \tag{3.72}$$

với chiều dương là chiều hướng lên trên. Các gia tốc a_i được liên hệ với nhau bởi thực tế là dây có độ dài không đổi, mà có thể suy ra là tổng của các dịch chuyển của các khối lượng bằng không. Nói cách khác,

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_N = 0. \tag{3.73}$$

Nếu chúng ta chia phương trình (3.72) cho m_i rồi cộng N phương trình này lại với nhau và sử dụng phương trình (3.73), chúng ta có thể tìm được T được cho bởi

$$2T\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \cdots + \frac{1}{m_N}\right) - Ng = 0. \tag{3.74}$$

Do đó,

$$T = \frac{NMg}{2}, \quad \text{trong đó} \quad \frac{1}{M} \equiv \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \cdots + \frac{1}{m_N} \tag{3.75}$$

được gọi là *khối lượng rút gọn* của hệ. Thay giá trị này của T vào trong phương trình (3.72) ta thu được

$$a_i = g\left(\frac{NM}{m_i} - 1\right). \tag{3.76}$$

NHẬN XÉT: Một số trường hợp đặc biệt là: Nếu tất cả các khối lượng là bằng nhau, thì tất cả các gia tốc $a_i = 0$. Nếu $m_k = 0$ (và các khối lượng khác là khác không), thì $a_k = (N-1)g$, và tất cả các gia tốc khác $a_i = -g$. Nếu có $N - 1$ khối lượng bằng nhau và có khối lượng nhỏ hơn rất nhiều so với khối lượng còn lại m_k, thì $m_k \approx -g$, và tất cả các gia tốc khác là $a_i \approx g/(N-1)$. ♣

3.6. Trượt xuống một mặt phẳng nghiêng

1. Thành phần của trọng lực theo phương dọc theo mặt phẳng nghiêng là $g\sin\theta$. Do đó gia tốc theo phương ngang là $a_x = (g\sin\theta)\cos\theta$. Mục đích của chúng ta là tìm giá trị lớn nhất của a_x. Bằng cách lấy đạo hàm, hoặc bởi chú ý rằng $\sin\theta\cos\theta = (\sin 2\theta)/2$, ta thu được $\theta = \pi/4$ sẽ là giá trị khi a_x lớn nhất. Khi đó giá trị lớn nhất của a_x là $g/2$.

2. Lực pháp tuyến do mặt phẳng nghiêng tác động lên vật là $mg\cos\theta$, vì vậy lực ma sát động tác động vào vật là μmg. Do đó gia tốc hướng theo phương của mặt phẳng là $g(\sin\theta - \mu\cos\theta)\cos\theta$. Ta muốn cực đại hóa giá trị này. Cho đạo hàm của nó bằng không chúng ta thu được

$$\begin{aligned}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + 2\mu\sin\theta\cos\theta = 0 &\implies \cos 2\theta + \mu\sin 2\theta = 0 \\ &\implies \tan 2\theta = -\frac{1}{\mu}.\end{aligned} \tag{3.77}$$

Khi $\mu \to 0$, thì điều này cho chúng ta kết quả $\theta \to \pi/4$ giống như kết quả nhận được trong phần (a). Khi $\mu \to \infty$, ta thu được $\theta \approx \pi/2$ và kết quả này là hợp lý.

NHẬN XÉT: Thời gian để vật di chuyển một khoảng cách d theo phương ngang được tìm từ $a_x t^2/2 = d$. Trong phần (a), giá trị nhỏ nhất của thời gian này là $2\sqrt{d/g}$. Trong phần (b), bạn có thể chỉ ra rằng giá trị lớn nhất của a_x là $(g/2)(\sqrt{1+\mu^2} - \mu)$, tương ứng với giá trị nhỏ nhất của thời gian là $2\sqrt{d/g}(\sqrt{1+\mu^2}+\mu)^{1/2}$. Giá trị này cho kết quả chính xác trong trường hợp giới hạn khi $\mu \to 0$, và nó có giới hạn là $2\sqrt{2\mu d/g}$ khi $\mu \to \infty$. ♣

3.7. Trượt ngang trên một mặt phẳng nghiêng ***

Lực pháp tuyến tác động lên vật từ mặt phẳng nghiêng là $N = mg\cos\theta$. Do đó, lực ma sát tác dụng lên vật là $\mu N = (\tan\theta)(mg\cos\theta) = mg\sin\theta$. Lực này tác dụng theo phương ngược chiều với chiều chuyển động. Vật cũng chịu tác dụng của trọng lực $mg\sin\theta$ hướng theo phương xuống dưới mặt phẳng nghiêng.

Vì độ lớn của lực ma sát và của trọng lực theo phương nằm trên mặt phẳng nghiêng là bằng nhau, nên gia tốc dọc theo phương chuyển động tại mọi thời điểm có giá trị bằng và ngược chiều với gia tốc theo phương hướng xuống dưới trên mặt phẳng nghiêng. Do đó, trong một gia số nhỏ của thời gian, phần vận tốc mà vật bị mất theo phương chuyển động bằng phần vận tốc mà vật đạt được theo chiều hướng xuống dưới trên mặt phẳng nghiêng. Gọi v là tổng vận tốc của vật, và gọi v_y là thành phần vận tốc theo chiều hướng xuống dưới trên mặt phẳng nghiêng, và vì tổng của gia tốc theo hai phương này bằng không nên ta có

$$v + v_y = C, \tag{3.78}$$

trong đó C là một hằng số. C được xác định bởi điều đầu là $V + 0 = V$. Giá trị của C tại thời điểm cuối là $V_\mathrm{f} + V_\mathrm{f} = 2V_\mathrm{f}$ (trong đó V_f là vận tốc cuối của vật), bởi vì cuối cùng thì vật cũng sẽ chuyển động theo phương thẳng đứng hướng xuống dưới theo mặt phẳng nghiêng sau một thời gian dài. Do đó,

$$2V_\mathrm{f} = V \quad \Longrightarrow \quad V_\mathrm{f} = \frac{V}{2}. \tag{3.79}$$

3.8. Mặt phẳng nghiêng chuyển động ***

Gọi N là phản lực giữa vật và mặt phẳng nghiêng. Chú ý chúng ta không thể giả sử $N = mg\cos\theta$, vì mặt phẳng nghiêng đang chuyển động giật lùi lại. Ta có thể thấy rằng $N = mg\cos\theta$ là hoàn toàn sai, vì trong trường hợp giới hạn khi $M = 0$, thì sẽ không có phản lực này.

Các dạng phương trình $F = ma$ của hệ (theo phương thẳng đứng và phương ngang đối với vật m, và theo phương ngang đối với vật M) là

$$\begin{aligned} &mg - N\cos\theta = ma_y, \\ &N\sin\theta = ma_x, \\ &N\sin\theta = MA_x, \end{aligned} \tag{3.80}$$

ở đây, chúng ta chọn chiều dương cho a_y, a_x và A_x tương ứng là chiều hướng xuống, chiều hướng sang phải và chiều hướng sang trái. Có bốn ẩn cần tìm là a_x, a_y, A_y và N, vì vậy chúng ta cần có thêm một phương trình nữa. Phương trình thứ tư là phương trình của ràng buộc là trong chuyển động vật vẫn tiếp xúc với mặt phẳng. Khoảng cách theo phương ngang giữa vật và điểm bắt đầu của nó trên mặt phẳng nghiêng là $(a_x + A_x)t^2/2$, và khoảng cách theo phương thẳng đứng là $a_y t^2/2$. Tỷ số của các khoảng cách này phải bằng $\tan\theta$ nếu vật vẫn nằm trên mặt phẳng nghiêng (tưởng tượng chúng ta nhìn mọi thứ trong hệ tọa độ là mặt phẳng nghiêng). Do đó, ta phải có

$$\frac{a_y}{a_x + A_x} = \tan\theta. \tag{3.81}$$

Sử dụng phương trình (3.80) để giải ra a_y, a_x và A_x theo N, và sau đó thay những kết quả này vào (3.81) ta thu được

$$\frac{g - \dfrac{N}{m}\cos\theta}{\dfrac{N}{m}\sin\theta + \dfrac{N}{M}\sin\theta} = \tan\theta \quad \Longrightarrow \quad N = g\left(\sin\theta\tan\theta\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right) + \frac{\cos\theta}{m}\right)^{-1}. \tag{3.82}$$

(Trong giới hạn khi $M \to \infty$, giá trị của N này trở về $N = mg\cos\theta$ là giá trị chúng ta đã quen thuộc). Sau khi tìm ra N, phương trình thứ ba của (3.80) sẽ cho ta A_x mà có dạng như sau

$$A_x = \frac{N\sin\theta}{M} = \frac{mg\sin\theta\cos\theta}{M + m\sin^2\theta}. \tag{3.83}$$

NHẬN XÉT:

1. Với M và m được cho trước, bạn có thể chỉ ra rằng góc θ_0 để cho giá trị của A_x lớn nhất là $\tan\theta_0 = \sqrt{M/(M+m)}$. Nếu $M \ll m$, thì $\theta_0 \approx 0$; điều này đúng vì mặt phẳng sẽ bị đẩy rất nhanh. Nếu $M \gg m$, thì $\theta_0 \approx \pi/4$; kết quả này phù hợp với kết quả $\pi/4$ từ Bài tập 3.6(a).

2. Trong giới hạn $M \ll m$, phương trình (3.83) cho $A_x \approx g/\tan\theta$. Điều này có nghĩa vì m sẽ rơi gần như là thẳng xuống dưới với gia tốc g, và mặt phẳng bị đẩy sang trái.

3. Trong giới hạn $M \gg m$, phương trình (3.83) cho $A_x \approx g(m/M)\sin\theta\cos\theta$. Điều này là dễ hiểu nếu chúng ta xem xét $a_x = (M/m)A_x \approx g\sin\theta\cos\theta$. Vì mặt phẳng hầu như là đứng yên trong trường hợp giới hạn này, giá trị này của a_x suy ra gia tốc của m theo phương mặt phẳng nghiêng bằng $a_x/\cos\theta \approx g\sin\theta$ như mong đợi. ♣

3.9. Lực hàm mũ *

$F = ma$ cho $\ddot{x} = a_0 e^{-bt}$. Lấy tích phân biểu thức này theo thời gian ta thu được $v(t) = -a_0 e^{-bt}/b + A$. Lấy tích phân lần nữa ta có $x(t) = a_0 e^{-bt}/b^2 + At + B$. Điều kiện ban đầu $v(0) = 0$ cho $-a_0/b + A = 0 \Longrightarrow A = a_0/b$. Và điều kiện ban đầu $x(0) = 0$ cho $a_0/b^2 + B \Longrightarrow B = -a_0/b^2$. Do đó,

$$x(t) = a_0\left(\frac{e^{-bt}}{b^2} + \frac{t}{b} - \frac{1}{b^2}\right). \tag{3.84}$$

Khi $t \to \infty$ (chính xác hơn là khi $bt \to \infty$), v tiến dần đến a_0/b, và x tiến dần đến $a_0(t/b - 1/b^2)$. Ta thấy rằng chất điểm cuối cùng sẽ trễ một khoảng a_0/b^2 so với chất điểm khác được bắt đầu chuyển động tại cùng vị trí nhưng chuyển động với vận tốc không đổi $v = a_0/b$. Khi $t \approx 0$ (chính xác hơn là khi $bt \approx 0$), chúng ta có thể khai triển e^{-bt} theo công thức Taylor để nhận được $x(t) \approx a_0 t^2/2$. Điều này là hợp lý vì thừa số chứa hàm mũ trong lực tác động là bằng 1, vì vậy về cơ bản là chúng ta có một lực không đổi và gia tốc không đổi.

3.10. Lực dạng $-kx$

Đây đơn giản là lực lò xo tuân theo định luật Hooke, là lực chúng ta sẽ xem xét nhiều hơn ở Chương 4. Phương trình $F = ma$ cho $-kx = mv dv/dx$. Tách biến và lấy tích phân phương trình này ta có

$$-\int_{x_0}^{x} kx dx = \int_0^v mv dv \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2}k{x_0}^2 - \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv^2. \tag{3.85}$$

Giải đối với $v \equiv dx/dt$ và sau đó tách biến và lấy tích phân lần nữa ta thu được

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{{x_0}^2 - x^2}} = \pm\int_0^t \sqrt{\frac{k}{m}}dt. \tag{3.86}$$

Bạn có thể xem xét tích phân này, hoặc bạn có thể giải nó bằng phương pháp đổi biến dùng hàm lượng giác. Đặt $x \equiv x_0 \cos\theta$ thì $dx = -x_0 \sin\theta d\theta$, và ta có

$$\int_0^\theta \frac{-x_0 \sin\theta d\theta}{x_0 \sin\theta} = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}t \quad \Longrightarrow \quad \theta = \mp\sqrt{\frac{k}{m}}t. \tag{3.87}$$

Từ định nghĩa của θ, nghiệm của $x(t)$ sẽ là

$$x(t) = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right). \tag{3.88}$$

Chúng ta thấy rằng chất điểm dao động tuần hoàn. Nó dao động một chu kỳ khi đối số của hàm cos tăng một giá trị là 2π. Vậy chu kỳ của chuyển động này là $T = 2\pi\sqrt{m/k}$ và khá là ngạc nhiên là nó độc lập với x_0. Nó tăng khi m tăng và giảm khi k giảm phù hợp với điều chúng ta mong đợi.

3.11. Sợi xích rơi

Gọi khối lượng riêng của sợi xích là ρ, và gọi $y(t)$ là độ dài thõng xuống qua lỗ theo thời gian t. Vậy tổng khối lượng của sợi xích là ρl, và khối lượng phần sợi xích thõng xuống là ρy. Tổng lực theo phương hướng xuống dưới tác động lên sợi xích là $(\rho y)g$, vậy phương trình $F = ma$ cho ta

$$\rho g y = (\rho l)\ddot{y} \quad \Longrightarrow \quad \ddot{y} = \frac{g}{\ell}y. \tag{3.89}$$

Tới thời điểm này, có hai cách để giải tiếp:

LỜI GIẢI THỨ NHẤT: Do chúng ta có một hàm số mà đạo hàm cấp hai của nó là tỷ lệ với chính nó, nên chúng ta có thể đoán một nghiệm của nó là một hàm mũ. Thực ra, chúng ta có thể kiểm tra một cách nhanh chóng để thấy nghiệm của phương trình trên là

$$y(t) = Ae^{\alpha t} + Be^{-\alpha t}, \quad \text{trong đó} \quad \alpha \equiv \sqrt{\frac{g}{\ell}}. \tag{3.90}$$

Lấy đạo hàm biểu thức này ta thu được $\dot{y}(t)$, và sử dụng điều kiện cho trước $\dot{y}(0) = 0$, ta tìm được $A = B$. Sử dụng $y(0) = y_0$, ta sẽ tìm được $A = B = y_0/2$. Vì vậy độ dài phần sợi xích thõng xuống dưới lỗ là

$$y(t) = \frac{y_0}{2}(e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}) \equiv y_0 \cosh(\alpha t). \tag{3.91}$$

Và vận tốc là

$$\dot{y}(t) = \frac{\alpha y_0}{2}(e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}) \equiv \alpha y_0 \sinh(\alpha t). \tag{3.92}$$

Thời gian T thỏa mãn $y(T) = l$ được cho bởi $l = y_0 \cosh(\alpha T)$. Sử dụng $\sinh x = \sqrt{\cosh^2 x - 1}$, chúng ta thấy rằng vận tốc của sợi xích ngay tại thời điểm khi nó mất liên kết với bàn là

$$\dot{y}(T) = \alpha y_0 \sinh(\alpha T) = \alpha\sqrt{\ell^2 - y_0{}^2} \equiv \sqrt{g\ell}\sqrt{1 - \eta_0{}^2}, \tag{3.93}$$

trong đó $\eta_0 \equiv y_0/\ell$ là tỷ lệ ban đầu của phần thõng xuống dưới lỗ. Nếu $\eta_0 \approx 0$, thì vận tốc tại thời điểm T là $\sqrt{g\ell}$ (điều này có thể tìm ra một cách nhanh chóng từ định luật bảo toàn năng lượng mà sẽ được nghiên cứu ở trong Chương 5). Hơn nữa, bạn cũng có thể chỉ ra rằng phương trình (3.91) suy ra T tiến dần ra vô hạn theo hàm log khi $\eta_0 \to 0$.

LỜI GIẢI THỨ HAI: Biểu diễn $\ddot{y}$ dưới dạng vdv/dy trong phương trình (3.89), sau đó tách biến và lấy tích phân ta thu được

$$\int_0^v vdv = \alpha^2 \int_{y_0}^{y} ydy \quad \Longrightarrow \quad v^2 = \alpha^2(y^2 - {y_0}^2), \tag{3.94}$$

trong đó $\alpha \equiv \sqrt{g/\ell}$. Bây giờ biểu diễn v dưới dạng dy/dt và tách biến lần nữa để nhận được

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\sqrt{y^2 - {y_0}^2}} = \alpha \int_0^t dt. \tag{3.95}$$

Tích phân của vế trái là $\cosh^{-1}(y/y_0)$, vì vậy chúng ta có $y(t) = y_0 \cosh(\alpha t)$, giống như kết quả trong phương trình (3.91). Sau đó các kết quả khác được tìm theo phương pháp như phần trên. Tuy nhiên, một cách đơn giản hơn để thu được vận tốc cuối cùng của sợi xích bằng cách dùng phương pháp này là sử dụng kết quả của v trong phương trình (3.94). Điều này cho thấy vận tốc của sợi xích khi nó rời bàn (nghĩa là khi $y = l$) là $v = \alpha\sqrt{\ell^2 - {y_0}^2}$, trùng với kết quả trong phương trình (3.93).

3.12. Ném một quả bóng

Cả trong trường hợp quả bóng bay lên hay rơi xuống, thì tổng lực tác động lên quả bóng là

$$F = -mg - m\alpha v. \tag{3.96}$$

Khi chuyển động lên trên, v là dương, vì vậy lực cản hướng xuống dưới. Và khi rơi xuống, v là âm, và lực cản hướng lên trên. Chiến thuật của chúng ta để tìm v_{f} sẽ là đưa ra hai biểu thức khác nhau cho độ cao lớn nhất h của quả bóng, và sau cho chúng bằng nhau. Ta sẽ tìm hai biểu thức này bằng cách xem xét chuyển động hướng lên và hướng xuống của quả bóng. Để làm được như vậy, chúng ta cần biểu diễn gia tốc của quả bóng dưới dạng $a = vdv/dy$. Với chuyển động hướng lên trên, phương trình $F = ma$ cho

$$-mg - m\alpha v = mv\frac{dv}{dy} \quad \Longrightarrow \quad \int_0^h dy = -\int_{v_0}^{0} \frac{vdv}{g + \alpha v}, \tag{3.97}$$

trong đó chúng ta sử dụng thực tế là vận tốc của quả bóng tại điểm cao nhất bằng không. Viết $v/(g + \alpha v)$ dưới dạng $[1 - g/(g + \alpha v)]/\alpha$, thì tích phân trên sẽ cho ta

$$h = \frac{v_0}{\alpha} - \frac{g}{\alpha^2} \ln\left(1 + \frac{\alpha v_0}{g}\right). \tag{3.98}$$

Bây giờ chúng ta xét chuyển động hướng xuống dưới của quả bóng. Gọi $v_{\rm f}$ là tốc độ chuyển động cuối cùng, mà nó là đại lượng dương. Khi đó vận tốc cuối là âm, $-v_{\rm f}$. Sử dụng phương trình $F = ma$ ta thu được

$$\int_h^0 dy = -\int_0^{-v_{\rm f}} \frac{v dv}{g + \alpha v}. \tag{3.99}$$

Tính toán tích phân (hoặc đơn giản chỉ thay v_0 ở trong phương trình (3.98) bởi $v_{\rm f}$) cho ta

$$h = -\frac{v_{\rm f}}{\alpha} - \frac{g}{\alpha^2} \ln\left(1 - \frac{\alpha v_{\rm f}}{g}\right). \tag{3.100}$$

Cho hai biểu thức của h trong (3.98) và (3.100) bằng nhau chúng ta sẽ nhận được một phương trình dạng ẩn cho $v_{\rm f}$ biểu diễn theo v_0,

$$v_0 + v_{\rm f} = \frac{g}{\alpha} \ln\left(\frac{g + \alpha v_0}{g - \alpha v_{\rm f}}\right). \tag{3.101}$$

NHẬN XÉT: Trong trường hợp giới hạn khi α là nhỏ (chính xác hơn là trong trường hợp giới hạn khi $\alpha v_0/g \ll 1$), chúng ta có thể sử dụng $\ln(1 + x) = x - x^2/2 + \cdots$ để nhận được giá trị gần đúng của h trong các phương trình (3.98) và (3.100). Các kết quả, đúng như chúng ta mong đợi, là

$$h \approx \frac{{v_0}^2}{2g}, \quad \text{và} \quad h \approx \frac{{v_{\rm f}}^2}{2g}. \tag{3.102}$$

Chúng ta cũng có thể lấy xấp xỉ trong trường hợp khi α lớn (hoặc $\alpha v_0/g$ lớn). Trong trường hợp giới hạn này, số hạng của hàm log trong phương trình (3.98) có thể bỏ qua được, vì vậy ta có $h \approx v_0/\alpha$. Và phương trình (3.100) cho $v_{\rm f} \approx g/\alpha$, bởi vì đối số của hàm log phải rất nhỏ để có một giá trị âm lớn, mà điều này là cần thiết để có được giá trị h là dương ở vế trái. Không có cách nào để có được liên hệ giữa $v_{\rm f}$ và h trong trường hợp giới hạn này, vì quả bóng sẽ nhanh chóng đạt được vận tốc tới hạn $-g/\alpha$ (là vận tốc làm cho tổng hợp lực tác động lên quả bóng bằng không) độc lập với h. ♣

Bây giờ chúng ta đi tìm thời gian của quả bóng để nó đi lên và đi xuống. Chúng ta sẽ đưa ra hai phương pháp để làm điều này.

PHƯƠNG PHÁP THỨ NHẤT: Gọi T_1 là thời gian để quả bóng đi lên trên. Nếu chúng ta biểu diễn gia tốc của quả bóng dưới dạng $a = dv/dt$, thì phương trình $F = ma$ cho $-mg - m\alpha v = mdv/dt$. Tách biến và lấy tích phân phương trình này suy ra

$$\int_0^{T_1} dt = -\int_{v_0}^0 \frac{dv}{g + \alpha v} \quad \Longrightarrow \quad T_1 = \frac{1}{\alpha} \ln\left(1 + \frac{\alpha v_0}{g}\right). \tag{3.103}$$

Làm một cách tương tự, chúng ta tìm được thời gian T_2 để để quả bóng đi xuống là

$$T_2 = -\frac{1}{\alpha} \ln\left(1 - \frac{\alpha v_{\rm f}}{g}\right). \tag{3.104}$$

Do đó,

$$T_1 + T_2 = \frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{g+\alpha v_0}{g-\alpha v_{\rm f}}\right) = \frac{v_0 + v_{\rm f}}{g}, \tag{3.105}$$

ở đây chúng ta đã sử dụng phương trình (3.101). Thời gian này là ngắn hơn thời gian khi quả bóng chuyển động trong chân không (là $2v_0/g$) vì $v_{\rm f} < v_0$.

PHƯƠNG PHÁP THỨ HAI: Dạng rất đơn giản của phương trình (3.105) gợi ý cho chúng ta rằng có một cách nhanh hơn rất nhiều để nhận lại được kết quả này. Thật vậy, nếu chúng ta lấy tích phân $mdv/dt = -mg - m\alpha v$ theo tổng thời gian khi quả bóng đi lên, ta thu được $-v_0 = -gT_1 - \alpha h$ (vì $\int vdt = h$). Tương tự như vậy, nếu chúng ta lấy tích phân $mdv/dt = -mg - m\alpha v$ theo tổng thời gian khi quả bóng đi xuống, ta thu được $-v_{\rm f} = -gT_2 + \alpha h$ (vì $\int vdt = -h$). Cộng hai kết quả này chúng ta nhận được phương trình (3.105). Chú ý rằng cách làm này thực hiện được bởi vì lực cản là hàm tỷ lệ với v.

> NHẬN XÉT: Việc thời gian chuyển động của quả bóng trong trường hợp này nhỏ hơn thời gian nó chuyển động trong chân không là hoàn toàn không hiển nhiên. Một mặt, quả bóng không đạt được độ cao bằng trường hợp nó chuyển động trong chân không, vì vậy bạn có thể nghĩ rằng $T_1 + T_2 < 2v_0/g$. Nhưng mặt khác, quả bóng sẽ chuyển động chậm hơn trong không khí khi nó đi xuống, do đó bạn có thể nghĩ rằng $T_1 + T_2 > 2v_0/g$. Hiển nhiên chúng ta khó có thể biết là hiệu ứng nào sẽ có tác động lớn hơn nếu chúng ta không tính toán cụ thể.[27] Với bất kỳ giá trị α nào, bạn có thể sử dụng phương trình (3.103) để chỉ ra rằng trong trường hợp giới hạn khi α lớn, quả bóng sẽ nhanh chóng đạt đến vận tốc tới hạn, vì vậy ta có $T_2 \approx h/v_{\rm f}$. Sử dụng kết quả từ nhận xét bên trên, kết quả này trở thành $T_2 \approx (v_0/\alpha)/(g/\alpha) = v_0/g$. Thật là thú vị, thời gian này bằng thời gian quả bóng chuyển động xuống dưới (và hướng lên trên) khi nó chuyển động trong chân không. ♣

3.13. Cân bằng bút chì ***

1. Thành phần của trọng lực theo phương tiếp tuyến của chuyển động là $mg\sin\theta \approx mg\theta$. Do đó phương trình $F = ma$ theo phương tiếp tuyến là $mg\theta = m\ell\ddot{\theta}$, mà có thể viết dưới dạng $\ddot{\theta} = (g/\ell)\theta$. Nghiệm tổng quát của phương trình là[28]

$$\theta(t) = Ae^{t/\tau} + Be^{-t/\tau}, \quad \text{trong đó} \quad \tau \equiv \sqrt{l/g}. \tag{3.106}$$

[27] Một trường hợp tương tự khi ta cũng không biết là hiệu ứng tác động nào lớn hơn có thể tìm trong Bài tập luyện tập 3.36.

[28] Nếu bạn muốn, bạn có thể tìm lại kết quả này bằng cách tách biến rồi lấy tích phân. Nghiệm của phương trình này về cơ bản là giống với nghiệm được tìm trong phương pháp thứ hai trình bày trong lời giải của Bài tập 3.11.

Hằng số A và B được tìm từ các điều kiện ban đầu,

$$\begin{aligned} \theta(0) = \theta_0 \quad &\Longrightarrow \quad A + B = \theta_0, \\ \dot{\theta}(t) = \omega_0 \quad &\Longrightarrow \quad (A - B)/\tau = \omega_0. \end{aligned} \tag{3.107}$$

Giải ra A và B sau đó thay kết quả tìm được vào phương trình (3.106) ta có

$$\theta(t) = \frac{1}{2}(\theta_0 + \omega_0\tau)e^{t/\tau} + \frac{1}{2}(\theta_0 - \omega_0\tau)e^{-t/\tau}. \tag{3.108}$$

2. Các hằng số A và B sẽ trở thành rất nhỏ (mỗi hằng số sẽ có bậc của $\sqrt{\hbar}$). Do đó, tại thời gian khi hệ số mũ lũy thừa dương tăng thành giá trị đủ lớn để làm cho θ có độ lớn bậc 1, thì hệ số mũ lũy thừa âm sẽ có giá trị không đáng kể. Do đó từ bây giờ chúng ta sẽ bỏ qua số hạng này. Nói cách khác,

$$\theta(t) \approx \frac{1}{2}(\theta_0 + \omega_0\tau)e^{t/\tau}. \tag{3.109}$$

Mục đích của chúng ta là giữ θ có giá trị nhỏ trong thời gian lâu nhất có thể. Vì vậy, chúng ta sẽ cực tiểu hóa hệ số của hàm mũ, mà nó phải thỏa mãn điều kiện của nguyên lý bất định, $(\ell\theta_0)(m\ell\omega_0) \geq \hbar$. Điều kiện này cho $\omega_0 \geq \hbar/(m\ell^2\theta_0)$. Do đó,

$$\theta(t) \geq \frac{1}{2}\left(\theta_0 + \frac{\hbar\tau}{m\ell^2\theta_0}\right)e^{t/\tau}. \tag{3.110}$$

Lấy đạo hàm theo θ_0 để tìm cực tiểu hệ số này, chúng ta tìm được giá trị cực tiểu của nó xảy ra tại $\theta_0 = \sqrt{\hbar\tau/m\ell^2}$. Thay giá trị này vào phương trình (3.110) ta thu được

$$\theta(t) \geq \sqrt{\frac{\hbar\tau}{m\ell^2}}e^{t/\tau}. \tag{3.111}$$

Cho $\theta \approx 1$, và sau đó giải ra t ta có (sử dụng $\tau \equiv \sqrt{l/g}$)

$$t \leq \frac{1}{4}\sqrt{\frac{l}{g}}\ln\left(\frac{m^2\ell^3 g}{\hbar^2}\right). \tag{3.112}$$

Với các giá trị cho trước $m = 0.01$ kg và $l = 0.1$ m, cùng với $g = 10m/s^2$ và $\hbar = 1.06.10^{-34}Js$, ta nhận được

$$t \leq \frac{1}{4}(0.1s)\ln(9.10^{61}) \approx 3.5s. \tag{3.113}$$

Bất kể bạn thông minh như thế nào đi chăng nữa, và bất kể việc bạn chi rất nhiều tiền vào các thiết bị tối tân làm cho bút chì cân bằng, thì không bao giờ bạn có thể làm cho bút chì cân bằng được hơn bốn giây.

NHẬN XÉT:

1. Việc tìm ra thời gian khá là nhỏ của kết quả này khá là ngạc nhiên. Chú ý là một ảnh hưởng của lý thuyết lượng tử tác động lên một vật thể ở cấp độ vĩ mô có thể cho ta một giá trị thời gian đủ lớn như trong các hiện tượng của cuộc sống hàng ngày. Về cơ bản, mấu chốt của vấn đề là sự tăng nhanh theo hàm mũ của θ (có hệ số hàm mũ của thời gian t trong kết quả) sẽ lấn át ảnh hưởng của giá trị nhỏ của $\hbar$, và sẽ cho chúng ta kết quả của t có độ lớn bậc 1. Khi tới một thời điểm nào đó thì hàm mũ sẽ luôn thắng thế.

2. Giá trị của t ở trên phụ thuộc rất nhiều vào độ lớn của ℓ và g, thông qua số hạng $\sqrt{\ell/g}$. Nhưng sự phụ thuộc vào m, ℓ và g trong số hạng log là rất yếu, vì $\hbar$ quá nhỏ. Ví dụ nếu m được tăng lên gấp 1000 lần thì kết quả của t chỉ tăng khoảng 10%. Điều này có nghĩa rằng bất cứ thừa số nào có độ lớn bậc nhất mà chúng ta đã bỏ qua trong bài toán này là hoàn toàn không có liên quan gì. Chúng sẽ xuất hiện trong đối số của số hạng log, và do đó sẽ không có ảnh hưởng gì đáng kể.

3. Chú ý rằng phương pháp phân tích thứ nguyên, nói chung là một công cụ rất mạnh, sẽ không giúp bạn nhiều trong bài toán này. Đại lượng $\sqrt{\ell/g}$ có đơn vị là thời gian, và đại lượng $\eta \equiv m^2\ell^3 g/\hbar^2$ không có thứ nguyên (nó chỉ là một số), vì vậy thời gian cân bằng của bút chì phải có dạng,

$$t \approx \sqrt{\frac{\ell}{g}} f(\eta), \tag{3.114}$$

trong đó f là một hàm số nào đó. Nếu số hạng chính trong hàm f là một hàm mũ (thậm chí nó có thể là một căn số bậc hai), thì t về cơ bản là vô hạn ($t \approx 10^{30}s \approx 10^{22}$ năm đối với trường hợp lấy căn bậc hai). Nhưng thực tế f là một hàm log (mà bạn không thể biết nó là hàm log nếu không giải bài toán), là hàm mà sẽ triệt tiêu ảnh hưởng của giá trị bé của $\hbar$, làm giảm một khoảng thời gian vô hạn xuống còn một vài giây. ♣

3.14. Diện tích quỹ đạo lớn nhất

Gọi θ là góc quả bóng bị ném lên. Khi đó các tọa độ của quả bóng được cho bởi $x = (v\cos\theta)t$ và $y = (v\sin\theta)t - gt^2/2$. Tổng thời gian quả bóng chuyển động trong không khí là $2(v\sin\theta)/g$, do vậy diện tích dưới đường quỹ đạo của nó, $A = \int ydx$, là

$$\int_0^{x_{\max}} ydx = \int_0^{2v\sin\theta/g} \left((v\sin\theta)t - \frac{gt^2}{2}\right)(v\cos\theta dt) = \frac{2v^4}{3g^2}\sin^3\theta\cos\theta. \tag{3.115}$$

Lấy đạo hàm giá trị này, chúng ta tìm được giá trị lớn nhất của nó xảy ra khi $\tan\theta = \sqrt{3}$, nghĩa là, khi $\theta = 60°$. Vậy diện tích lớn nhất là $A_{\max} = \sqrt{3}v^4/8g^2$. Chú ý rằng bằng phương pháp phân tích thứ nguyên chúng ta có thể biết rằng diện tích này, mà có đơn vị là độ dài bình phương, phải tỷ lệ với v^4/g^2.

3.15. Bóng nảy

Quả bóng đi được một quãng đường là $2h$ trong quá trình nảy lên và rơi xuống lần thứ nhất. Nó đi được quãng đường là $2hf$ trong quá trình thứ hai, và $2hf^2$ trong quá trình thứ ba, và v.v... Do đó, tổng quãng đường đi được là

$$D = 2h(1 + f + f^2 + f^3 + \cdots) = \frac{2h}{1-f}. \tag{3.116}$$

Thời gian quả bóng đi xuống trong quá trình đi lên và rơi xuống lần thứ nhất nhận được từ $h = gt^2/2$. Do đó thời gian nó chuyển động trong quá trình đi lên và rơi xuống thứ nhất là $2t = 2\sqrt{2h/g}$. Tương tự như vậy, thời gian để lần thứ hai đi lên và rơi xuống là $2\sqrt{2(hf)/g}$. Mỗi lần đi lên và rơi xuống liên tiếp thời gian chuyển động sẽ giảm theo cấp số nhân với công bội là $\sqrt{f}$, do vậy tổng thời gian chuyển động của quả bóng là

$$T = 2\sqrt{\frac{2h}{g}}(1 + f^{1/2} + f^1 + f^{3/2} + \cdots) = 2\sqrt{\frac{2h}{g}}.\frac{1}{1-\sqrt{f}}. \tag{3.117}$$

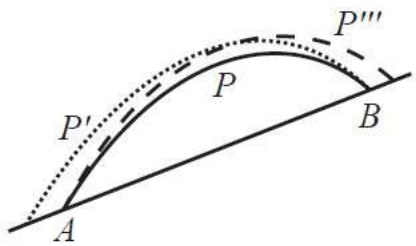
Do đó vận tốc trung bình trong suốt quá trình là

$$\frac{D}{T} = \frac{\sqrt{gh/2}}{1+\sqrt{f}}. \tag{3.118}$$

NHẬN XÉT: Vận tốc trung bình trong trường hợp $f \approx 1$ bằng khoảng một nửa vận tốc trung bình trong trường hợp $f \approx 0$. Điều này dường như trái ngược với trực giác của chúng ta, bởi vì trong trường hợp $f \approx 0$ quả bóng sẽ giảm vận tốc nhanh hơn rất nhiều so với trường hợp $f \approx 1$. Nhưng trường hợp $f \approx 0$ về cơ bản chỉ có một lần nảy, và vận tốc trung bình trong lần nảy đó là lớn nhất so với bất kỳ lần nảy nào. Cả D và T khi $f \approx 0$ đều nhỏ hơn so với trường hợp khi $f \approx 1$, nhưng T sẽ có giá trị nhỏ bậc cao hơn. ♣

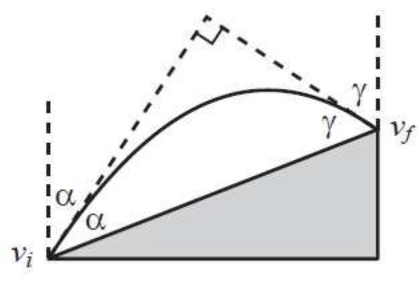
3.16. Các vận tốc trực giao

Trong trường hợp đạt được tầm xa lớn nhất, gọi v_i là vận tốc ban đầu của quả bóng, và v_f là vận tốc cuối của quả bóng ngay trước khi nó chạm mặt đất (vì vậy $v_\mathrm{f} = \sqrt{{v_\mathrm{i}}^2 - 2gh}$, trong đó h là độ cao của quả bóng tại thời điểm cuối). Gọi đường quỹ đạo parabol là P, và gọi các điểm đầu và cuối là A và B, như chỉ ra trong Hình 3.40. Xem xét câu hỏi, "Cho trước một vận tốc ban đầu v_f, hỏi quả bóng phải được ném với một góc nghiêng bằng bao nhiêu *xuống* dưới mặt đất nghiêng từ điểm B để nó chuyển động được một khoảng cách lớn nhất?" Câu trả lời là nó phải được ném theo một đường cong giống đường cong P, mà đơn giản chỉ là chuyển động ngược lại. Đây chắc chắn là một đường quỹ đạo phù hợp có ý nghĩa vật lý (đảo ngược thời gian vẫn dẫn đến một nghiệm của phương trình $F = ma$ cho chuyển động ném xiên), và chúng ta có thể khẳng định rằng quỹ đạo này cũng sẽ cho ta tầm xa lớn nhất. Điều này có thể thấy theo cách sau đây.



Hình 3.40:

Giả sử rằng (để sau đó sẽ tìm ra một điều vô lý) với vận tốc đầu v_f, tầm xa lớn nhất khi quả bóng bị ném xuống mặt đất nghiêng đạt được với một đường quỹ đạo P' khác mà theo đường quỹ đạo này thì quả bóng sẽ rơi xuống mặt đất xa hơn, như chỉ ra trong Hình 3.40. Khi đó nếu chúng ta giảm vận tốc ban đầu v_f một giá trị thích hợp nào đó, quả bóng sẽ rơi xuống điểm A theo một đường P'' nào đó (không được chỉ ra vì khi đó hình trở nên rối rắm). Từ định luật bảo toàn năng lượng, vận tốc cuối tại A trong trường hợp này nhỏ hơn v_i. Nhưng nếu chúng ta đơn giản là đảo ngược chuyển động theo đường P'', ta thấy rằng ta có thể đi từ A đến B bằng cách sử dụng một vận tốc ban đầu nhỏ hơn v_i. Do đó, nếu sau đó chúng ta tăng vận tốc này lên tới v_i, chúng ta có thể tới một điểm nằm trên điểm B trên mặt phẳng nghiêng theo một đường P''' nào đó, điều này vô lý vì B là điểm cuối của quỹ đạo cho tầm xa lớn nhất khi ném quả bóng tại A với vận tốc ban đầu v_i. Điều vô lý này chỉ ra rằng tầm xa lớn nhất khi quả bóng được ném xuống mặt nghiêng tại B với vận tốc ban đầu v_f thực tế là phải theo đường quỹ đạo P. Bây



Hình 3.41:

giờ, từ ví dụ trong Mục 3.4, chúng ta biết rằng trong trường hợp đạt được tầm xa lớn nhất, góc ném là góc theo đường phân giác của góc hợp bởi mặt đất và trục thẳng đứng. Do đó chúng ta có tình huống được chỉ ra như trong Hình 3.41, bởi vì cùng một đường cong quỹ đạo cho tầm xa lớn nhất trong cả hai trường hợp ném lên và ném xuống. Vì $2\alpha + 2\gamma = 180°$, ta thấy rằng $\alpha + \gamma = 90°$, đó là điều chúng ta muốn chỉ ra.

3.17. Ném quả bóng từ một vách đá

Gọi góc nghiêng là θ. Khi đó, vận tốc theo phương ngang là $v_x = v\cos\theta$, và vận tốc ban đầu theo phương thẳng đứng là $v_y = v\sin\theta$. Thời gian để quả bóng chạm mặt đất được cho bởi $h + (v\sin\theta)t - gt^2/2 = 0$. Do đó,

$$t = \frac{v}{g}\left(\sin\theta + \sqrt{\sin^2\theta + \beta}\right), \quad \text{trong đó} \quad \beta \equiv \frac{2gh}{v^2}. \tag{3.119}$$

(Nghiệm tương ứng với dấu "-" trong biểu thức của t trong phương trình bậc hai tương ứng với trường hợp quả bóng được ném xuống theo chiều ngược lại từ vách núi.) Tầm xa của chuyển động này là $d = (v\cos\theta)t$ mà cho ta

$$d = \frac{v^2}{g}\cos\theta\left(\sin\theta + \sqrt{\sin^2\theta + \beta}\right). \tag{3.120}$$

Ta muốn tìm giá trị cực đại của hàm này theo θ. Lấy đạo hàm rồi nhân chéo với $\sqrt{\sin^2\theta + \beta}$, và cho kết quả này bằng không ta có

$$(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\sqrt{\sin^2\theta + \beta} = \sin\theta\big(\beta - (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\big). \tag{3.121}$$

Sử dụng $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$, và sau đó lấy căn và rút gọn phương trình này, chúng ta suy ra góc tối ưu là

$$\sin\theta_{\max} = \frac{1}{\sqrt{2+\beta}} \equiv \frac{1}{\sqrt{2 + 2gh/v^2}}. \tag{3.122}$$

Thay giá trị này vào phương trình (3.120) và rút gọn chúng ta suy ra tầm xa cực đại là

$$d_{\max} = \frac{v^2}{g}\sqrt{1+\beta} \equiv \frac{v^2}{g}\sqrt{1 + \frac{2gh}{v^2}}. \tag{3.123}$$

Nếu $h = 0$, thì $\theta_{\max} = \pi/4$ và $d_{\max} = v^2/g$, giống với kết quả trong ví dụ trong Mục 3.4. Nếu $h \to \infty$ hoặc $v \to 0$, thì $\theta_{\max} \approx 0$, điều này là hợp lý.

NHẬN XÉT: Nếu chúng ta sử dụng định luật bảo toàn năng lượng (được thảo luận trong Chương 5), hóa ra rằng vận tốc cuối của quả bóng khi nó chạm đất là $v_{\mathrm{f}} = \sqrt{v^2 + 2gh}$. Tầm xa lớn nhất trong phương trình (3.123) do đó có thể được viết dưới dạng như sau (với $v_{\mathrm{i}} \equiv v$ là vận tốc ban đầu)

$$d_{\max} = \frac{v_{\mathrm{i}}v_{\mathrm{f}}}{g}. \tag{3.124}$$

Chú ý rằng đây là tính đối xứng của v_{i} và v_{f}, vì chúng ta có thể tưởng tượng đến đường quỹ đạo ngược lại. Hơn nữa, giá trị này bằng không khi v_{i} bằng không, và nó giảm về v^2/g khi bóng được ném từ mặt đất. Ta cũng có thể biểu diễn góc θ trong phương trình (3.122) theo v_{f} (thay vì theo h). Bạn có thể chỉ ra rằng kết quả sẽ là $\tan\theta = v_{\mathrm{i}}/v_{\mathrm{f}}$. Điều này suy ra rằng vận tốc đầu và vận tốc cuối là trực giao với nhau, bởi vì khi đi theo quỹ đạo ngược sẽ phải hoán vị v_{i} và v_{f}, nghĩa là tích của các hệ số góc của hai góc này bằng 1. Kết quả này về cơ bản là giống kết quả trong Bài tập 3.16. ♣

3.18. Chuyển hướng chuyển động

LỜI GIẢI THỨ NHẤT: Ta sẽ sử dụng kết quả trong Bài tập 3.17, đó là phương trình (3.123) và (3.122), mà chúng nói rằng một vật được ném từ độ cao y với vận tốc v sẽ đạt được tầm xa lớn nhất theo chiều ngang là

$$d_{\max} = \frac{v^2}{g}\sqrt{1 + \frac{2gy}{v^2}}, \tag{3.125}$$

và góc tối ưu để đạt được tầm xa lớn nhất này là

$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2 + 2gy/v^2}}. \tag{3.126}$$

Trong bài toán đang xét này, vật được thả rơi từ độ cao h, do vậy hệ thức động năng ${v_\mathrm{f}}^2 = {v_\mathrm{i}}^2 + 2ad$ cho ta vận tốc của quả bóng ở độ cao y là $v = \sqrt{2g(h-y)}$. Thay giá trị này vào phương trình (3.125) chúng ta có tầm xa lớn nhất, như là một hàm số của y, là

$$d_{\max}(y) = 2\sqrt{h(h-y)}. \tag{3.127}$$

Giá trị này đạt giá trị lớn nhất khi $y = 0$ (với giả sử rằng chúng ta không thể có y âm), khi đó tầm xa là $d_{\max} = 2h$. Phương trình (3.126) cho ta góc tối ưu tương ứng là $\theta = 45°$.

LỜI GIẢI THỨ HAI: Giả sử rằng tầm xa lớn nhất d_0 nhận được khi bề mặt được đặt tại $y = y_0$. Ta sẽ chỉ ra rằng y_0 phải bằng 0. Ta sẽ làm việc này bằng cách giả sử $y_0 \neq 0$ và sẽ xây dựng một trường hợp mà quả bóng sẽ có một tầm xa lớn hơn.

Gọi P là điểm mà quả bóng chạm đất sau khi nó nảy ra từ bề mặt ở độ cao y_0. Xét một trường hợp giả sử thứ hai khi quả bóng rơi từ độ cao h thẳng đứng ở bên trên điểm P. Vận tốc của quả bóng này tại P sẽ bằng vận tốc của quả bóng ban đầu tại P. Điều này được suy ra từ định luật bảo toàn năng lượng. (Hoặc, do chúng ta chưa xét đến định luật bảo toàn năng lượng, bạn có thể sử dụng hệ thức động năng ${v_\mathrm{f}}^2 = {v_\mathrm{i}}^2 + 2ad$ cho vận tốc của hai quả bóng; áp dụng hệ thức này hai lần cho quả bóng thứ nhất.)

Bây giờ tưởng tượng là đặt một bề mặt tại điểm P với một góc nghiêng thích hợp để cho quả bóng thứ hai nảy ra theo phương trùng với phương chuyển động của quả bóng thứ nhất khi nó đến điểm này. Khi đó quả bóng thứ hai sẽ chuyển động ngược lại theo đường quỹ đạo parabol của quả bóng thứ nhất. Nhưng điều này có nghĩa là sau khi quả bóng thứ hai đạt đến vị trí của mặt nghiêng tại độ cao y_0 (mà chúng bây giờ chúng ta đã bỏ mặt phẳng nghiêng này đi), nó sẽ đi thêm khoảng cách theo chiều ngang nữa trước khi nó chạm mặt đất. Do đó chúng ta vừa mới xây dựng một trường hợp trong đó quả bóng chuyển động có tầm xa lớn hơn tầm xa trong trường hợp mà chúng ta giả sử là sẽ cho tầm xa lớn nhất. Như vậy cơ cấu tối ưu phải là $y_0 = 0$, và trong cơ cấu này ví dụ trong Mục 3.4 cho chúng ta biết rằng góc tối ưu phải là $\theta = 45°$. Nếu chúng ta muốn quả bóng thậm chí là đi xa hơn, chúng ta có thể đào một hố (đủ rộng) trên mặt đất và cho quả bóng nảy ra từ đáy của hố này.

3.19. Độ dài đường quỹ đạo lớn nhất ***

Gọi θ là góc mà quả bóng được ném. Khi đó các tọa độ của quả bóng được cho bởi $x = (v\cos\theta)t$ và $y = (v\sin\theta)t - gt^2/2$. Quả bóng lên tới độ cao lớn nhất tại thời điểm $t = v\sin\theta/g$, vì vậy độ dài đường quỹ đạo mà quả bóng chuyển động là

$$\begin{aligned} L &= 2\int_0^{v\sin\theta/g} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \\ &= 2\int_0^{v\sin\theta/g} \sqrt{(v\cos\theta)^2 + (v\sin\theta - gt)^2}\, dt \\ &= 2v\cos\theta \int_0^{v\sin\theta/g} \sqrt{1 + \left(\tan\theta - \frac{gt}{v\cos\theta}\right)^2}\, dt. \end{aligned} \tag{3.128}$$

Đặt $z \equiv \tan\theta - gt/v\cos\theta$, ta thu được

$$L = -\frac{2v^2\cos^2\theta}{g}\int_{\tan\theta}^{0} \sqrt{1+z^2}\, dz. \tag{3.129}$$

Ta có thể tìm cách tính tích phân này, hoặc là chúng ta có thể suy ra kết quả bằng cách thay $z \equiv \sinh\alpha$. Kết quả sẽ là

$$\begin{aligned} L &= \frac{2v^2\cos^2\theta}{g}\cdot\frac{1}{2}\Big(z\sqrt{1+z^2} + \ln(z + \sqrt{1+z^2})\Big)\Big|_0^{\tan\theta} \\ &= \frac{v^2}{g}\left(\sin\theta + \cos^2\theta\ln\left(\frac{\sin\theta+1}{\cos\theta}\right)\right). \end{aligned} \tag{3.130}$$

Như là một cách kiểm tra, bạn có thể kiểm tra rằng $L = 0$ khi $\theta = 0$, và $L = v^2/g$ khi $\theta = 90°$. Lấy đạo hàm phương trình (3.130) để tìm giá trị lớn nhất, ta nhận được

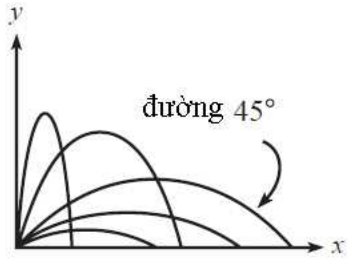
$$\begin{aligned} 0 &= \cos\theta - 2\cos\theta\sin\theta\ln\left(\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right) \\ &\quad + \cos^2\theta\left(\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}\right)\frac{\cos^2\theta + (1+\sin\theta)\sin\theta}{\cos^2\theta}. \end{aligned} \tag{3.131}$$

Điều này rút gọn về

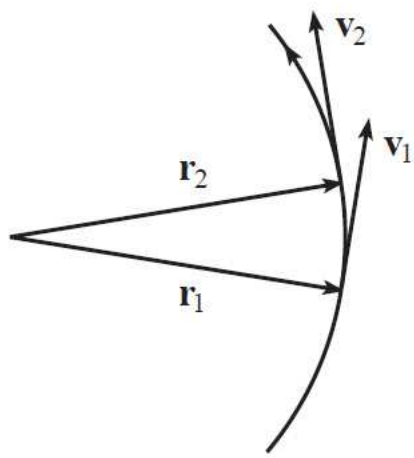
$$1 = \sin\theta\ln\left(\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right). \tag{3.132}$$

Bạn có thể chỉ ra nghiệm số của phương trình này cho θ là $\theta_0 \approx 56.5°$.

NHẬN XÉT: Một số đường quỹ đạo có khả năng xảy ra được chỉ ra trong Hình 3.42. Sử dụng kết quả là góc $\theta = 45°$ cho *tầm xa* lớn nhất, từ hình vẽ chúng ta có thể suy ra rằng góc θ_0 để nhận được đường quỹ đạo dài nhất phải thỏa mãn $\theta_0 \geq 45°$. Tuy nhiên để tìm giá trị chính xác của góc này chúng ta cần cần các tính toán chi tiết ở trên. ♣



Hình 3.42:



Hình 3.43:

3.20. Gia tốc hướng tâm

Các vector vị trí và vector vận tốc tại hai thời gian gần nhau được chỉ ra như trong Hình 3.43. Hiệu của chúng, $\Delta\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ và $\Delta\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$, được chỉ ra trong Hình 3.44. Góc giữa các vector $\mathbf{v}$ bằng góc giữa các vector $\mathbf{r}$, vì mỗi vector $\mathbf{v}$ tạo một góc vuông tương ứng với vector $\mathbf{r}$. Do đó, các tam giác trong Hình 3.44 là đồng dạng, vì vậy ta có

$$\frac{|\Delta\mathbf{v}|}{v} = \frac{|\Delta\mathbf{r}|}{r}, \tag{3.133}$$

trong đó $r \equiv |\mathbf{r}|$ và $v \equiv |\mathbf{v}|$. Chia cả hai vế cho Δt ta thu được

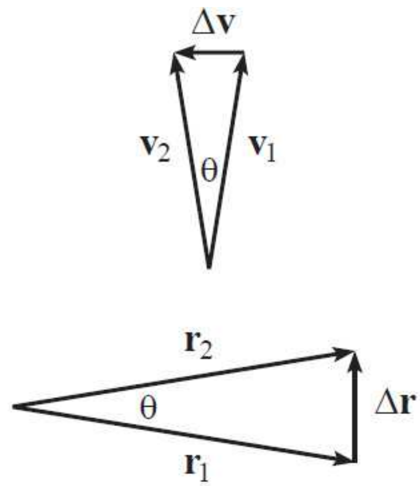
$$\frac{1}{v}\left|\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}\right| = \frac{1}{r}\left|\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}\right| \quad \Longrightarrow \quad \frac{|\mathbf{a}|}{v} = \frac{|\mathbf{v}|}{r} \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{v^2}{r}. \tag{3.134}$$

Ta vừa giả sử rằng Δt là rất nhỏ ở đây, điều này cho phép chúng ta bỏ qua các đại lượng Δ và thay vào đó là các giá trị tức thời.

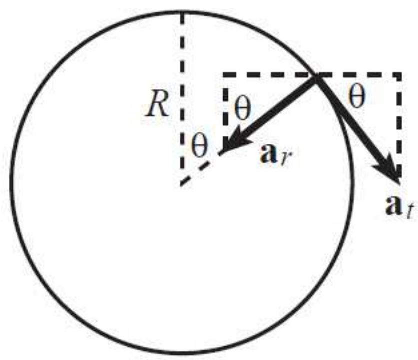
3.21. Gia tốc thẳng đứng

Gọi θ là góc đi xuống từ đỉnh của vành. Gia tốc tiếp tuyến là $a_t = g\sin\theta$, và gia tốc hướng tâm là $a_r = v^2/R = 2gh/R$. Nhưng độ cao rơi xuống là $h = R - R\cos\theta$, vì vậy ta có

$$a_r = \frac{2gR(1-\cos\theta)}{R} = 2g(1-\cos\theta). \tag{3.135}$$



Hình 3.44:



Hình 3.45:

Chúng ta muốn gia tốc tổng hợp là theo phương thẳng đứng, nghĩa là chúng ta muốn các thành phần theo phương ngang của $\mathbf{a}_t$ và $\mathbf{a}_r$ trong Hình 3.45 là triệt tiêu nhau. Nghĩa là $a_t \cos\theta = a_r \sin\theta$. Điều này cho ta

$$(g\sin\theta)\cos\theta = 2g(1-\cos\theta)\sin\theta \quad \Longrightarrow \quad \sin\theta = 0 \quad \text{hoặc} \quad \cos\theta = 2/3. \tag{3.136}$$

Nghiệm $\sin\theta = 0$ tương ứng với đỉnh và đáy của vành ($\theta = 0$ và $\theta = \pi$). Vậy chúng ta sẽ chọn nghiệm $\cos\theta = 2/3 \quad \Longrightarrow \quad \theta \approx \pm 48.2°$. Gia tốc theo phương thẳng đứng là tổng các thành phần thẳng đứng của $\mathbf{a_t}$ và $\mathbf{a_r}$, vì vậy

$$\begin{aligned} a_y = a_t \sin\theta + a_r\cos\theta &= (g\sin\theta)\sin\theta + 2g(1-\cos\theta)\cos\theta \\ &= g(\sin^2\theta + 2\cos\theta - 2\cos^2\theta). \end{aligned} \tag{3.137}$$

Sử dụng $\cos\theta = 2/3$, và do đó $\sin\theta = \sqrt{5}/3$, ta có

$$a_y = g\Big(\frac{5}{9} + 2\cdot\frac{2}{3} - 2\cdot\frac{4}{9}\Big) = g. \tag{3.138}$$

NHẬN XÉT: Lý do cho kết quả rất đẹp này là như sau. Nếu không có gia tốc theo phương ngang, thì phản lực từ vành tác động lên hạt phải không có thành phần theo phương nằm ngang. Nói một cách khác, $N\sin\theta = 0$. Do đó, hoặc là $\sin\theta = 0$ (tương ứng với nghiệm tại đỉnh và đáy của vành tròn $\theta = 0$ và $\theta = \pi$), hoặc $N = 0$, nghĩa là không có phản lực, vì vậy hạt chỉ chịu tác dụng của trọng lực, nên nó sẽ rơi tự do với gia tốc $a_y = g$.

Nếu chúng ta muốn, chúng ta có thể sử dụng điều kiện $N = 0$ này như là điểm bắt đầu cho nghiệm thứ hai. Sử dụng a_r từ bên trên, phương trình $F = ma$ theo phương hướng tâm là $mg\cos\theta - N = 2mg(1-\cos\theta)$, với chiều dương của N được định nghĩa hướng ra ngoài. Cho $N = 0$ sẽ dẫn đến các kết quả mong muốn, $\cos\theta = 2/3$. ♣

3.22. Quay tròn quanh một cột

Cho F là lực căng trên dây. Tại điểm vị trí của khối lượng, góc giữa sợi dây và bán kính của đường tròn đứt đoạn là $\theta = \sin^{-1}(r/R)$. Các phương trình $F = ma$ theo phương hướng tâm và phương tiếp tuyến biểu diễn theo θ là

$$F\cos\theta = \frac{mv^2}{R}, \quad \text{và} \quad F\sin\theta = m\dot{v}. \tag{3.139}$$

Chia hai phương trình này với nhau chúng ta thu được $\tan\theta = (R\dot{v})/v^2$. Tách biến và lấy tích phân ta có

$$\begin{aligned} \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v^2} = \frac{\tan\theta}{R}\int_0^t dt \quad &\Longrightarrow \quad \frac{1}{v_0} - \frac{1}{v} = \frac{(\tan\theta)t}{R} \\ &\Longrightarrow \quad v(t) = \left(\frac{1}{v_0} - \frac{(\tan\theta)t}{R}\right)^{-1}. \end{aligned} \tag{3.140}$$

Vận tốc v sẽ đạt giá trị vô hạn khi

$$t = T \equiv \frac{R}{v_0\tan\theta}. \tag{3.141}$$

Điều này có nghĩa là bạn chỉ có thể giữ khối lượng chuyển động trên đường tròn đã cho cho đến thời gian T. Sau thời điểm đó, việc này là không thể. (Dĩ nhiên, nó sẽ trở thành là không thể thực hiện được, trong thực tế, khá lâu trước khi giá trị của v trở nên vô hạn.) Tổng quãng đường, $d = \int v dt$, là vô hạn, bởi vì tích phân này phân kỳ (giống như hàm log) khi t tiến tới T.

3.23. Một lực $F_\theta = m\dot{r}\dot{\theta}$

Với lực đã cho, phương trình (3.51) trở thành

$$0 = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2), \quad \text{và} \quad m\dot{r}\dot{\theta} = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}). \tag{3.142}$$

Phương trình thứ hai của hệ phương trình này cho ta $-\dot{r}\dot{\theta} = r\ddot{\theta}$. Do đó

$$\int \frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}}dt = -\int \frac{\dot{r}}{r}dt \quad \Longrightarrow \quad \ln\dot{\theta} = -\ln r + C \quad \Longrightarrow \quad \dot{\theta} = \frac{D}{r}, \tag{3.143}$$

trong đó $D = e^C$ là hằng số tích phân, xác định bởi các điều kiện ban đầu. Thay giá trị này của $\dot{\theta}$ này vào phương trình thứ nhất của (3.142), và sau đó nhân hai vế với $\dot{r}$ rồi lấy tích phân, ta nhận được

$$\ddot{r} = r\left(\frac{D}{r}\right)^2 \quad\Longrightarrow\quad \int \ddot{r}\dot{r}dt = D^2\int\frac{\dot{r}}{r}dt \quad\Longrightarrow\quad \frac{\dot{r}^2}{2} = D^2\ln r + E. \tag{3.144}$$

Do đó,

$$\dot{r} = \sqrt{A\ln r + B}, \tag{3.145}$$

trong đó $A \equiv 2D^2$ và $B \equiv 2E$.

3.24. Chất điểm tự do

Với lực tác động bằng không, phương trình (3.51) cho

$$\ddot{r} = r\dot{\theta}^2, \quad \text{và} \quad r\ddot{\theta} = -2\dot{r}\dot{\theta}. \tag{3.146}$$

Tách biến trong phương trình thứ hai và lấy tích phân suy ra

$$\int\frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}}dt = -\int\frac{2\dot{r}}{r}dt \quad\Longrightarrow\quad \ln\dot{\theta} = -2\ln r + C \quad\Longrightarrow\quad \dot{\theta} = \frac{D}{r^2}, \tag{3.147}$$

trong đó $D = e^C$ là một hằng số tích phân, xác định bởi các điều kiện ban đầu.[29] Thay các giá trị này của $\dot{\theta}$ vào phương trình thứ nhất của (3.146), sau đó nhân cả hai vế với $\dot{r}$ và lấy tích phân chúng ta thu được

$$\ddot{r} = r\left(\frac{D}{r^2}\right)^2 \quad\Longrightarrow\quad \int \ddot{r}\dot{r}dt = D^2\int\frac{\dot{r}}{r^3}dt \quad\Longrightarrow\quad \frac{\dot{r}^2}{2} = -\frac{D^2}{2r^2} + E. \tag{3.148}$$

Ta muốn $\dot{r} = 0$ khi $r = r_0$, điều này suy ra $E = D^2/2{r_0}^2$. Do đó

$$\dot{r} = V\sqrt{1 - \frac{{r_0}^2}{r^2}}, \tag{3.149}$$

trong đó $V \equiv D/r_0$. Tách biến và lấy tích phân suy ra

$$\int\frac{r\dot{r}dt}{\sqrt{r^2 - {r_0}^2}} = \int V dt \quad\Longrightarrow\quad \sqrt{r^2 - {r_0}^2} = Vt \quad\Longrightarrow\quad r = \sqrt{{r_0}^2 + (Vt)^2}, \tag{3.150}$$

trong đó các hằng số tích phân bằng không, bởi vì chúng ta chọn $t = 0$ là thời điểm tương ứng với $r = r_0$. Đưa giá trị này của r vào kết quả $\dot{\theta} = D/r^2 \equiv Vr_0/r^2$ trong phương trình (3.147) nhận được

$$\int d\theta = \int\frac{Vr_0dt}{{r_0}^2 + (Vt)^2} \quad\Longrightarrow\quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{Vt}{r_0}\right) \quad\Longrightarrow\quad \cos\theta = \frac{r_0}{\sqrt{{r_0}^2 + (Vt)^2}}. \tag{3.151}$$

Cuối cùng, kết hợp điều này với kết quả của r trong phương trình (3.150) ta nhận được $\cos\theta = r_0/r$ như yêu cầu.

[29] Khẳng định $r^2\dot{\theta}$ là hằng số đơn giản là một kết quả của định lý bảo toàn moment động lượng, bởi vì $r^2\dot{\theta} = r(r\dot{\theta}) = rv_\theta$, với v_θ là vận tốc theo phương tiếp tuyến. Để hiểu thêm về điều này, xem Chương 7 và Chương 8.

Chương 4

Dao động

Trong chương này chúng ta sẽ thảo luận về các chuyển động dao động. Những ví dụ đơn giản nhất của chuyển động này là một con lắc đơn và một khối lượng gắn vào lò xo, nhưng chúng ta có thể tạo ra một hệ phức tạp hơn bằng cách cho vào một lực cản và/hoặc một lực dẫn ngoài (lực cưỡng bức). Chúng ta sẽ nghiên cứu tất cả những trường hợp này.

Chúng ta quan tâm đến chuyển động dao động vì hai lý do. Thứ nhất, chúng ta nghiên cứu nó bởi vì chúng ta *có thể* nghiên cứu nó. Đây là một trong một số hệ vật lý mà chúng ta có thể giải để tìm ra chuyển động một cách chính xác. Không có gì là sai trái cả nếu thỉnh thoảng chúng ta chỉ nghiên cứu những thứ dễ dàng. Thứ hai, chuyển động dao động xảy ra khắp nơi trong tự nhiên, với những lý do mà sẽ được làm rõ trong Mục 5.2. Nếu có một loại hệ vật lý nào mà đáng để nghiên cứu, thì nó chính là hệ dao động. Chúng ta sẽ bắt đầu bằng việc xem xét một vài nội dung toán học cần thiết trong Mục 4.1. Và sau đó trong Mục 4.2 chúng ta sẽ chỉ ra cách mà toán học được áp dụng vào vật lý.

4.1 Hệ phương trình vi phân tuyến tính

Một *phương trình vi phân tuyến tính* là một phương trình trong đó x và các đạo hàm theo thời gian của nó chỉ có dạng bậc nhất. Một ví dụ của phương trình vi phân tuyến tính là $3\ddot{x} + 7\dot{x} + x = 0$. Một ví dụ của phương trình vi phân phi tuyến là $3\ddot{x} + 7\dot{x}^2 + x = 0$. Nếu vế phải của phương trình bằng không, thì chúng ta sử dụng thuật ngữ phương trình vi phân *thuần nhất*. Nếu vế phải là một hàm của thời gian t, như trong trường hợp $3\ddot{x} - 4\dot{x} = 9t^2 - 5$, thì chúng ta sử dụng thuật ngữ phương trình vi phân *không thuần nhất*. Mục đích của chương này là học cách giải hệ phương trình vi phân tuyến tính, cả thuần nhất và không thuần nhất. Những hệ phương trình như thế này xuất hiện một cách liên tục trong vật lý, vì vậy chúng ta nên tìm một phương pháp có hệ thống để giải chúng.

Những kỹ thuật mà chúng ta sẽ sử dụng tốt nhất là nên được học thông qua các ví dụ, vì vậy hãy giải một vài phương trình vi phân, bắt đầu với những phương trình đơn giản. Trong suốt chương này, x được hiểu là hàm của thời gian t. Do đó, dấu chấm là ký hiệu của đạo hàm theo thời gian.

Ví dụ 1 ($\dot{x} = ax$): Đây là một phương trình vi phân rất đơn giản. Có (ít nhất) hai cách để giải nó.

Cách thứ nhất: Tách biến để nhận được $dx/dt = adt$, và sau đó lấy tích phân để nhận được $\ln x = at + c$, trong đó c là một hằng số tích phân. Sau đó lấy hàm mũ hai vế ta nhận được

$$x = Ae^{at}, \tag{4.1}$$

trong đó $A \equiv e^c$. A được xác định bởi giá trị của x tại, ví dụ như, $t = 0$.

Cách thứ hai: Thử một nghiệm của phương trình trên có dạng là một hàm mũ, nghĩa là, thử một nghiệm có dạng $x = Ae^{\alpha t}$. Thay nghiệm này vào $\dot{x} = ax$ ngay lập tức cho ta $\alpha = a$. Do đó, nghiệm của phương trình này là $x = Ae^{at}$. Chú ý rằng chúng ta không thể giải ra A, bởi vì một thực tế là phương trình vi phân của chúng ta là thuần nhất và tuyến tính đối với x (nghĩa là: A bị triệt tiêu). A sẽ được xác định bởi điều kiện đầu.

Phương pháp này có vẻ như là hơi ngớ ngẩn, và ở một mức độ nào đó là không hay. Nhưng như bạn sẽ thấy ở phần bên dưới, việc thử các hàm mũ này (hoặc là tổng của chúng) thực ra là nghiệm tổng quát nhất mà chúng ta có thể thử, vì vậy cách làm này thực ra là hoàn toàn tổng quát.

NHẬN XÉT: Sử dụng phương pháp này, bạn có thể sẽ tự hỏi rằng mặc dù chúng ta đã tìm ra một nghiệm của phương trình, nhưng chúng ta có thể đã bỏ qua một nghiệm khác. Nhưng lý thuyết tổng quát của phương trình vi phân nói rằng một phương trình tuyến tính bậc nhất chỉ có duy nhất một nghiệm độc lập (chúng ta sẽ chấp nhận kết quả này ở đây). Vì vậy nếu chúng ta tìm được một nghiệm, thì chúng ta biết rằng chúng ta đã tìm được nghiệm tổng quát của nó. ♣

Ví dụ 2 ($\ddot{x} = ax$) Nếu a âm, thì chúng ta sẽ thấy rằng phương trình này miêu tả chuyển động dao động, ví dụ như, của một lò xo. Nếu a dương, thì nó miêu tả chuyển động nhanh dần hoặc tắt dần theo hàm mũ. Có (ít nhất) hai cách để giải phương trình này.

Cách thứ nhất: Chúng ta có thể sử dụng phương pháp tách biến trong Mục 3.3 ở đây, bởi vì hệ của chúng ta là một hệ trong đó lực tác dụng chỉ phụ thuộc vào vị trí x. Nhưng phương pháp này hơi cồng kềnh, như bạn đã thấy nếu bạn đã làm Bài tập 3.10 hoặc Bài tập luyện tập 3.38. Có một phương pháp đơn giản hơn rất nhiều mà chắc chắn sẽ giải được phương trình này, nhưng phải là trong trường hợp phương trình của chúng ta là *tuyến tính* đối với x.

Cách thứ hai: Như ở trong ví dụ thứ nhất ở trên, chúng ta có thể thử một nghiệm có dạng $x(t) = Ae^{\alpha t}$ và sau đó tìm giá trị của α. Một lần nữa, chúng ta không thể tìm được A, bởi vì nó bị triệt tiêu trong phương trình. Thay $Ae^{\alpha t}$ vào trong phương trình $\ddot{x} = ax$ ta có $\alpha = \pm\sqrt{a}$. Do đó chúng ta vừa tìm ra *hai* nghiệm. Nghiệm tổng quát nhất là một biểu diễn tuyến tính bất kỳ của hai nghiệm này,

$$x(t) = Ae^{\sqrt{a}t} + Be^{-\sqrt{a}t}, \tag{4.2}$$

mà bạn có thể kiểm tra một cách nhanh chóng là nó thỏa mãn phương trình vi phân của chúng ta. A và B được xác định từ các điều kiện đầu. Giống như ở trong ví dụ thứ nhất phía trên, bạn có thể tự hỏi là mặc dù chúng ta đã tìm ra hai nghiệm của phương trình này, nhưng chúng ta có thể đã bỏ qua những nghiệm khác. Nhưng lý thuyết tổng quát của phương trình vi phân cho ta biết rằng phương trình vi phân tuyến tính bậc hai của chúng ta chỉ có hai nghiệm độc lập tuyến tính. Do đó, sau khi tìm ra hai nghiệm độc lập tuyến tính, chúng ta biết rằng là chúng ta đã tìm hết các nghiệm.

> NHẬN XÉT RẤT QUAN TRỌNG: Kết quả mà tổng của hai nghiệm khác nhau lại là một nghiệm của phương trình vi phân của chúng ta là một tính chất cực kỳ quan trọng của phương trình vi phân *tuyến tính*. Tính chất này *không* còn đúng nữa cho các phương trình vi phân phi tuyến, ví dụ như $\ddot{x}^2 = bx$, bởi vì việc lấy bình phương sau khi lấy tổng sẽ sinh ra một hệ số chéo mà sẽ phá hỏng sự bằng nhau của hai vế, như bạn có thể kiểm tra (xem Bài tập 4.1). Tính chất này được gọi là *nguyên lý chồng chất nghiệm*. Nghĩa là, lấy tổ hợp tuyến tính của hai nghiệm sẽ cho ta một nghiệm khác. Nói cách khác, *tính chất tuyến tính* sẽ dẫn đến tính chất chồng chất nghiệm. Thực tế này làm cho việc sử dụng các lý thuyết dựa trên các phương trình tuyến tính dễ dàng *hơn rất nhiều* so với các lý thuyết dựa trên các phương trình phi tuyến. Ví dụ như Lý thuyết tương đối tổng quát là dựa trên các phương trình phi tuyến, và các nghiệm của hầu hết các hệ trong Lý thuyết tương đối tổng quát là vô cùng khó để tìm ra được.
> ♣

Hãy nói thêm một ít về nghiệm của phương trình (4.2). Nếu a là âm, thì sẽ có ích hơn khi định nghĩa $a \equiv -\omega^2$, trong đó ω là một số thực. Nghiệm khi đó sẽ trở thành $x(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}$. Sử dụng $e^{i\omega} = \cos\theta + i\sin\theta$, nghiệm này có thể được viết qua các hàm lượng giác nếu muốn. Có rất nhiều cách để viết nghiệm này như:

$$\begin{aligned} x(t) &= Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}, \\ x(t) &= C\cos\omega t + D\sin\omega t, \\ x(t) &= E\cos(\omega t + \phi_1), \\ x(t) &= F\sin(\omega t + \phi_2). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Phụ thuộc vào đặc trưng của một hệ đã cho, một trong các dạng trên sẽ có hiệu quả hơn các dạng khác. Các hằng số khác nhau trong các biểu thức này là có liên hệ với nhau. Ví dụ như, $C = E\cos\phi_1$ và $D = -E\sin\phi_1$, mà được nhận từ công thức cosine của một tổng. Chú ý rằng có hai tham số tự do trong mỗi biểu thức ở trên trong $x(t)$. Các tham số này sẽ được xác định từ các điều kiện đầu (ví dụ như, vị trí và vận tốc tại $t = 0$). Ngược lại với những tham số tự do này, đại lượng ω được xác định bởi từng hệ vật lý mà chúng ta đang xét. Ví dụ như, chúng ta sẽ thấy rằng đối với một lò xo, $\omega = \sqrt{k/m}$, trong đó k là độ cứng của lò xo. ω không phụ thuộc vào các điều kiện đầu.

Nếu a dương, thì hãy định nghĩa $a \equiv \alpha^2$, trong đó α là một số thực. Nghiệm của phương trình (4.2) khi đó trở thành $x(t) = Ac^{\alpha t} + Be^{-\alpha t}$. Sử dụng $e^{\theta} = \cosh\theta + \sinh\theta$, nghiệm này có thể được viết theo các hàm lượng giác hyperbolic nếu muốn. Một số dạng của nghiệm này là:

$$\begin{aligned} x(t) &= Ae^{\alpha t} + Be^{-\alpha t}, \\ x(t) &= C\cosh\alpha t + D\sinh\alpha t, \\ x(t) &= E\cosh(\alpha t + \phi_1), \\ x(t) &= F\sinh(\alpha t + \phi_2). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Một lần nữa, các hằng số là có liên hệ với nhau. Nếu bạn không quen với các hàm lượng giác hyperbolic, một vài tính chất của chúng được liệt kê trong Phụ lục A.

Mặc dù nghiệm trong phương trình (4.2) là hoàn toàn chính xác đối với các dấu của a, nhưng nói chung sẽ sáng tỏ hơn khi viết nghiệm đối với a âm dưới dạng hàm lượng giác hoặc dạng hàm mũ $e^{\pm i\omega t}$ trong trường hợp số i có thể biểu diễn dưới dạng hiển.

Sự hữu ích của phương pháp thử nghiệm hàm mũ khó có thể mà nói tóm lược lại được. Nó có vẻ như là bị hạn chế ở một mức độ nào đó, nhưng mà nó có hiệu quả. Các ví dụ còn lại trong chương này sẽ thuyết phục bạn điều này.

Ví dụ 3 ($\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + ax = 0$): Đây sẽ là ví dụ toán học cuối cùng của chúng ta, và sau đó chúng ta sẽ bắt đầu làm một số bài vật lý. Như chúng ta sẽ thấy, ví dụ này liên quan đến hệ dao động điều hòa có cản. Chúng ta đặt thêm hệ số 2 cho hệ số của $\dot{x}$ ở đây để làm cho các công thức về sau gọn hơn. Lực tác dụng trong ví dụ này (nếu chúng ta nghĩ về vật lý thay cho toán trong một lúc) là $-2\gamma\dot{x} - ax$ (nhân với m), và nó phụ thuộc vào cả v và x. Những phương pháp của chúng ta trong Mục 3.3 do đó sẽ không thể áp dụng được; chúng ta sẽ không thể tách biến ở đây. Điều này có nghĩa là chúng ta chỉ còn phương pháp thử nghiệm dạng hàm mũ, $Ae^{\alpha t}$. Vì vậy hãy xem chúng ta sẽ nhận được những gì. Thay $x(t) = Ae^{\alpha t}$ vào trong phương trình đã cho, và triệt tiêu hệ số khác không $Ae^{\alpha t}$, ta có

$$\alpha^2 + 2\gamma\alpha + a = 0. \tag{4.5}$$

Nghiệm đối với α là $-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - a}$. Gọi những nghiệm này là α_1 và α_2. Khi đó nghiệm tổng quát của phương trình của chúng ta là

$$\begin{aligned} x(t) &= Ae^{\alpha_1 t} + Be^{\alpha_2 t} \\ &= e^{-\gamma t}\left(Ae^{t\sqrt{\gamma^2-a}} + Be^{-t\sqrt{\gamma^2-a}}\right). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Nếu $\gamma^2 - a < 0$, thì chúng ta có thể viết kết quả này theo các hàm sine và cosine, vì vậy chúng ta có chuyển động dao động điều hòa mà có biên độ giảm dần theo thời gian gây ra bởi hệ số $e^{-\gamma t}$ (hoặc tăng dần, nếu $\gamma < 0$, nhưng đây là một trường hợp hiếm gặp trong vật lý). Nếu $\gamma^2 - a > 0$, thì chúng ta có chuyển động có dạng hàm mũ. Chúng ta sẽ nói nhiều hơn về những khả năng khác nhau này trong Mục 4.3.

Trong hai ví dụ đầu tiên phía trên, các nghiệm là khá rõ ràng. Nhưng trong trường hợp này, bạn không thể nhìn vào nghiệm trên và nói, "Ôi trời, tất nhiên. Nghiệm của nó hiển nhiên phải là như thế!". Vì vậy phương pháp thử nghiệm của chúng ta với dạng nghiệm $Ae^{\alpha t}$ sẽ không còn quá là ngớ ngẩn nữa.

Nói chung, nếu chúng ta có một phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất cấp n,

$$\frac{d^n x}{dt^n} + c_{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + c_1\frac{dx}{dt} + c_0 x = 0, \tag{4.7}$$

thì chiến thuật của chúng ta sẽ là sử dụng nghiệm thử, $x(t) = Ae^{\alpha t}$, và rồi (về lý thuyết) giải phương trình đa thức bậc n nhận được, $\alpha^n + c_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + c_1\alpha + c_0 = 0$, đối với α, để nhận được các nghiệm $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Nghiệm tổng quát của $x(t)$ khi đó là tổ hợp tuyến tính,

$$x(t) = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t} + \cdots + A_n e^{\alpha_n t}, \tag{4.8}$$

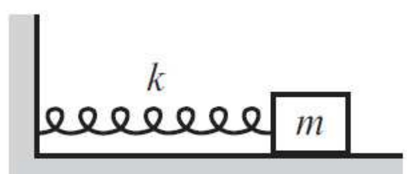
trong đó A_i được xác định bởi các điều kiện đầu. Tuy nhiên, trong thực hành, chúng ta hiếm khi gặp các phương trình vi phân có bậc lớn hơn 2. (*Chú ý:* nếu một số α_i tình cờ có giá trị bằng nhau, thì phương trình (4.8) sẽ không còn đúng nữa, vì vậy chúng ta sẽ cần thay đổi dạng nghiệm của nó. Chúng ta sẽ gặp một tình huống như thế này trong Mục 4.3.)

4.2 Chuyển động điều hòa đơn giản

Bây giờ hãy làm một vài bài tập vật lý liên quan đến các hiện tượng có thật trong đời sống. Chúng ta sẽ bắt đầu với chuyển động điều hòa đơn giản. Đây là chuyển động của một phần tử chịu tác dụng của một lực $F(x) = -kx$. Một hệ cổ điển mà có chuyển động điều hòa đơn giản là một khối lượng được gắn vào một lò xo không khối lượng, nằm trên một mặt bàn không ma sát (xem Hình 4.1). Lực trong một lò xo điển hình có dạng $F(x) = -kx$, trong đó x là độ dịch chuyển từ vị trí cân bằng (xem Mục 5.2 để biết lý do đằng sau điều này). Đây là "định luật Hooke" và nó đúng khi lò xo không bị kéo hoặc nén quá nhiều. Rốt cuộc là biểu thức lực này là sai đối với bất kỳ một lò xo nào trong thực tế. Nhưng nếu chúng ta giả sử lực lò xo là $-kx$, thì phương trình $F = ma$ cho ta $-kx = m\ddot{x}$, hoặc

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \text{trong đó} \quad \omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{4.9}$$

Đây đơn giản là phương trình mà chúng ta đã nghiên cứu trong Ví dụ 2 trong mục trước.



Hình 4.1:

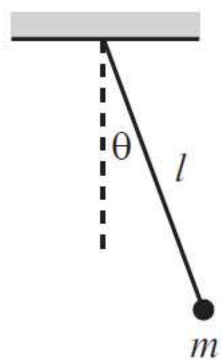
Từ phương trình (4.3), nghiệm của nó có thể được viết dưới dạng

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi). \tag{4.10}$$

Nghiệm lượng giác này chỉ ra rằng hệ dao động qua lại mãi mãi theo thời gian. ω là *tần số góc*. Nếu t tăng lên một giá trị $2\pi/\omega$, thì đối số của cosine tăng lên 2π, vì vậy vị trí và vận tốc là quay trở lại giá trị ban đầu của nó. Do đó *chu kỳ* (thời gian cho một dao động) là $T = 2\pi/\omega = 2\pi/\sqrt{m/k}$. Tần số có đơn vị là số vòng trên phút (hz) và bằng $\nu = 1/T = \omega/2\pi$. Hằng số A (hoặc là giá trị tuyệt đối của A, nếu A âm) là *biên độ*, nghĩa là, khoảng cách lớn nhất mà khối lượng có được so với vị trí cân bằng. Chú ý rằng vận tốc là một hàm của thời gian và bằng $v(t) \equiv \dot{x}(t) = -A\omega\sin(\omega t + \phi)$.

Hằng số A và ϕ được xác định từ các điều kiện đầu. Ví dụ như, nếu $x(0) = 0$ và $\dot{x}(0) = v$, thì chúng ta phải có $A\cos\phi = 0$ và $-A\omega\sin\phi = v$. Do vậy, $\phi = \pi/2$, và vì vậy $A = -v/\omega$ (hoặc $\phi = -\pi/2$ và $A = v/\omega$, nhưng điều này cũng dẫn đến cùng một nghiệm). Do đó, chúng ta có $x(t) = -(v/\omega)\cos(\omega t + \pi/2)$. Kết quả này nhìn sẽ gọn hơn nếu chúng ta viết nó dưới dạng $x(t) = (v/\omega)\sin(\omega t)$. Hóa ra là nếu các điều kiện ban đầu của vị trí và vận tốc là x_0 và v_0, thì biểu thức $x(t) = C\cos\omega t + D\sin\omega t$ trong phương trình (4.3) sẽ là tốt nhất, bởi vì (như bạn có thể kiểm tra) nó sẽ nhận được kết quả rất đẹp và gọn, $C = x_0$ và $D = v_0/\omega$. Bài tập 4.3 sẽ cho một cơ cấu khác mà liên quan đến các điều kiện đầu.

Ví dụ (Con lắc đơn): Một hệ cổ điển khác mà có chuyển động điều hòa đơn giản (một cách xấp xỉ) là con lắc đơn, nghĩa là, một khối lượng được treo vào một sợi dây không khối lượng và đu đưa trong một mặt phẳng thẳng đứng. Gọi ℓ là chiều dài của sợi dây, và gọi $\theta(t)$ là góc giữa sợi dây và phương thẳng đứng (xem Hình 4.2). Khi đó trọng lực của khối lượng theo phương tiếp tuyến là $-mg\sin\theta$. Vì vậy phương trình $F = ma$ theo phương tiếp tuyến cho ta



Hình 4.2:

$$-mg\sin\theta = m(\ell\ddot{\theta}). \tag{4.11}$$

Lực căng của sợi dây cùng với thành phần lực theo phương bán kính của trọng lực gây ra gia tốc theo phương bán kính, vì vậy phương trình $F = ma$ theo phương này chỉ giúp chúng ta tìm ra lực căng trong dây, là đại lượng chúng ta sẽ không cần dùng đến ở đây.

Bây giờ chúng ta sẽ đi vào vương quốc của các phép toán xấp xỉ và giả sử rằng biên độ của dao động là nhỏ. Nếu không có giả thiết này, bài toán không thể giải được ra nghiệm có dạng giải tích đơn giản. Với giả thiết θ là nhỏ, chúng ta có thể sử dụng

$\sin\theta \approx \theta$ trong phương trình (4.11) để nhận được

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0, \quad \text{trong đó} \quad \omega \equiv \sqrt{\frac{g}{\ell}}. \tag{4.12}$$

Do đó,

$$\theta(t) = A\cos(\omega t + \phi), \tag{4.13}$$

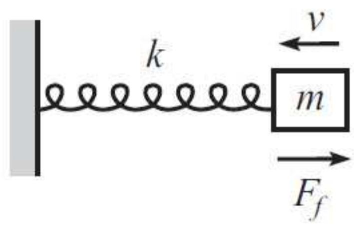
trong đó A và ϕ được xác định từ các điều kiện đầu. Vì vậy con lắc đơn sẽ có chuyển động điều hòa đơn giản với tần số bằng $\sqrt{g/\ell}$. Chu kỳ của nó do đó bằng $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{l/g}$. Chuyển động thực tế của nó gần một cách tùy ý với chuyển động này, với biên độ dao động là đủ nhỏ. Bài tập 4.23 sẽ xét đến độ chính xác bậc hai của chuyển động này trong trường hợp nó có biên độ không nhỏ.

Sẽ có rất nhiều dao động trong lĩnh vực vật lý mà trong đó bạn sẽ phải thực hiện một vài tính toán rồi cuối cùng sẽ nhận được một phương trình đơn giản có dạng $\ddot{z} + \omega^2 z = 0$, trong đó ω^2 là một đại lượng dương phụ thuộc vào rất nhiều tham số trong bài toán. Khi bạn gặp một phương trình có dạng này, bạn hãy nhảy lên vì vui sướng, bởi vì bạn có thể đơn giản viết ra nghiệm của nó mà không phải làm thêm cái gì: nghiệm của z phải có dạng $z(t) = A\cos(\omega t + \phi)$. Dù ban đầu hệ trông có vẻ phức tạp như thế nào đi chăng nữa, nếu cuối cùng bạn nhận được một phương trình có dạng giống $\ddot{z} + \omega^2 z = 0$, thì bạn biết rằng hệ đang trải qua một chuyển động điều hòa đơn giản với tần số bằng căn của hệ số của z, cho dù hệ số này bằng bao nhiêu đi chăng nữa. Nếu bạn cuối cùng nhận được phương trình $\ddot{z} + (\text{zucchini})\text{z} = 0$, thì tần số dao động là $\omega = \sqrt{\text{zucchini}}$ (miễn là giá trị "zucchini" này là dương và có đơn vị là nghịch đảo của bình phương thời gian).

4.3 Chuyển động điều hòa có cản

Xét một khối lượng m được gắn vào một đầu của một lò xo có độ cứng là k. Giả sử khối lượng chịu tác động của một lực cản tỷ lệ với vận tốc của nó, $F_f = -bv$ (chỉ số dưới f ở đây là ký hiệu cho "friction-lực ma sát"; chúng ta sẽ để dành chữ cái d cho "driving-lực cưỡng bức" trong mục tiếp theo); xem Hình 4.3. Tại sao chúng ta lại nghiên cứu lực cản $F_f = -bv$ này? Có hai lý do: Đầu tiên, tại vì nó phụ thuộc tuyến tính theo x, mà sẽ cho phép chúng ta có thể giải ra chuyển động này. Và thứ hai, nó là một lực rất phù hợp trong thực tế; một vật chuyển động với vận tốc nhỏ trong một môi trường chất lỏng thông thường sẽ chịu một lực cản tỷ lệ với vận tốc của nó. Chú ý rằng lực $F_f = -bv$ này *không* phải là lực mà một khối lượng chịu tác dụng khi nó được đặt lên một mặt bàn có ma sát. Trong trường hợp đó lực cản sẽ là (một cách xấp xỉ) không đổi. Mục đích của chúng ta trong mục này là tìm vị trí của khối lượng trên như là một hàm của thời gian. Tổng lực tác dụng lên khối lượng là $F = -b\dot{x} - kx$. Vì vậy phương trình $F = ma$ cho ta

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0, \tag{4.14}$$



Hình 4.3:

trong đó $2\gamma \equiv b/m$, và $\omega^2 \equiv k/m$. Thật là thuận tiện khi phương trình này giống với phương trình mà chúng ta đã giải ở trong Ví dụ 3 trong Mục 4.1 (với $a \to \omega^2$). Tuy nhiên, bây giờ chúng ta có những điều kiện giới hạn vật lý là $\gamma > 0$ và $\omega^2 > 0$. Đặt $\Omega^2 \equiv \gamma^2 - \omega^2$ để cho đơn giản, chúng ta có thể viết nghiệm trong phương trình (4.6) như sau

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left(Ae^{\Omega t} + Be^{-\Omega t}\right), \quad \text{trong đó } \Omega \equiv \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}. \tag{4.15}$$

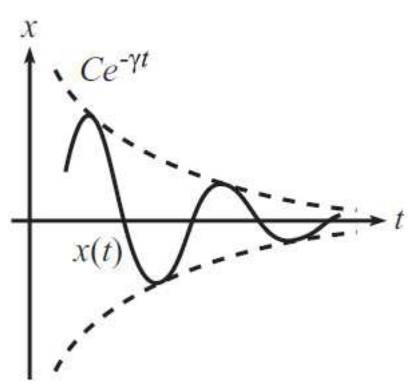
Có ba trường hợp phải xem xét.

Trường hợp 1: Cản nhỏ ($\Omega^2 < 0$)

Nếu $\Omega^2 < 0$, thì $\gamma < \omega$. Bởi vì Ω là một số ảo, nên chúng ta định nghĩa một số thực $\tilde{\omega} \equiv \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$, vì vậy $\Omega = i\tilde{\omega}$. Khi đó phương trình (4.15) cho ta

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\gamma t}\left(Ae^{i\tilde{\omega} t} + Be^{-i\tilde{\omega} t}\right) \\ &\equiv e^{-\gamma t} C\cos(\tilde{\omega} t + \phi). \end{aligned} \tag{4.16}$$

Hai dạng này là tương đương với nhau. Sử dụng $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, các hằng số trong phương trình (4.16) liên hệ bởi $A + B = C\cos\phi$ và $A - B = iC\sin\phi$. Chú ý rằng trong một bài toán vật lý, $x(t)$ là số thực, vì vậy chúng ta phải có $A^* = B$, trong đó dấu sao ký hiệu cho liên hợp phức. Hai hằng số A và B, hoặc hai hằng số C và ϕ, được tìm bởi các điều kiện đầu.



Hình 4.4:

Phụ thuộc vào bài toán được cho, một trong các biểu diễn trong phương trình (4.16) chắc chắn sẽ tốt hơn biểu diễn kia. Hoặc có thể một trong các dạng biểu diễn trong phương trình (4.3) (nhân với $e^{-\gamma t}$) sẽ là biễu diễn tốt nhất. Dạng cosine sẽ làm rõ được rằng chuyển động này là một chuyển động điều hòa có biên độ giảm dần theo thời gian theo hệ số $e^{-\gamma t}$. Một đồ thị của dạng chuyển động này được chỉ ra trong Hình 4.4.[1] Tần số của chuyển động, $\tilde{\omega} = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$, nhỏ hơn so với tần số dao động tự nhiên của lò xo không có cản.

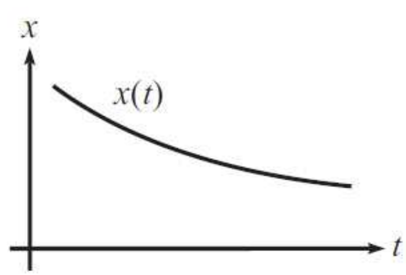
NHẬN XÉT: Nếu γ là rất nhỏ (chính xác hơn là, nếu $\gamma \ll \omega$), thì $\tilde{\omega} \approx \omega$, và điều này có nghĩa, bởi vì chúng ta gần như là có một hệ dao động không cản ở đây. Nếu γ có giá trị rất gần với ω, thì $\tilde{\omega} \approx 0$. Vì vậy dao động là rất chậm (chính xác hơn là, $\tilde{\omega} \ll \omega$). Tất nhiên, đối với $\tilde{\omega}$ nhỏ thì thậm chí khó mà nói rằng dao động là tồn tại, bởi vì nó sẽ bị tắt trong khoảng thời gian có bậc của $1/\gamma \approx 1/\omega$, nhỏ hơn rất nhiều so với bậc thời gian của dao động, $1/\tilde{\omega}$. ♣

Trường hợp 2: Cản lớn ($\Omega^2 > 0$)

Nếu $\Omega^2 > 0$, thì $\gamma > \omega$. Ω là số thực (và được lấy giá trị dương), vì vậy phương trình (4.15) cho ta

$$x(t) = Ae^{-(\gamma-\Omega)t} + Be^{-(\gamma+\Omega)t}. \tag{4.17}$$

Sẽ không có chuyển động dao động trong trường hợp này; xem Hình 4.5. Bởi vì $\gamma > \Omega \equiv \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$, cả hai số mũ đều là âm, vì vậy chuyển động sẽ tiến về không khi t lớn. Nó phải là như thế, bởi vì một lò xo trong thực tế sẽ không thể kéo dài ra đến vô cùng. Nếu chúng ta bằng một cách nào đó mà nhận được một số mũ dương, chúng ta sẽ biết rằng chúng ta đã mắc một sai lầm nào đó.



Hình 4.5:

NHẬN XÉT: Nếu γ chỉ lớn hơn ω một chút, thì $\Omega \approx 0$, vì vậy hai số hạng trong phương trình (4.17) sẽ xấp xỉ bằng nhau, và về cơ bản là chúng ta có chuyển động tắt dần giảm theo hàm

[1]Để cho chính xác, thì biên độ không giảm một cách chính xác theo hàm $Ce^{-\gamma t}$, như trong phương trình (4.16) đưa ra, bởi vì $Ce^{-\gamma t}$ miêu tả đường bao của chuyển động, và nó không phải là đường cong đi qua các điểm biên độ của chuyển động. Bạn có thể chỉ ra rằng biên độ thực ra giảm theo hàm $Ce^{-\gamma t}\cos(\tan^{-1}(\gamma/\tilde{\omega}))$. Đây là biểu thức của đường cong đi qua các điểm biên độ; xem Castro (1986). Nhưng đối với lực cản nhỏ ($\gamma \ll \omega$), thì phương trình này về cơ bản là bằng $Ce^{-\gamma t}$. Và trong bất cứ trường hợp nào, thì nó cũng tỷ lệ với $e^{-\gamma t}$.

mũ, với hệ số $e^{-\gamma t}$. Nếu $\gamma \gg \omega$ (nghĩa là, cản rất mạnh), thì $\Omega \approx \gamma$, vì vậy số hạng đầu tiên trong phương trình (4.17) sẽ là số hạng chủ đạo (nó có số mũ âm có độ lớn bé hơn), và về cơ bản là chúng ta có chuyển động tắt dần theo hàm mũ với hệ số $e^{-(\gamma-\Omega)t}$. Chúng ta có thể hình dung một cách định lượng ở một mức độ nào đó về điều này bằng cách xấp xỉ Ω dưới dạng

$$\Omega \equiv \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} = \gamma\sqrt{1 - \omega^2/\gamma^2} \approx \gamma(1 - \omega^2/2\gamma^2). \tag{4.18}$$

Do đó, ứng xử của hàm mũ sẽ có dạng $e^{-\omega^2 t/2\gamma}$. Bởi vì $\gamma \gg \omega$, đây là chuyển động tắt dần chậm (nghĩa là, chậm so với $t \sim 1/\omega$), và nó hợp lý nếu lực cản là rất mạnh. Khối lượng sẽ từ từ bò về vị trí cân bằng, như trong trường hợp một lò xo yếu bị nhúng vào trong dung dịch nhựa đường. ♣

Trường hợp 3: Cản tới hạn ($\Omega^2 = 0$)

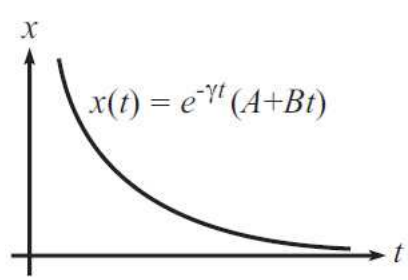
Nếu $\Omega^2 = 0$, thì $\gamma = \omega$. Phương trình (4.14) do đó sẽ trở thành $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \gamma^2 x = 0$. Trong trường hợp đặc biệt này, chúng ta phải cẩn thận khi giải phương trình vi phân. Nghiệm trong phương trình (4.15) sẽ không còn đúng nữa, bởi vì theo cách mà dẫn đến phương trình (4.6), các nghiệm α_1 và α_2 là bằng nhau (và bằng $-\gamma$), vì vậy chúng ta thực ra chỉ tìm ra một nghiệm, $e^{-\gamma t}$. Chúng ta sẽ sử dụng ở đây kết quả từ lý thuyết phương trình vi phân mà nó nói rằng trong trường hợp đặc biệt này, nghiệm thứ hai sẽ có dạng $te^{-\gamma t}$.

NHẬN XÉT: Bạn nên kiểm tra một cách tường minh là $te^{-\gamma t}$ là nghiệm của phương trình $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \gamma^2 x = 0$. Hoặc nếu bạn muốn bạn có thể nhận được nghiệm này theo tinh thần của Bài tập 4.2. Trong trường hợp tổng quát hơn khi mà có n nghiệm bằng nhau trong cách dẫn ra phương trình (4.8) (gọi tất cả chúng là α), thì n nghiệm độc lập của phương trình vi phân này là $t^k e^{\alpha t}$, với $0 \le k \le (n-1)$. Nhưng chúng ta sẽ không thường xuyên gặp trường hợp mà có nghiệm bội như thế này, vì vậy bạn không phải lo lắng về điều này. ♣

Nghiệm của chúng ta do đó sẽ có dạng,

$$x(t) = e^{-\gamma t}(A + Bt). \tag{4.19}$$

Hệ số mũ cuối cùng sẽ lấn át hệ số Bt, vì vậy chuyển động sẽ tiến dần về không khi t lớn (xem Hình 4.6).



Hình 4.6:

Nếu chúng ta được cho một lò xo với ω cố định, và nếu chúng ta xem xét hệ với các giá trị khác nhau của γ, thì cản tới hạn (khi $\gamma = \omega$) sẽ là trường hợp mà chuyển động tiến về không một cách nhanh nhất (giống như $e^{-\omega t}$). Điều này là đúng bởi vì trong trường hợp cản nhỏ ($\gamma < \omega$), thì đường bao của chuyển động dao động có dạng $e^{-\gamma t}$, mà tiến về không chậm hơn so với $e^{-\omega t}$, bởi vì $\gamma < \omega$. Và trong trường hợp cản lớn ($\gamma > \omega$), thì chuyển động chủ đạo là số hạng $e^{-(\gamma-\Omega)t}$. Và như bạn có thể kiểm tra lại, nếu $\gamma > \omega$ thì $\gamma - \Omega \equiv \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} < \omega$, vì vậy chuyển động này tiến về không chậm hơn $e^{-\omega t}$. Cản tới hạn là rất quan trọng trong rất nhiều hệ trong thực tế, như là các cửa cách nhiệt hoặc các bộ hấp thụ dao động, với mục đích là làm cho chuyển động của các hệ này tiến về không (mà không đi quá và bật lại) một cách nhanh nhất có thể.

4.4 Chuyển động điều hòa cưỡng bức (có cản)

Trước khi chúng ta xem xét chuyển động điều hòa cưỡng bức, chúng ta phải tìm hiểu cách giải một loại phương trình vi phân mới. Làm thế nào chúng ta có thể giải phương trình có dạng,

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + ax = C_0 e^{i\omega_0 t}, \tag{4.20}$$

trong đó γ, a, ω_0, và C_0 là các đại lượng đã cho? Đây là một phương trình vi phân không thuần nhất, bởi vì vế phải của nó khác không. Nó không có ý nghĩa vật lý lắm, bởi vì vế phải là một số phức, nhưng bây giờ đừng lo lắng gì về điều này. Những phương trình loại này sẽ xuất hiện nhiều, và may mắn là có một phương pháp trực tiếp (mặc dù đôi khi hơi rối rắm) để giải chúng. Như thường lệ, phương pháp này sẽ liên quan đến việc tìm nghiệm thử, thay nó vào phương trình, và xem các điều kiện nào sẽ xuất hiện. Bởi vì chúng ta có hệ số $e^{i\omega_0 t}$ nằm ở vế phải của phương trình (4.20), nên hãy thử một nghiệm có dạng $x(t) = Ae^{i\omega_0 t}$. A sẽ phụ thuộc vào ω_0, cùng với các hệ số khác, như chúng ta sẽ thấy. Thay nghiệm thử này vào phương trình (4.20) và triệt tiêu các số hạng khác không $e^{i\omega_0 t}$, chúng ta nhận được

$$(-\omega_0^2)A + 2\gamma(i\omega_0)A + aA = C_0. \tag{4.21}$$

Giải ra A, chúng ta tìm được nghiệm đối với x là

$$x(t) = \left(\frac{C_0}{-\omega_0^2 + 2i\gamma\omega_0 + a}\right) e^{i\omega_0 t}. \tag{4.22}$$

Hãy chú ý sự khác nhau giữa kỹ thuật này và kỹ thuật trong Ví dụ 3 trong Mục 4.1. Trong ví dụ đó, mục đích của chúng ta là đi tìm giá trị của α trong $x(t) = Ae^{\alpha t}$. Và chúng ta không có cách nào để tìm được A; A phải được xác định từ các điều kiện đầu. Nhưng trong kỹ thuật này, hệ số ω_0 trong $x(t) = Ae^{i\omega_0 t}$ là đại lượng đã được cho trước, và mục đích của chúng ta là tìm A theo các hằng số đã cho. Do đó, trong nghiệm trong phương trình (4.22), sẽ *không có các hệ số tự do* để xác định từ các điều kiện đầu. Chúng ta đã tìm ra một nghiệm riêng, và chúng ta mắc kẹt với nó. Thuật ngữ *nghiệm riêng* được sử dụng cho phương trình (4.22).

Với việc chúng ta không thể tự do thay đổi dạng nghiệm trong phương trình (4.22), làm cách nào mà chúng ta có thể làm cho nó thỏa mãn các điều kiện đầu bất kỳ? May mắn là, phương trình (4.22) không phải là nghiệm tổng quát nhất của phương trình (4.20). Nghiệm tổng quát nhất của nó là tổng của nghiệm riêng (4.20) của chúng ta, *cộng* với nghiệm "thuần nhất" mà chúng ta đã tìm được trong phương trình (4.6). Tổng này hiển nhiên là một nghiệm, bởi vì nghiệm trong phương trình (4.6) được xây dựng một cách tường minh là để nhận được giá trị bằng không khi thay nó vào vế trái phương trình (4.20). Do đó, việc gắn nó vào nghiệm riêng của chúng ta không làm thay đổi tính chất cân bằng của hai vế trong phương trình (4.20), bởi vì vế trái có dạng tuyến tính. Như vậy nghiệm tổng quát của phương trình (4.20) là

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left(Ae^{t\sqrt{\gamma^2-a}} + Be^{-t\sqrt{\gamma^2-a}}\right) + \left(\frac{C_0}{-\omega_0^2 + 2i\gamma\omega_0 + a}\right)e^{i\omega_0 t}, \tag{4.23}$$

trong đó A và B được xác định từ các điều kiện đầu.

Với tính chất chồng chất nghiệm, chúng ta sẽ biết rõ ràng là phải làm gì nếu chúng ta có một phương trình khác tổng quát hơn một chút, ví dụ như,

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + ax = C_1e^{i\omega_1 t} + C_2e^{i\omega_2 t}. \tag{4.24}$$

Đơn giản là chỉ phải giải phương trình này với duy nhất số hạng đầu tiên ở vế phải. Sau đó giải phương trình này với duy nhất số hạng thứ hai ở trong vế phải. Sau đó cộng hai nghiệm này lại với nhau. Và sau đó cộng thêm vào nghiệm thuần nhất của phương trình (4.6). Chúng ta có thể sử dụng nguyên lý chồng chất nghiệm bởi vì vế trái của phương trình (4.24) là tuyến tính.

Cuối cùng, hãy xét trường hợp khi chúng ta có rất nhiều các số hạng như trên trong vế phải, ví dụ như,

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + ax = \sum_{n=1}^{N} C_n e^{i\omega_n t}. \tag{4.25}$$

Chúng ta cần phải giải N phương trình vi phân, mỗi phương trình chỉ có một số hạng duy nhất trong N số hạng trong vế phải. Sau đó chúng ta lấy tổng của tất cả các nghiệm, và thêm vào nghiệm thuần nhất của phương trình (4.6). Nếu N là vô hạn, cũng ổn thôi; chúng ta đơn giản là phải lấy tổng vô hạn của tất cả các nghiệm này. Đây là kết quả của nguyên lý chồng chất nghiệm ở mức độ tốt nhất của nó.

NHẬN XÉT: Đoạn văn trên, kết hợp với một kết quả cơ bản của phân tích chuỗi Fourier, cho phép ta giải (về nguyên tắc) bất cứ phương trình nào có dạng

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + ax = f(t). \tag{4.26}$$

Phân tích Fourier nói rằng bất cứ hàm (đủ tốt) $f(t)$ nào cũng có thể được phân tích thành các thành phần có dạng chuỗi Fourier của nó,

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \tag{4.27}$$

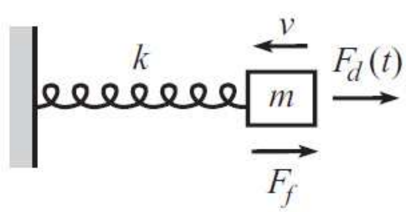
Trong tổng liên tục này, các hàm $g(\omega)$ (nhân với $d\omega$) sẽ thay các hệ số C_n trong phương trình (4.25). Vì vậy nếu $S_\omega(t)$ là nghiệm đối với $x(t)$ khi chỉ có duy nhất số hạng $e^{i\omega t}$ trong vế phải của phương trình (4.26) (nghĩa là, $S_\omega(t)$ là nghiệm đã cho trong phương trình (4.22), mà không có hệ số C_0), thì nguyên lý chồng chất nghiệm cho chúng ta biết rằng nghiệm tổng quát của phương trình (4.26) là

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) S_\omega(t) d\omega. \tag{4.28}$$

Việc tìm các hệ số $g(\omega)$ là một việc khó (hoặc rối rắm), nhưng chúng ta sẽ không đi sâu vào phần này ở đây. Chúng ta sẽ không làm gì liên quan đến phân tích Fourier trong quyển sách này, nhưng tuy nhiên cũng là tốt để biết rằng *là* có thể giải phương trình (4.26) với bất kỳ hàm $f(t)$ nào. Hầu hết các hàm mà chúng ta sẽ xét là những hàm đủ tốt như hàm $\cos\omega_0 t$, mà nó có khai triển Fourier rất đơn giản, có dạng $\cos\omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t})$. ♣

Bây giờ hãy làm một ví dụ vật lý.

Ví dụ (Dao động cưỡng bức của lò xo có cản): Xét một lò xo có độ cứng là k. Một khối lượng m gắn vào một đầu lò xo chịu tác dụng của một lực cản tỷ lệ với vận tốc của nó, $F_f = -bv$. Khối lượng cũng chịu tác dụng của một lực cưỡng bức, $F_d(t) = F_d \cos\omega_d t$ (xem Hình 4.7). Hãy tìm vị trí của khối lượng như là một hàm của thời gian?



Hình 4.7:

Lời giải: Lực tác dụng lên khối lượng là $F(x, \dot{x}, t) = -b\dot{x} - kx + F_d \cos\omega_d t$. Vì vậy phương trình $F = ma$ cho ta

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = F\cos\omega_{\mathrm{d}} t = \frac{F}{2}\left(e^{i\omega_{\mathrm{d}} t} + e^{-i\omega_{\mathrm{d}} t}\right). \tag{4.29}$$

trong đó $2\gamma \equiv b/m$, $\omega^2 \equiv k/m$, và $F \equiv F_d/m$. Chú ý rằng có hai tần số khác nhau ở đây, ω và ω_d, mà chúng không liên quan gì đến nhau. Phương trình (4.22), cùng với nguyên lý chồng chất nghiệm, cho chúng ta biết rằng nghiệm riêng của chúng ta là

$$x_{\mathrm{p}}(t)=\left(\frac{F/2}{-\omega_{\mathrm{d}}^2+2i\gamma\omega_{\mathrm{d}}+\omega^2}\right)e^{i\omega_{\mathrm{d}}t}+\left(\frac{F/2}{-\omega_{\mathrm{d}}^2-2i\gamma\omega_{\mathrm{d}}+\omega^2}\right)e^{-i\omega_{\mathrm{d}}t}. \tag{4.30}$$

Nghiệm tổng quát là tổng của nghiệm riêng này và nghiệm của phương trình thuần nhất (4.15).

Bây giờ hãy triệt tiêu số i trong phương trình (4.30) (là điều mà chúng ta nên làm vì x phải là số thực), và viết x dưới dạng các hàm sine và cosine. Loại bỏ i khỏi các mẫu số (bằng cách nhân cả tử và mẫu với liên hợp phức của mẫu số), và sử dụng $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$, chúng ta tìm được, sau một vài biến đổi,

$$x_{\mathrm{p}}(t)=\left(\frac{F\left(\omega^2-\omega_{\mathrm{d}}^2\right)}{\left(\omega^2-\omega_{\mathrm{d}}^2\right)^2+4\gamma^2\omega_{\mathrm{d}}^2}\right)\cos\omega_{\mathrm{d}}t+\left(\frac{2F\gamma\omega_{\mathrm{d}}}{\left(\omega^2-\omega_{\mathrm{d}}^2\right)^2+4\gamma^2\omega_{\mathrm{d}}^2}\right)\sin\omega_{\mathrm{d}}t. \tag{4.31}$$

NHẬN XÉT: Nếu bạn muốn, bạn có thể giải phương trình (4.29) bằng cách lấy phần thực của nghiệm của phương trình (4.20) (với $C_0\to F$), nghĩa là, $x(t)$ trong phương trình (4.22). Điều này là đúng bởi vì nếu chúng ta lấy phần thực của phương trình (4.20), chúng ta sẽ nhận được

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}\big(\mathrm{Re}(x)\big)+2\gamma\frac{d}{dt}\big(\mathrm{Re}(x)\big)+a\big(\mathrm{Re}(x)\big)&=\mathrm{Re}\big(C_0e^{i\omega_0t}\big)\\&=C_0\cos(\omega_0t).\end{aligned} \tag{4.32}$$

Nói cách khác, nếu x thỏa mãn phương trình (4.20) đối với $C_0e^{i\omega_0t}$ ở vế phải, thì $Re(x)$ thỏa mãn phương trình đó với $C_0\cos(\omega_0t)$ ở vế phải. Dù sao đi chăng nữa, rõ ràng là phần thực của nghiệm trong phương trình (4.22) (với $C_0\to F$) cho kết quả trong phương trình (4.31), bởi vì trong phương trình (4.30) chúng ta đơn giản là đã lấy một nửa giá trị của tổng của nó với liên hợp phức của nó, mà đây chính là phần thực.

Nếu bạn không thích sử dụng số phức, một cách khác để giải phương trình (4.29) là giữ nó ở dạng có $\cos\omega_dt$ ở vế phải, và thử một nghiệm có dạng $A\cos\omega_dt+B\sin\omega_dt$, và sau đó giải ra A và B (đây là nhiệm vụ của Bài tập 4.8. Kết quả nhận được sẽ là phương trình (4.31). ♣

Bây giờ chúng ta có thể viết phương trình (4.31) dưới dạng đơn giản. Nếu chúng ta định nghĩa

$$R\equiv\sqrt{\left(\omega^2-\omega_{\mathrm{d}}^2\right)^2+(2\gamma\omega_{\mathrm{d}})^2}, \tag{4.33}$$

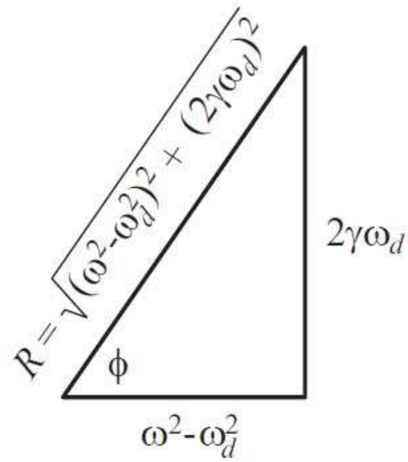
thì chúng ta có thể viết lại phương trình (4.31) dưới dạng

$$\begin{aligned}x_{\mathrm{p}}(t)&=\frac{F}{R}\left(\frac{\omega^2-\omega_{\mathrm{d}}^2}{R}\cos\omega_{\mathrm{d}}t+\frac{2\gamma\omega_{\mathrm{d}}}{R}\sin\omega_{\mathrm{d}}t\right)\\&\equiv\frac{F}{R}\cos(\omega_{\mathrm{d}}t-\phi),\end{aligned} \tag{4.34}$$

trong đó ϕ (góc pha) được định nghĩa bởi

$$\cos\phi = \frac{\omega^2 - \omega_{\rm d}^2}{R}, \quad \sin\phi = \frac{2\gamma\omega_{\rm d}}{R} \quad \Longrightarrow \quad \tan\phi = \frac{2\gamma\omega_{\rm d}}{\omega^2 - \omega_{\rm d}^2}. \tag{4.35}$$

Tam giác miêu tả góc ϕ được chỉ ra trong Hình 4.8. Chú ý rằng $0 \le \phi \le \pi$, bởi vì $\sin\phi$ trong phương trình (4.35) là lớn hơn hoặc bằng không. Xem thêm các thảo luận về góc ϕ ở phần cuối của mục này.



Hình 4.8:

Với nghiệm thuần nhất trong phương trình (4.15), chúng ta có thể viết nghiệm tổng quát của phương trình (4.29) dưới dạng

$$x(t) = \frac{F}{R}\cos(\omega_{\rm d} t - \phi) + e^{-\gamma t}\left(Ae^{\Omega t} + Be^{-\Omega t}\right). \tag{4.36}$$

Các hằng số A và B được xác định từ các điều kiện đầu. Nếu có bất cứ cản nào trong hệ (nghĩa là, nếu $\gamma > 0$), thì phần thuần nhất trong nghiệm sẽ tiến về không khi t lớn, và chúng ta chỉ còn lại phần nghiệm riêng. Nói cách khác, hệ sẽ tiến gần về một $x(t)$ xác định, gọi là $x_p(t)$, không phụ thuộc gì vào các điều kiện đầu.

4.5 Cộng hưởng

Biên độ của chuyển động đã cho trong phương trình (4.34) là tỷ lệ với

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_{\rm d}^2\right)^2 + (2\gamma\omega_{\rm d})^2}}. \tag{4.37}$$

Cho trước ω_d và γ, giá trị này đạt giá trị lớn nhất khi $\omega = \omega_d$. Cho trước ω và γ, nó đạt giá trị lớn nhất khi $\omega_d = \sqrt{\omega^2 - 2\gamma^2}$, như bạn có thể chỉ ra trong Bài tập luyện tập 4.29. Nhưng đối với trường hợp cản yếu (nghĩa là, $\gamma \ll \omega$, là trường hợp mà chúng ta thường xuyên quan tâm đến), giá trị này cũng đưa về $\omega_d \approx \omega$. Thuật ngữ *cộng hưởng* được dùng để miêu tả tình huống khi biên độ của dao động là lớn nhất có thể. Nó hoàn toàn hợp lý khi điều này đạt được khi tần số của lực cưỡng bức bằng với tần số của lò xo. Nhưng giá trị của góc pha ϕ bằng bao nhiêu tại trạng thái cộng hưởng? Sử dụng phương trình (4.35), chúng ta thấy rằng ϕ thỏa mãn $\tan\phi \approx \pm\infty$ khi $\omega_d \approx \omega$. Do đó, $\phi = \pi/2$ (bằng $\pi/2$, chứ không phải là $-\pi/2$, bởi vì $\sin\phi$ trong phương trình (4.35) là dương), và chuyển động của khối lượng là chậm hơn một phần tư chu kỳ so với lực cưỡng bức khi ở trạng thái cộng hưởng. Ví dụ như, khi khối lượng chuyển động qua điểm cân bằng về phía bên phải (nghĩa là nó phải đi một phần tư vòng tròn nữa trước khi nó đạt được vị trí lớn nhất của x), lực cưỡng bức đã ở vị trí giá trị lớn nhất của nó rồi. Và khi khối lượng đạt tới vị trí lớn nhất của x, thì lực cưỡng bức đã trở về vị trí bằng không.

Thực tế lực đạt giá trị lớn nhất khi khối lượng đang chuyển động nhanh nhất là hoàn toàn có ý nghĩa từ quan điểm của năng lượng.[2] Nếu bạn muốn biên độ trở lên rất lớn, thì bạn cần phải cung cấp năng lượng cho hệ một cách nhiều nhất có thể. Nghĩa là, bạn phải thực hiện nhiều công nhất có thể tác động lên hệ. Và để thực hiện được nhiều công nhất, bạn phải có lực tác dụng của bạn tác dụng lên một quãng đường dài nhất có thể, nghĩa là bạn nên tác dụng lực của bạn khi khối lượng đang chuyển động nhanh nhất, nghĩa là, khi nó đi qua vị trí cân bằng. Và một cách tương tự, bạn không muốn lãng phí lực của bạn khi khối lượng gần như là đang chuyển động tại các điểm biên độ của chuyển động. Nói tóm lại, v là đạo hàm của x và do đó sẽ đi sớm hơn một phần tư vòng tròn trước x (đây là một tính chất tổng quát của hàm lượng giác, như bạn có thể chỉ ra). Bởi vì bạn muốn lực là cùng pha với v tại trạng thái cộng hưởng (bởi lập luận về năng lượng phía trên), chúng ta thấy rằng lực tác dụng cũng phải sớm hơn một phần tư vòng tròn so với x.

Cộng hưởng có rất nhiều ứng dụng cực kỳ quan trọng (cả chủ động và bị động) trong thực tế. Về mặt tích cực, nó làm bạn có thể có một ngày thư giãn tại bờ biển tại Bay of Fundy, nói chuyện với một người bạn qua điện thoại di động trong khi đẩy võng cho con của bạn. Về mặt tiêu cực, khi bạn lái xe về nhà trên một con đường đất "có dạng sàn tàu" mà bạn mới khám phá ra, bạn sẽ thấy khó chịu bởi đường xóc khi đang đi với một tốc độ nào đó, và để thoát khỏi cái khó chịu này bạn mở radio để nghe nhưng kết quả duy nhất bạn có được là một vài bộ phận của chiếc xe của bạn sẽ kêu lạch cạch theo cùng nhịp điệu (thực ra là khác pha nhau một góc 90^o) với nhịp bass của bài hát yêu thích của bạn.[3]

---

[2] Năng lượng là một trong các chủ đề của chương tiếp theo, vì vậy bạn có thể sẽ muốn quay lại và đọc lại đoạn này sau khi đọc về phần năng lượng.

[3] Một vài ví dụ khác về cộng hưởng mà thường xuyên được trích dẫn thực ra là không phải các ví dụ của cộng hưởng, mà là các ví dụ về "giảm dao động" (mà cũng được biết đến như là các ví dụ về phản hồi tích cực). Những dụng cụ âm nhạc là nằm trong nhóm này, cũng như ví dụ nổi tiếng về sự sụp đổ của cây cầu Tacoma Narrows. Để biết thêm chi tiết về vấn đề này, xem Billah và Scanlan (1991) và Green

Pha ϕ

Phương trình (4.35) cho chúng ta biết pha của chuyển động có dạng

$$\tan\phi = \frac{2\gamma\omega_\mathrm{d}}{\omega^2 - \omega_\mathrm{d}^2}, \tag{4.38}$$

trong đó $0 \le \phi \le \pi$. Hãy xem xét một vài trường hợp của ω_d (không nhất thiết phải là tần số cộng hưởng) và xem giá trị của pha ϕ sẽ như thế nào. Sử dụng phương trình (4.38), chúng ta có:

- Nếu $\omega_d \approx 0$ (hoặc chính xác hơn, nếu $\gamma\omega_d \ll \omega^2 - \omega_d^2$), thì $\phi \approx 0$. Điều này có nghĩa là chuyển động là cùng pha với lực cưỡng bức. Lý do toán học cho điều này là nếu $\omega_d \approx 0$, thì cả $\ddot{x}$ và $\dot{x}$ đều nhỏ, bởi vì chúng tương ứng tỷ lệ với ω_d^2 và ω_d. Do đó, hai số hạng đầu tiên trong phương trình (4.29) là có thể bỏ qua, vì vậy cuối cùng chúng ta có $x \propto \cos\omega_d t$. Nói cách khác, pha sẽ bằng không.

  Lý do vật lý của điều này là bởi vì về cơ bản là không có gia tốc nào, tổng lực về cơ bản là luôn bằng không. Điều này có nghĩa là lực cưỡng bức về cơ bản là luôn cân bằng với lực của lò xo (nghĩa là, hai lực này có pha lệch nhau một góc 180^o), bởi vì lực cản là có thể bỏ qua (do $\dot{x} \propto \omega_d \approx 0$). Nhưng lực lò xo có pha lệch một góc 180^o so với chuyển động (do dấu trừ trong phương trình $F = -kx$). Do đó, lực cưỡng bức là cùng pha với chuyển động.

- Nếu $\omega_d \approx \omega$, thì $\phi \approx \pi/2$. Đây là trường hợp cộng hưởng, đã được thảo luận ở trên.

- Nếu $\omega_d \approx \infty$ (hoặc chính xác hơn, nếu $\gamma\omega_d \ll \omega_d^2 - \omega^2$), thì $\phi \approx \pi$. Lý do toán học cho điều này là nếu $\omega_d \approx \infty$, thì số hạng $\ddot{x}$ trong phương trình (4.29) sẽ là số hạng chủ đạo, vì vậy chúng ta có $\ddot{x} \propto \cos\omega_d t$. Do đó, $\ddot{x}$ là cùng pha với lực tác dụng. Nhưng x lại lệch pha với $\ddot{x}$ một góc 180^o (đây là một tính chất cơ bản của hàm lượng giác), vì vậy x lệch pha một góc 180^o so với lực.

  Lý do vật lý của điều này là nếu $\omega_d \approx \infty$, thì khối lượng hầu như là không chuyển động, bởi vì từ phương trình (4.37) chúng ta thấy rằng biên độ là tỷ lệ với $1/\omega_d^2$. Do đó, cả x và v luôn luôn có giá trị nhỏ. Nhưng nếu x và v luôn có giá trị nhỏ, thì lực lò xo và lực cản có thể bỏ qua. Vì vậy về cơ bản chúng ta có một khối lượng mà chỉ chịu tác dụng của một lực, là lực cưỡng bức. Nhưng chúng ta đã hiểu rất rõ về tình huống khi có một khối lượng chịu tác dụng của duy nhất một lực dao động: một khối lượng gắn vào một lò xo. Khối lượng trong cơ cấu của chúng ta không thể biết được là nó đang chịu tác dụng của một lực cưỡng bức, hay là đang bị kéo và đẩy bởi một lực của một lò xo. Nó sẽ cảm thấy như nhau. Bởi vậy, cả hai pha phải giống nhau. Nhưng trong trường hợp lực lò xo, dấu trừ trong phương trình $F = -kx$ cho

và Unruh (2006).

ta biết rằng lực lệch pha một góc 180^o so với chuyển động. Vì vậy, chúng ta có cùng kết quả trong trường hợp $\omega_d \approx \infty$.

Một trường hợp đặc biệt khác của pha xảy ra khi $\gamma = 0$ (không có cản), khi đó ta có $\tan\phi = \pm 0$, phụ thuộc vào dấu của $\omega^2 - \omega_d^2$. Vì vậy pha ϕ hoặc là bằng 0 hoặc bằng π. Chuyển động do đó hoặc là cùng pha hoặc là nghịch pha đối với lực cưỡng bức, phụ thuộc vào giá trị nào của ω và ω_d lớn hơn.

4.6 Dao động liên kết

Trong các mục trước, chúng ta chỉ liên quan đến một hàm của thời gian, $x(t)$. Cái gì sẽ xảy ra nếu chúng ta có hai hàm của thời gian, ví dụ như $x(t)$ và $y(t)$, mà chúng liên hệ với nhau bởi một cặp phương trình vi phân "liên kết" với nhau? Ví dụ như, chúng ta có thể có

$$\begin{aligned} 2\ddot{x} + \omega^2(5x - 3y) &= 0, \\ 2\ddot{y} + \omega^2(5y - 3x) &= 0. \end{aligned} \tag{4.39}$$

Bây giờ, không nên quan tâm là hai phương trình này từ đâu mà có. Hãy chỉ cố gắng giải chúng (chúng ta sẽ làm một ví dụ vật lý sau trong mục này). Chúng ta sẽ giả sử $\omega^2 > 0$ ở đây, mặc dù điều này là không cần thiết. Chúng ta cũng sẽ giả sử rằng không có bất cứ lực cản hay lực cưỡng bức nào, mặc dù một vài bài tập và bài luyện tập trong chương này sẽ liên quan đến các điều kiện thêm này. Chúng ta gọi hai phương trình ở trên là "liên kết" bởi vì chúng có cả x và y, và ngay từ ban đầu nó không hiển nhiên để biết cách tách biến rồi giải riêng theo x và y. Có (ít nhất) hai cách để giải hệ phương trình này.

LỜI GIẢI THỨ NHẤT : Đôi khi khá là dễ dàng, như là trong trường hợp này, để tìm một tổ hợp tuyến tính nào đó của các phương trình đã cho sao cho ta nhận được một kết quả đẹp đẽ. Nếu chúng ta lấy tổng, chúng ta có

$$(\ddot{x} + \ddot{y}) + \omega^2(x + y) = 0. \tag{4.40}$$

Phương trình này chỉ liên quan đến x và y theo tổng của chúng, $x + y$. Với việc đặt $z \equiv x + y$, phương trình (4.40) chỉ là một người bạn cũ của chúng ta, $\ddot{z} + \omega^2 z = 0$. Nghiệm của nó là

$$x + y = A_1\cos(\omega t + \phi_1), \tag{4.41}$$

trong đó A_1 và ϕ_1 được xác định từ các điều kiện đầu. Chúng ta cũng có thể lấy hiệu của các phương trình trong (4.39) để có

$$(\ddot{x} - \ddot{y}) + 4\omega^2(x - y) = 0. \tag{4.42}$$

Phương trình này chỉ liên quan đến x và y theo hiệu của chúng, $x - y$. Nghiệm của nó là

$$x - y = A_2\cos(2\omega t + \phi_2). \tag{4.43}$$

Lấy tổng và hiệu của phương trình (4.41) và (4.43), chúng ta tìm được $x(t)$ và $y(t)$ được cho bởi

$$\begin{aligned} x(t) &= B_1 \cos(\omega t + \phi_1) + B_2 \cos(2\omega t + \phi_2), \\ y(t) &= B_1 \cos(\omega t + \phi_1) - B_2 \cos(2\omega t + \phi_2), \end{aligned} \tag{4.44}$$

trong đó các hằng số B_i bằng một nửa các giá trị của A_i. Chiến thuật của lời giải này đơn giản là mò mẫm và cố gắng tìm ra một phương trình vi phân chỉ liên quan đến một tổ hợp của các biến. Điều này cho phép chúng ta viết ra các nghiệm quen thuộc cho những tổ hợp này, như chúng ta đã làm trong phương trình (4.41) và (4.43).

Chúng ta đã cố gắng để giải các phương trình của chúng ta đối với x và y. Tuy nhiên, hóa ra rằng điều thú vị hơn mà chúng ta vừa làm là tìm ra các phương trình (4.41) và (4.43). Các tổ hợp $(x + y)$ và $(x - y)$ được gọi là *các tọa độ trực giao* của hệ. Đây là các tổ hợp mà chỉ dao động với một tần số thuần nhất. Chuyển động của x và y nói chung sẽ trông rất rối rắm, và có thể rất khó để nói rằng chuyển động của chúng chỉ là tổng hợp của hai tần số trong phương trình (4.44). Nhưng nếu bạn vẽ các giá trị của $(x + y)$ và $(x - y)$ đối với thời gian, đối với *bất cứ* chuyển động nào của hệ, thì bạn sẽ thấy đồ thị đẹp đẽ của các hàm sine và cosine, thậm chí là khi x và y mỗi bản thân chúng biến đổi theo một cách không dễ chịu gì.

LỜI GIẢI THỨ HAI : Trong cách trên, khá là dễ dàng để đoán được tổ hợp nào của các phương trình trong (4.39) sẽ cho các phương trình chỉ liên quan đến một tổ hợp của x và y. Nhưng chắc chắn là có những bài toán khác trong vật lý mà việc đoán trên sẽ không hề dễ dàng. Khi đó chúng ta phải làm thế nào? May mắn là, có một phương pháp luôn có tác dụng để giải ra x và y. Nó được tiến hành như sau.

Theo tinh thần của Mục 4.1, hãy thử một nghiệm có dạng $x = Ae^{i\alpha t}$ và $y = Be^{i\alpha t}$, mà để cho tiện chúng ta sẽ viết chúng như sau

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} e^{i\alpha t}. \tag{4.45}$$

Nó hoàn toàn không hiển nhiên rằng nghiệm cho x và y phụ thuộc vào t theo cùng một dạng, nhưng hãy thử nó và xem cái gì sẽ xảy ra. Chúng ta đặt số ảo i có dạng tường minh trong hệ số mũ, nhưng điều đó không làm mất tính chất tổng quát ở đây. Nếu α vô tình là một số ảo, thì hệ số mũ là một số thực. Nó là sở thích cá nhân khi cho số i vào hay không. Thay nghiệm thử của chúng ta vào các phương trình trong (4.39), và chia cả hai vế cho $e^{i\omega t}$, chúng ta tìm được

$$\begin{aligned} 2A(-\alpha^2) + 5A\omega^2 - 3B\omega^2 &= 0, \\ 2B(-\alpha^2) + 5B\omega^2 - 3A\omega^2 &= 0, \end{aligned} \tag{4.46}$$

hoặc, một cách tương đương, dưới dạng ma trận,

$$\begin{pmatrix} -2\alpha^2 + 5\omega^2 & -3\omega^2 \\ -3\omega^2 & -2\alpha^2 + 5\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.47}$$

Phương trình thuần nhất đối với A và B này có một nghiệm không tầm thường (nghĩa là, nghiệm trong đó A và B không đồng thời bằng không) chỉ khi ma trận là *không* khả nghịch. Điều này là đúng, bởi vì nếu nó khả nghịch, thì chúng ta có thể nhân hai vế với nghịch đảo của nó và nhận được $(A, B) = (0, 0)$. Khi nào một ma trận là khả nghịch? Có một phương pháp trực tiếp (mặc dù dài dòng) để tìm nghịch đảo của nó. Nó liên quan đến phần phụ đại số, lấy chuyển vị, và chia cho định thức. Bước mà chúng ta quan tâm ở đây là việc chia cho định thức, bởi vì nó ngụ ý rằng nghịch đảo của ma trận tồn tại nếu và chỉ nếu định thức là khác không. Vì vậy chúng ta thấy rằng phương trình (4.47) có một nghiệm không tầm thường chỉ khi định thức là bằng không. Bởi vì chúng ta đang tìm kiếm một nghiệm không tầm thường, do đó chúng ta phải có

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} -2\alpha^2 + 5\omega^2 & -3\omega^2 \\ -3\omega^2 & -2\alpha^2 + 5\omega^2 \end{vmatrix} \\ &= 4\alpha^4 - 20\alpha^2\omega^2 + 16\omega^4. \end{aligned} \tag{4.48}$$

Đây là một phương trình bậc hai đối với α^2, và các nghiệm của nó là $\alpha = \pm\omega$ và $\alpha = \pm 2\omega$. Do đó chúng ta tìm được bốn dạng của nghiệm. Nếu $\alpha = \pm\omega$, thì chúng ta có thể thay nó ngược lại vào phương trình (4.47) để nhận được $A = B$. (Cả hai phương trình cho cùng một kết quả. Về cơ bản đây là kết quả của việc cho định thức bằng không.) Và nếu $\alpha = \pm 2\omega$, thì phương trình (4.47) cho ta $A = -B$. (Một lần nữa, một trong hai phương trình là thừa, không cần thiết ở đây.) Chú ý rằng chúng ta không thể giải để tìm ra giá trị cụ thể của A và B, nhưng có thể tìm ra tỷ số của chúng. Cộng cả bốn nghiệm của chúng ta theo nguyên lý chồng chất nghiệm, chúng ta thấy rằng x và y sẽ có dạng tổng quát (được viết dưới dạng vector cho đơn giản và gọn gàng),

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =& A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\omega t} + A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i\omega t} \\ &+ A_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2i\omega t} + A_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2i\omega t}. \end{aligned} \tag{4.49}$$

Bốn hằng số A_i được xác định từ các điều kiện đầu. Chúng ta có thể viết lại phương trình (4.49) theo một dạng gọn hơn ở một mức độ nào đó. Nếu các tọa độ x và y miêu tả vị trí của các phần tử, thì chúng phải là số thực. Do đó, A_1 và A_2 phải là liên hợp phức của nhau, và tương tự đối với A_3 và A_4. Khi đó nếu chúng ta định nghĩa một vài hệ số ϕ và

B thông qua $A_2^* = A_1 \equiv (B_1/2)e^{i\phi_1}$ và $A_4^* = A_3 \equiv (B_2/2)e^{i\phi_2}$, chúng ta có thể viết lại nghiệm của chúng ta dưới dạng, như bạn có thể kiểm tra,

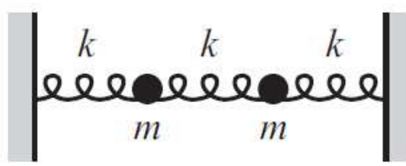
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega t + \phi_1) + B_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(2\omega t + \phi_2), \tag{4.50}$$

trong đó B_i và ϕ_i là các số thực (và được xác định từ các điều kiện đầu). Chúng ta do đó nhận lại được kết quả trong phương trình (4.44).

Rõ ràng là từ phương trình (4.50) các tổ hợp $x + y$ và $x - y$ (các tọa độ trực giao) dao động với các tần số thuần nhất tương ứng là ω và 2ω, bởi vì tổ hợp $x + y$ làm cho số hạng B_2 biến mất, và tổ hợp $x - y$ làm cho số hạng B_1 biến mất.

Nó cũng rõ ràng là nếu $B_2 = 0$, thì $x = y$ tại mọi thời điểm, và chúng đều dao động với cùng tần số ω. Và nếu $B_1 = 0$, thì $x = -y$ tại mọi thời điểm, và chúng cùng dao động với tần số 2ω. Hai chuyển động với tần số thuần nhất này được gọi là các *mode trực giao*. Chúng được gán nhãn tương ứng bởi các vector $(1, 1)$ và $(1, -1)$. Để miêu tả một mode trực giao, cả vector và tần số của nó phải được nói rõ. Sự quan trọng của các mode trực giao sẽ được làm rõ trong ví dụ sau đây.

Ví dụ (Hai khối lượng, ba lò xo): Xét hai khối lượng m, được nối với nhau và với hai bức tường bởi ba lò xo, như trong Hình vẽ 4.9. Ba lò xo có cùng độ cứng là k. Tìm nghiệm tổng quát nhất của vị trí của các khối lượng như là một hàm của thời gian. Hãy tìm các tọa độ trực giao và các mode trực giao?



Hình 4.9:

Lời giải: Gọi $x_1(t)$ và $x_2(t)$ tương ứng là các vị trí của khối lượng bên trái và bên phải, so với vị trí cân bằng của chúng. Khi đó lò xo ở giữa bị giãn thêm một khoảng là $x_2 - x_1$ so với độ giãn của nó tại ví trí cân bằng. Do đó, tổng lực tác dụng vào khối lượng bên trái là $-kx_1 + k(x_2 - x_1)$, và tổng lực tác dụng vào khối lượng bên phải là $-kx_2 - k(x_2 - x_1)$. Sẽ rất dễ mắc sai lầm về dấu của số hạng thứ hai trong hai biểu thức này, nhưng bạn có thể kiểm tra nó bằng cách, ví dụ như, xem xét lực khi x_2 là rất lớn. Dù sao đi chăng nữa, số hạng thứ hai phải có dấu khác nhau trong hai biểu thức này, do định luật thứ ba của Newton. Với các lực này, phương trình

$F = ma$ của mỗi khối lượng cho ta, với $\omega^2 = k/m$,

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 + 2\omega^2 x_1 - \omega^2 x_2 = 0,\\ \ddot{x}_2 + 2\omega^2 x_2 - \omega^2 x_1 = 0.\end{aligned} \tag{4.51}$$

Đây là cặp phương trình có vẻ khá dễ dàng, và chúng ta có thể thấy rằng tổng và hiệu của chúng là các tổ hợp có ích cần phải lấy. Tổng của chúng cho ta

$$(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + \omega^2(x_1 + x_2) = 0, \tag{4.52}$$

và hiệu của chúng cho ta

$$(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + 3\omega^2(x_1 - x_2) = 0. \tag{4.53}$$

Nghiệm của hai phương trình này là các tọa độ trực giao,

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= A_+ \cos(\omega t + \phi_+),\\ x_1 - x_2 &= A_- \cos(\sqrt{3}\omega t + \phi_-).\end{aligned} \tag{4.54}$$

Lấy tổng và hiệu của những tọa độ trực giao này, ta có

$$\begin{aligned}x_1(t) &= B_+ \cos(\omega t + \phi_+) + B_- \cos(\sqrt{3}\omega t + \phi_-),\\ x_2(t) &= B_+ \cos(\omega t + \phi_+) - B_- \cos(\sqrt{3}\omega t + \phi_-),\end{aligned} \tag{4.55}$$

trong đó các hệ số B bằng một nửa giá trị của các hệ số A. Cùng với các góc pha ϕ, chúng được xác định bởi các điều kiện đầu.

NHẬN XÉT: Để thực hành, hãy nhận lại phương trình (4.55) bằng cách sử dụng phương pháp định thức. Đặt $x_1 = Ae^{i\alpha t}$ và $x_2 = Be^{i\alpha t}$ trong phương trình (4.51), chúng ta thấy rằng để có nghiệm không tầm thường đối với A và B, chúng ta phải có

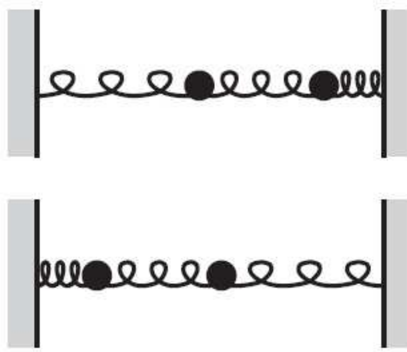
$$\begin{aligned}0 &= \begin{vmatrix} -\alpha^2 + 2\omega^2 & -\omega^2 \\ -\omega^2 & -\alpha^2 + 2\omega^2 \end{vmatrix}\\ &= \alpha^4 - 4\alpha^2\omega^2 + 3\omega^4.\end{aligned} \tag{4.56}$$

Đây là một phương trình bậc hai của α^2, và các nghiệm của nó là $\alpha = \pm\omega$ và $\alpha = \pm\sqrt{3}\omega$. Nếu $\alpha = \pm\omega$, thì phương trình (4.51) cho ta $A = B$. Nếu $\alpha = \pm\sqrt{3}\omega$, thì phương trình (4.51) cho ta $A = -B$. Nghiệm cho x_1 và x_2 do đó sẽ có dạng tổng quát

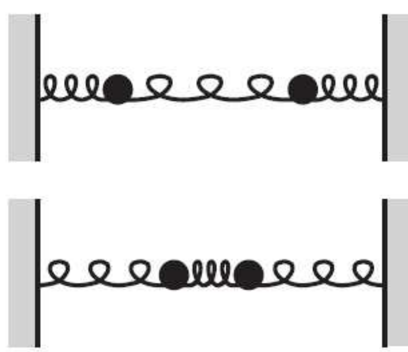
$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =& A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\omega t} + A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i\omega t}\\ &+ A_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{\sqrt{3}i\omega t} + A_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-\sqrt{3}i\omega t}\\ \equiv& B_+ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega t + \phi_+) + B_- \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\sqrt{3}\omega t + \phi_-),\end{aligned} \tag{4.57}$$

trong đó hàng cuối cùng là từ phép biến đổi thay thế giống như phép biến đổi mà dẫn đến phương trình (4.50). Biểu thức này tương đương với phương trình (4.55). ♣

Các mode trực giao có thể nhận được bằng việc đặt một trong hai B_- hoặc B_+ bằng không trong phương trình (4.55) hoặc (4.57). Do đó, các mode trực giao là $(1,1)$ và $(1,-1)$. Làm thế nào chúng ta có thể tưởng tượng được các mode này? Mode $(1,1)$ dao động với tần số ω. Trong trường hợp này (trong đó $B_- = 0$), chúng ta có $x_1(t) = x_2(t) = B_+ \cos(\omega t + \phi_+)$ tại mọi thời điểm. Vì vậy các khối lượng đơn giản là dao động qua lại theo cùng một cách, như chỉ ra trong Hình 4.10. Rõ ràng là chuyển động như thế này có tần số dao động là ω, bởi vì khi chỉ quan tâm đến các khối lượng, lò xo ở giữa coi như là không có ảnh hưởng gì, vì vậy mỗi khối lượng sẽ chuyển động dưới tác dụng của một lò xo duy nhất, và do đó nó có tần số là ω.



Hình 4.10:



Hình 4.11:

Mode $(1,-1)$ dao động với tần số là $\sqrt{3}\omega$. Trong trường hợp này (trong đó $B_+ = 0$), chúng ta có $x_1(t) = -x_2(t) = B_- \cos(\sqrt{3}\omega t + \phi_-)$ tại mọi thời điểm. Vì vậy các khối lượng dao động qua lại với chuyển dịch là bằng và ngược dấu nhau, như chỉ ra trong Hình 4.11. Rõ ràng là mode này phải có một tần số lớn hơn tần số của mode kia, bởi vì lò xo ở giữa bị giãn (hoặc bị nén), vì vậy các khối lượng chịu một lực tác dụng lớn hơn. Nhưng chúng ta phải suy nghĩ thêm một chút để chỉ ra rằng tần số là bằng $\sqrt{3}\omega$.[4]

Mode trực giao $(1, 1)$ phía trên là tương ứng với tọa độ trực giao $x_1 + x_2$. Cả hai đều liên quan đến tần số ω. Tuy nhiên, sự tương ứng này *không phải* là do thực tế rằng các hệ số của cả x_1 và x_2 trong tọa độ trực giao này là bằng 1. Hơn nữa, nó là do thực tế rằng mode trực giao *kia*, là $(x_1, x_2) \propto (1, -1)$, không có đóng góp gì cho tổng $x_1 + x_2$. Có khá nhiều hệ số 1 xuất hiện ở trong ví dụ trên, vì vậy khó mà biết được hệ số nào là có nghĩa và hệ số nào chỉ là vô tình mà có. Nhưng ví dụ sau sẽ làm rõ mọi điều này. Ví dụ như hãy giải một bài toán sử dụng phương pháp định thức, và chúng ta tìm được nghiệm có dạng

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \phi_1) + B_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \phi_2). \tag{4.58}$$

Khi đó $5x + y$ là tọa độ trực giao tương ứng với mode trực giao $(3, 2)$, mà có tần số là ω_1. (Điều này là đúng bởi vì không có $\cos(\omega_2 t + \phi_2)$ phụ thuộc ở trong tổ hợp $5x + y$.) Và tương tự như vậy, $2x - 3y$ là tọa độ trực giao tương ứng với mode trực giao $(1, -5)$, mà có tần số là ω_2 (bởi vì không có $\cos(\omega_1 t + \phi_1)$ phụ thuộc gì trong tổ hợp $2x - 3y$).

Chú ý sự khác nhau giữa hai loại phương trình vi phân mà chúng ta đã giải trong chương trước trong Mục 3.3, và các loại mà chúng ta đã giải trong suốt chương này. Loại đầu tiên liên quan đến các lực mà không phải tuyến tính đối với x hoặc $\dot{x}$, nhưng phải chỉ phụ thuộc duy nhất vào x, hoặc vào $\dot{x}$, hoặc t. Loại thứ hai liên quan đến các lực phụ thuộc vào cả ba đại lượng này, nhưng phải tuyến tính đối với x và $\dot{x}$.

4.7 Bài tập

Mục 4.1: Hệ phương trình vi phân tuyến tính

4.1. Chồng chất nghiệm

Gọi $x_1(t)$ và $x_2(t)$ là nghiệm của phương trình $\ddot{x}^2 = bx$. Hãy chỉ ra rằng $x_1(t) + x_2(t)$ *không* là nghiệm của phương trình này.

4.2. Một trường hợp tới hạn *

Xét phương trình $\ddot{x} = ax$. Nếu $a = 0$, thì nghiệm của phương trình $\ddot{x} = 0$ đơn giản là

[4]Nếu bạn muốn nhận được giá trị $\sqrt{3}\omega$ này mà không phải làm lại tất cả các công việc phía trên, chỉ cần chú ý rằng tâm của lò xo ở giữa là không chuyển động. Do đó, nó sẽ tác dụng giống như hai "nửa lò xo", mỗi nửa với độ cứng là $2k$ (như bạn có thể kiểm tra). Vì vậy, mỗi khối lượng về cơ bản là được gắn với một lò xo độ cứng là k và một lò xo có độ cứng là "$2k$", và tổng tác dụng của chúng là một lò xo tương đương có độ cứng là $3k$. Do đó chúng ta có hệ số $\sqrt{3}$.

$x(t) = C + Dt$. Chỉ ra rằng trong trường hợp tới hạn khi $a \to 0$, phương trình (4.2) sẽ có dạng này. *Chú ý:* $a \to 0$ là một cách nói thiếu suy nghĩ cái mà chúng ta muốn nói. Hỏi cách nào là cách đúng đắn để viết giới hạn này?

Mục 4.2: Chuyển động điều hòa đơn giản

4.3. Tăng khối lượng **

Một khối lượng m dao động cùng với một lò xo có độ cứng k. Biên độ dao động là d. Tại thời điểm (gọi là $t = 0$) khi khối lượng ở vị trí $x = d/2$ (và đang chuyển động về bên phải), nó va chạm và dính với một khối lượng m khác. Vận tốc của khối lượng $2m$ ngay sau va chạm bằng một nửa vận tốc của khối lượng m trước va chạm (kết quả này có từ định luật bảo toàn động lượng, được thảo luận trong Chương 5). Hỏi $x(t)$ sau va chạm bằng bao nhiêu? Hỏi biên độ của dao động mới bằng bao nhiêu?

4.4. Lực căng trung bình **

Hỏi lực căng trung bình (theo thời gian) trong sợi dây của con lắc đơn lớn hơn hay nhỏ hơn mg? Và nó lớn hơn hay nhỏ hơn bao nhiêu? Như thường lệ, hãy giả sử rằng biên độ góc A là nhỏ.

4.5. Bước về hướng đông trên một đĩa quay **

Một người bước đi theo hướng đông với vận tốc không đổi v đối với một đĩa quay mà đang quay ngược chiều kim đồng hồ với tần số không đổi ω. Tìm biểu thức tổng quát của tọa độ của người đó đối với mặt đất (với chiều dương của x là chiều hướng về hướng đông).

Mục 4.3: Chuyển động điều hòa có cản

4.6. Vận tốc lớn nhất **

Một khối lượng gắn vào đầu một lò xo (với tần số tự nhiên bằng ω) được thả ra không vận tốc đầu tại vị trí x_0. Thí nghiệm được lặp lại, nhưng bây giờ cả hệ thống được nhúng vào trong một chất lỏng mà làm cho chuyển động sẽ là cản lớn (với hệ số cản là γ). Tìm tỷ số của của vận tốc lớn nhất trong trường hợp đầu và trong trường hợp sau. Hỏi tỷ số này bằng bao nhiêu trong trường hợp giới hạn khi lực cản là rất lớn ($\gamma \gg \omega$)? Trong trường hợp cản tới hạn?

Mục 4.4: Chuyển động điều hòa cưỡng bức (có cản)

4.7. Lực hàm mũ *

Một phần tử có khối lượng m chịu tác dụng của một lực $F(t) = ma_0 e^{-bt}$. Cả vận tốc và trí ban đầu của phần tử đều bằng không. Tìm $x(t)$. (Bài tập này đã được cho trong Bài tập 3.9, nhưng hãy giải nó trong trường hợp này bằng nghiệm thử dạng hàm mũ, theo tinh thần của Mục 4.4.)

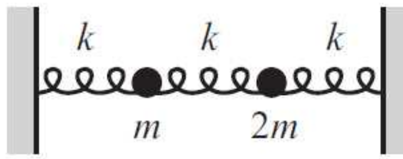
4.8. Dao động cưỡng bức *

Hãy nhận lại phương trình (4.31) bằng cách thử một nghiệm có dạng $x(t) = A\cos\omega_d t + B\sin\omega_d t$ trong phương trình (4.29).

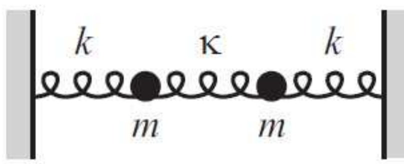
Mục 4.5: Dao động liên kết

4.9. Hai khối lượng khác nhau **

Ba lò xo đồng nhất và hai khối lượng, m và $2m$, nằm giữa hai bức tường như trong Hình vẽ 4.12. Hãy tìm các mode trực giao.



Hình 4.12:



Hình 4.13:

4.10. Liên kết yếu **

Ba lò xo và hai khối lượng bằng nhau nằm giữa hai bức tường, như trong Hình vẽ 4.13. Độ cứng lò xo, k, của hai lò xo bên ngoài là lớn hơn rất nhiều độ cứng là xo, κ, của lò xo nằm giữa. Gọi x_1 và x_2 là vị trí tương ứng của khối lượng bên trái và bên phải đối với vị trí cân bằng của chúng. Nếu vị trí ban đầu được cho bởi $x_1(0) = a$ và $x_2(0) = 0$, và nếu cả hai khối lượng đều được thả ra không vận tốc ban đầu, hãy chỉ ra rằng x_1 và x_2 có thể được viết dưới dạng (với giả sử rằng $\kappa \ll k$)

$$\begin{aligned} x_1(t) &\approx a\cos\big((\omega+\epsilon)t\big)\cos(\epsilon t), \\ x_2(t) &\approx a\sin\big((\omega+\epsilon)t\big)\sin(\epsilon t), \end{aligned} \tag{4.59}$$

trong đó $\omega \equiv \sqrt{k/m}$ và $\epsilon \equiv (\kappa/2k)\omega$. Giải thích một cách định tính xem chuyển động sẽ có dạng như thế nào.

4.11. Khối lượng chịu lực tác dụng cưỡng bức trên một đường tròn **

Hai khối lượng giống nhau m bị giới hạn chuyển động trên một vòng tròn nằm ngang.

Hình 4.14:

Hai lò xo đồng nhất có độ cứng k nối các khối lượng và quấn xung quanh vòng tròn (xem Hình vẽ 4.14). Một khối lượng chịu tác động của một lực cưỡng bức $F_d \cos \omega_d t$. Hãy tìm nghiệm riêng của chuyển động của các khối lượng.

4.12. Các lò xo trên một đường tròn ****

(a) Hai khối lượng giống nhau m bị giới hạn chuyển động trên một vòng tròn nằm ngang. Hai lò xo đồng nhất có độ cứng k nối các khối lượng và quấn xung quanh vòng tròn (xem Hình vẽ 4.15). Hãy tìm các mode trực giao.

(b) Ba khối lượng giống nhau bị giới hạn chuyển động trên một vòng tròn. Ba lò xo đồng nhất nối các khối lượng và quấn xung quanh vòng tròn (xem Hình vẽ 4.16). Hãy tìm các mode trực giao.

(c) Bây giờ hãy làm trường hợp tổng quát với N khối lượng giống nhau và N lò xo đồng nhất.

Hình 4.15:

Hình 4.16:

4.8 Bài tập luyện tập

Mục 4.1: Hệ phương trình vi phân tuyến tính

4.13. Lực *

Một phần tử khối lượng m chịu tác dụng của một lực $F(x) = kx$, với $k > 0$. Hỏi dạng tổng quát nhất của $x(t)$ là như thế nào? Nếu phần tử bắt đầu tại vị trí x_0, hỏi một giá trị đặc biệt của vận tốc ban đầu bằng bao nhiêu sao cho cuối cùng phần tử sẽ không đi ra xa vị trí ban đầu của nó?

4.14. Dây thừng trên một ròng rọc **

Một sợi dây thừng có chiều dài L và khối lượng riêng là σ kg/m treo trên một ròng rọc không khối lượng. Ban đầu, các đầu của sợi dây thừng nằm cách một khoảng x_0 bên trên và bên dưới vị trí trung bình của chúng. Sợi dây được truyền cho một vận tốc ban đầu. Nếu bạn muốn sợi dây cuối cùng sẽ không rơi ra khỏi ròng rọc, hỏi vận tốc ban đầu này phải bằng bao nhiêu? (Không nên lo lắng về vấn đề được thảo luận trong Calkin (1989).)

Mục 4.2: Chuyển động điều hòa đơn giản

4.15. Biên độ *

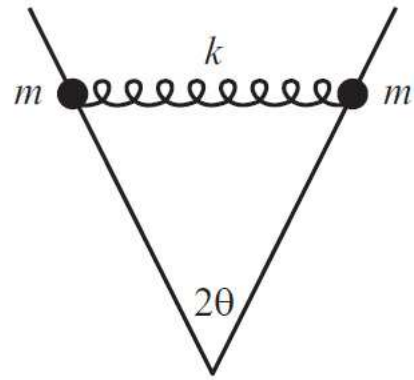
Tìm biên độ của chuyển động cho bởi $x(t) = C\cos\omega t + D\sin\omega t$.

4.16. Hai thanh ray đặt nghiêng *

Hai phần tử có khối lượng m bị giới hạn chuyển động dọc theo hai thanh ray nằm ngang không ma sát tạo với nhau một góc 2θ. Chúng được nối với nhau bởi một lò xo có độ cứng k, mà độ dài tự nhiên của nó là tại vị trí được chỉ ra trong Hình 4.17. Hỏi tần số dao động của chuyển động khi lò xo luôn song song với vị trí trên là bao nhiêu?

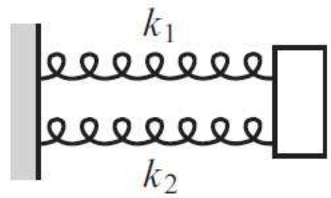
4.17. Độ cứng lò xo hiệu dụng *

(a) Hai lò xo có độ cứng k_1 và k_2 được nối song song với nhau, như chỉ ra trong Hình 4.18. Hỏi độ cứng của lò xo hiệu dụng, k_{eff}, bằng bao nhiêu? Nói cách khác, nếu khối lượng bị dịch chuyển một khoảng x, hãy tìm k_{eff} sao cho lực bằng $F = -k_{\text{eff}}x$.

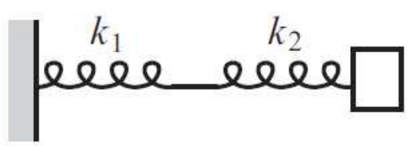


Hình 4.17:

(b) Hai lò xo có độ cứng k_1 và k_2 được nối nối tiếp với nhau, như trong Hình 4.19. Hỏi độ cứng của lò xo hiệu dụng, k_{eff}, bằng bao nhiêu?



Hình 4.18:



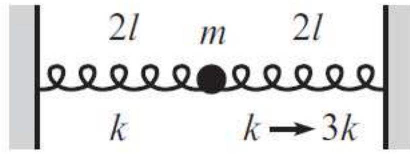
Hình 4.19:

4.18. k thay đổi **

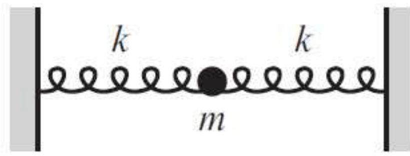
Hai lò xo có độ cứng k và chiều dài tự nhiên ℓ. Chúng đều bị kéo dài ra thêm một khoảng ℓ và bị gắn vào một khối lượng m và hai bức tường, như chỉ ra trong Hình 4.20. Tại một thời điểm đã cho, độ cứng của lò xo bên phải bằng một cách thần kỳ nào đó bị đổi thành $3k$ (chiều dài tự nhiên vẫn được giữ nguyên là ℓ). Hỏi chuyển động $x(t)$ sau đó như thế nào? Lấy vị trí ban đầu là $x = 0$.

4.19. Bỏ một lò xo **

Hai lò xo trong Hình 4.21 đang ở tại vị trí cân bằng của chúng. Khối lượng dao động dọc theo đường thẳng của các lò xo với biên độ d. Tại thời điểm (gọi là $t = 0$) khi khối lượng ở vị trí $x = d/2$ (và đang chuyển động về bên phải), lò xo bên phải bị gỡ bỏ. Hỏi chuyển động $x(t)$ sau đó như thế nào? Hỏi biên độ của dao động mới bằng bao nhiêu?

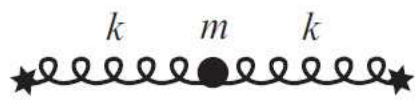


Hình 4.20:

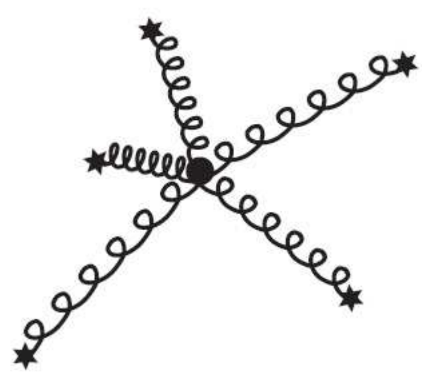


Hình 4.21:

4.20. Lò xo khắp nơi **



Hình 4.22:



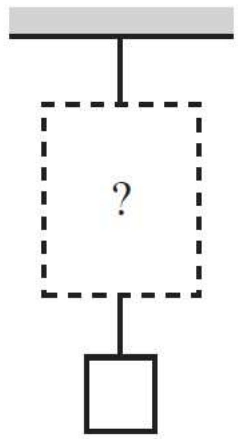
Hình 4.23:

(a) Một khối lượng m được gắn vào hai lò xo có độ dài tự nhiên bằng không. Hai đầu còn lại của hai lò xo được gắn cố định vào hai điểm (xem Hình 4.22). Độ cứng của hai lò xo bằng nhau. Khối lượng đang ở vị trí cân bằng và rồi sau đó được truyền cho một chuyển động theo một phương bất kỳ. Hãy miêu tả chuyển động sau đó. (Bỏ qua trọng lực, mặc dù thực ra bạn không cần phải làm thế.)

(b) Một khối lượng m được gắn vào n lò xo mà có độ dài tự nhiên bằng không. Những đầu còn lại của các lò xo được gắn cố định vào các điểm khác nhau trong không gian (xem Hình 4.23). Độ cứng của các lò xo là $k_1, k_2, \cdots, k_n$. Khối lượng đang ở vị trí cân bằng thì được truyền cho một chuyển động theo một phương bất kỳ. Hãy miêu tả chuyển động sau đó. (Một lần nữa, bỏ qua trọng lực, mặc dù thực ra bạn không cần phải làm thế.)

4.21. Nâng lên ***

Trong Hình 4.24, một khối lượng được treo vào một trần nhà. Một mảnh giấy được giữ



Hình 4.24:

để che khuất ba sợi dây và hai lò xo; tất cả những gì bạn thấy là hai sợi dây khác thò ra đằng sau tờ giấy, như trong hình vẽ. Hỏi ba sợi dây và hai lò xo phải được nối với nhau và với hai sợi dây lộ ra ngoài (các vật khác nhau chỉ có thể được gắn vào các đầu của chúng) như thế nào sao cho nếu bạn bắt đầu với hệ thống tại vị trí cân bằng của nó và rồi cắt một sợi dây bị che nào đó, thì khối lượng sẽ bị nâng lên?[5]

4.22. Vật ném xiên gắn với một lò xo ***

Một vật ném xiên có khối lượng m được bắn lên từ gốc tọa độ với vận tốc v_0 và góc nghiêng θ. Nó được gắn với gốc tọa độ bởi một lò xo có độ cứng k và độ dài tự nhiên bằng không.

(a) Hãy tìm $x(t)$ và $y(t)$.

(b) Hãy chỉ ra rằng đối với $\omega \equiv \sqrt{k/m}$ nhỏ, quỹ đạo ném xiên này sẽ trở về quỹ đạo của chuyển động ném xiên thông thường. Và hãy chỉ ra rằng đối với ω lớn, quỹ đạo ném xiên sẽ trở thành chuyển động điều hòa đơn giản, nghĩa là, chuyển động dao động dọc theo một đường thẳng (ít nhất là trước khi vật ném xiên đâm xuống lại vào mặt đất). Hãy tìm các phát biểu có ý nghĩa hơn cần thay thế cho "ω nhỏ" và "ω lớn"?

[5] Cảm ơn Paul Horowitz vì bài toán cực kỳ hay này. Để biết thêm về các ứng dụng của ý tưởng đằng sau bài toán này, xem Cohen và Horowitz (1991).

(c) Hỏi giá trị của ω phải bằng bao nhiêu để cho vật ném xiên sẽ va chạm với mặt đất khi nó đang chuyển động thẳng đứng xuống dưới?

4.23. Hiệu chỉnh về con lắc đơn ***

(a) Đối với dao động nhỏ, chu kỳ của một con lắc đơn được xấp xỉ bởi $T \approx 2\pi\sqrt{l/g}$, không phụ thuộc gì vào biên độ, θ_0. Đối với dao động hữu hạn, sử dụng $dt = dx/v$ để chỉ ra rằng biểu thức chính xác cho T là

$$T = \sqrt{\frac{8\ell}{\mathrm{g}}}\int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}. \tag{4.60}$$

(b) Hãy tìm một xấp xỉ cho giá trị này của T, đến bậc hai của θ_0, theo cách như sau. Sử dụng đồng nhất thức $\cos\phi = 1 - 2\sin^2(\phi/2)$ để viết T phụ thuộc theo các hàm sine (bởi vì sẽ tiện lợi hơn khi làm việc với các đại lượng mà tiến tới không khi $\theta \to 0$). Sau đó đổi biến, $\sin x \equiv \sin(\theta/2)/\sin(\theta_0/2)$ (bạn sẽ thấy tại sao lại làm như vậy). Cuối cùng, khai triển biểu thức trong tích phân của bạn theo các hàm mũ của θ_0, và tính tích phân để chỉ ra rằng[6]

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{\mathrm{g}}}\left(1 + \frac{\theta_0^2}{16} + \cdots\right). \tag{4.61}$$

Mục 4.3: Chuyển động điều hòa có cản

4.24. Đi qua gốc tọa độ

Hãy chỉ ra rằng một vật dao động cản lớn hoặc cản tới hạn có thể đi qua gốc tọa độ nhiều nhất là một lần.

4.25. Cản mạnh *

Trong trường hợp cản mạnh ($\gamma \gg \omega$) được thảo luận trong phần nhận xét trong mục con về phần cản lớn, chúng ta thấy rằng $x(t) \propto e^{-\omega^2 t/2\gamma}$ khi t lớn. Sử dụng các định nghĩa của ω và γ, biểu thức này có thể được viết dưới dạng $x(t) \propto e^{-kt/b}$, trong đó b là hệ số của lực cản. Bằng cách xem xét các lực tác dụng lên khối lượng, hãy giải thích tại sao điều này là hợp lý.

4.26. Tốc độ lớn nhất *

Một vật dao động với cản tới hạn có tần số dao động tự nhiên là ω bắt đầu chuyển động tại vị trí $x_0 > 0$. Hỏi tốc độ ban đầu lớn nhất có thể của vật (hướng về gốc tọa độ) bằng bao nhiêu để nó không đi qua gốc tọa độ?

[6]Nếu bạn thích những việc như thế này, bạn có thể chỉ ra rằng số hạng tiếp theo trong ngoặc đơn là $(11/3072)\theta^4$. Nhưng hãy cẩn thận, số hạng hiệu chỉnh bậc bốn này có từ hai số hạng.

4.27. Tốc độ lớn nhất khác **

Một vật dao động trong trường hợp quá cản có tần số dao động tự nhiên là ω và hệ số cản là γ bắt đầu chuyển động tại vị trí $x_0 > 0$. Hỏi tốc độ ban đầu lớn nhất có thể của vật (hướng về gốc tọa độ) bằng bao nhiêu để nó không đi qua gốc tọa độ?

4.28. Tỷ số của các cực đại **

Một khối lượng được gắn vào một đầu của một lò xo và được thả ra không vận tốc ban đầu tại vị trí x_0. Thí nghiệm này được lặp lại, nhưng bây giờ cả hệ được nhúng vào một chất lỏng làm cho chuyển động là cản tới hạn. Hãy chỉ ra rằng vận tốc lớn nhất của khối lượng trong trường hợp đầu bằng e lần vận tốc lớn nhất của trường hợp thứ hai.[7]

Mục 4.4: Chuyển động điều hòa cưỡng bức (có cản)

4.29. Cộng hưởng

Cho trước ω và γ, hãy chỉ ra rằng hệ số R trong phương trình (4.33) đạt giá trị nhỏ nhất khi $\omega_d = \sqrt{\omega^2 - 2\gamma^2}$ (trừ khi đây là một số ảo, mà trong trường hợp này giá trị nhỏ nhất xảy ra khi $\omega_d = 0$).

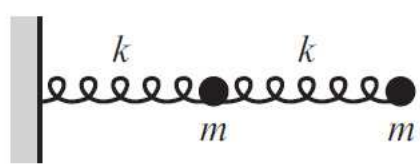
4.30. Không có lực cản *

Một phần tử khối lượng m chịu tác dụng của một lực lò xo, $-kx$, và đồng thời chịu tác dụng của một lực cưỡng bức, $F_d \cos\omega_d t$. Nhưng không có lực cản. Hãy tìm nghiệm riêng của $x(t)$ bằng nghiệm thử $x(t) = A\cos\omega_d t + B\sin\omega_d t$. Nếu bạn viết nghiệm này dưới dạng $C\cos(\omega_d t - \phi)$, trong đó $C > 0$, hỏi các giá trị của C và ϕ bằng bao nhiêu? Hãy cẩn thận về góc pha (có hai trường hợp cần phải xét).

Mục 4.5: Dao động liên kết

4.31. Các lò xo và một bức tường **

Hai lò xo giống nhau và hai khối lượng giống nhau được gắn vào một bức tường như chỉ



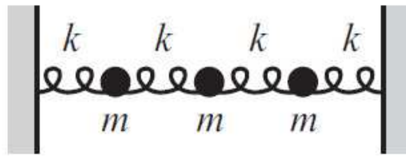
Hình 4.25:

[7]Thực tế về các vận tốc cực đại sai khác nhau bởi một hệ số cố định có thể tìm được từ phương pháp phân tích thứ nguyên, là phương pháp cho ta biết rằng vận tốc lớn nhất trong trường hợp đầu phải tỷ lệ với ωx_0. Và bởi vì $\gamma = \omega$ trong trường hợp cản tới hạn, nên việc có thêm lực cản không cho thêm một tham số mới nào, vì vậy vận tốc lớn nhất không có cách nào khác là vẫn tỷ lệ với ωx_0. Nhưng để chỉ ra các vận tốc lớn nhất sai khác nhau bởi một hệ số rất đẹp e thì chúng ta cần phải thực hiện các tính toán.

ra trong Hình 4.25. Hãy tìm các mode trực giao, và hãy chỉ ra rằng các tần số có thể được viết dưới dạng $\sqrt{k/m}(\sqrt{5} \pm 1)/2$. Giá trị của hệ số này là tỷ số vàng (và nghịch đảo của nó).

4.32. Các lò xo giữa hai bức tường **

Bốn lò xo giống nhau và ba khối lượng giống nhau nằm giữa hai bức tường (xem

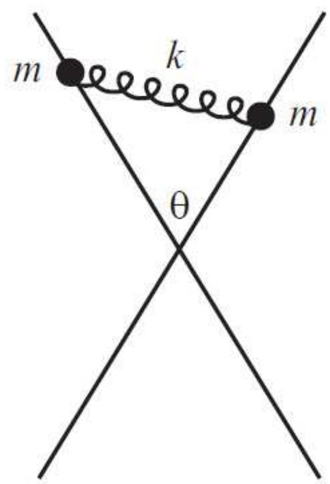


Hình 4.26:

Hình 4.26). Hãy tìm các mode trực giao.

4.33. Hai hạt vòng trên hai thanh ray chéo nhau **

Hai thanh ray nằm ngang không ma sát tạo với nhau một góc θ, như chỉ ra trong



Hình 4.27:

Hình 4.27. Mỗi thanh ray có một hạt vòng khối lượng m nằm trên nó, và các hạt vòng được nối với nhau bởi một lò xo có độ cứng k và độ dài tự nhiên bằng không. Giả sử rằng một thanh được đặt nằm trên thanh kia một khoảng rất nhỏ, sao cho các hạt vòng có thể đi qua điểm giao nhau dễ dàng. Hãy tìm các mode trực giao.

4.34. Dao động liên kết có cản **

Hệ thống trong ví dụ trong Mục 4.5 bây giờ được thay đổi bằng cách nhúng nó vào một chất lỏng sao cho cả hai khối lượng chịu một lực cản, $F_f = -bv$. Hãy giải ra $x_1(t)$ và $x_2(t)$. Giả sử rằng lực cản là cản nhỏ.

4.35. Dao động liên kết cưỡng bức **

Hệ thống trong ví dụ trong Mục 4.5 bây giờ được thay đổi bằng cách cho khối lượng bên trái chịu tác dụng của một lực cưỡng bức $F_d \cos(2\omega t)$, và khối lượng bên phải chịu tác dụng của lực $2F_d \cos(2\omega t)$, trong đó $\omega = \sqrt{k/m}$. Hãy tìm nghiệm riêng của $x_1(t)$ và $x_2(t)$, và giải thích tại sao kết quả của bạn là hợp lý.

4.9 Lời giải

4.1. Chồng chất nghiệm

Tổng $x_1 + x_2$ là một nghiệm của $\ddot{x}^2 = bx$ nếu

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2(x_1+x_2)}{dt^2}\right)^2 &= b(x_1+x_2) \\ \iff \quad (\ddot{x}_1+\ddot{x}_2)^2 &= b(x_1+x_2) \\ \iff \quad \ddot{x}_1^2 + 2\ddot{x}_1\ddot{x}_2 + \ddot{x}_2^2 &= b(x_1+x_2). \end{aligned} \tag{4.62}$$

Nhưng $\ddot{x}_1^2 = bx_1$ và $\ddot{x}_2^2 = bx_2$, từ giả thiết. Vì vậy chúng ta còn lại số hạng $2\ddot{x}_1\ddot{x}_2$ ở vế trái, mà điều này làm cho dấu bằng không còn đúng nữa. (Chú ý rằng $2\ddot{x}_1\ddot{x}_2$ không thể bằng không, bởi vì nếu một trong hai số hạng $\ddot{x}_1$ hoặc $\ddot{x}_2$ là đồng nhất bằng không, thì một trong hai số hạng x_1 hoặc x_2 cũng bằng không, vì vậy chúng ta thực ra đã không có nghiệm để bắt đầu bài toán.)

4.2. Một trường hợp tới hạn

Biểu thức "$a \to 0$" là tùy tiện bởi vì a có đơn vị là nghịch đảo của bình phương thời gian, và số 0 là không có đơn vị. Cách diễn đạt chính xác hơn là phương trình (4.2) rút về $x(t) = C + Dt$ khi $\sqrt{a}t \ll 1$, hoặc một cách tương đương là khi $t \ll 1/\sqrt{a}$, mà bây giờ là một so sánh của các đại lượng có cùng đơn vị. Giá trị của a càng nhỏ, thì t càng lớn. Do đó, nếu "$a \to 0$", thì t về cơ bản là có giá trị bất kỳ. Giả sử rằng $\sqrt{a}t \ll 1$, chúng ta có thể viết $e^{\pm\sqrt{a}t} \approx 1 \pm \sqrt{a}t$, và phương trình (4.2) trở thành

$$\begin{aligned} x(t) &\approx A(1+\sqrt{a}t) + B(1-\sqrt{a}t) \\ &= (A+B) + \sqrt{a}(A-B)t \\ &\equiv C + Dt. \end{aligned} \tag{4.63}$$

C là vị trí ban đầu, và D là vận tốc của chất điểm. Nếu các đại lượng này có độ lớn bậc 1 theo các đơn vị đã chọn, khi đó nếu chúng ta giải ra đối với A và B, chúng ta sẽ thấy rằng chúng phải đại khái là có dấu ngược nhau, và cả hai phải có độ lớn bậc $1/\sqrt{a}$. Vì vậy, nếu vận tốc và vị trí ban đầu có độ lớn bậc 1, thì A và B thực ra sẽ phân kỳ trong giới hạn "$a \to 0$". Nếu a là nhỏ nhưng khác không, thì t cuối cùng sẽ trở nên đủ lớn sao cho $\sqrt{a}t \ll 1$ sẽ không còn đúng nữa, mà trong trường hợp này dạng tuyến tính trong phương trình (4.63) sẽ không còn có giá trị.

4.3. Tăng khối lượng

Điều đầu tiên mà chúng ta phải làm là đi tìm vận tốc của khối lượng ngay trước khi nó va chạm. Chuyển động trước va chạm có dạng $x(t) = d\cos(\omega t + \phi)$, trong đó $\omega = \sqrt{k/m}$. Va chạm xảy ra tại thời điểm $t = 0$ (mặc dù thực ra việc chúng ta chọn thời gian nào để thay vào đây cũng không có vấn đề gì), vì vậy chúng ta có $d/2 = x(0) = d\cos\phi$, mà cho ta $\phi = \pm\pi/3$. Vận tốc ngay trước khi va chạm do đó sẽ bằng

$$v(0) \equiv \dot{x}(0) = -\omega d \sin\phi = -\omega d \sin(\pm\pi/3) = \mp(\sqrt{3}/2)\omega d. \tag{4.64}$$

Chúng ta chọn dấu dương, bởi vì chúng ta được biết rằng khối lượng đang chuyển động về bên phải. Tìm chuyển động sau va chạm bây giờ trở về bài toán với các điều kiện đầu. Chúng ta có một khối lượng $2m$ gắn với một lò xo độ cứng k, với vị trí ban đầu $d/2$ và vận tốc ban đầu $(\sqrt{3}/4)\omega d$ (một nửa của kết quả trên). Trong tình huống khi mà chúng ta biết vị trí và vận tốc ban đầu, thì biểu thức tốt nhất của $x(t)$ từ các biểu thức trong phương trình (4.3) là

$$x(t) = C\cos\omega' t + D\sin\omega' t, \tag{4.65}$$

bởi vì vị trí đầu tại $t = 0$ đơn giản là C, và vận tốc đầu tại $t = 0$ là $\omega' D$. Các điều kiện đầu do đó sẽ rất đơn giản để áp dụng. Chúng ta đặt dấu phẩy trên tần số trong phương trình (4.65) để nhắc nhở chúng ta rằng nó khác với tần số ban đầu, bởi vì khối lượng bây giờ là $2m$. Vì vậy chúng ta có $\omega' = \sqrt{k/2m} = \omega/\sqrt{2}$. Các điều kiện đầu do đó cho ta

$$\begin{aligned} x(0) = d/2 \quad &\Longrightarrow \quad C = d/2, \\ v(0) = (\sqrt{3}/4)\omega d \quad &\Longrightarrow \quad \omega' D = (\sqrt{3}/4)\omega d \quad \Longrightarrow \quad D = (\sqrt{6}/4)d. \end{aligned} \tag{4.66}$$

Nghiệm $x(t)$ của chúng ta do đó sẽ là

$$x(t) = \frac{d}{2}\cos\omega' t + \frac{\sqrt{6}d}{4}\sin\omega' t, \quad \text{trong đó} \quad \omega' = \sqrt{\frac{k}{2m}}. \tag{4.67}$$

Để tìm biên độ, chúng ta phải tính giá trị lớn nhất của $x(t)$. Đây là nhiệm vụ của Bài tập luyện tập 4.15, và kết quả là biên độ của chuyển động $x(t) = C\cos\omega' t + D\sin\omega' t$ là $A = \sqrt{C^2 + D^2}$. Vì vậy ta có

$$A = \sqrt{\frac{d^2}{4} + \frac{6d^2}{16}} = \sqrt{\frac{5}{8}}d. \tag{4.68}$$

Giá trị này nhỏ hơn biên độ ban đầu d, bởi vì năng lượng bị mất do nhiệt trong quá trình va chạm (nhưng năng lượng là một trong các chủ đề của chương tiếp theo).

4.4. Lực căng trung bình

Gọi độ dài của con lắc đơn là ℓ. Chúng ta biết rằng góc θ phụ thuộc vào thời gian bởi

$$\theta(t) = A\cos(\omega \mathrm{t}), \tag{4.69}$$

trong đó $\omega = \sqrt{g/\ell}$. Nếu T là lực căng trong sợi dây, thì phương trình $F = ma$ dọc theo dây sẽ là $T - mg\cos\theta = m\ell\dot{\theta}^2$. Sử dụng phương trình (4.69), phương trình này sẽ trở thành

$$T = mg\cos\big(A\cos(\omega t)\big) + m\ell\big(-\omega A\sin(\omega t)\big)^2. \tag{4.70}$$

Bởi vì A là nhỏ, chúng ta có thể sử dụng xấp xỉ của góc nhỏ $\cos\alpha \approx 1 - \alpha^2/2$, mà cho ta

$$\begin{aligned} T &\approx mg\left(1 - \frac{1}{2}A^2\cos^2(\omega t)\right) + m\ell\omega^2A^2\sin^2(\omega t) \\ &= mg + mgA^2\left(\sin^2(\omega t) - \frac{1}{2}\cos^2(\omega t)\right), \end{aligned} \tag{4.71}$$

trong đó chúng ta đã sử dụng $\omega^2 = g/\ell$. Giá trị trung bình của cả $\sin^2\theta$ và $\cos^2\theta$ trên một chu kỳ là 1/2 (bạn có thể chỉ ra điều này bằng việc lấy tích phân, hoặc bạn có thể chỉ cần chú ý rằng các giá trị trung bình là bằng nhau và tổng của chúng là bằng 1), vì vậy giá trị trung bình của T là

$$T_{\text{trung bình}} = mg + \frac{mgA^2}{4}, \tag{4.72}$$

là giá trị lớn hơn mg, bởi một lượng $mgA^2/4$. Điều này là hợp lý, $T_{\text{trung bình}} > mg$, bởi vì giá trị trung bình của thành phần thẳng đứng của T bằng mg (bởi vì con lắc đơn trong một khoảng thời gian dài có tổng chuyển động lên hay xuống đều bằng không), và có một phần khác không đóng góp vào độ lớn của T do thành phần theo phương ngang của chuyển động.

4.5. Bước về hướng đông trên một đĩa quay

Vận tốc của người đối với mặt đất là tổng của $v\hat{\mathbf{x}}$ và $\mathbf{u}$, trong đó $\mathbf{u}$ là vận tốc (tại vị trí của người) của đĩa quay đối với mặt đất. Biểu diễn theo góc θ như trong Hình 4.28, các thành phần vận tốc đối với mặt đất là

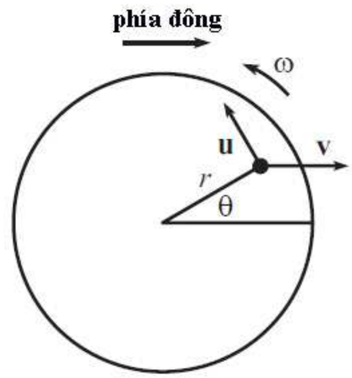
$$\dot{x} = v - u\sin\theta, \quad \text{và} \quad \dot{y} = u\cos\theta. \tag{4.73}$$

Nhưng $u = r\omega$. Vì vậy ta có, sử dụng $r\sin\theta = y$ và $r\cos\theta = x$,

$$\dot{x} = v - \omega y, \quad \text{và} \quad \dot{y} = \omega x. \tag{4.74}$$

Lấy đạo hàm của phương trình đầu tiên, và sau đó thay $\dot{y}$ từ phương trình thứ hai vào, ta có $\ddot{x} = -\omega^2 x$. Do đó, $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$. Khi đó phương trình đầu tiên sẽ nhanh chóng cho ta $y(t)$, và kết quả là biểu thức tổng quát của vị trí của người là

$$(x, y) = \Big(A\cos(\omega t + \phi), \qquad A\sin(\omega t + \phi) + v/\omega\Big). \tag{4.75}$$



Hình 4.28:

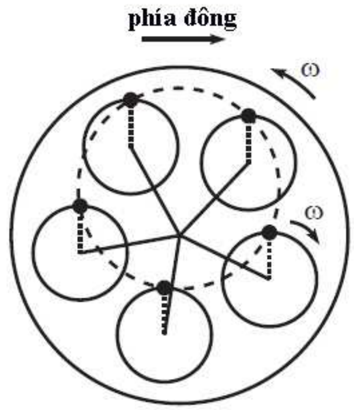
Đây là một hình tròn có tâm tại điểm $(0, v/\omega)$. Các hằng số A và ϕ được xác định từ giá trị ban đầu của x và y. Bạn có thể chỉ ra rằng

$$A = \sqrt{x_0^2 + (y_0 - v/\omega)^2}, \quad \text{và} \quad \tan\phi = \frac{y_0 - v/\omega}{x_0}. \tag{4.76}$$

NHẬN XÉT: Hóa ra rằng trong hệ tọa độ của đĩa quay, đường đi của người cũng là một đường tròn. Điều này có thể thấy được theo cách sau. Tưởng tượng một vật ở xa (ví dụ như, một ngôi sao) đang ở vị trí nằm ở hướng đông. Trong hệ tọa độ của đĩa quay, ngôi sao này quay theo chiều kim đồng hồ với tần số ω. Và trong hệ tọa độ của đĩa quay, vận tốc của người luôn luôn hướng về phía ngôi sao. Do đó, vận tốc của người quay theo chiều kim đồng hồ với tần số ω. Và bởi vì độ lớn của vận tốc là không đổi, điều này có nghĩa là người sẽ di chuyển theo chiều kim đồng hồ theo một đường tròn trong hệ tọa độ của đĩa quay. Từ biểu thức thông thường $v = r\omega$, chúng ta thấy rằng đường tròn này có bán kính là v/ω.

Kết quả này dẫn đến một cách khác để chỉ ra rằng đường đi của người là một đường tròn khi được quan sát trong hệ tọa độ mặt đất. Nói tóm lại, khi chuyển động theo đường tròn cùng chiều kim đồng hồ của người trong hệ tọa độ của đĩa quay được kết hợp với chuyển động theo chiều ngược chiều kim đồng hồ của đĩa đối với mặt đất (với cùng tần số ω, nhưng ngược chiều), thì chuyển động tổng hợp của người đối với mặt đất là một đường tròn với tâm đặt tại điểm $(0, v/\omega)$.

Tình huống này được tóm tắt lại như trong Hình 4.29. Từ kết quả ở trên (mà đường đi của người là một đường tròn trong hệ tọa độ đĩa quay), chúng ta có thể mô tả chuyển động của người trong hệ tọa độ của đĩa quay bằng cách tưởng tượng người đó đang cưỡi trên một cái đu quay mà đang quay theo chiều kim đồng hồ với tần số ω đối với đĩa. Cái đu quay này được chỉ ra trong hình vẽ tại năm thời điểm. Ảnh hưởng của chuyển động quay theo chiều kim đồng hồ của cái đu quay sẽ triệt tiêu chuyển động quay ngược chiều kim đồng hồ của đĩa, vì vậy cái đu quay cuối cùng sẽ không quay chút nào đối với mặt đất. Do đó, nếu người (là dấu chấm trong hình vẽ) bắt đầu ở đỉnh của cái đu quay (thực ra là như vậy, bởi



Hình 4.29:

vì điều này tương ứng với trường hợp người đó bước về hướng đông đối trong hệ tọa độ của đĩa), thì người ấy vẫn luôn luôn ở vị trí tại đỉnh của nó. Do đó người ấy sẽ di chuyển theo một đường tròn mà đơn giản là bị nâng lên phía trên đối với tâm của đĩa bởi bán kính theo phương thẳng đứng của cái đu quay (là đường chấm chấm trong hình vẽ, mà có độ dài là v/ω). Điều này phù hợp với kết quả ban đầu. Bạn cũng có thể thấy từ hình vẽ cách mà giá trị của A và ϕ trong phương trình (4.76) xuất hiện. Ví dụ như, A là độ dài của của đường nét liền trong hình vẽ. ♣

4.6. Vận tốc lớn nhất

Đối với trường hợp không có cản, dạng tổng quát của x là $x(t) = C\cos(\omega t + \phi)$. Điều kiện đầu $v(0) = 0$ cho ta biết rằng $\phi = 0$, và sau đó điều kiện đầu $x(0) = x_0$ cho ta biết rằng $C = x_0$. Do đó, $x(t) = x_0\cos(\omega t)$, và vì vậy $v(t) = -\omega x_0 \sin(\omega t)$. Giá trị này có độ lớn lớn nhất là ωx_0.

Bây giờ xét trường hợp cản lớn. Phương trình (4.17) cho ta vị trí dưới dạng

$$x(t) = Ae^{-(\gamma-\Omega)t} + Be^{-(\gamma+\Omega)t}. \tag{4.77}$$

Các điều kiện đầu là

$$\begin{aligned} x(0) = x_0 \quad &\Longrightarrow \quad A + B = x_0, \\ v(0) = 0 \quad &\Longrightarrow \quad -(\gamma-\Omega)A - (\gamma+\Omega)B = 0. \end{aligned} \tag{4.78}$$

Giải hai phương trình này đối với A và B, và sau đó thay các kết quả vào phương trình (4.77), ta có

$$x(t) = \frac{x_0}{2\Omega}\left((\gamma+\Omega)e^{-(\gamma-\Omega)t} - (\gamma-\Omega)e^{-(\gamma+\Omega)t}\right). \tag{4.79}$$

Lấy đạo hàm để tìm $v(t)$, và sử dụng $\gamma^2 - \Omega^2 = \omega^2$, ta có

$$v(t) = \frac{-\omega^2 x_0}{2\Omega}\left(e^{-(\gamma-\Omega)t} - e^{-(\gamma+\Omega)t}\right). \tag{4.80}$$

Lấy đạo hàm một lần nữa, chúng ta tìm được tốc độ lớn nhất xảy ra tại

$$t_{\max} = \frac{1}{2\Omega} \ln\left(\frac{\gamma + \Omega}{\gamma - \Omega}\right). \tag{4.81}$$

Thay giá trị này vào trong phương trình (4.80), và sử dụng tính chất của hàm log trong hàm mũ, ta có

$$\begin{aligned} v(t_{\max}) &= \frac{-\omega^2 x_0}{2\Omega} \exp\left(-\frac{\gamma}{2\Omega} \ln\left(\frac{\gamma + \Omega}{\gamma - \Omega}\right)\right)\left(\sqrt{\frac{\gamma + \Omega}{\gamma - \Omega}} - \sqrt{\frac{\gamma - \Omega}{\gamma + \Omega}}\right) \\ &= -\omega x_0 \left(\frac{\gamma - \Omega}{\gamma + \Omega}\right)^{\gamma/2\Omega}. \end{aligned} \tag{4.82}$$

Tỷ số cần tìm, R, của hai vận tốc lớn nhất trong hai trường hợp do đó bằng

$$R = \left(\frac{\gamma + \Omega}{\gamma - \Omega}\right)^{\gamma/2\Omega}. \tag{4.83}$$

Trong trường hợp giới hạn khi cản là rất lớn ($\gamma \gg \omega$), chúng ta có $\Omega \equiv \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} \approx \gamma - \omega^2/2\gamma$. Vì vậy tỷ số trên trở thành

$$R \approx \left(\frac{2\gamma}{\omega^2/2\gamma}\right)^{1/2} = \frac{2\gamma}{\omega}. \tag{4.84}$$

Trong trường hợp giới hạn của cản tới hạn ($\gamma \approx \omega, \Omega \approx 0$), chúng ta có, với $\Omega/\gamma \equiv \epsilon$,

$$R \approx \left(\frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon}\right)^{1/2\epsilon} \approx (1 + 2\epsilon)^{1/2\epsilon} \approx e, \tag{4.85}$$

trùng với kết quả của Bài tập luyện tập 4.28 (có lời giải nhanh hơn rất nhiều so với lời giải phía trên, bởi vì bạn không cần phải quan tâm đến tất cả các trường hợp của Ω). Bạn cũng có thể chỉ ra rằng trong hai trường hợp giới hạn này, $t_{\max}$ tương ứng bằng $\ln(2\gamma/\omega)/\gamma$ và $1/\gamma \approx 1/\omega$.

4.7. Lực hàm mũ

Phương trình $F = ma$ cho ta $\ddot{x} = a_0 e^{-bt}$. Hãy thử một nghiệm riêng có dạng $x(t) = Ce^{-bt}$. Thay dạng này vào phương trình ta có $C = a_0/b^2$. Và bởi vì nghiệm của phương trình thuần nhất $\ddot{x} = 0$ là $x(t) = At + B$, nên nghiệm tổng quát của x là

$$x(t) = \frac{a_0 e^{-bt}}{b^2} + At + B. \tag{4.86}$$

Điều kiện đầu $x(0) = 0$ cho ta $B = -a_0/b^2$. Và điều kiện đầu $v(0) = 0$ áp dụng vào $v(t) = -a_0 e^{-bt}/b + A$ cho ta $A = a_0/b$. Do đó,

$$x(t) = a_0 \left(\frac{e^{-bt}}{b^2} + \frac{t}{b} - \frac{1}{b^2}\right), \tag{4.87}$$

giống với kết quả của Bài tập 3.9.

4.8. Dao động cưỡng bức

Thay $x(t) = A\cos\omega_d t + B\sin\omega_d t$ vào trong phương trình (4.29) ta có

$$\begin{aligned}
&-\omega_\mathrm{d}^2 A\cos\omega_\mathrm{d}t - \omega_\mathrm{d}^2 B\sin\omega_\mathrm{d}t \\
&-2\gamma\omega_\mathrm{d}A\sin\omega_\mathrm{d}t + 2\gamma\omega_\mathrm{d}B\cos\omega_\mathrm{d}t \\
&+\omega^2 A\cos\omega_\mathrm{d}t + \omega^2 B\sin\omega_\mathrm{d}t = F\cos\omega_\mathrm{d}t.
\end{aligned} \tag{4.88}$$

Nếu điều này là đúng đối với mọi t, thì các hệ số của $\cos\omega_d t$ ở hai vế phải bằng nhau. Và tương tự như vậy đối với $\sin\omega_d t$. Do đó,

$$\begin{aligned}
-\omega_\mathrm{d}^2 A + 2\gamma\omega_\mathrm{d}B + \omega^2 A = F, \\
-\omega_\mathrm{d}^2 B - 2\gamma\omega_\mathrm{d}A + \omega^2 B = 0.
\end{aligned} \tag{4.89}$$

Giải hệ phương trình này đối với A và B ta có

$$A = \frac{F(\omega^2 - \omega_\mathrm{d}^2)}{(\omega^2 - \omega_\mathrm{d}^2)^2 + 4\gamma^2\omega_\mathrm{d}^2}, \qquad B = \frac{2F\gamma\omega_\mathrm{d}}{(\omega^2 - \omega_\mathrm{d}^2)^2 + 4\gamma^2\omega_\mathrm{d}^2}, \tag{4.90}$$

trùng với kết quả trong phương trình (4.31).

4.9. Hai khối lượng khác nhau

Gọi x_1 và x_2 tương ứng là vị trí của khối lượng bên trái và khối lượng bên phải đối với vị trí cân bằng của chúng. Các lực tác dụng lên hai khối lượng tương ứng là $-kx_1 + k(x_2 - x_1)$ và $-kx_2 - k(x_2 - x_1)$, vì vậy các phương trình $F = ma$ là

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_1 + 2\omega^2 x_1 - \omega^2 x_2 = 0, \\
2\ddot{x}_2 + 2\omega^2 x_2 - \omega^2 x_1 = 0.
\end{aligned} \tag{4.91}$$

Sẽ không dễ để thấy tổ hợp tuyến tính thích hợp của hai phương trình này, vì vậy chúng ta sẽ dùng phương pháp định thức. Đặt $x_1 = A_1 e^{i\alpha t}$ và $x_2 = A_2 e^{i\alpha t}$, chúng ta thấy rằng để có một nghiệm không tầm thường đối với A và B, chúng ta phải có

$$\begin{aligned}
0 &= \begin{vmatrix} -\alpha^2 + 2\omega^2 & -\omega^2 \\ -\omega^2 & -2\alpha^2 + 2\omega^2 \end{vmatrix} \\
&= 2\alpha^4 - 6\alpha^2\omega^2 + 3\omega^4.
\end{aligned} \tag{4.92}$$

Các nghiệm của phương trình bậc hai đối với α^2 này là

$$\alpha = \pm\omega\sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{2}} \equiv \pm\alpha_1, \quad \text{và} \quad \alpha = \pm\omega\sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{2}} \equiv \pm\alpha_2. \tag{4.93}$$

Nếu $\alpha^2 = \alpha_1^2$, thì mode trực giao sẽ tỷ lệ với $(\sqrt{3}+1, -1)$. Và nếu $\alpha^2 = \alpha_2^2$, thì mode trực giao sẽ tỷ lệ với $(\sqrt{3}-1, 1)$. Vì vậy các mode trực giao là

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sqrt{3}+1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\alpha_1 t + \phi_1), \quad \text{và} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sqrt{3}-1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\alpha_2 t + \phi_2). \end{aligned} \tag{4.94}$$

Chú ý rằng hai vector này là không trực giao với nhau (và chúng cũng không nhất thiết phải là như thế). Các tọa độ trực giao tương ứng với các mode trực giao này là $x_1 - (\sqrt{3}-1)x_2$ và $x_1 + (\sqrt{3}+1)x_2$, bởi vì chúng là các tổ hợp làm cho các tần số α_2 và α_1 biến mất, một cách tương ứng.

4.10. Liên kết yếu

Độ lớn của lực trong lò xo ở giữa là $\kappa(x_2 - x_1)$, vì vậy các phương trình $F = ma$ là

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -kx_1 + \kappa(x_2 - x_1), \\ m\ddot{x}_2 &= -kx_2 - \kappa(x_2 - x_1). \end{aligned} \tag{4.95}$$

Tổng và hiệu của hai phương trình này cho ta

$$\begin{aligned} m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = -k(x_1 + x_2) \quad &\Longrightarrow \quad x_1 + x_2 = A\cos(\omega t + \phi), \\ m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) = -(k + 2\kappa)(x_1 - x_2) \quad &\Longrightarrow \quad x_1 - x_2 = B\cos(\tilde{\omega} t + \tilde{\phi}), \end{aligned} \tag{4.96}$$

trong đó

$$\omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \text{và} \quad \tilde{\omega} \equiv \sqrt{\frac{k+2\kappa}{m}}. \tag{4.97}$$

Các điều kiện đầu là $x_1(0) = a$, $\dot{x}_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$, và $\dot{x}_2(0) = 0$. Cách đơn giản nhất để sử dụng những điều kiện đầu này là thay chúng vào trong các tọa độ trực giao trong phương trình (4.96), trước khi giải ra $x_1(t)$ và $x_2(t)$. Các điều kiện của vận tốc sẽ nhanh chóng cho ta $\phi = \tilde{\phi} = 0$, và sau đó các điều kiện về vị trí cho ta $A = B = a$. Giải ra đối với $x_1(t)$ và $x_2(t)$ ta nhận được

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{a}{2}\cos(\omega t) + \frac{a}{2}\cos(\tilde{\omega} t), \\ x_2(t) &= \frac{a}{2}\cos(\omega t) - \frac{a}{2}\cos(\tilde{\omega} t). \end{aligned} \tag{4.98}$$

Viết ω và $\tilde{\omega}$ dưới dạng

$$\omega = \frac{\tilde{\omega}+\omega}{2} - \frac{\tilde{\omega}-\omega}{2}, \quad \text{và} \quad \tilde{\omega} = \frac{\tilde{\omega}+\omega}{2} + \frac{\tilde{\omega}-\omega}{2}, \tag{4.99}$$

và sử dụng các đồng nhất thức $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$, ta có

$$\begin{aligned} x_1(t) &= a\cos\left(\frac{\tilde{\omega}+\omega}{2}t\right)\cos\left(\frac{\tilde{\omega}-\omega}{2}t\right), \\ x_2(t) &= a\sin\left(\frac{\tilde{\omega}+\omega}{2}t\right)\sin\left(\frac{\tilde{\omega}-\omega}{2}t\right). \end{aligned} \tag{4.100}$$

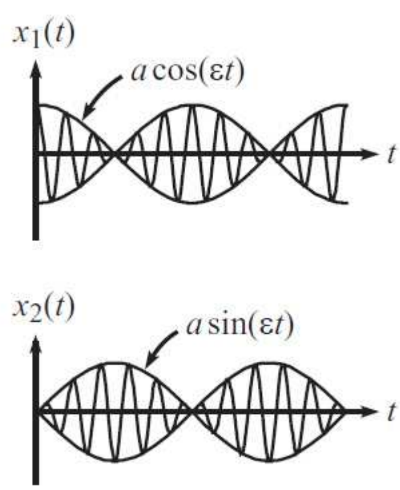
Nếu bây giờ chúng ta xấp xỉ $\tilde{\omega}$ dưới dạng

$$\tilde{\omega} \equiv \sqrt{\frac{k+2\kappa}{m}} = \sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{1+\frac{2\kappa}{k}} \approx \omega\left(1+\frac{\kappa}{k}\right) \equiv \omega + 2\epsilon, \tag{4.101}$$

trong đó $\epsilon \equiv (\kappa/2k)\omega = (\kappa/2m)\sqrt{m/k}$, chúng ta có thể viết x_1 và x_2 dưới dạng

$$\begin{aligned} x_1(t) &\approx a\cos\big((\omega+\epsilon)t\big)\cos(\epsilon t), \\ x_2(t) &\approx a\sin\big((\omega+\epsilon)t\big)\sin(\epsilon t), \end{aligned} \tag{4.102}$$

như bài toán yêu cầu. Để biết xem chuyển động này trông như thế nào, hãy xem xét x_1. Bởi vì $\epsilon \ll \omega$, nên dao động $\cos(\epsilon t)$ chậm hơn rất nhiều so với dao động $\cos((\omega+\epsilon)t)$. Do đó, $\cos(\epsilon t)$ về cơ bản coi như là một hằng số trong thang thời gian của dao động $\cos((\omega+\epsilon)t)$. Điều này có nghĩa là đối với khoảng thời gian của một vài dao động, x_1 về cơ bản là dao động với tần số $\omega + \epsilon \approx \omega$ và với biên độ $a\cos(\epsilon t)$. Số hạng $a\cos(\epsilon t)$ là "đường bao" của những dao động này, như chỉ ra trong Hình 4.30, đối với $\epsilon/\omega = 1/10$. Ban đầu, biên độ của x_1 là a, nhưng nó sẽ giảm dần về không khi $\epsilon t = \pi/2$. Tại thời điểm này, biên độ của dao động x_2, mà bằng $a\sin(\epsilon t)$, tăng lên đến a. Vì vậy tại thời điểm $t = \pi/2\epsilon$, khối lượng bên phải có tất cả chuyển động, và khối lượng bên trái đứng yên. Quá trình này tiếp tục tiếp diễn. Sau mỗi chu kỳ là $\pi/2\epsilon$, chuyển động của một khối lượng sẽ bị chuyển qua cho khối lượng kia. Liên kết mà càng yếu (nghĩa là, độ cứng κ càng nhỏ) giữa hai khối lượng, thì ϵ càng nhỏ, và vì vậy chu kỳ dao động càng dài.



Hình 4.30:

NHẬN XÉT: Các lập luận phía trên cũng đúng đối với hai con lắc đơn được liên kết với nhau bởi một lò xo yếu. Tất cả các bước đều đúng, ngoại trừ việc thay k bởi mg/ℓ, bởi vì lực lò xo, $-kx$, được thay thế bởi thành phần theo phương tiếp tuyến của trọng lực, $-mg\sin\theta \approx -mg(x/\ell)$. Vì vậy sau một khoảng thời gian

$$t = \frac{\pi}{2\epsilon} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{2m}{\kappa}\sqrt{\frac{k}{m}}\right) \longrightarrow \frac{\pi m}{\kappa}\sqrt{\frac{\mathrm{g}}{\ell}}, \tag{4.103}$$

con lắc đơn mà ban đầu dao động bây giờ sẽ tạm thời đứng yên, và con lắc kia sẽ nhận toàn bộ chuyển động. Bởi vì thang thời gian, T_s, của một khối lượng gắn vào một đầu của lò xo yếu tỷ lệ với $\sqrt{m/\kappa}$, và bởi vì thang thời gian, T_p, của một con lắc đơn là tỷ lệ với $\sqrt{l/g}$, nên chúng ta thấy rằng thời gian t ở trên là tỷ lệ với T_s^2/T_p.

Sự tồn tại của các "phách" trong Hình 4.30 có thể được lý giải từ thực tế là các biểu diễn trong phương trình (4.98) là những tổ hợp tuyến tính của các hàm sine có tần số rất gần nhau. Hiện tượng vật lý này ở đây là giống với hiện tượng vật lý phát ra các phách mà bạn nghe thấy khi đang nghe hai nốt nhạc có độ cao gần giống nhau, giống như khi chúng ta chỉnh đàn guitar.[8] Thời gian ở giữa hai lần x_1 bằng không trong Hình 4.30 là π/ϵ, vì vậy tần số góc của các phách là $2\pi/(\pi/\epsilon) = 2\epsilon$. ♣

4.11. Khối lượng chịu lực tác dụng cưỡng bức trên một đường tròn

Đánh dấu hai điểm đối xứng nhau nằm trong một đường kính như là các vị trí cân bằng. Gọi vị trí của hai khối lượng tương ứng với hai điểm này là x_1 và x_2, được đo theo phương ngược chiều kim đồng hồ. Nếu lực cưỡng bức tác động lên khối lượng "1", thì các phương trình $F = ma$ là

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 + 2k(x_1 - x_2) &= F_\mathrm{d}\cos\omega_\mathrm{d}t, \\ m\ddot{x}_2 + 2k(x_2 - x_1) &= 0. \end{aligned} \tag{4.104}$$

Để giải hai phương trình này, chúng ta có thể coi lực cưỡng bức như là phần thực của lực $F_d e^{i\omega_d t}$ và thử nghiệm có dạng $x_1(t) = A_1 e^{i\omega_d t}$ và $x_2(t) = A_2 e^{i\omega_d t}$, và sau đó giải ra A_1 và A_2. Hoặc chúng ta có thể thử các hàm lượng giác. Nếu chúng ta đi theo cách này, chúng ta sẽ nhanh chóng thấy rằng nghiệm cần tìm không thể liên quan gì đến số hạng sine (bởi vì không có đạo hàm cấp một của x trong phương trình (4.104)). Do đó, các hàm lượng giác phải có dạng $x_1(t) = A_1\cos\omega_d t$ và $x_2(t) = A_2\cos\omega_d t$. Sử dụng một trong hai phương pháp trên, phương

[8]Nếu hai tần số liên quan không quá gần nhau, thì bạn thực ra có thể nghe một nốt phảng phất có tần số bằng hiệu của hai tần số ban đầu (và có thể một vài nốt khác nữa, liên quan đến các tổ hợp khác nhau của các tần số). Nhưng đây là một hiện tượng khác so với các nốt ở trên; nó xảy ra bởi vì tai của chúng ta hoạt động theo kiểu phi tuyến. Xem Hall (1981) để biết thêm chi tiết.

trình (4.104) trở thành

$$-\omega_{\rm d}^2 A_1 + 2\omega^2(A_1 - A_2) = F,$$
$$-\omega_{\rm d}^2 A_2 + 2\omega^2(A_2 - A_1) = 0, \tag{4.105}$$

trong đó $\omega \equiv \sqrt{k/m}$ và $F \equiv F_d/m$. Giải ra đối với A_1 và A_2, chúng ta thấy rằng nghiệm riêng cần tìm là

$$x_1(t) = \frac{-F\left(2\omega^2 - \omega_{\rm d}^2\right)}{\omega_{\rm d}^2\left(4\omega^2 - \omega_{\rm d}^2\right)}\cos\omega_{\rm d}t, \quad x_2(t) = \frac{-2F\omega^2}{\omega_{\rm d}^2\left(4\omega^2 - \omega_{\rm d}^2\right)}\cos\omega_{\rm d}t. \tag{4.106}$$

Nghiệm tổng quát là tổng của nghiệm riêng này và nghiệm của phương trình thuần nhất tìm được trong phương trình (4.111) trong lời giải của Bài tập 4.12 bên dưới.

NHẬN XÉT:

1. Nếu $\omega_d = 2\omega$, biên độ của chuyển động sẽ tiến ra vô cùng. Điều này là hợp lý, khi xét đến trường hợp không có cản, và tần số dao động tự nhiên của hệ (được tính trong Bài tập 4.12) là 2ω.

2. Nếu $\omega_d = \sqrt{2}\omega$, thì khối lượng đang chịu tác dụng của lực cưỡng bức sẽ không chuyển động. Lý do cho điều này là lực cưỡng bức cân bằng với lực mà khối lượng đó nhận được từ hai lò xo gây ra bởi chuyển động của khối lượng kia. Và thực vậy, bạn có thể chỉ ra rằng $\sqrt{2}\omega$ là tần số mà một khối lượng dao động nếu khối lượng kia là đứng yên (và do đó về cơ bản có thể coi như là một bức tường). Chú ý rằng $\omega_d = \sqrt{2}\omega$ là tần số tới hạn giữa việc hai khối lượng chuyển động cùng chiều hoặc là ngược chiều.

3. Nếu $\omega_d \to \infty$, thì cả hai chuyển động sẽ dần tới không. Nhưng x_2 là vô cùng bé bậc bốn, trong khi đó x_1 chỉ là vô cùng bé bậc hai.

4. Nếu $\omega_d \to 0$, thì $A_1 \approx A_2 \approx -F/2\omega_d^2$, có giá trị rất lớn. Sự thay đổi rất chậm của lực cưỡng bức về cơ bản làm cho các khối lượng quay xung quanh một chiều trong một lúc, và sau đó đổi chiều và làm chúng quay theo chiều ngược lại. Chúng ta nói chung sẽ có lực cưỡng bức tác dụng lên một khối lượng $2m$, và tích phân hai lần $F_d\cos\omega_d t = (2m)\ddot{x}$ cho ta biết rằng biên độ của chuyển động là $F/2\omega_d^2$, như ở trên. Một cách tương đương, bạn có thể tính toán hiệu $A_1 - A_2$ trong trường hợp giới hạn $\omega_d \to 0$ để chỉ ra rằng các lò xo bị kéo dài một đoạn vừa đủ để gây ra một tổng lực bằng $(F_d/2)\cos\omega_d t$ lên mỗi khối lượng. Điều này dẫn đến chúng có cùng biên độ $F/2\omega_d^2$.

♣

4.12. Các lò xo trên một đường tròn

(a) Đánh dấu hai điểm đối xứng nằm trên một đường kính như là hai vị trí cân bằng. Gọi vị trí của các khối lượng đối với vị trí cân bằng là x_1 và x_2, đo theo chiều ngược chiều kim đồng hồ. Khi đó các phương trình $F = ma$ là

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 + 2k(x_1 - x_2) &= 0, \\ m\ddot{x}_2 + 2k(x_2 - x_1) &= 0. \end{aligned} \tag{4.107}$$

Chúng ta có thể sử dụng phương pháp định thức ở đây, nhưng hãy làm theo cách đơn giản. Cộng hai phương trình này với nhau ta có

$$\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = 0, \tag{4.108}$$

và lấy hiệu của chúng ta có

$$(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + 4\omega^2(x_1 - x_2) = 0. \tag{4.109}$$

Do đó các tọa độ trực giao là

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= At + B, \\ x_1 - x_2 &= C\cos(2\omega t + \phi). \end{aligned} \tag{4.110}$$

Giải hai phương trình này đối với x_1 và x_2, và viết kết quả dưới dạng vector, ta có

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}(At + B) + C\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\cos(2\omega t + \phi), \tag{4.111}$$

trong đó các hằng số A, B và C được định nghĩa bằng một nửa giá trị của chúng trong phương trình (4.110). Do đó các mode trực giao sẽ là

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}(At + B), \quad \text{và} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= C\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\cos(2\omega t + \phi). \end{aligned} \tag{4.112}$$

Mode đầu tiên có tần số bằng không. Nó tương ứng với việc các khối lượng trượt xung quanh vòng tròn với khoảng cách tương đối không đổi và với vận tốc không đổi. Mode thứ hai là mode mà cả hai khối lượng chuyển động về bên trái, sau đó về bên phải, và cứ như vậy. Mỗi khối lượng chịu tác dụng bởi một lực là $4kx$ (bởi vì có hai lò xo, và mỗi lò xo bị kéo giãn một khoảng $2x$), vì vậy có tần số gấp hai lần.

(b) Đánh dấu ba điểm nằm cách đều nhau trên đường tròn là các vị trí cân bằng. Gọi vị trí của ba khối lượng tương ứng với vị trí cân bằng của chúng là x_1, x_2, và x_3, đo theo chiều ngược chiều kim đồng hồ. Khi đó các phương trình $F = ma$ là, như bạn có thể chỉ ra,

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2) + k(x_1 - x_3) &= 0, \\ m\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_3) + k(x_2 - x_1) &= 0, \\ m\ddot{x}_3 + k(x_3 - x_1) + k(x_3 - x_2) &= 0. \end{aligned} \tag{4.113}$$

Tổng của ba phương trình này cho chúng ta một phương trình rất đẹp. Và hiệu giữa hai phương trình bất kỳ cũng vậy, cho ta các phương trình rất hữu ích. Nhưng hãy sử dụng phương pháp định thức để tập làm phương pháp này. Thử các nghiệm có dạng $x_1 = A_1e^{i\alpha t}$, $x_2 = A_2e^{i\alpha t}$, và $x_3 = A_3e^{i\alpha t}$, chúng ta nhận được phương trình ma trận,

$$\begin{pmatrix} -\alpha^2 + 2\omega^2 & -\omega^2 & -\omega^2 \\ -\omega^2 & -\alpha^2 + 2\omega^2 & -\omega^2 \\ -\omega^2 & -\omega^2 & -\alpha^2 + 2\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.114}$$

Cho định thức của ma trận này bằng không sẽ nhận được một phương trình bậc ba của α^2. Nhưng nó là một phương trình bậc ba rất đẹp, với $\alpha^2 = 0$ là một nghiệm. Nghiệm còn lại là một nghiệm kép $\alpha^2 = 3\omega^2$.

Nghiệm $\alpha = 0$ tương ứng với $A_1 = A_2 = A_3$. Nghĩa là, nó tương ứng với vector $(1, 1, 1)$. Trường hợp $\alpha = 0$ này là một trường hợp trong đó nghiệm dạng hàm mũ của chúng ta không thực sự là một hàm mũ. Những việc α^2 bằng không trong phương trình (4.114) về cơ bản là cho ta biết rằng chúng ta đang liên quan đến một hàm mà đạo hàm bậc hai của nó bằng không, nghĩa là, nó là một hàm tuyến tính $At + B$. Do đó, mode trực giao là

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (At + B). \tag{4.115}$$

Mode này có tần số bằng không. Nó tương ứng với việc các khối lượng trượt xung quanh đường tròn, khoảng cách giữa chúng bằng nhau, và với vận tốc không đổi.

Hai nghiệm $\alpha^2 = 3\omega^2$ tương ứng với một không gian con hai chiều của các mode trực giao. Bạn có thể chỉ ra rằng bất cứ vector nào có dạng (a, b, c) với $a + b + c = 0$ là một mode trực giao với tần số $\sqrt{3}\omega$. Chúng ta sẽ lấy tùy ý hai vector $(0, 1, -1)$ và $(1, 0, -1)$ là các vector cơ sở của không gian này. Sau đó chúng ta có thể viết các mode trực giao như là các tổ hợp tuyến tính của các vector

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\sqrt{3}\omega t + \phi_1), \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\sqrt{3}\omega t + \phi_2). \end{aligned} \tag{4.116}$$

NHẬN XÉT: Trường hợp $\alpha^2 = 3\omega^2$ là rất tương tự với trường hợp trong ví dụ trong Mục 4.5 với hai khối lượng và ba lò xo dao động giữa hai bức tường. Trong cách mà chúng ta vừa viết hai mode trong phương trình (4.116), mode thứ nhất có khối lượng đầu tiên là nằm yên (vì vậy nó có thể coi là một bức tường, và đó là tất cả những gì mà hai khối lượng còn lại biết về nó). Tương tự như vậy đối với mode thứ hai. Vì vậy chúng ta có kết quả $\sqrt{3}\omega$ ở đây, giống như trong ví dụ đó.

Các tọa độ trực giao trong bài toán này là $x_1 + x_2 + x_3$ (nhận được bằng cách cộng ba phương trình trong (4.113)), và bất cứ tổ hợp nào có dạng $ax_1 + bx_2 + cx_3$, trong đó $a+b+c = 0$ (nhận được bằng cách nhân a với phương trình thứ nhất trong (4.113), cộng với b nhân với phương trình thứ hai, cộng với c nhân với phương trình thứ ba). Ba mode trực giao tương ứng với mode trong phương trình (4.115) và hai mode chúng ta đã chọn trong phương trình (4.116) tương ứng là $x_1 + x_2 + x_3$, $x_1 - 2x_2 + x_3$, và $-2x_1 + x_2 + x_3$, bởi vì mỗi một trong các tổ hợp này đều không nhận bất cứ sự đóng góp nào của hai mode còn lại (với yêu cầu là đây là cách bạn nhận được các hệ số của x_i, với sai khác cùng một hằng số nào đó). ♣

(c) Trong phần (b), khi chúng ta cho định thức của ma trận trong phương trình (4.114) bằng không, chúng ta về cơ bản là đang đi tìm các vector riêng và các giá trị riêng[9] của ma trận,

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 3I - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.117}$$

trong đó I là ma trận đơn vị. Chúng ta đã không viết thừa số ω^2 chung ở đây, bởi vì nó không ảnh hưởng gì đến các vector riêng. Coi như là một bài tập, bạn có thể chỉ ra rằng trong trường hợp tổng quát có N lò xo và N khối lượng trên một đường tròn, ma trận trên trở thành ma trận cấp $N \times N$,

$$3I - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \equiv 3I - M. \tag{4.118}$$

[9]Một vector riêng v của ma trận M là một vector mà khi chịu tác động của ma trận M sẽ có giá trị là chính nó nhân với một số nào đó. Nghĩa là, $Mv = \lambda v$, trong đó λ là một số nào đó (là giá trị riêng). Phương trình này có thể được viết lại dưới dạng $(M - \lambda I)v = 0$, trong đó I là ma trận đơn vị. Với lập luận thông thường của chúng ta về các ma trận khả nghịch, một vector khác không v tồn tại chỉ khi nếu λ thỏa mãn $\det|\mathrm{M} - \lambda\mathrm{I}| = 0$.

Trong ma trận M, ba số 1 liên tiếp nhau sẽ dịch chuyển dần về bên phải, và chúng sẽ bao phủ vòng quanh một cách tuần hoàn. Bây giờ chúng ta phải tìm các vector riêng của M, mà sẽ yêu cầu chúng ta phải thông minh một chút.

Chúng ta có thể đoán các vector riêng và các giá trị riêng của M nếu chúng ta sử dụng gợi ý từ bản chất tuần hoàn của nó. Một tập nói riêng các vật có tính chất tuần hoàn là các nghiệm bậc N của 1. Nếu β là một nghiệm bậc N của 1, bạn có thể kiểm tra rằng $(1, \beta, \beta^2, \cdots, \beta^{N-1})$ là một vector riêng của M với giá trị riêng $\beta^{-1} + 1 + \beta$. (Phương pháp tổng quát này sử dụng được cho bất cứ ma trận nào mà trong đó các phần tử của nó dịch chuyển dần về bên phải. Các phần tử không nhất thiết là phải bằng nhau.) Các giá trị riêng của toàn bộ ma trận trong phương trình (4.118) do đó là $3 - (\beta^{-1} + 1 + \beta) = 2 - \beta^{-1} - \beta$. Có N nghiệm bậc N khác nhau của 1, chúng là $\beta_n = e^{2\pi i n/N}$, đối với $0 \le n \le N-1$. Vì vậy N giá trị riêng là

$$\begin{aligned} \lambda_n = 2 - \left(e^{-2\pi i n/N} + e^{2\pi i n/N}\right) &= 2 - 2\cos(2\pi n/N) \\ &= 4\sin^2(\pi n/N). \end{aligned} \tag{4.119}$$

Các vector riêng tương ứng là

$$V_n = \left(1, \beta_n, \beta_n^2, \ldots, \beta_n^{N-1}\right). \tag{4.120}$$

Bởi vì các số n và $N-n$ nhận được cùng giá trị của λ_n trong phương trình (4.119), nên các giá trị riêng đi theo cặp với nhau (ngoại trừ trường hợp $n=0$, và $n = N/2$ nếu N là số chẵn). Đây là một điều may mắn, bởi vì chúng ta sau đó có thể thành lập các tổ hợp tuyến tính thực của hai vector riêng phức tương ứng trong phương trình (4.120). Chúng ta thấy rằng các vector

$$V_n^+ \equiv \frac{1}{2}\left(V_n + V_{N-n}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos(2\pi n/N) \\ \cos(4\pi n/N) \\ \vdots \\ \cos\big(2(N-1)\pi n/N\big) \end{pmatrix} \tag{4.121}$$

và

$$V_n^- \equiv \frac{1}{2i}\left(V_n - V_{N-n}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(2\pi n/N) \\ \sin(4\pi n/N) \\ \vdots \\ \sin\big(2(N-1)\pi n/N\big) \end{pmatrix} \tag{4.122}$$

cả hai đều có giá trị riêng $\lambda_n = \lambda_{N-n}$ (điều này cũng đúng đối đối với bất cứ tổ hợp tuyến tính nào của các vector này). Đối với trường hợp đặc biệt khi $n = 0$, vector riêng là $V_0 = (1, 1, 1, \ldots, 1)$ với giá trị riêng là $\lambda_0 = 0$. Và đối với trường hợp đặc biệt khi $n = N/2$ nếu N là số chẵn, thì vector riêng là $V_{N/2} = (1, -1, 1, \ldots, -1)$ với giá trị riêng là $\lambda_{N/2} = 4$.

Quay lại với trường hợp khi $N = 3$ trong phương trình (4.114), chúng ta thấy rằng chúng ta phải lấy căn của các giá trị riêng và rồi sau đó nhân với ω để nhận được các tần số (bởi vì do α^2 xuất hiện trong ma trận, và bởi vì chúng ta đã bỏ đi hệ số ω^2). Tần số tương ứng với hai mode trực giao ở trên do đó là, sử dụng phương trình (4.119),

$$\omega_n = \omega\sqrt{\lambda_n} = 2\omega \sin(\pi n/N). \tag{4.123}$$

Đối với N chẵn, giá trị lớn nhất của tần số là 2ω, với các khối lượng chuyển động có chuyển dịch bằng nhau với dấu âm và dương một cách xen kẽ. Nhưng đối với N lẻ, tần số này nhỏ hơn 2ω một chút.

Nói tóm lại, N mode trực giao là các vector trong phương trình (4.121) và (4.122), trong đó n chạy từ 1 tới số tự nhiên lớn nhất mà nhỏ hơn $N/2$. Và khi đó chúng ta phải thêm vào vector V_0, và vector $V_{N/2}$ nếu N là chẵn.[10] Các tần số được cho trong phương trình (4.123). Mỗi tần số là tương ứng với hai mode, ngoại trừ mode V_0 và mode $V_{N/2}$ khi N chẵn.

> NHẬN XÉT: Hãy kiểm tra các kết quả của chúng ta trong trường hợp $N = 2$ và $N = 3$. Đối với $N = 2$: Các giá trị của n là hai trường hợp "đặc biệt" $n = 0$ và $n = N/2 = 1$. Nếu $n = 0$, chúng ta có $\omega_0 = 0$ và $V_0 = (1, 1)$. Nếu $n = 1$, chúng ta có $\omega_1 = 2\omega$ và $V_1 = (1, -1)$. Các kết quả này trùng với hai mode trong phương trình (4.112).
>
> Đối với $N = 3$: Nếu $n = 0$, chúng ta có $\omega_0 = 0$ và $V_0 = (1, 1, 1)$, trùng với kết quả trong phương trình (4.115). Nếu $n = 1$, chúng ta có $\omega_1 = \sqrt{3}\omega$, và $V_1^+ = (1, -1/2, -1/2)$ và $V_1^- = (0, 1/2, -1/2)$. Hai vector này lập thành không gian giống với không gian mà chúng ta đã tìm ở trong phương trình (4.116). Và chúng có cùng tần số như trong phương trình (4.116). Bạn cũng có thể tìm các vector đối với $N = 4$. Những vector này khá là trực giác, vì vậy đầu tiên hãy cố gắng viết chúng ra mà không sử dụng các kết quả ở trên. ♣

[10] Nếu bạn muốn, bạn có thể coi trường hợp $n = 0$ và $n = N/2$ là giống với các trường hợp khác. Nhưng trong cả hai trường hợp này, vector V^- là vector không, vì vậy bạn sẽ bỏ qua nó. Do đó bất cứ cách nào mà bạn sử dụng, cuối cùng bạn cũng sẽ có chính xác N vector riêng không tầm thường.

Chương 5

Bảo toàn năng lượng và động lượng

Những định luật bảo toàn rất quan trọng trong vật lý. Chúng có những ứng dụng rất lớn, cả trong định tính lẫn trong định lượng, để hiểu cái gì đang xảy ra trong một hệ vật lý. Khi chúng ta nói rằng một cái gì đó "bảo toàn", nghĩa là nó là hằng số theo thời gian. Nếu một đại lượng nào đó bảo toàn, ví dụ như một quả bóng lăn bên trong một cái máng, hoặc một nhóm các phần tử tương tác với nhau, thì chuyển động của chúng sẽ chịu một giới hạn nào đó. Nếu chúng ta có thể viết đủ các đại lượng được bảo toàn (điều này nói chung là chúng ta có thể làm được, ít nhất là cho những hệ mà chúng ta sẽ khảo sát trong cuốn sách này) thì chúng ta có thể giới hạn chuyển động cuối cùng của của hệ về một khả năng duy nhất, và do đó chúng ta đã giải quyết được bài toán. Định luật bảo toàn về năng lượng và động lượng là hai định luật bảo toàn chính trong vật lý. Định luật thứ ba là định luật bảo toàn moment động lượng sẽ được khảo sát trong Chương 7-9.

Một điều cần chú ý là về nguyên tắc chúng ta không "nhất thiết" phải dùng các định luật bảo toàn năng lượng và động lượng khi giải quyết một bài toán. Chúng ta sẽ nhận lại được những định luật bảo toàn này từ những định luật của Newton. Do đó, nếu bạn muốn, về lý thuyết thì bạn luôn có thể bắt đầu với những định luật của Newton, $F = ma$,... Tuy nhiên, trong trường hợp tốt nhất, là bạn sẽ sớm cảm thấy mệt mỏi khi giải quyết bài toán theo cách tiếp cận này. Và trong trường hợp xấu nhất, bạn sẽ phải thừa nhận thất bại sau khi thấy bài toán hoàn toàn không có hướng giải quyết nào cả. Ví dụ như, bạn sẽ không đạt được gì khi phân tích va chạm giữa hai xe đẩy hàng trong siêu thị (mà những thứ đựng trong hai xe này có thể tự do dịch chuyển trong xe) bằng việc phân tích các lực tác động lên mọi vật trong hệ. Nhưng định luật bảo toàn động lượng có thể cho bạn biết rất nhiều điều một cách nhanh chóng của chuyển động của hệ này. Ưu điểm chính của những định luật bảo toàn là chúng giúp bạn tính toán một cách nhanh hơn, và chúng cũng giúp bạn có những ý tưởng tốt về cư xử định tính tổng quan của hệ.

5.1 Định luật bảo toàn năng lượng trong trường hợp một chiều

Xét một lực, từ giờ trở đi chúng ta chỉ xét trường hợp một chiều, mà chỉ phụ thuộc vào vị trí. Nghĩa là, $F = F(x)$. Nếu lực này tác dụng vào một phần tử có khối lượng m, và nếu chúng ta viết gia tốc a dưới dạng vdv/dx, thì phương trình $F = ma$ sẽ trở thành

$$F(x) = mv\frac{dv}{dx}. \tag{5.1}$$

Chúng ta có thể tách biến và tích phân từ một vị trí cho trước x_0 mà tại đó vật có vận tốc v_0 tới một ví trí bất kỳ x mà tại đó vật có vận tốc v. Kết quả sẽ là

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x} F(x')dx' = \int_{v_0}^{v} mv'dv' \quad &\Longrightarrow \quad \int_{x_0}^{x} F(x')dx' = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \\ &\Longrightarrow \quad E = \frac{1}{2}mv^2 - \int_{x_0}^{x} F(x')dx', \end{aligned} \tag{5.2}$$

với $E \equiv mv_0^2/2$. E phụ thuộc vào v_0, do đó nó cũng sẽ phụ thuộc vào việc chọn x_0, bởi vì với những giá trị khác nhau của x_0 (nói chung) sẽ cho giá trị khác nhau của v_0. Cái chúng ta vừa làm đơn giản là theo cách làm trong Mục 3.3 đối với hàm mà chỉ phụ thuộc vào vị trí x. Nếu chúng ta định nghĩa *thế năng*, $V(x)$ là

$$V(x) \equiv -\int_{x_0}^{x} F(x')dx', \tag{5.3}$$

thì phương trình (5.2) sẽ trở thành

$$\frac{1}{2}mv^2 + V(x) = E. \tag{5.4}$$

Chúng ta gọi số hạng đầu tiên trong phương trình này là *động năng*. Bởi vì phương trình này luôn đúng với mọi vị trí trong chuyển động của phần tử, nên tổng động năng và thế năng của phần tử là hằng số. Nói cách khác, tổng năng lượng là bảo toàn. Nếu một phần tử bị mất (hoặc nhận thêm) thế năng, thì tốc độ của nó sẽ tăng (hoặc giảm). Một ví dụ hay dùng cho thế năng là $kx^2/2$ cho lực lò xo $(-kx)$, với x_0 được chọn bằng không; và mgy cho lực hấp dẫn $(-mg)$, với y_0 được chọn bằng không.

Đối với một phần tử trong một chuyển động cho trước, cả E và $V(x)$ phụ thuộc vào việc chọn vị trí ban đầu x_0 bất kỳ trong phương trình (5.3). Điều này nghĩa là cả E và $V(x)$ thực ra bản thân chúng đều không có ý nghĩa gì. Chỉ có hiệu của chúng là có nghĩa (và nó bằng giá trị của động năng); giá trị hiệu này là không phụ thuộc vào việc chọn vị trí ban đầu x_0. Nhưng để thống nhất khi xét một hệ cho trước, chúng ta cần chọn một giá trị ban đầu bất kỳ x_0, do vậy chúng ta phải nhớ nói rõ là chúng ta đã chọn giá trị x_0 nào. Ví dụ như, sẽ không có nghĩa gì nếu chúng ta chỉ nói một cách đơn giản là thế năng hấp dẫn của một vật tại độ cao y đối với mặt đất là $-\int F dy = -\int(-mg)dy = mgy$. Chúng ta phải nói rằng thế năng bằng *mgy đối với mặt đất* (với giả thiết rằng giá trị y_0 ở đây là tại mặt đất). Nếu ta muốn, ta có thể nói rằng thế năng là $mgy + mg(7\text{m})$ đối với một điểm nằm sâu dưới bề mặt trái đất một khoảng 7 m. Điều này hoàn toàn được phép mặc dù chúng ta ít khi làm như vậy.[1] Nhưng với bất kỳ điểm mốc nào chúng ta chọn thì sự khác nhau của thế năng tại các vị trí, ví dụ như $y = 3$ m và $y = 5$ m sẽ bằng $mg(2\text{m})$.

Cũng chú ý rằng mặc dù chúng ta giới thiệu giá trị x_0 ở trong phương trình (5.2) là vị trí của phần tử tại một thời điểm nào đó, nhưng thực ra phần tử đó không nhất thiết phải đi qua vị trí x_0 đó. Ví dụ như, khi chúng ta ném một quả bóng lên trên trời với vận tốc ban đầu là 8 m/s từ độ cao 5 m và chúng ta sẽ tính toán thế năng hấp dẫn đối với điểm mốc có độ cao cách mặt đất một kilomet. Quả bóng chắc chắn là không thể đạt được độ cao là một kilomet nhưng điều đó không có vấn đề gì. Vấn đề ở đây là hiệu của E và $V(x)$ (cả hai đại lượng này đều có giá trị âm trong trường hợp này) trong suốt quá trình chuyển động, do đó nếu chúng ta dịch chuyển tất cả các giá trị với cùng một đại lượng nào đó sẽ không có ảnh hưởng gì. Chúng ta đơn giản là cộng cả E và $V(x)$ trong phương trình (5.4) với cùng một đại lượng âm (là thế năng mà ai đó sẽ đo nếu coi mặt đất là điểm mốc với một kilomet cao hơn).

Nếu chúng ta tính toán giá trị khác nhau trong phương trình (5.4) tính từ điểm x_1 đến x_2 (hoặc đơn giản là tích phân phương trình (5.1) từ x_1 đến x_2), ta nhận được

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv^2(x_2) - \frac{1}{2}mv^2(x_1) &= V(x_1) - V(x_2) \\ &= \int_{x_0}^{x} F(x')dx' \equiv (\text{Công})_{x_1 \to x_2}.\end{aligned} \tag{5.5}$$

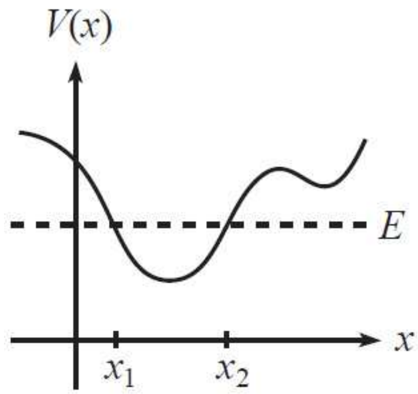
Ở đây rõ ràng là chỉ có giá trị thay đổi của thế năng là quan trọng. Nếu chúng ta định nghĩa tích phân trong phương trình này là *công* tác động lên phần tử khi nó di chuyển từ vị trí x_1 tới vị trí x_2, thì chúng ta sẽ có *định lý công-động năng* như sau:[2]

Định lý 5.1. *Sự thay đổi động năng của một chất điểm từ vị trí x_1 đến vị trí x_2 bằng công tác động lên chất điểm ấy từ x_1 đến x_2.*

Nếu phương của lực tác động cùng phương với chuyển động (nghĩa là, nếu $F(x)$ và dx trong phương trình (5.5) có cùng dấu), thì công tác dụng là dương và tốc độ của chất điểm sẽ tăng. Nếu lực tác động có chiều ngược chiều với chiều chuyển động, thì công sẽ âm và tốc độ sẽ giảm. Quay trở lại với phương trình (5.4) và giả sử rằng chúng ta đã

[1]Sẽ không tiện lắm nếu lúc nào chúng ta cũng phải nói "đối với mặt đất". Do đó, mỗi khi ai đó nói về thế năng hấp dẫn trong một cơ cấu nào đó trên bề mặt trái đất, nó sẽ được hiểu rằng bề mặt trái đất là điểm mốc. Tuy nhiên, nếu thí nghiệm được tiến hành tại vị trí rất xa trái đất thì để cho thuận tiện chúng ta sẽ chọn $r = \infty$ là điểm mốc như trong ví dụ đầu tiên sau đây.

[2]Ở trong dạng được phát biểu ở đây, định lý này chỉ đúng đối với một phần tử chất điểm không có cấu trúc bên trong. Xem mục "Công và thế năng" bên dưới cho định lý tổng quát.



Hình 5.1:

chọn điểm mốc x_0 cho thế năng (và có thể chúng ta đã cộng thêm một đại lượng hằng số vào $V(x)$, nếu chúng ta thích), bây giờ trong Hình vẽ 5.1 hãy vẽ đường cong hàm $V(x)$ và đường thẳng hằng số E (được xác định nếu chúng ta đã biết vị trí và vận tốc ban đầu của chất điểm). Khi đó hiệu của E và $V(x)$ sẽ là giá trị của động năng. Những vị trí mà $V(x) > E$ là những vị trí mà chất điểm không thể đi đến được. Những vị trí mà $V(x) = E$ được gọi là những "điểm dừng", là những điểm mà chất điểm sẽ dừng lại và đổi chiều chuyển động. Trong hình vẽ, chất điểm sẽ bị mắc ở trong vùng giữa x_1 và x_2, và sẽ dao động qua lại giữa hai điểm này. Hàm thế $V(x)$ rất hữu ích trong khảo sát này vì nó cho ta nhìn rõ những tính chất tổng quát của chuyển động.

NHẬN XÉT: Nghe có vẻ là ngớ ngẩn khi phải nói rõ điểm mốc x_0 khi mà chỉ có hiệu thế năng (không phụ thuộc vào x_0) là có ý nghĩa. Nó giống như là lấy hiệu của hai số 17 và 8 bằng cách là đầu tiên tìm giá trị tương đối của hai số này so với số 5, ở đây là 12 và 3, rồi sau đó lấy 12 trừ đi 3 để nhận được 9. Tuy nhiên, bởi vì việc lấy tích phân là khó hơn việc lấy hiệu của hai số, nên sẽ rất là có lợi khi chúng ta lấy tích phân một lần duy nhất và biết được giá trị của hàm thế năng $V(x)$ đối với mỗi vị trí của chất điểm, sau đó chúng ta chỉ cần lấy hiệu của thế năng khi cần thiết. ♣

Dạng vi phân của phương trình (5.3) là

$$F(x) = -\frac{dV(x)}{dx}. \tag{5.6}$$

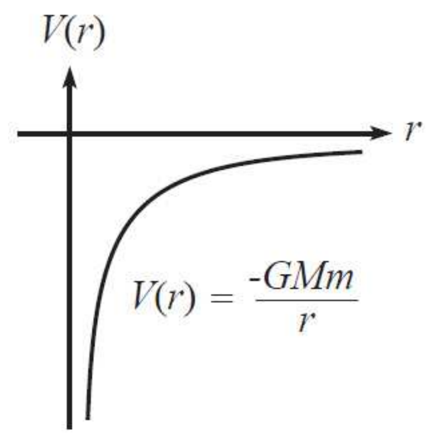
Nếu $V(x)$ được cho trước thì chúng ta sẽ dễ dàng nhận được $F(x)$. Nhưng nếu $F(x)$ cho trước thì có thể sẽ rất khó (hoặc không thể) lấy tích phân trong phương trình (5.3) và viết $V(x)$ dưới dạng hiện. Nhưng điều này cũng không quan trọng lắm. Hàm $V(x)$ là hàm giải tích (với giả thiết rằng lực tác động chỉ phụ thuộc vào x), và khi cần nó có thể được tính toán số tới độ chính xác ta cần.

Ví dụ (Thế năng hấp dẫn): Xét hai chất điểm có khối lượng M và m, nằm cách nhau một khoảng cách r. Định luật hấp dẫn Newton nói rằng lực tác động giữa chúng là lực hấp dẫn và có độ lớn là GMm/r^2 (chúng ta sẽ nói kỹ hơn về lực hấp dẫn trong Mục 5.4.1. Do đó, thế năng của hệ tại khoảng cách r so với thế năng tại r_0 là

$$V(r) - V(r_0) = -\int_{r_0}^{r} \frac{-GMm}{r'^2} dr' = \frac{-GMm}{r} + \frac{GMm}{r_0}, \tag{5.7}$$

với dấu trừ trong tích phân là do lực tác động là lực hấp dẫn. Để thuận tiện chúng ta chọn r_0 là ∞, bởi vì với cách chọn này số hạng thứ hai sẽ bị triệt tiêu. Từ bây giờ trở đi chúng ta sẽ luôn coi điểm mốc r_0 là ∞. Do đó (xem Hình 5.2),

$$V(r) = \frac{-GMm}{r}. \tag{5.8}$$



Hình 5.2:

Ví dụ (Trọng trường gần trái đất): Giá trị của thế năng hấp dẫn của một khối lượng m có độ cao y đối với mặt đất là bao nhiêu? Tất nhiên chúng ta biết rằng nó bằng mgy, nhưng hãy nhận lại giá trị này bằng cách khác. Nếu M là khối lượng của trái đất và R là bán kính của nó, thì phương trình (5.8) cho ta (với giả thiết rằng $y \ll R$)

$$\begin{aligned} V(R+y) - V(R) = \frac{-GMm}{R+y} - \frac{-GMm}{R} &= \frac{-GMm}{R}\left(\frac{1}{1+y/R} - 1\right) \\ &\approx \frac{-GMm}{R}\Big((1-y/R) - 1\Big) \\ &= \frac{GMmy}{R^2}, \end{aligned} \tag{5.9}$$

trong đó chúng ta đã sử dụng khai triển xấp xỉ Taylor cho $1/(1+\epsilon)$ để nhận được hàng thứ hai. Chúng ta cũng đã sử dụng một thực tế là một hình cầu cũng có thể được coi như là một chất điểm khi xét đến lực hấp dẫn. Chúng ta sẽ chứng minh điều này trong Mục 5.4.1.

> Sử dụng $g \equiv GM/R^2$, chúng ta thấy rằng hiệu thế năng trong phương trình (5.9) bằng mgy. Tất nhiên là chúng ta vừa đi một cách lòng vòng. Đầu tiên chúng ta lấy tích phân phương trình (5.7) rồi sau đó về cơ bản là lấy vi phân phương trình (5.9) bằng cách lấy hiệu của lực tại các điểm lân cận. Nhưng thế cũng tốt vì chúng ta đã kiểm tra lại tất cả kết quả chúng ta làm là đúng.

Một cách rất tốt để hình dung về thế năng $V(x)$ là tưởng tượng một quả bóng đang trượt xung quanh bên trong một thung lũng hoặc trên một ngọn đồi. Ví dụ như, thế năng của một lò xo điển hình là $V(x) = kx^2/2$ (công thức này là của định luật Hooke, $F(x) = -dV/dx = -kx$), và chúng ta có thể có một ý tưởng không tồi về hiện tượng này xảy ra như thế nào nếu chúng ta tưởng tượng một thung lũng với độ cao được cho bởi $y = x^2/2$. Khi đó thế năng trọng trường của quả bóng sẽ là $mgy = mgx^2/2$. Chọn $mg = k$ sẽ cho ta thế năng như ban đầu. Nếu chúng ta sau đó xem xét hình chiếu của chuyển động của quả bóng trên trục x, thì có vẻ như chúng ta vừa mới xây dựng một cơ cấu giống như cơ cấu dao động của lò xo.

Tuy nhiên, mặc dù mô hình tương tự này giúp chúng ta có thể hình dung về các tính chất cơ bản của chuyển động, nhưng hai cơ cấu này là *không* giống nhau. Chi tiết về việc không giống nhau này được cho trong Bài tập 5.7, nhưng quan sát sau đây sẽ thuyết phục bạn là chúng thực ra là khác nhau. Giả sử quả bóng được thả ra từ vị trí cân bằng trong cả hai cơ cấu với giá trị ban đầu theo phương x lớn. Sau đó lực kx gây ra bởi lò xo là rất lớn. Nhưng lực theo phương x của chất điểm trong thung lũng chỉ là một phân số của mg, thực ra là $(mg \sin\theta)\cos\theta$, trong đó θ là góc của thung lũng tại điểm đang xét. Tuy nhiên, hai cơ cấu là có thể xấp xỉ như nhau cho chuyển động dao động nhỏ xung quanh điểm đáy của thung lũng. Xem Bài tập 5.7 để biết thêm chi tiết.

Các lực bảo toàn

Cho trước một lực bất kỳ (nó có thể phụ thuộc vào x, v, t và/hoặc bất cứ biến nào khác), công mà nó thực hiện trên một chất điểm được định nghĩa bởi $W = \int F dx$. Nếu chất điểm bắt đầu từ điểm x_1 và kết thúc tại điểm x_2, thì mặc dù nó đi đến điểm này bằng cách nào đi chăng nữa (nó có thể tăng tốc hoặc giảm tốc trong quá trình chuyển động, hoặc có thể đổi chiều chuyển động một số lần), chúng ta vẫn có thể tính toán được tổng công tác dụng lên nó bởi tất cả các lực xuất hiện trong cơ cấu, và sau đó cân bằng kết quả này với phần động năng bị thay đổi, thông qua

$$W_{\text{tổng}} \equiv \int_{x_1}^{x_2} F_{\text{tổng}}\, dx = \int_{x_1}^{x_2} m\left(\frac{vdv}{dx}\right) dx = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2. \tag{5.10}$$

Đối với một số lực, công thực hiện là không phụ thuộc vào cách mà chất điểm chuyển động. Một lực mà chỉ phụ thuộc vào vị trí của chất điểm (trong trường hợp một chiều) sẽ có tính chất này, bởi vì tích phân trong phương trình (5.10) chỉ phụ thuộc vào điểm cuối. Tích phân $W = \int F dx$ là diện tích (có thể âm hoặc dương) trong đồ thị của phần bên dưới đường cong F đối với x, và diện tích này độc lập với cách mà chất điểm chuyển động từ x_1 đến x_2.

Đối với các lực khác, công thực hiện sẽ phụ thuộc vào cách mà chất điểm chuyển động. Một trường hợp như thế này là đối với các lực mà phụ thuộc vào t hoặc v, bởi vì khi đó nó sẽ phụ thuộc vào *khi nào* chất điểm sẽ đến điểm x_2 hoặc chất điểm sẽ đi từ x_1 đến x_2 *nhanh hay chậm*. Một ví dụ phổ biến cho loại lực này là lực ma sát. Nếu bạn trượt một viên gạch trên một cái bàn từ vị trí x_1 đến vị trí x_2, thì công gây ra do lực ma sát sẽ là $-\mu mg|\Delta x|$. Nhưng nếu bạn trượt viên gạch này một cách tiến lên rồi lùi xuống hàng giờ liền trước khi nó đến được điểm x_2, thì độ lớn của công âm gây ra bởi lực ma sát là rất lớn. Bởi vì lực ma sát luôn có phương ngược chiều với phương chuyển động, nên phần thêm vào tích phân $W = \int F dx$ là luôn âm, vì vậy không có phần nào bị triệt tiêu nhau. Kết quả của nó do đó là một số âm rất lớn.

Vấn đề đối với lực ma sát là mặc dù lực μmg có vẻ như là một lực hằng số (là một tập con của tập các lực chỉ phụ thuộc vào vị trí), nhưng thực ra nó không phải là như vậy. Tại một điểm đã cho, lực ma sát có thể hướng sang trái hoặc hướng sang phải, phụ thuộc vào cách mà chất điểm đang chuyển động. Do đó lực ma sát là một hàm phụ thuộc vào vận tốc. Điều này là đúng, mặc dù nó là một hàm chỉ phụ thuộc vào *hướng* của vận tốc, nhưng như thế là đủ để nó không phải là hàm chỉ phụ thuộc vào vị trí.

Bây giờ chúng ta sẽ định nghĩa một *lực bảo toàn* như là một lực mà công của nó thực hiện trên một chất điểm giữa hai điểm đã cho là độc lập với cách mà chất điểm đó chuyển động giữa hai điểm này. Từ phần thảo luận bên trên, chúng ta biết rằng một lực trong trường hợp một chiều là bảo toàn nếu và chỉ nếu nó chỉ phụ thuộc vào x (hoặc nó là hằng số).[3] Mục đích mà chúng ta dẫn dắt đến thời điểm này là mặc dù chúng ta có thể tính công thực hiện được bởi bất cứ lực nào, nhưng nó chỉ có nghĩa khi nói về thế năng của một lực chỉ khi lực này là lực bảo toàn. Điều này là đúng bởi vì chúng ta muốn là có thể gán cho mỗi giá trị của x với một con số duy nhất, $V(x)$, được cho bởi $V(x) = -\int_{x_0}^{x} F dx$. Nếu tích phân này phụ thuộc vào cách mà chất điểm đi từ điểm x_0 tới điểm x, thì nó sẽ là một đại lượng không chỉnh (không được định nghĩa tốt), vì vậy chúng ta sẽ không biết phải gán giá trị nào cho $V(x)$. Do đó chúng ta chỉ nói đến thế năng khi nó là thế năng của một lực bảo toàn nào đó. Đặc biệt, sẽ là không có nghĩa khi nói về thế năng của một lực ma sát.

Một thực tế hữu ích của thế năng trọng trường, mgz, là nó không phụ thuộc vào đường đi của chất điểm, thậm chí là trong trường hợp hai chiều hoặc ba chiều. Điều này là đúng vì thậm chí nếu chất điểm chuyển động theo một hướng phức tạp, thì chỉ có thành phần theo phương z của chuyển dịch là liên quan đến việc tính toán công của trọng lực. Nếu chúng ta chia đường chuyển động của chất điểm thành rất nhiều đoạn nhỏ, thì tổng công gây ra bởi trọng lực nhận được bằng cách lấy tổng của rất nhiều số hạng nhỏ $-mg(dz)$

[3]Tuy nhiên, trong trường hợp hai hoặc ba chiều, chúng ta sẽ thấy trong Mục 7 là một lực bảo toàn phải thỏa mãn thêm một điều kiện khác, không phải chỉ mỗi phụ thuộc vào vị trí của nó.

này. Nhưng tổng của tất cả các số hạng dz luôn luôn bằng z, không phụ thuộc vào đường đi của chất điểm. Do đó, dù cho chất điểm chuyển động như thế nào đi chăng nữa trong hai chiều còn lại, thì sự thay đổi thế năng luôn là mgz. Vì vậy trọng lực là một lực bảo toàn trong trường hợp ba chiều. Chúng ta sẽ thấy trong Mục 5.3 rằng đây là một trường hợp đặc biệt của một kết quả tổng quát hơn.

Ví dụ (Sợi dây duỗi thẳng): Một khối lượng được nối vào một đầu của một sợi dây không khối lượng, đầu còn lại của sợi dây được nối với một cột mảnh thẳng đứng không ma sát. Sợi dây ban đầu hoàn toàn được quấn xung quanh cột, theo rất nhiều vòng nhỏ nằm theo phương ngang, sao cho khối lượng chạm vào cột. Khối lượng được thả ra, và sợi dây bắt đầu tách rời khỏi cột và duỗi thẳng. Hỏi góc mà sợi dây tạo với cột tại thời điểm sợi dây được duỗi thẳng hoàn toàn là bao nhiêu?

Lời giải: Gọi ℓ là độ dài của sợi dây, và gọi θ là góc cần tìm giữa sợi dây và cột. Khi đó độ cao của khối lượng là $\ell\cos\theta$ nằm bên dưới điểm ban đầu của nó. Vì vậy, khối lượng mất một thế năng là $mg(\ell\cos\theta)$. Do đó định luật bảo toàn năng lượng cho ta (chọn $y=0$ tại vị trí ban đầu, mặc dù điều này cũng không quan trọng)

$$K_\text{i}+V_\text{i}=K_\text{f}+V_\text{f} \quad\Longrightarrow\quad 0+0=\frac{1}{2}mv^2-mg\ell\cos\theta \quad\Longrightarrow\quad v^2=2\text{g}\ell\cos\theta. \tag{5.11}$$

Có hai ẩn cần tìm ở đây, v và θ, vì vậy chúng ta cần thêm một phương trình nữa. Phương trình này sẽ là phương trình $F=ma$ theo phương hướng tâm của chuyển động (về cơ bản) là đường tròn của khối lượng tại thời điểm cuối. Bởi vì cột là rất mảnh, nên chuyển động luôn luôn có thể được xấp xỉ bởi các đường tròn theo phương nằm ngang, mà những đường tròn này sẽ hạ thấp dần xuống một cách rất từ từ. Bởi vì về cơ bản là không có chuyển động theo phương thẳng đứng, nên tổng lực tác dụng lên khối lượng theo phương này bằng không. Do đó, thành phần của lực căng dây theo phương thẳng đứng về cơ bản là bằng mg. Thành phần nằm ngang do đó sẽ bằng $mg\tan\theta$, vì vậy phương trình $F=ma$ cho chuyển động tròn tại thời điểm cuối (mà có bán kính là $\ell\sin\theta$) là

$$mg\tan\theta=\frac{mv^2}{\ell\sin\theta} \quad\Longrightarrow\quad v^2=\text{g}\ell\sin\theta\tan\theta. \tag{5.12}$$

Cho hai biểu thức của v^2 bằng nhau ta có $\tan\theta=\sqrt{2}\Longrightarrow\theta\approx 54.7^o$. Thật là thú vị, giá trị của góc này không phụ thuộc gì vào ℓ và g.

Công và thế năng

Khi bạn thả rơi một quả bóng, liệu tốc độ của nó tăng lên là do trọng lực đang sinh công lên nó, hay là bởi vì thế năng trọng trường đang giảm đi? Câu trả lời là cả hai (hoặc chính xác hơn, là do một trong hai nguyên nhân trên). Công và thế năng là hai cách khác nhau để nói về cùng một thứ (ít nhất là đối với các lực bảo toàn). Mỗi phương pháp lập luận đều cho ta kết quả đúng. Tuy nhiên, hãy cẩn thận không dùng *cả hai* phương pháp lập luận này và "tính hai lần" ảnh hưởng của trọng lực lên quả bóng. Việc lựa chọn thuật ngữ nào để dùng phụ thuộc vào cái gì mà bạn đang gọi là "hệ". Bởi vì với phương trình $F = ma$ và biểu đồ vật thể tự do, sẽ rất là quan trọng khi nói rõ bạn đang chọn hệ nào khi đang xét công và năng lượng, như bạn sẽ thấy trong ví dụ sau đây.

Định lý công và thế năng được phát biểu trong Định lý 5.1 là liên quan tới một chất điểm. Điều gì sẽ xảy ra nếu chúng ta xét công tác dụng lên một hệ tạo bởi nhiều vật? Định lý tổng quát về công và năng lượng phát biểu rằng công tác dụng lên một hệ bởi các *ngoại* lực bằng sự thay đổi của năng lượng của hệ. Năng lượng này có thể có dạng của (1) động năng của toàn hệ, (2) thế năng trong, hoặc (3) động năng trong (năng lượng nhiệt sẽ nằm ở dạng năng lượng này, bởi vì nó đơn giản là các chuyển động ngẫu nhiên của các phân tử). Vì vậy chúng ta có thể viết định lý công và năng lượng dưới dạng

$$W_{\text{ngoại lực}} = \Delta K + \Delta V + \Delta K_{\text{bên trong}}. \tag{5.13}$$

Đối với một chất điểm, nó sẽ không có cấu trúc bên trong, vì vậy chúng ta chỉ có số hạng đầu tiên của ba số hạng trong vế phải, phù hợp với Định lý 5.1. Nhưng để thấy cái gì sẽ xảy ra khi một hệ có cấu trúc bên trong, hãy xét ví dụ sau.

Ví dụ (Nâng một quyển sách): Giả sử rằng bạn nâng một quyển sách lên với vận tốc không đổi, vì vậy sẽ không có thay đổi nào trong động năng. Hãy xem định lý tổng quát về công và năng lượng sẽ cho ta biết gì với những cách chọn hệ khác nhau.

- Hệ = (quyển sách): Cả lực do tay bạn tác động và trọng lực của sách là những ngoại lực, và không có thay đổi gì trong năng lượng của quyển sách mà được coi như là một hệ. Vì vậy định lý công và động năng nói rằng

$$W_{\text{bạn}} + W_{\text{trọng lực}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad mgh + (-mgh) = 0. \tag{5.14}$$

- Hệ = (quyển sách + trái đất): bây giờ lực bạn tác dụng là ngoại lực duy nhất. Lực hấp dẫn giữa quyển sách và trái đất là một nội lực trong hệ mà sinh ra thế năng trong của hệ. Vì vậy định lý công và động năng nói rằng

$$W_{\text{bạn}} = \Delta V_{\text{trái đất-quyển sách}} \quad \Longleftrightarrow \quad mgh = mgh. \tag{5.15}$$

- Hệ = (quyển sách + trái đất + bạn): Bây giờ không có lực nào là ngoại lực cả. Thế năng của hệ thay đổi bởi vì thế năng trọng trường giữa trái đất và quyển sách đang tăng dần, và cũng bởi vì thế năng *của bạn* đạng giảm. Để nâng được quyển sách, phải phải đốt một ít calo từ bữa tối mà bạn vừa ăn. Vì vậy định lý công và năng lượng nói rằng

$$0 = \Delta V_{\text{trái đất-quyển sách}} + \Delta V_{\text{bạn}} \iff 0 = mgh + (-mgh). \qquad (5.16)$$

Thực ra, cơ thể con người không thể hoạt động với 100% hiệu quả, vì vậy cái thực sự xảy ra ở đây là thế năng của bạn sẽ giảm một lượng nhiều hơn mgh, nhưng nhiệt năng sẽ bị sinh ra. Tổng của hai sự thay đổi đối với năng lượng này sẽ bằng $-mgh$. Vì vậy, khi tính cả một phần η nhiệt năng, chúng ta có

$$\begin{aligned} & 0 = \Delta V_{\text{trái đất-quyển sách}} + \Delta V_{\text{bạn}} + \Delta K_{\text{bên trong}} \\ \iff & 0 = mgh + (-mgh - \eta) + \eta. \end{aligned} \qquad (5.17)$$

Phần η nhiệt năng này có thể sinh ra từ một cách khác, ví dụ như, do nhiệt sinh ra từ ma sát khi bạn kéo quyển sách lên trên dọc theo một bức tường nhám.[4]

Tinh thần của việc xem xét công hay thế năng là bạn có thể xem xét một cơ cấu theo nhiều cách, phụ thuộc vào việc bạn đang chọn cái gì là cơ hệ cần xét. Thế năng là một cách mà có thể xuất hiện dưới dạng công trong hệ khác. Trong thực hành, thông thường thì sử dụng thế năng sẽ tiện lợi hơn là dùng công. Vì vậy, đối với bài toán một quả bóng được thả rơi, người ta thường coi (mà có thể không nhận ra mình đang làm điều đó) trọng lực là một nội lực trong hệ trái đất-quả bóng, ngược lại với việc coi nó là một ngoại lực trong hệ chỉ gồm quả bóng. Nói chung, "định luật bảo toàn năng lượng", thường được dùng trong các cơ cấu liên quan đến trọng lực và/hoặc các lò xo, là một nguyên lý dễ hiểu để áp dụng (và bạn sẽ có rất nhiều cơ hội để áp dụng nó trong các bài tập và các bài luyện tập trong chương này). Vì vậy nói chung bạn có thể bỏ qua tất cả các vấn đề về công và việc phải chọn hệ nào để xem xét.

Nhưng hãy xem xét thêm một ví dụ nữa, chỉ để chắc chắn rằng chúng ta có cùng quan điểm. Xét một chiếc xe ô tô đang phanh (nhưng không bị trượt). Lực ma sát tác dụng lên các bánh xe là những lực làm cho xe chuyển động chậm dần. Nhưng lực này không tác dụng công nào lên trên xe, bởi vì mặt đất không có chuyển động tương đối với bánh xe; lực ma sát tác dụng lên xe trên một quãng đường bằng không. Vì vậy công của ngoại lực trong vế trái của phương trình (5.13) bằng không. Vì vậy vế phải của phương trình này cũng bằng không. Nghĩa là, tổng năng lượng của chiếc xe là không đổi. Điều này thực ra là đúng, bởi vì mặc dù tổng động năng của chiếc xe là giảm đi, thì nội năng của chiếc

[4]Trong trường hợp này bạn có thể kể đến bức tường như là vật thứ tư trong hệ của chúng ta, bởi vì nó có thể có một ít nhiệt năng. Nếu bạn muốn coi bức tường là một vật bên ngoài hệ mà tác dụng lực vào hệ, thì khi đó mọi thứ sẽ trở nên khá khó; xem Bài tập 5.6.

xe tăng lên một lượng bằng đúng như vậy dưới dạng nhiệt giữa má phanh và đĩa phanh. Nói cách khác, $\Delta K = -\Delta K_{\text{nội năng}}$, và tổng năng lượng vẫn bảo toàn. Điều không may của quá trình này là phần năng lượng chuyển thành nhiệt sẽ bị mất đi và không thể được chuyển lại thành động năng của xe. Nó sẽ có ý nghĩa nhiều hơn rất nhiều nếu chuyển phần động năng của xe thành dạng thế năng trong (nghĩa là, $\Delta K = -\Delta U$), mà dạng năng lượng này sau đó có thể được chuyển lại thành động năng của xe. Một trường hợp dạng này là các xe ô tô với động cơ hybrid mà có thể chuyển động năng của xe thành các thế năng hóa học được lưu trữ trong một cục pin.

Ngược lại, khi một chiếc xe tăng tốc, lực ma sát do mặt đất tác dụng lên xe không sinh công (bởi vì mặt đất cũng không có chuyển động tương đối với bánh xe), vì vậy tổng năng lượng của chiếc xe vẫn không đổi. Phần thế năng trong của xăng (hoặc của pin) được chuyển hóa thành động năng của xe (cùng với một ít nhiệt và năng lượng của âm thanh). Một điều tương tự như vậy xảy ra khi bạn đang đứng yên và sau đó bắt đầu bước đi. Lực ma sát do mặt đất tác dụng lên bạn cũng không sinh công, vì vậy tổng năng lượng vẫn là bảo toàn. Bạn đơn giản là phải đánh đổi một phần bữa sáng của bạn để có động năng (cộng với một ít nhiệt trong cơ thể của bạn). Để biết thêm một số thảo luận về công, xem Mallinckrodt và Lef (1992).

5.2 Dao động nhỏ

Xét một vật trong trường hợp một chiều, chịu tác dụng của một hàm thế năng $V(x)$. Giả sử vật ban đầu đứng yên tại vị trí mà $V(x)$ đạt cực tiểu địa phương, và sau đó truyền cho nó một chuyển động nhỏ để nó chuyển động qua lại xung quanh vị trí cân bằng. Chúng ta có thể nói gì về chuyển động này? Liệu nó có phải là một dao động điều hòa đơn giản? Liệu tần số dao động có phụ thuộc vào biên độ dao động?

Hóa ra là đối với biên độ dao động nhỏ, chuyển động này là một dao động điều hòa đơn giản, và tần số của dao động có thể dễ dàng tìm được, nếu chúng ta được cho trước hàm $V(x)$. Để làm điều này, khai triển $V(x)$ thành chuỗi Taylor xung quanh điểm cân bằng, x_0,

$$\begin{aligned} V(x) = &V(x_0) + V'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}V''(x_0)(x-x_0)^2 \\ &+ \frac{1}{3!}V'''(x_0)(x-x_0)^3 + \cdots . \end{aligned} \tag{5.18}$$

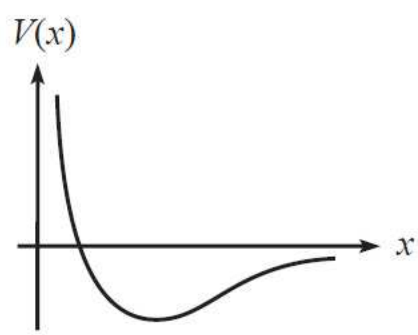
Biểu thức này trông có vẻ hơi bị rắc rối, nhưng chúng ta có thể rút gọn nó. $V(x_0)$ là một hằng số thêm vào và không đóng vai trò quan trọng gì ở đây. Chúng ta có thể bỏ qua nó bởi vì chỉ có hiệu của năng lượng là có ý nghĩa (hoặc nói một cách tương đương, bởi vì $F = -dV/dx$). Và $V'(x_0) = 0$, theo định nghĩa của điểm cân bằng. Vì vậy biểu thức này chỉ còn $V''(x_0)$ và các số hạng bậc cao. Nhưng đối với các chuyển dịch đủ nhỏ, những số hạng bậc cao này là không đáng kể so với số hạng của $V''(x_0)$, bởi vì chúng bị triệt tiêu bởi các số mũ bậc cao của $(x - x_0)$. Vì vậy chúng ta còn[5]

$$V(x) \approx \frac{1}{2}V''(x_0)(x - x_0)^2. \tag{5.19}$$

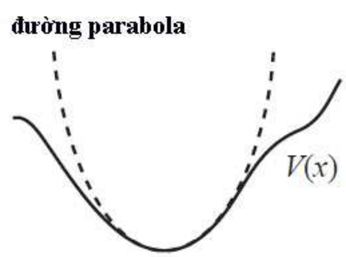
Nhưng giá trị này có dạng y hệt của thế năng theo định luật Hooke. $V(x) = (1/2)k(x - x_0)^2$, miễn là chúng ta coi $V''(x_0)$ là "hệ số độ cứng lò xo" k của chúng ta. Một cách tương đương, lực tác dụng là $F = -dV/dx = -V''(x_0)(x - x_0) \equiv -k(x - x_0)$. Tần số của dao động nhỏ, $\omega = \sqrt{k/m}$, do đó bằng

$$\omega = \sqrt{\frac{V''(x_0)}{m}}. \tag{5.20}$$

Ví dụ: Một chất điểm chuyển động dưới tác dụng của hàm thế $V(x) = A/x^2 - B/x$, trong đó $A, B > 0$. Tìm tần số dao động nhỏ của chất điểm xung quanh vị trí cân bằng. Hàm thế này là dạng hàm của chuyển động hành tinh, như chúng ta sẽ thấy trong Chương 7. Đồ thị của hàm thế này được vẽ trong Hình 5.3



Hình 5.3:



Hình 5.4:

[5]Thậm chí nếu $V'''(x_0)$ rất lớn so với $V''(x_0)$, thì chúng ta vẫn luôn có thể lấy $(x - x_0)$ đủ nhỏ sao cho số hạng bậc ba có thể bỏ qua. Một trường hợp mà điều này không đúng là khi $V''(x_0) = 0$. Nhưng kết quả trong phương trình (5.20) vẫn còn đúng trong trường hợp này. Tần số ω sẽ bằng không, trong trường hợp giới hạn khi dao động là vô cùng nhỏ.

Lời giải: Điều đầu tiên chúng ta phải làm là tính vị trí cân bằng x_0. Giá trị cực tiểu của hàm thế xảy ra khi

$$0 = V'(x) = -\frac{2A}{x^3} + \frac{B}{x^2} \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{2A}{B} \equiv x_0. \tag{5.21}$$

Đạo hàm bậc hai của $V(x)$ là

$$V''(x) = \frac{6A}{x^4} - \frac{2B}{x^3}. \tag{5.22}$$

Thay $x_0 = 2A/B$, chúng ta tìm được

$$\omega = \sqrt{\frac{V''(x_0)}{m}} = \sqrt{\frac{B^4}{8mA^3}}. \tag{5.23}$$

Phương trình (5.20) là một kết quả quan trọng, bởi vì nó đúng đối với *bất cứ* hàm thế $V(x)$ nào có dạng giống như một parabola (xem Hình 5.4) trong một vùng đủ nhỏ xung quanh một điểm cực tiểu địa phương (ngoại trừ trong trường hợp đặc biệt khi $V''(x_0) = 0$).

5.3 Định luật bảo toàn năng lượng trong trường hợp ba chiều

Định lý về công và thế năng trong trường hợp ba chiều phức tạp hơn ở một mức độ nào đó so với trong trường hợp một chiều, nhưng những ý tưởng tổng quát thì vẫn không đổi.[6] Như trong trường hợp 1-D, chúng ta sẽ bắt đầu với định luật thứ hai của Newton, mà bây giờ sẽ có dạng vector, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Và cũng như trong trường hợp 1-D, chúng ta cũng chỉ xét các lực mà chỉ phụ thuộc vào vị trí, nghĩa là, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$, bởi vì đây là những lực duy nhất mà có thể là các lực bảo toàn. Phương trình vector $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ là dạng viết ngắn gọn của ba phương trình tương tự như trong phương trình (5.1), như $mv_x(dv_x/dx) = F_x$, và tương tự như vậy đối với biến y và z. Lực F_x ở đây là một hàm của vị trí, vì vậy chúng ta nên viết nó là $F_x(x, y, z)$, nhưng chúng ta sẽ bỏ qua không viết các đối số, vì sợ rằng các biểu thức của chúng ta sẽ trở nên quá lộn xộn. Nhân hai vế với dx, v.v..., trong ba phương trình này, và sau đó cộng chúng lại với nhau ta có

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = m(v_x dv_x + v_y dv_y + v_z dv_z). \tag{5.24}$$

Vế trái là công tác dụng lên chất điểm. Với $d\mathbf{r} \equiv (dx, dy, dz)$, công này có thể được viết dưới dạng $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ (xem Phụ lục B cho định nghĩa của "tích vô hướng"). Sử dụng phương trình (B.2), chúng ta thấy rằng công này cũng có thể được viết dưới dạng $F|d\mathbf{r}|\cos\theta$, trong đó θ là góc giữa $\mathbf{F}$ và $d\mathbf{r}$. Nhóm lại biểu thức này dưới dạng $(F\cos\theta)|d\mathbf{r}|$ sẽ chỉ ra

[6] Chúng ta sẽ sử dụng một số kết quả của giải tích vector ở đây. Nếu bạn chưa được biết những kết quả này, hãy xem qua nội dung vắn tắt của nó trong Phụ lục B.

rằng công tác dụng bằng quãng đường di chuyển của chất điểm nhân với thành phần của lực dọc theo dịch chuyển này. Trong khi đó, nhóm biểu thức trên dưới dạng $F(|d\mathbf{r}|\cos\theta)$ chỉ ra rằng công này cũng bằng độ lớn của lực nhân với thành phần của dịch chuyển theo phương của lực.

Lấy tích phân phương trình (5.24) từ điểm (x_0, y_0, z_0) tới điểm (x, y, z) nhận được[7]

$$E + \int_{x_0}^{x} F_x dx' + \int_{y_0}^{y} F_y dy' + \int_{z_0}^{z} F_z dz' = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \frac{1}{2}mv^2, \tag{5.25}$$

trong đó E là một hằng số tích phân; nó bằng $mv_0^2/2$, trong đó v_0 là vận tốc tại (x_0, y_0, z_0). Chú ý rằng tích phân của vế trái phụ thuộc vào đường quỹ đạo của chất điểm trong không gian 3-D từ điểm (x_0, y_0, z_0) đến điểm (x, y, z), bởi vì các thành phần của lực $\mathbf{F}$ là các hàm phụ thuộc vào vị trí. Chúng ta sẽ đề cập vấn đề này ở bên dưới. Nhờ tích vô hướng, phương trình (5.25) có thể được viết ở dạng gọn hơn,

$$\frac{1}{2}mv^2 - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' = E. \tag{5.26}$$

Do đó, nếu chúng ta định nghĩa thế năng $V(x)$ có dạng

$$V(\mathbf{r}) \equiv -\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}', \tag{5.27}$$

thì chúng ta có thể viết

$$\frac{1}{2}mv^2 + V(\mathbf{r}) = E. \tag{5.28}$$

Nói cách khác, tổng của động năng và thế năng là một hằng số.

Các lực bảo toàn trong trường hợp ba chiều

Với một lực mà chỉ phụ thuộc vào vị trí (như chúng ta đang giả thiết), thì có một khó khăn nảy sinh trong trường hợp 3-D mà chúng ta không phải quan tâm đến nó trong trường hợp 1-D. Trong 1-D, chỉ có duy nhất một con đường đi từ x_0 đến x. Chuyển động của nó có thể liên quan đến việc tăng tốc hay giảm tốc, hoặc đi ngược lại, nhưng đường chuyển động thì vẫn luôn bị giới hạn dọc theo trong đường thẳng chứa x_0 và x. Nhưng trong trường hợp 3-D, có vô vàn con đường đi từ $\mathbf{r}_0$ đến $\mathbf{r}$. Để cho hàm thế $V(\mathbf{r})$ có ý nghĩa và có thể sử dụng được, nó phải là một hàm chỉnh hình. Nghĩa là, nó phải không phụ thuộc vào các đường đi. Như trong trường hợp 1-D, chúng ta gọi lực tương ứng với hàm thế như thế này là một *lực bảo toàn*. Bây giờ hãy xem các loại lực nào trong trường hợp 3-D là lực bảo toàn.

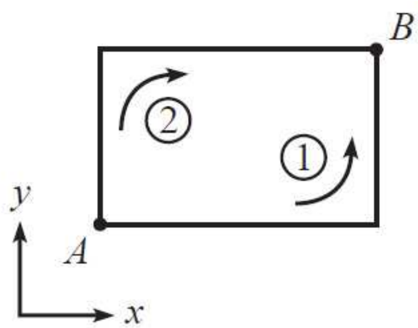
Định lý 5.2. *Cho một lực* $\mathbf{F}(\mathbf{r})$*, điều kiện cần và đủ để cho hàm thế,*

$$V(\boldsymbol{r}) \equiv -\int_{r_0}^{r} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}') \cdot d\boldsymbol{r}', \tag{5.29}$$

[7]Chúng ta đặt các dấu phẩy lên trên các biến trong tích phân để cho chúng ta không bị nhầm lẫn chúng với các giới hạn của tích phân. Và như đã đề cập ở phần trên, F_x thực ra là $F_x(x', y', z')$, v.v...

là hàm chỉnh hình (nghĩa là, không phụ thuộc vào đường đi) là hàm curl của $\mathbf{F}$ *bằng không khắp nơi (nghĩa là,* $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$*; xem Phụ lục B cho định nghĩa của hàm curl).*[8]

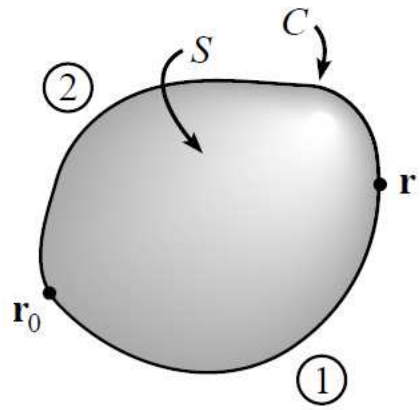
Chứng minh. Đầu tiên, chúng ta sẽ chỉ ra rằng $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ là một điều kiện cần cho việc không phụ thuộc vào đường đi. Nói cách khác, "Nếu $V(\mathbf{r})$ là không phụ thuộc vào đường đi, thì $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$." Điều này được thực hiện một cách nhanh chóng từ thảo luận của hàm curl trong Phụ lục B. Chúng ta chỉ ra trong phương trình (B.24) rằng tích phân $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ (nghĩa là, công được thực hiện) xung quanh một hình vuông nhỏ trong mặt phẳng $x - y$ bằng thành phần theo phương z của hàm curl nhân với diện tích. Nếu công thực hiện trong quá trình đi từ góc A tới góc B trong Hình 5.5 là bằng nhau đối với đường đi "1" và đường đi "2" (như chúng ta đang giả thiết), thì tích phân trên toàn bộ quãng đường khép kín xung quanh hình chữ nhật bằng không, bởi vì một đường khép kín như vậy sẽ có phần nó phải đi ngược lại, vì vậy nó sẽ triệt tiêu công trên quãng đường của phần kia. Do vậy việc không phụ thuộc vào đường đi suy ra rằng tích phân trên một đường cong kín $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ bằng không đối với bất kỳ đường chữ nhật nào trong mặt phẳng $x - y$. Phương trình (B.24) do đó nói rằng thành phần theo phương z của hàm curl phải bằng không khắp nơi. Tương tự như vậy đối với thành phần theo phương x và phương y. Do đó chúng ta đã chỉ ra rằng $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ là một điều kiện cần cho tính chất không phụ thuộc vào đường đi.



Hình 5.5:

Bây giờ chúng ta sẽ chỉ ra rằng nó là điều kiện đủ. Nói cách khác, "Nếu $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$, thì $V(\mathbf{r})$ là không phụ thuộc vào đường đi." Chứng minh của điều kiện đủ được chứng minh trực tiếp từ định lý Stokes, mà được phát biểu trong phương trình (B.25). Định lý này suy ra rằng nếu $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ khắp nơi, thì $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ đối với bất kỳ đường cong kín nào. Nhưng Hình 5.6 chỉ ra rằng việc đi dọc vòng tròn kín C theo hướng ngược chiều kim đồng hồ sẽ phải đi theo đường "1" theo hướng "tiến lên", rồi sau đó phải đi theo đường "2" theo hướng "ngược lại". Do đó, từ các lập luận như trong phần trên, các tích phân

[8]Nếu lực bằng vô cùng tại một điểm nào đó, thì chứng minh của điều kiện đủ ở bên dưới (mà dựa trên định lý Stokes) sẽ không còn đúng, và khi đó một điều kiện thứ hai là cần thiết; xem Feng (1969). Nhưng chúng ta sẽ không lo lắng về điều này ở đây.



Hình 5.6:

từ $\mathbf{r}_0$ tới $\mathbf{r}$ dọc theo các đường "1" và "2" là bằng nhau. Điều này đúng cho bất kỳ điểm $\mathbf{r}_0$ và $\mathbf{r}$ nào, và cho bất cứ đường cong C nào, vì vậy $V(\mathbf{r})$ là không phụ thuộc vào đường đi. □

NHẬN XÉT: Một cách khác để chỉ ra $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ là điều kiện đủ cho tính chất không phụ thuộc vào đường đi (nghĩa là, "Nếu $V(\mathbf{r})$ không phụ thuộc vào đường đi, thì $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$") là như sau. Nếu $V(\mathbf{r})$ là không phụ thuộc vào đường đi (và do đó là hàm chỉnh hình), thì chúng ta có thể viết ra dạng vi phân của phương trình (5.27) có dạng

$$dV(\mathbf{r}) = -\mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \equiv -(F_x dx + F_y dy + F_z dz). \tag{5.30}$$

Nhưng một biểu diễn khác của dV là

$$dV(\mathbf{r}) = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz. \tag{5.31}$$

Hai biểu diễn này phải tương đương nhau với bất kỳ dx, dy và dz nào. Vì vậy ta có

$$(F_x, F_y, F_z) = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right) \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r}). \tag{5.32}$$

Nói cách khác, lực là gradient của hàm thế. Do đó,

$$\nabla \times \mathbf{F} = -\nabla \times \nabla V(\mathbf{r}) = 0, \tag{5.33}$$

bởi vì hàm curl của một gradient là đồng nhất bằng không, như bạn có thể kiểm tra bằng cách sử dụng định nghĩa của hàm curl trong phương trình (B.20) và một thực tế là toán tử đạo hàm riêng là giao hoán (nghĩa là, $\partial^2 V/\partial x \partial y = \partial^2 V/\partial y \partial x$). ♣

Ví dụ (Lực hướng vào tâm): Một *lực hướng vào tâm* được định nghĩa là một lực mà có hướng dọc theo bán kính vị trí của vật và độ lớn của nó chỉ phụ thuộc vào r. Nghĩa là, $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(r)\hat{\mathbf{r}}$. Hãy chỉ ra rằng một lực hướng vào tâm là lực bảo toàn bằng cách chỉ ra rằng $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$.

Lời giải: Lực $\mathbf{F}$ có thể được viết dưới dạng

$$\mathbf{F}(x,y,z) = F(r)\hat{\mathbf{r}} = F(r)\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right). \tag{5.34}$$

Bây giờ, như bạn có thể kiểm tra lại,

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\partial x} = \frac{x}{r}, \tag{5.35}$$

và tương tự như vậy đối với y và z. Do đó, thành phần theo phương z của $\nabla \times \mathbf{F}$ bằng (ở đây ta viết F cho $F(r)$, và F' cho $dF(r)/dr$, và sử dụng quy tắc lấy đạo hàm hàm hợp)

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} &= \frac{\partial(yF/r)}{\partial x} - \frac{\partial(xF/r)}{\partial y} \\ &= \left(\frac{y}{r}F'\frac{\partial r}{\partial x} - yF\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}\right) - \left(\frac{x}{r}F'\frac{\partial r}{\partial y} - xF\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial y}\right) \\ &= \left(\frac{yxF'}{r^2} - \frac{yxF}{r^3}\right) - \left(\frac{xyF'}{r^2} - \frac{xyF}{r^3}\right) = 0. \end{aligned} \tag{5.36}$$

Tương tự như vậy đối với thành phần của x và y.

5.4 Trọng lực

5.4.1 Định luật hấp dẫn của Newton

Lực hấp dẫn tác dụng lên một chất điểm khối lượng m, đặt tại vị trí nằm cách một khoảng cách r so với một chất điểm khối lượng M, được cho bởi định luật hấp dẫn của Newton,

$$F(r) = \frac{-GMm}{r^2}, \tag{5.37}$$

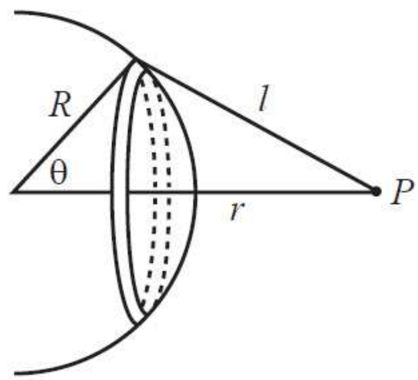
trong đó dấu trừ có nghĩa đây là lực hấp dẫn. Giá trị của G là $6.67 \cdot 10^{-11}\text{m}^3/(\text{kg s}^2)$. Chúng ta sẽ chỉ ra cách xác định giá trị này trong Mục 5.4.2 bên dưới.

Giá trị của lực này bằng bao nhiêu nếu chúng ta thay thế khối lượng chất điểm M bởi một hình cầu có bán kính R và khối lượng M? Câu trả lời (với giả thiết hình cầu là đối xứng cầu, nghĩa là, khối lượng riêng của nó là một hàm chỉ của bán kính r) là nó vẫn là $-GMm/r^2$. Một hình cầu sẽ tác động giống như một chất điểm đặt tại tâm của hình cầu khi tính toán lực hấp hẫn (miễn là chúng ta đang xét chất điểm khối lượng m nằm ngoài hình cầu). Đây là một kết quả rất đẹp và hữu ích. Nếu không phải như vậy, thì vũ trụ sẽ là một nơi phức tạp hơn rất nhiều so với nó bây giờ. Nói riêng, chuyển động của các hành tinh và những thứ tương tự như thế sẽ trở nên khó khăn hơn rất nhiều khi miêu tả chúng.

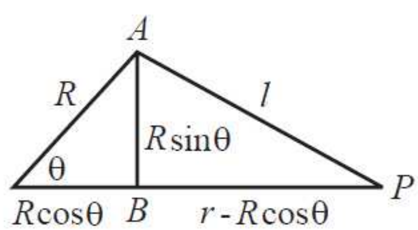
Để minh họa rằng các hình cầu sẽ ứng xử như các chất điểm, khi chúng ta xét đến lực hấp dẫn của nó, hóa ra rằng sẽ dễ dàng hơn rất nhiều khi tính toán thế năng gây ra bởi một hình cầu, và sau đó lấy đạo hàm của hàm thế này để nhận được lực hấp dẫn, hơn là tính toán lực hấp dẫn một cách trực tiếp.[9] Vì vậy đây là cách mà chúng ta sẽ làm. Ta chỉ cần minh họa kết quả này đối với một vỏ cầu mỏng, bởi vì một hình cầu là tổng hợp của vô vàn các vỏ cầu mỏng thế này. Chiến thuật của chúng ta khi tính toán thế năng tại một điểm P, gây ra bởi vỏ cầu mỏng, sẽ là chúng ta cắt vỏ cầu mỏng thành các vành tròn như chỉ ra trong Hình 5.7. Gọi bán kính của vỏ cầu là R, gọi P là điểm nằm cách tâm vỏ cầu một khoảng r, và giả sử vành tròn nằm tại vị trí có góc θ như trong hình vẽ. Khoảng cách, ℓ, từ điểm P tới vành tròn là một hàm của R, r và θ. Hàm này có thể được tìm như sau. Trong Hình vẽ 5.8, đoạn AB có độ dài $R\sin\theta$ và đoạn BP có độ dài $r - R\cos\theta$. Vì vậy độ dài ℓ trong tam giác ABP là

$$\ell = \sqrt{(R\sin\theta)^2 + (r - R\cos\theta)^2} = \sqrt{R^2 + r^2 - 2rR\cos\theta}. \tag{5.38}$$

Cái chúng ta vừa làm ở đây chỉ là chứng minh lại công thức cosine của tam giác.



Hình 5.7:



Hình 5.8:

Diện tích của một vành nằm giữa θ và $\theta + d\theta$ là chiều rộng của nó (bằng $Rd\theta$) nhân với chu vi của nó (bằng $2\pi R\sin\theta$). Gọi $\sigma = M/(4\pi R^2)$ là khối lượng riêng trên một đơn vị diện tích của vỏ cầu, chúng ta thấy rằng thế năng của một khối lượng m tại điểm P

[9]Lý do của điều này là do thế năng là một đại lượng vô hướng (chỉ là một số), trong khi đó lực là một đại lượng vector. Nếu chúng ta cố gắng tính lực, chúng ta sẽ phải xét đến các phương của lực. Nhưng với thế năng, chúng ta đơn giản chỉ phải lấy tổng của các con số.

gây ra bởi một vành tròn mỏng là $-Gm\sigma(Rd\theta)(2\pi R\sin\theta)/\ell$. Điều này là đúng bởi vì thế năng trọng trường,

$$V(\ell)=\frac{-Gm_1m_2}{\ell}, \tag{5.39}$$

là một đại lượng vô hướng, vì vậy chúng ta chỉ đơn giản là cộng các thế năng gây ra bởi các mảnh nhỏ khối lượng lại. Tất cả các mảnh của vành tròn có cùng khoảng cách so với P, và khoảng cách này là vấn đề duy nhất ở đây; hướng từ điểm P tới các mảnh nhỏ là không có liên quan gì (không giống như khi chúng ta xét lực). Tổng thế năng tại P do đó bằng

$$\begin{aligned} V(r) &= -\int_0^{\pi}\frac{2\pi\sigma GR^2m\sin\theta\ d\theta}{\sqrt{R^2+r^2-2rR\cos\theta}} \\ &= -\frac{2\pi\sigma GRm}{r}\sqrt{R^2+r^2-2rR\cos\theta}\ \Big|_0^{\pi}. \end{aligned} \tag{5.40}$$

Số hạng $\sin\theta$ ở trên tử số của biểu thức làm cho tích phân có thể tính ra được. Chúng ta bây giờ phải xét hai trường hợp. Nếu $r > R$, thì ta có

$$V(r)=-\frac{2\pi\sigma GRm}{r}\Big((r+R)-(r-R)\Big)=-\frac{G(4\pi R^2\sigma)m}{r}=-\frac{GMm}{r}, \tag{5.41}$$

đây là thế năng gây ra bởi một chất điểm khối lượng M đặt tại tâm của hình cầu, là điều mà chúng ta muốn chứng minh. Nếu $r < R$, khi đó ta có

$$V(r)=-\frac{2\pi\sigma GRm}{r}\Big((r+R)-(R-r)\Big)=-\frac{G(4\pi R^2\sigma)m}{R}=-\frac{GMm}{R}, \tag{5.42}$$

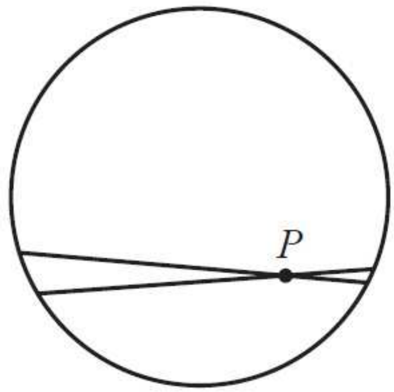
mà không phụ thuộc vào r. Sau khi tìm được $V(r)$, bây giờ chúng ta có thể tìm $F(r)$ bằng cách lấy giá trị âm của gradient của V. Gradient ở đây đơn giản là $\hat{\mathbf{r}}(d/dr)$, bởi vì V là hàm phụ thuộc duy nhất vào r. Do đó,

$$\begin{aligned} F(r) &= -\frac{GMm}{r^2}, \quad \text{nếu} \quad r > R, \\ F(r) &= 0, \quad \text{nếu} \quad r < R. \end{aligned} \tag{5.43}$$

Những lực này tất nhiên là có hướng dọc theo vector vị trí. Một hình cầu đặc là tổng của rất nhiều vỏ cầu, vì vậy nếu P là điểm nằm ngoài hình cầu đã cho, khi đó lực tại P sẽ là $-GMm/r^2$, trong đó M là tổng khối lượng của hình cầu đặc. Kết quả này vẫn còn đúng thậm chí trong trường hợp các vỏ cầu có khối lượng riêng khác nhau (nhưng mỗi vành tròn phải có khối lượng riêng đồng nhất). Chú ý rằng lực hấp dẫn giữa hai hình cầu có giá trị giống như lực hấp dẫn của hai chất điểm khối lượng khi thay thế chúng cho hai hình cầu. Đây là kết quả khi chúng ta áp dụng kết quả "chất điểm khối lượng tương đương" trên hai lần.

Nếu P nằm trong hình cầu đặc đã cho, thì phần vật chất của hình cầu đặc liên quan duy nhất ở đây là phần bên trong hình cầu đồng tâm đi qua điểm P, bởi vì tất cả các vỏ cầu mỏng nằm trong phần bên ngoài phần này cho lực hấp dẫn bằng không, như được chỉ ra bởi phương trình thứ hai của phương trình (5.43). Khi chỉ xét đến lực hấp dẫn, phần vật chất "bên ngoài" P này có thể coi là không có mặt ở đó.

Việc lực hấp dẫn bên trong một vỏ cầu bằng không cũng không phải là một điều hiển nhiên. Xét điểm P trong Hình 5.9. Một mảnh có khối lượng dm nằm phía bên phải vỏ cầu sẽ tác dụng một lực vào P lớn hơn mảnh có khối lượng dm nằm phía bên trái, bởi vì lực tác dụng tỷ lệ với $1/r^2$. Nhưng từ hình vẽ, chúng ta thấy rằng phần bên trái sẽ có khối lượng lớn hơn phần bên phải. Hai hiệu ứng này sẽ triệt tiêu lẫn nhau, như bạn có thể chỉ ra trong Bài tập 5.10.



Hình 5.9:

Ví dụ (Đỡ một ống): Tưởng tượng một việc không có thật như sau xảy ra. Khoan một ống hẹp, có tiết diện là A, từ bề mặt trái đất xuống đến tâm của nó. Sau đó phủ lên mặt trong của vỏ trụ của ống một lớp không ma sát. Sau đó đổ đầy ống lại bởi phần đất (và magma, v.v...) mà bạn lúc đầu đào lên. Hỏi lực cần thiết phải đặt tại đáy ống chứa đầy đất này (nghĩa là, tại tâm của trái đất) bằng bao nhiêu để giữ phần đất đó? Gọi bán kính trái đất là R, và giả sử (một cách không chính xác) là trái đất có khối lượng riêng đồng nhất bằng ρ.

Lời giải: Trọng lực tác dụng lên phần khối lượng dm tại bán kính r là do phần khối lượng của trái đất bên trong hình tròn bán kính r (gọi phần khối lượng này là M_r). Phần khối lượng bên ngoài không có ảnh hưởng gì ở đây. Do đó trọng lực này là

$$F_{dm} = \frac{GM_r dm}{r^2} = \frac{G\big((4/3)\pi r^3 \rho\big) dm}{r^2} = \frac{4}{3}\pi G\rho r dm, \tag{5.44}$$

mà chúng ta thấy nó tăng tuyến tính theo r. Phần đất trong ống nằm giữa r và $r + dr$ có thể tích là Adr, vì vậy khối lượng của nó là $dm = \rho A dr$. Tổng lực hấp dẫn tác dụng lên toàn bộ ống do đó bằng

$$F = \int F_{dm} = \int_0^R \frac{4}{3}\pi G\rho r(\rho A dr) = \frac{4}{3}\pi G\rho^2 A \int_0^R r dr$$
$$= \frac{4}{3}\pi G\rho^2 A \cdot \frac{R^2}{2} = \frac{2}{3}\pi G\rho^2 AR^2. \quad (5.45)$$

Lực tác dụng cần thiết tại đáy ống phải có giá trị bằng và ngược dấu với lực này. Biểu diễn qua khối lượng của trái đất, $M_E = (4/3)\pi R^3\rho$, và tổng khối lượng của ống, $M_t = \rho AR$, giá trị của lực này có thể được viết dưới dạng $F = GM_E M_t/2R^2$. Vì vậy lực cần thiết phải tác dụng này bằng một nửa giá trị trên mặt đồng hồ của bàn cân đặt trên bề mặt trái đất khi chúng ta đặt toàn bộ phần đất bên trong ống này thành một đống lên bàn cân này. Lý do của điều này về cơ bản là do lực trong phương trình (5.44) phụ thuộc tuyến tính vào r.

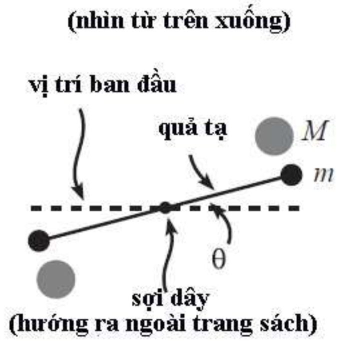
Một chủ đề con quan trọng của trọng lực là *lực thủy triều*, nhưng bởi vì lực này được thảo luận một cách dễ dàng nhất khi xét đến các hệ quy chiếu không quán tính và các lực ma sát, nên chúng ta sẽ hoãn việc nghiên cứu nó cho tới Chương 10.

5.4.2 Thí nghiệm Cavendish

Làm thế nào để xác định giá trị số của G trong phương trình (5.37)? Nếu chúng ta tạo một cơ cấu trong đó chúng ta đã biết các giá trị F, M, m, và r, thì chúng ta có thể xác định G. Chiến thuật đầu tiên mà ta nghĩ đến là sử dụng thực tế là lực hấp dẫn lên một vật trên bề mặt trái đất có giá trị là $F = mg$. Kết hợp điều này với phương trình (5.37) cho ta $g = GM_E/R^2$. Chúng ta đã biết giá trị của g và R,[10] vì vậy điều này cho ta biết tích GM_E bằng bao nhiêu. Tuy nhiên, thật không may là thông tin này lại không giúp ích gì cho chúng ta, bởi vì chúng ta không biết gì về khối lượng của trái đất (nếu không biết trước giá trị của G, là giá trị mà chúng ta giả sử là chưa biết; xem đoạn văn cuối cùng của mục này). Với tất cả những thứ mà chúng ta biết, thì khối lượng của trái đất có thể bằng 10 lần giá trị mà chúng ta đang nghĩ, với giá trị của G nhỏ hơn 10 lần. Cách duy nhất để tìm G là phải sử dụng một cơ cấu với hai khối lượng chưa biết. Nhưng cơ cấu này sẽ nảy sinh một vấn đề là lực hấp dẫn giữa chúng sẽ cực kỳ nhỏ. Vì vậy nhiệm vụ này sẽ dẫn về việc tìm một cách để đo lực hấp dẫn rất nhỏ giữa hai khối lượng chưa biết. Henry Cavendish giải quyết vấn đề này năm 1798 bằng cách thực hiện mội thí nghiệm cực kỳ tinh tế (mà được nghĩ ra bởi John Michell vài năm trước đó, nhưng ông chết trước khi có thể thực hiện thí nghiệm này).[11] Ý tưởng cơ bản đằng sau thí nghiệm này là như sau.

[10] Bán kính của trái đất được biết đến (ít nhất là một cách đại khái) từ thời của Eratosthenes, vào khoảng năm 250 trước Công nguyên. Để biết một cách rất thú vị cho việc tự đo bán kính này, xem Rawlins (1979).

[11] Mục đích của thí nghiệm này, như dự định của Michell và Cavendish, thực ra là để đo khối lượng riêng của trái đất, chứ không phải G; xem Clotfelter (1987). Nhưng như chúng ta sẽ thấy ở phần bên dưới, việc này tương đương với việc đo G.



Hình 5.10:

Xét một cơ cấu như trong Hình 5.10, mà được nhìn từ phía trên. Một quả tạ có hai khối lượng m đặt tại hai đầu của nó được treo vào một sợi dây rất mảnh. Quả tạ có thể xoay một cách tự do, mặc dù khi nó xoay, sợi dây sẽ tác dụng một moment lực xoắn phục hồi rất nhỏ.[12] Quả tạ ban đầu được đặt sao cho sợi dây không bị xoắn, rồi sau đó đặt (cố định) hai khối lượng M tại các vị trí như trong hình vẽ. Hai khối lượng này sẽ tác dụng các lực hấp dẫn vào hai khối lượng của quả tạ và làm cho quả tạ xoắn theo chiều ngược chiều kim đồng hồ. Quả tạ sẽ dao động qua lại trước khi nó cuối cùng sẽ dừng lại tại một góc rất nhỏ θ so với vị trí ban đầu.

Moment lực tác dụng vào quả tạ mà sinh ra trong dây do quả tạ bị xoắn sẽ có dạng $\tau = -b\theta$ (với chiều quay ngược chiều kim đồng hồ là chiều dương), trong đó b là một hằng số phụ thuộc vào độ dày và cấu trúc của sợi dây. Mối quan hệ tuyến tính giữa τ và θ này sẽ đúng đối với θ nhỏ cũng giống như khi công thức của lực lò xo tuân theo định luật Hooke $F = -kx$ trong Mục 5.2.

Lực hấp dẫn giữa mỗi cặp khối lượng là GMm/d^2, trong đó d là khoảng cách giữa hai tâm của các khối lượng trong từng cặp. Vì vậy moment lực tác dụng lên quả tạ do hai lực hấp dẫn này là $2(GMm/d^2)l$, trong đó ℓ là một nửa chiều dài của quả tạ. Cho tổng moment lực tác dụng lên quả tạ bằng không ta có

$$\frac{2GMm\ell}{d^2} - b\theta = 0 \quad \Longrightarrow \quad G = \frac{b\theta d^2}{2Mm\ell}. \tag{5.46}$$

Chúng ta biết tất cả các tham số trong biểu thức bên phải ngoại trừ b, vì vậy nếu chúng ta có thể xác định nó, chúng ta sẽ hoàn thành công việc. Việc đo giá trị của b một cách trực tiếp với độ chính xác hợp lý sẽ rất là khó khăn, bởi vì moment lực trong dây là rất nhỏ. Nhưng may mắn là có một cách để xác định b mà giống như cách mà chúng ta làm trong phần dao động. Phương trình cơ bản rất quan trọng cho chuyển động quay là $\tau = I\ddot{\theta}$, trong đó I là moment quán tính (mà chúng ta có thể tính nó đối với quả tạ); đây

[12] *Chúng ta sẽ không nói gì đến momen lực cho đến Chương 8, vì vậy bạn có thể muốn đọc lại mục này sau đó. Chúng ta sẽ sử dụng một vài kết quả về động lực quay ở đây, nhưng cơ cấu nói chung này sẽ khá là dễ hiểu thậm chí nếu bạn không biết gì về chuyển động quay.*

là phương trình tương tự với phương trình của định luật thứ hai của Newton, $F = m\ddot{x}$. Bây giờ, nếu moment lực có dạng $\tau = -b\theta$ đối với θ nhỏ, thì $\tau = I\ddot{\theta}$ trở thành $-b\theta = I\ddot{\theta}$. Đây là một phương trình của một hệ dao động điều hòa đơn giản, vì vậy chúng ta biết rằng tần số của dao động là $\omega = \sqrt{b/I}$. Do đó, tất cả những thứ chúng ta cần làm là đo chu kỳ, $T = 2\pi/\omega$, của dao động trong khi quả tạ đang dao động trước khi đứng yên ở vị trí cân bằng, và chúng ta có thể xác định được b từ $b = I\omega^2 = I(2\pi/T)^2$. (Thời gian T là lớn, bởi vì b là nhỏ so với các đại lượng khác, bởi vì nếu không sẽ không có bất cứ hiện tượng xoắn nào trong dây mà có thể nhận biết được.) Thay giá trị này của b vào trong phương trình (5.46) cuối cùng ta có

$$G = \frac{4\pi^2 I\theta d^2}{2Mm\ell T^2}. \tag{5.47}$$

Thí nghiệm của Cavendish cũng được biết đến như là một thí nghiệm "cân trái đất", bởi vì bây giờ chúng ta biết G (và cũng biết g và R), chúng ta có thể sử dụng $g = GM_E/R^2$ để tính khối lượng của trái đất, M_E. Cách duy nhất có thể để xác định M_E (mà không phải xem xét từng mét khối của vật chất bên trong trái đất, là việc hiển nhiên là không thể thực hiện được) là phải xác định giá trị của G trước, như chúng ta vừa làm.[13] Thật là thú vị, kết quả của M_E, vào khoảng $6 \cdot 10^{24}$kg, dẫn đến giá trị trung bình của khối lượng riêng của trái đất là vào khoảng 5.5g/cm^3. Giá trị này lớn hơn khối lượng riêng của lớp vỏ và lớp bề mặt của trái đất, vì vậy chúng ta đi đến kết luận rằng phải có cái gì đó có khối lượng riêng rất lớn nằm bên trong trái đất. Vì vậy thí nghiệm của Cavendish, mà chỉ liên quan đến các khối lượng treo vào một sợi dây, một cách rất ngạc nhiên cho ta biết vài điều về lõi của trái đất![14]

5.5 Động lượng

5.5.1 Định luật bảo toàn động lượng

Định luật III của Newton phát biểu rằng mọi lực đều có phản lực của nó. Nói cách khác, nếu $\mathbf{F}_{ab}$ là lực mà chất điểm a chịu tác dụng từ chất điểm b, và nếu $\mathbf{F}_{ba}$ là lực mà chất điểm b chịu tác dụng từ chất điểm a, thì $\mathbf{F}_{ba} = -\mathbf{F}_{ab}$ tại mọi thời điểm. Định luật này hàm chứa những nội dung quan trọng liên quan đến động lượng, $\mathbf{p} \equiv m\mathbf{v}$. Xét hai chất điểm tương tác với nhau trong một khoảng thời gian. Giả sử rằng chúng không chịu tác dụng của bất cứ lực ngoài nào. Từ định luật II Newton, $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$, và sau khi lấy tích phân, chúng ta thấy rằng sự thay đổi động lượng của một chất điểm bằng tích phân theo

[13] Nếu bạn muốn xác định M_E mà không sử dụng g hoặc R (nhưng vẫn sử dụng G, tất nhiên, bởi vì M_E chỉ xuất hiện thông qua tích GM_E), xem Celnikier (1983).

[14] Để biết một thảo luận toàn diện về lõi của trái đất, xem Brush (1980).

thời gian của lực tác động lên nó. Nghĩa là,

$$\mathbf{p}(t_2) - \mathbf{p}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt. \tag{5.48}$$

Tích phân này được gọi là *xung lực*. Nếu chúng ta sử dụng định luật thứ ba, $\mathbf{F}_{ba} = -\mathbf{F}_{ab}$, chúng ta thấy rằng

$$\mathbf{p}_a(t_2) - \mathbf{p}_a(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{ab}\, dt = -\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{ba}\, dt = -\Big(\mathbf{p}_b(t_2) - \mathbf{p}_b(t_1)\Big). \tag{5.49}$$

Do đó,

$$\mathbf{p}_a(t_2) + \mathbf{p}_b(t_2) = \mathbf{p}_a(t_1) + \mathbf{p}_b(t_1). \tag{5.50}$$

Điều này có nghĩa là tổng động lượng của hệ hai chất điểm bị cô lập này là *bảo toàn*; nó không phụ thuộc vào thời gian. Chú ý rằng phương trình (5.50) là phương trình vector, do đó nó có ba phương trình bảo toàn được gọi là p_x, p_y và p_z.

NHẬN XÉT: Định luật III Newton phát biểu về lực. Nhưng lực lại liên quan đến động lượng bởi phương trình $F = dp/dt$. Do đó, định luật III Newton về cơ bản được coi như là định đề của định luật bảo toàn động lượng. ("Chứng minh" định luật này như trong phương trình (5.49) không thể được coi là một chứng minh được. Chúng ta chỉ sử dụng mỗi một phép lấy tích phân đơn giản.) Do đó, bạn có thể băn khoăn là liệu định luật bảo toàn động lượng là một điều có thể chứng minh được không, hay nó là cái mà chúng ta phải *thừa nhận* giống như mọi thứ chúng ta vừa làm đều dựa trên việc chúng ta đã thừa nhận định luật III Newton.

Sự khác nhau giữa một định đề và một định lý là tương đối không rõ ràng. Một định đề đưa ra bởi ai đó có thể là một định lý của một người khác, và ngược lại. Bạn phải bắt đầu *với một cái gì đó* trong giả thiết ban đầu của bạn. Chúng ta chọn việc bắt đầu với định luật III Newton. Nhưng khi thành lập các phương trình của Lagrange trong Chương 6, chúng ta sẽ bắt đầu với một định đề khác, và định luật bảo toàn động lượng sẽ được suy ra như là một hệ quả của bất biến tịnh tiến (như chúng ta sẽ thấy). Do đó nó sẽ trông giống như là một định lý hơn trong cách thành lập công thức này.

Nhưng có một điều là chắc chắn. Định luật bảo toàn động lượng cho hai chất điểm *không thể* được chứng minh đối với các lực bất kỳ tác dụng lên chúng, bởi vì định luật có thể không đúng với các loại lực bất kỳ. Ví dụ như nếu hai chất điểm tích điện tương tác với nhau theo một cách nào đó trong trường từ trường mà chúng sinh ra, thì tổng động lượng của hai chất điểm này *có thể* không bảo toàn. Vậy thế phần động lượng mất đi ở đâu? Nó sẽ bị mất đi trong trường điện trường. Thực ra tổng động lượng của hệ này vẫn bảo toàn, nhưng điểm mấu chốt là hệ này không chỉ bao gồm hai phân tử tích điện mà cả trường điện từ của chúng nữa. Nói một cách khác, mỗi điện tích thực ra tương tác với trường điện từ, chứ không phải là tương tác với chất điểm kia. Định luật III của Newton không chắc đã đúng đối với những chất điểm chịu tác động của những loại lực như lực điện từ này. ♣

Bây giờ hãy xét định luật bảo toàn động lượng cho hệ gồm nhiều chất điểm. Như ở trên, đặt $\mathbf{F}_{ij}$ là lực mà chất điểm thứ i chịu tác động từ chất điểm thứ j. Khi đó, $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$ tại mọi thời điểm. Giả sử rằng những chất điểm này bị cô lập từ các lực bên ngoài. Sự thay đổi động lượng của chất điểm thứ i trong khoảng thời gian từ t_1 đến t_2 là (chúng ta sẽ không viết các ký hiệu thời gian trong các biểu thức tích phân dưới đây nữa)

$$\Delta \mathbf{p}_i = \int \left(\sum_j \mathbf{F}_{ij} \right) dt. \tag{5.51}$$

Do đó, sự thay đổi của tổng động lượng của tất cả các chất điểm là (chúng ta đã hoán vị thứ tự của phép toán lấy tích phân và phép toán lấy tổng theo i trong vế phải của biểu thức sau)

$$\Delta \mathbf{P} \equiv \sum_i \Delta \mathbf{p}_i = \int \left(\sum_i \sum_j \mathbf{F}_{ij} \right) dt. \tag{5.52}$$

Nhưng $\sum_i \sum_j \mathbf{F}_{ij} = 0$ tại mọi thời điểm, bởi vì tất cả các số hạng $\mathbf{F}_{ab}$ đều có một số hạng $\mathbf{F}_{ba}$ và $\mathbf{F}_{ab} + \mathbf{F}_{ba} = 0$ (và $\mathbf{F}_{aa} = 0$). Tất cả các lực bị triệt tiêu theo cặp. Do đó, tổng động lượng của một hệ các chất điểm cô lập là bảo toàn.

Ví dụ (Tuyết rơi trên xe trượt tuyết): Bạn đang ở trên một xe trượt tuyết mà nó được truyền một vận tốc ban đầu và trượt trên một mặt băng không ma sát. Tuyết rơi thẳng đứng (trong hệ quy chiếu của mặt băng) vào trong xe trượt. Giả sử rằng xe trượt chỉ chuyển động theo một đường thẳng. Cách làm nào trong ba cách sau đây sẽ làm cho xe trượt tuyết chuyển động nhanh nhất? Chậm nhất?

A: Bạn quét tuyết ra khỏi xe trượt sao cho nó rời khỏi xe trượt theo phương vuông góc với thành xe, như được quan sát trong hệ quy chiếu của xe.

B: Bạn quét tuyết ra khỏi xe trượt sao cho nó rời khỏi xe theo phương vuông góc với chiều chuyển động của xe, như được quan sát bởi ai đó trong hệ quy chiếu của mặt băng.

C: Bạn không làm gì cả.

Lời giải thứ nhất: Chuyển động sang bên thành xe của tuyết sau khi bạn quét nó ra khỏi xe sẽ không ảnh hưởng gì đến chuyển động tiếp của xe, bởi vì mặc dù theo định luật III Newton thì việc này sẽ tác động một lực vào xe theo phương vuông góc với thành xe, nhưng phản lực từ đường trượt sẽ tự động triệt tiêu lực này để giữ xe chạy theo đường thẳng. Hơn nữa, chuyển động theo phương vuông góc của tuyết khi nó rơi xuống xe trượt cũng không gây ra ảnh hưởng gì đến xe, vì phản lực từ mặt băng cũng sẽ tự động triệt tiêu xung lực do tuyết rơi xuống. Vì vậy chúng ta chỉ cần quan tâm đến chuyển động dọc theo phương chuyển động của xe. Và vì không có ngoại lực tác động theo hướng này lên hệ bạn/xe/tuyết, do đó động lượng của hệ theo phương này được bảo toàn.

Nói chung, tốc độ chuyển động của xe trượt chỉ có thể thay đổi do hai việc: (1) do lượng tuyết rơi xuống xe (và cuối cùng nằm yên chuyển động cùng với xe), và (2) do lượng tuyết bị quét khỏi xe.

Đầu tiên hãy so sánh hai cách làm A và C. Theo cách A, hành động quét tuyết của bạn không ảnh hưởng gì đến tốc độ của xe trượt, vì bạn đang quét tuyết theo hướng vuông góc với thành xe. Bởi vì chuyển động vuông góc với thành xe của tuyết không liên quan gì đến chuyển động thẳng của xe, do bạn về cơ bản chỉ là nhấc tuyết lên và thả nó rơi trên mặt băng. Lượng tuyết này sau khi rời khỏi xe cũng sẽ chuyển động cùng với vận tốc của xe. Theo cách C, việc bạn không làm gì cả tất nhiên sẽ không làm thay đổi vận tốc của xe. Do vậy, trong hai trường hợp A và C, thì việc quét tuyết ra hay không không có gì khác biệt. Do đó chúng ta chỉ cần quan tâm đến việc gì sẽ xảy ra đối với xe trượt khi có lượng tuyết mới rơi vào nó. Điều này khá là dễ vì xe trượt sẽ nặng hơn trong trường hợp C và do đó lượng tuyết mới sẽ làm xe giảm tốc độ ít hơn trong trường hợp này. Do đó, cách làm C sẽ làm xe trượt nhanh hơn cách làm A.

Bây giờ hãy so sánh cách B với cách C. Cách B sẽ giúp xe trượt nhanh hơn vì quét tuyết theo cách này sẽ làm cho tuyết có động lượng bằng không sau khi rời khỏi xe, trong khi đó nó có động lượng khác không trong cách làm C (bởi vì nó cuối cùng cũng sẽ nằm trên xe, chuyển động với cùng vận tốc với xe). Động lượng của hai hệ là bằng nhau (bằng với động lượng ban đầu của xe và của bạn), do đó xe sẽ phải trượt nhanh hơn trong cách B (do khối lượng của hệ trong cách này nhỏ hơn).

Vậy, xe chuyển động nhanh hơn trong cách B so với cách C, là cách mà xe chuyển động nhanh hơn so với cách A. Cũng dễ dàng kiểm tra là cách làm B giúp xe chuyển động nhanh hơn cách làm A, bởi vì trong cách B bạn phải hất tuyết về phía sau của xe. Theo định luật III Newton, việc quét tuyết theo cách B sẽ tác động lực theo phương chuyển động vào xe, giúp xe chuyển động nhanh hơn.

Lời giải thứ hai: Cách giải này về cơ bản giống như cách giải thứ nhất, nhưng nó mang tính chất hệ thống hơn một chút. Trong cách B, tất cả lượng tuyết bị quét ra chuyển động *chậm hơn* so với xe; thực ra tất cả lượng tuyết này đều đứng yên (ít nhất là theo phương chuyển động của xe) trong hệ quy chiếu của mặt băng. Trong cách C, tất cả lượng tuyết rơi xuống đều *nằm trên* xe. Và trong cách A, tất cả lượng tuyết quét ra chuyển động *nhanh hơn* so với xe; chúng chuyển động với cùng vận tốc của xe theo hướng chuyển động của xe tại thời điểm bị hất ra, vận tốc này biến thiên trong khoảng từ vận tốc ban đầu của xe tới vận tốc xe tại thời điểm hất tuyết ra.

Sử dụng định luật bảo toàn động lượng, tổng động lượng của xe (bao gồm cả bạn đang ở trên xe) cộng với động lượng của lượng tuyết tại bất kỳ thời điểm nào là bằng nhau trong cả ba trường hợp. Những điều đã được chỉ ra ở trên cùng với định luật bảo toàn động lượng chỉ ra rằng vận tốc của xe phải thỏa mãn $B > C > A$. Điều này là đúng bởi vì nếu ai đó nói rằng vận tốc $C > B$ thì vật có vận tốc nhỏ nhất (bao gồm tất cả, vì tất cả tuyết đều nằm trên xe) trong cách C sẽ chuyển động nhanh hơn vật có vận tốc lớn nhất (xe trượt) trong cách B; điều này sẽ mâu thuẫn với thực tế rằng động lượng của hai hệ là như nhau. Do đó chúng ta phải có $B > C$. Tương tự như vậy, nếu ai đó nói rằng $A > C$, thì vật có vận tốc nhỏ nhất (xe trượt) trong cách A sẽ chuyển động nhanh hơn vật có vận tốc lớn nhất (tất cả) trong cách C; điều này cũng mâu thuẫn. Do đó, chúng ta phải có $C > A$. Kết hợp cả hai kết quả này thì $B > C > A$. Xem Bài tập luyện tập 5.70 cho cách làm chi tiết theo phương pháp này.

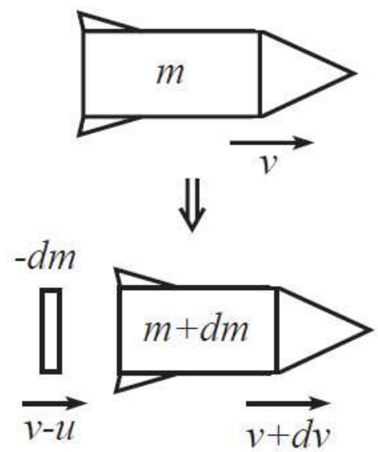
5.5.2 Chuyển động tên lửa

Ứng dụng một cách định lượng của định luật bảo toàn động lượng có thể sẽ khó hơn trong trường hợp khối lượng m được phép thay đổi. Chuyển động của tên lửa là một ví dụ, bởi vì phần lớn khối lượng của nó là khối lượng của nhiên liệu đốt sẽ bị phóng ra trong quá trình chuyển động.

Giả sử rằng nhiên liệu bị đốt phóng ra phía sau với tốc độ u (không đổi) đối với tên lửa.[15] Bởi vì u là tốc độ nên nó là một số dương. Điều này có nghĩa là vận tốc nhiên liệu bị đẩy ra nhận được bằng cách lấy vận tốc của tên lửa trừ đi u. Cho rằng khối lượng ban đầu của tên lửa là M, và m là khối lượng (đang biến đổi) của nó tại một thời điểm sau đó. Khi đó, tốc độ thay đổi khối lượng của tên lửa là số âm, dm/dt. Do vậy, khối lượng nhiên liệu bị phóng ra sau với tốc độ $|dm/dt| = -dm/dt$ dương. Nói cách khác, trong một khoảng thời gian nhỏ dt, một khối lượng âm dm được cộng vào khối lượng của tên lửa, và một khối lượng dương $-dm$ bị đẩy ra đằng sau. (Nếu bạn muốn, bạn có thể định nghĩa dm là dương, sau đó trừ nó đi khỏi khối lượng của tên lửa, và coi dm là lượng bị đẩy ra đằng sau. Cách làm nào cũng ổn.) Nghe có vẻ là hơi ngớ ngẩn, nhưng việc khó nhất khi

[15] Chú ý rằng u là tốc độ của nhiên liệu đối với tên lửa. Sẽ không có nghĩa gì nếu nói rằng "tốc độ nhiên liệu đối với mặt đất", bởi vì động cơ của tên lửa đẩy nhiên liệu ra từ nó, và nó không thể biết là tên lửa đang chuyển động với vận tốc là bao nhiêu so với mặt đất.

giải bài toán chuyển động của tên lửa là việc chọn dấu của những đại lượng này và sử dụng nó tiếp về sau.



Hình 5.11:

Xét tại thời điểm mà tên lửa có khối lượng là m và vận tốc là v. Sau đó, tại thời điểm dt về sau (xem Hình vẽ 5.11), khối lượng của tên lửa là $m + dm$ và vận tốc là $v + dv$, trong khi đó phần nhiên liệu bị đẩy ra có khối lượng là $(-dm)$ và vận tốc là $v - u$ (có thể là dương hoặc âm tùy thuộc vào độ lớn của u và v). Không có lực ngoài tác động lên hệ, do đó động lượng của cả hệ là bảo toàn tại hai thời điểm này. Do vậy,

$$mv = (m + dm)(v + dv) + (-dm)(v - u). \tag{5.53}$$

Bỏ qua số hạng vô cùng bé bậc hai $dmdv$, phương trình này có thể đưa về $mdv = -udm$. Chia cả hai vế cho m và lấy tích phân từ thời điểm t_1 tới t_2 ta có

$$\int_{v_1}^{v_2} dv = -\int_{m_1}^{m_2} u\frac{dm}{m} \quad \Longrightarrow \quad v_2 - v_1 = u \ln \frac{m_1}{m_2}. \tag{5.54}$$

Trong trường hợp mà khối lượng ban đầu của tên lửa là M và vận tốc ban đầu của nó bằng 0, ta có $v = u \ln(M/m)$. Chú ý rằng chúng ta không đặt một giả thiết nào về dm/dt trong cách làm trên. Giá trị này không cần phải là một hằng số; nó có thể biến đổi theo cách nào cũng được. Điều duy nhất ảnh hưởng đến kết quả (với giả sử rằng M và u đã cho) là khối lượng tại thời điểm cuối cùng m. Trong trường hợp đặc biệt khi dm/dt là hằng số (bằng $-\eta$, với η là số dương), ta có $v(t) = u \ln[M/(M - \eta t)]$.

Hàm log của kết quả trong phương trình (5.54) hứa hẹn một điều không được tốt cho lắm. Nếu khối lượng của phần kim loại trong tên lửa là m, và khối lượng của phần nhiên liệu là $9m$, thì tốc độ cuối cùng của nó chỉ là $u \ln 10 \approx (2.3)u$. Nếu khối lượng của phần nhiên liệu được tăng lên gấp 11 lần thành $99m$ (mà có thể là không thể xảy ra trong thực tế bởi vì phần kim loại còn lại không đủ để thiết kế giữ được phần nhiên liệu rất lớn này),[16] thì tốc độ cuối cùng cũng chỉ tăng lên gấp đôi thành $u \ln 100 = 2(u \ln 10) \approx (4.6)u$. Làm thế nào để cho tên lửa có thể chuyển động với vận tốc lớn hơn một cách đáng kể? Bài tập luyện tập 5.69 sẽ giải quyết vấn đề này.

NHẬN XÉT: Nếu bạn muốn, bạn có thể giải quyết bài toán tên lửa bằng việc sử dụng lực thay vì sử dụng định luật bảo toàn động lượng. Nếu một lượng nhiên liệu có khối lượng $(-dm)$ bị đẩy ra đằng sau tên lửa, thì động lượng của nó bị thay đổi một lượng udm (âm). Do đó, vì lực bằng với tốc độ thay đổi động lượng, lực tác động lên phần nhiên liệu này là udm/dt. Theo định luật III Newton, phần còn lại (tên lửa) sẽ chịu tác động một lực là $-udm/dt$ (dương). Lực này sẽ làm tăng gia tốc của tên lửa, vì vậy $F = ma$ cho ta $-udm/dt = mdv/dt$,[17] tương đương với phương trình $mdv = -udm$ nhận được ở trên.

Chúng ta thấy rằng bài toán tên lửa này có thể được giải bằng việc sử dụng lực hoặc định luật bảo toàn động lượng. Cuối cùng thì cả hai cách đều như nhau cả, bởi vì cách làm sau được nhận từ $F = dp/dt$. Nhưng triết lý đằng sau hai cách tiếp cận này là hơi khác nhau. Việc lựa chọn cách làm nào là phụ thuộc vào quan điểm của mỗi người. Trong một hệ cô lập giống như tên lửa, sử dụng định luật bảo toàn động lượng thông thường sẽ làm bài toán đơn giản hơn. Nhưng trong một bài toán mà liên quan đến lực bên ngoài hệ, bạn sẽ phải sử dụng $F = dp/dt$. Bạn sẽ có rất nhiều bài tập mà phải sử dụng $F = dp/dt$ trong mục này và trong Mục 5.8. Chú ý rằng chúng ta sử dụng cả $F = dp/dt$ và $F = ma$ trong cách làm thứ hai của bài toán tên lửa này. Phụ lục C sẽ đề cập đến việc nên chọn biểu thức nào cho từng bài toán cụ thể. ♣

5.6 Hệ tọa độ khối tâm

5.6.1 Định nghĩa

Khi chúng ta nói về động lượng, nó được ngầm hiểu rằng chúng ta đã chọn một hệ tọa độ nào đó. Xét cho cùng thì vận tốc của các chất điểm phải được đo trong một hệ tọa độ nào đó. Bất cứ hệ quy chiếu quán tính (là hệ quy chiếu không có gia tốc) nào cũng có thể sử dụng được, nhưng chúng ta sẽ thấy là có một hệ quy chiếu đặc biệt mà đem lại nhiều lợi ích nhất khi sử dụng nó.

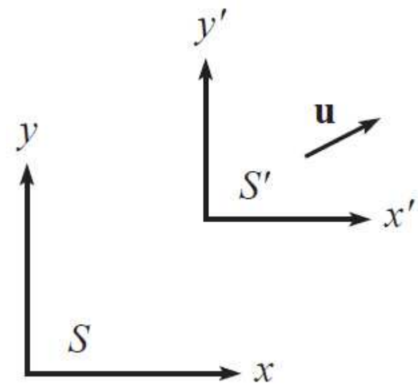
Xét một hệ quy chiếu S và một hệ quy chiếu khác S' chuyển động với vận tốc không đổi $\mathbf{u}$ so với S (xem Hình vẽ 5.12). Cho một hệ gồm nhiều chất điểm thì vận tốc của chất điểm thứ i trong hệ quy chiếu S liên hệ với vận tốc của nó trong hệ quy chiếu S' bởi

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i + \mathbf{u}. \tag{5.55}$$

[16] Chỉ riêng bình chứa nhiên liệu ngoài của tàu vũ trụ có tỷ lệ khối lượng giữa phần nhiên liệu và phần vỏ là chỉ khoảng 20 lần.

[17] Việc chúng ta sử dụng m hay $m + dm$ ở đây cho khối lượng của tên lửa không quan trọng. Sự khác nhau là một vô cùng bé bậc hai, do đó có thể bỏ qua.

Mối quan hệ này ngụ ý rằng nếu động lượng được bảo toàn trong quá trình va chạm



Hình 5.12:

trong hệ quy chiếu S', thì nó cũng sẽ được bảo toàn trong hệ quy chiếu S. Điều này là đúng bởi vì cả động lượng tại thời điểm ban đầu và động lượng tại thời điểm sau đó trong hệ S sẽ đều tăng lên một lượng như nhau, $(\sum m_i)\mathbf{u}$, so với trong hệ S'.[18]

Do đó chúng ta hãy xét đến một hệ quy chiếu duy nhất mà trong đó tổng động lượng của một hệ các chất điểm là bằng không. Hệ quy chiếu này được gọi là *hệ quy chiếu khối tâm*, hoặc hệ quy chiếu CM (**C**enter of **M**ass). Nếu tổng động lượng của hệ là $\mathbf{P} \equiv \sum m_i \mathbf{v}_i$ trong hệ S, thì hệ quy chiếu khối tâm (CM) là hệ S' mà chuyển động với vận tốc

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{P}}{M} \equiv \frac{\sum m_i \mathbf{v}_i}{M} \tag{5.56}$$

so với hệ S, trong đó $M \equiv \sum m_i$ là tổng khối lượng của hệ. Sử dụng phương trình (5.55) ta có

$$\mathbf{P}' = \sum m_i \mathbf{v}'_i = \sum m_i \left(\mathbf{v}_i - \frac{\mathbf{P}}{M}\right) = \mathbf{P} - \mathbf{P} = 0. \tag{5.57}$$

Hệ quy chiếu khối tâm đặc biệt hữu ích. Những quá trình vật lý thường có tính đối xứng trong hệ quy chiếu này, và nó làm cho kết quả dễ nhìn hơn rất nhiều. Hệ quy chiếu khối tâm đôi khi được gọi là hệ quy chiếu "động lượng không". Nhưng thuật ngữ "khối tâm" thường được dùng bởi vì khối tâm của hệ các chất điểm không chuyển động trong hệ quy chiếu khối tâm, với lý do sau đây. Vị trí của khối tâm được định nghĩa bởi

$$\mathbf{R}_{\text{CM}} \equiv \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{M}. \tag{5.58}$$

[18]Nói một cách khác, trong phần thiết lập định luật bảo toàn động lượng ở trên, chúng ta không đề cập gì đến hệ quy chiếu nào đang được sử dụng. Chúng ta chỉ giả sử rằng hệ quy chiếu đó không có gia tốc. Nếu nó được gia tốc, thì khi đó $\mathbf{F}$ sẽ không còn bằng $m\mathbf{a}$ nữa. Chúng ta sẽ thấy trong Chương 10 cách mà chúng ta sẽ thay đổi phương trình $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ cho hệ quy chiếu phi quán tính (có gia tốc). Nhưng chúng ta không phải lo gì về việc này trong phần này.

Đây là vị trí của tâm quay mà cả một hệ gắn cứng sẽ cân bằng như chúng ta sẽ thấy trong Chương 8. Thực tế là khối tâm sẽ không chuyển động đối với hệ quy chiếu khối tâm là vì đạo hàm của $\mathbf{R}_{CM}$ là vận tốc của hệ quy chiếu khối tâm như chỉ ra trong phương trình (5.56). Do đó khối tâm của hệ có thể được chọn như là gốc của hệ tọa độ khối tâm.

Nếu chúng ta lấy đạo hàm hai lần phương trình (5.58), chúng ta nhận được

$$M\mathbf{a}_{\text{CM}} \equiv \sum m_i \mathbf{a}_i = \sum \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_{\text{tổng}}. \tag{5.59}$$

Do đó, nếu xét về gia tốc của khối tâm, chúng ta có thể coi cả hệ các chất điểm như là một điểm có khối lượng đặt tại khối tâm, và sau đó áp dụng phương trình $F = ma$ cho điểm này. Vì các nội lực bị triệt tiêu từng đôi một, chúng ta chỉ cần quan tâm đến ngoại lực khi tính tổng lực tác dụng $F_{\text{tổng}}$.

Cùng với hệ quy chiếu khối tâm, một hệ quy chiếu khác thường được sử dụng là *hệ quy chiếu phòng thí nghiệm*. Không có gì đặc biệt về hệ quy chiếu này. Nó chỉ đơn giản là hệ quy chiếu (giả sử là quán tính) trong đó các điều kiện của bài toán được đưa ra. Bất cứ hệ quy chiếu quán tính nào cũng có thể được gọi là "hệ quy chiếu phòng thí nghiệm". Việc giải quyết các bài toán thông thường liên quan đến việc sử dụng thay đổi giữa hai hệ quy chiếu này. Ví dụ như, nếu một kết quả cuối cùng nào đó phải biểu thị trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm, thì chúng ta có thể tính toán nó trong hệ quy chiếu khối tâm (do nó đơn giản hơn để tính) rồi sau đó biểu thị lại nó trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm.

Ví dụ (Va chạm đàn hồi giữa hai khối lượng trong trường hợp một chiều): Một khối lượng m chuyển động với vận tốc v va chạm với một khối lượng M đang đứng yên (xem Hình vẽ 5.13). Hai vật va chạm với nhau mà không bị mất năng lượng. Hãy xác định vận tốc của hai vật sau va chạm? Giả sử rằng chuyển động xảy ra trong trường hợp một chiều.

Hình 5.13:

Lời giải: Việc giải quyết bài toán này trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm sẽ phải dùng đến định luật bảo toàn năng lượng, nói chung là khá rối rắm (xem ví dụ trong Mục 5.7.1). Nhưng nếu chúng ta sử dụng hệ quy chiếu khối tâm, mọi thứ sẽ trở nên dễ dàng hơn nhiều. Tổng động lượng trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm là mv, do đó hệ quy chiếu khối tâm sẽ chuyển động sang phải với vận tốc $mv/(m+M) \equiv u$

so với hệ quy chiếu phòng thí nghiệm. Vì vậy, trong hệ quy chiếu khối tâm, vận tốc của hai vật sẽ là

$$v_m = v - u = \frac{Mv}{m+M}, \quad \text{và} \quad v_M = 0 - u = -\frac{mv}{m+M}. \tag{5.60}$$

Kiểm tra lại kết quả trên chúng ta thấy rằng vận tốc tương đối của hai vật vẫn là v, và tỷ số của hai vận tốc là M/m và tỷ số này sẽ làm cho tổng động lượng trong hệ quy chiếu khối tâm này bằng không.

Điểm quan trọng cần nhận ra là, trong hệ quy chiếu khối tâm, hai khối lượng phải chuyển động ngược lại so với hướng ban đầu của chúng và giữ nguyên vận tốc sau khi va chạm (giả sử rằng chúng thực sự va chạm với nhau). Điều này là đúng vì vận tốc sau va chạm của chúng vẫn phải có tỷ số là M/m để cho tổng động lượng vẫn bằng không. Do đó, hai vận tốc phải cùng tăng hoặc cùng giảm. Mà nếu như thế thì năng lượng sẽ không được bảo toàn.[19]

Nếu bây giờ chúng ta quay trở lại với hệ quy chiếu phòng thí nghiệm bằng cách cộng thêm vận tốc của hệ quy chiếu khối tâm $mv/(m+M)$ vào hai vận tốc vừa tìm được $-Mv/(m+M)$ và $mv/(m+M)$, chúng ta sẽ nhận được vận tốc của hai khối lượng trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm

$$v_m = \frac{(m-M)v}{m+M}, \quad \text{và} \quad v_M = \frac{2mv}{m+M}. \tag{5.61}$$

NHẬN XÉT: Nếu $m = M$, thì khối lượng bên trái sẽ dừng lại, và khối lượng bên phải sẽ tiếp nhận vận tốc v (điều này rất quen thuộc đối với những người chơi bi a). Nếu $M >> m$, thì khối lượng bên trái sẽ nảy lại với vận tốc $\approx -v$, và khối lượng bên phải sẽ hầu như không dịch chuyển (nó sẽ giống như một bức tường gạch). Nếu $m >> M$, thì khối lượng bên trái sẽ tiếp tục chuyển động với vận tốc $\approx v$, và khối lượng bên phải sẽ tiếp nhận vận tốc $\approx 2v$. Vận tốc $2v$ này là một kết quả khá là thú vị (nó sẽ dễ hiểu hơn nếu bạn xét các vật trong hệ quy chiếu của vật m, là một hệ quy chiếu có thể coi là hệ quy chiếu khối tâm), và nó dẫn đến một vài kết quả tinh tế như trong Bài tập 5.23. ♣

5.6.2 Động năng

Cho một hệ gồm nhiều chất điểm, mối liên hệ của tổng động năng của hệ trong hai hệ quy chiếu khác nhau nói chung không đem lại nhiều thông tin gì lắm. Nhưng nếu một trong hai hệ quy chiếu là hệ quy chiếu khối tâm, thì mối liên hệ này rất đẹp. Gọi S' là

[19]Như vậy chúng ta đã phải dùng đến định luật bảo toàn năng lượng trong lời giải sử dụng hệ quy chiếu khối tâm này. Nhưng nó vẫn đơn giản hơn nhiều nếu chúng ta sử dụng trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm.

hệ quy chiếu khối tâm (CM) chuyển động với vận tốc không đổi $\mathbf{u}$ so với hệ quy chiếu S khác. Khi đó, vận tốc của các chất điểm trong hệ đang xét trong hai hệ quy chiếu này liên hệ với nhau bởi $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i' + \mathbf{u}$. Động năng trong hệ quy chiếu CM là

$$K_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{2}\sum m_i|\mathbf{v}_i'|^2. \tag{5.62}$$

Và động năng trong hệ quy chiếu S là

$$\begin{aligned} K_S &= \frac{1}{2}\sum m_i|\mathbf{v}_i' + \mathbf{u}|^2 \\ &= \frac{1}{2}\sum m_i(\mathbf{v}_i' \cdot \mathbf{v}_i' + 2\mathbf{v}_i' \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) \\ &= \frac{1}{2}\sum m_i|\mathbf{v}_i'|^2 + \mathbf{u} \cdot \left(\sum m_i\mathbf{v}_i'\right) + \frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2\sum m_i \\ &= K_{\mathrm{CM}} + \frac{1}{2}Mu^2, \end{aligned} \tag{5.63}$$

trong đó M là tổng khối lượng của toàn hệ, và chúng ta đã sử dụng $\sum_i m_i\mathbf{v}_i' = 0$, theo định nghĩa của hệ quy chiếu CM. Do đó, động năng K trong bất kỳ hệ quy chiếu nào sẽ bằng động năng K trong hệ quy chiếu CM cộng với động năng K của toàn hệ được coi như là một chất điểm có khối lượng M đặt tại khối tâm chuyển động với vận tốc $\mathbf{u}$. Một hệ quả trực tiếp của kết quả này là nếu động năng K được bảo toàn trong quá trình va chạm trong một hệ quy chiếu nào đấy (nghĩa là K_{CM} được bảo toàn, vì định luật bảo toàn động lượng nói rằng vận tốc u của khối tâm là không đổi sau va chạm), thì nó cũng sẽ bảo toàn trong bất kỳ hệ quy chiếu nào khác (bởi vì, một lần nữa, vận tốc u liên quan trong hệ quy chiếu mới này là cũng không đổi sau va chạm).

5.7 Va chạm

Có hai loại va chạm cơ bản giữa các chất điểm, gọi là *va chạm đàn hồi* (trong đó động năng được bảo toàn), và *va chạm không đàn hồi* (trong đó một phần động năng bị mất đi). Trong bất cứ va chạm nào, thì *tổng* năng lượng cũng được bảo toàn, nhưng trong va chạm không đàn hồi thì một phần năng lượng sẽ chuyển thành nhiệt năng (nghĩa là, chuyển động tương đối của các phân tử bên trong các chất điểm) thay vì ở dạng năng lượng của chuyển động tịnh tiến của các chất điểm.[20]

Chúng ta sẽ chủ yếu nghiên cứu các va chạm đàn hồi ở đây, mặc dù trong một vài tình huống, va chạm vốn đã có bản chất là không đàn hồi, như chúng ta sẽ thấy ở trong Mục 5.8. Đối với va chạm không đàn hồi, trong đó có một phần động năng, ví dụ như 20% bị mất, chúng ta chỉ cần thay đổi cách làm đi một chút là được. Để giải quyết bất

[20] Chúng ta sẽ sử dụng thuật ngữ "động năng" cho chuyển động tịnh tiến nói chung của một chất điểm. Nghĩa là, chúng ta sẽ loại trừ nhiệt năng ra khỏi định nghĩa này, mặc dù nhiệt năng cũng là năng lượng của chuyển động tương đối của các phân tử trong chất điểm này.

cứ bài toán va chạm đàn hồi nào, chúng ta chỉ cần viết ra định luật bảo toàn năng lượng và định luật bảo toàn động lượng, và sau đó tìm các biến mà bài toán yêu cầu.

5.7.1 Chuyển động một chiều

Đầu tiên hãy xem xét chuyển động trong trường hợp một chiều. Để biết cách làm nói chung, ta hãy xét ví dụ trong Mục 5.6.1 một lần nữa.

Ví dụ (Va chạm đàn hồi giữa hai khối lượng trong trường hợp một chiều): Một khối lượng m chuyển động với vận tốc v va chạm với một khối lượng M đang đứng yên (xem Hình vẽ 5.14. Va chạm là đàn hồi. Hãy xác định vận tốc của hai vật sau va chạm? Giả sử rằng chuyển động xảy ra trong trường hợp một chiều.

Hình 5.14:

Lời giải: Gọi v_f và V_f là vận tốc của hai vật sau va chạm. Định luật bảo toàn động lượng và năng lượng cho ta,

$$\begin{aligned} mv + 0 &= mv_{\mathrm{f}} + MV_{\mathrm{f}} \\ \frac{1}{2}mv^2 + 0 &= \frac{1}{2}mv_{\mathrm{f}}^2 + \frac{1}{2}MV_{\mathrm{f}}^2. \end{aligned} \tag{5.64}$$

Chúng ta phải giải hệ hai phương trình đối với hai ẩn v_f và V_f. Giải V_f từ phương trình thứ nhất rồi thay nó vào phương trình thứ hai ta có

$$\begin{aligned} mv^2 &= mv_{\mathrm{f}}^2 + M\frac{m^2(v-v_{\mathrm{f}})^2}{M^2}, \\ \Longrightarrow \quad 0 &= (m+M)v_{\mathrm{f}}^2 - 2mvv_{\mathrm{f}} + (m-M)v^2, \\ \Longrightarrow \quad 0 &= \Big((m+M)v_{\mathrm{f}} - (m-M)v\Big)(v_{\mathrm{f}} - v). \end{aligned} \tag{5.65}$$

Một nghiệm của phương trình này là $v_f = v$, nhưng nghiệm này không phải là nghiệm mà chúng ta quan tâm. Tất nhiên nó là một nghiệm của bài toán, bởi vì điều kiện đầu hiển nhiên cũng thỏa mãn định luật bảo toàn năng lượng và động lượng. Nếu bạn muốn, bạn có thể coi $v_f = v$ như là nghiệm của bài toán khi mà các chất điểm không va chạm với nhau. Với thực tế là $v_f = v$ luôn luôn là một nghiệm của hệ phương trình có thể giúp bạn rất nhiều khi giải hệ phương trình bậc hai.

Nghiệm $v_f = v(m-M)/(m+M)$ là nghiệm mà chúng ta cần. Thay giá trị của v_f này vào phương trình thứ nhất trong (5.64) để nhận được V_f và ta có

$$v_{\mathrm{f}} = \frac{(m-M)v}{m+M}, \quad \text{và} \quad V_{\mathrm{f}} = \frac{2mv}{m+M}, \tag{5.66}$$

giống như kết quả chúng ta tìm được ở trong phương trình (5.61).

Cách giải này ở mức độ nào đó là hơi khó, vì nó liên quan đến phương trình bậc hai. Định lý sau đây cực kỳ hữu ích bởi vì nó cho ta một cách giải khác mà tránh được sự phức tạp của phương trình bậc hai khi giải quyết bài toán va chạm trong trường hợp một chiều.

Định lý 5.3. *Trong va chạm một chiều, vận tốc tương đối của hai chất điểm sau va chạm bằng và ngược dấu với vận tốc tương đối của chúng trước va chạm.*

Chứng minh. Gọi khối lượng của hai vật là m và M. Gọi v_i và V_i là các vận tốc ban đầu, và gọi v_f và V_f là các vận tốc sau va chạm. Định luật bảo toàn động lượng và năng lượng cho ta

$$\begin{aligned} mv_{\mathrm{i}} + MV_{\mathrm{i}} &= mv_{\mathrm{f}} + MV_{\mathrm{f}}, \\ \frac{1}{2}mv_{\mathrm{i}}^2 + \frac{1}{2}MV_{\mathrm{i}}^2 &= \frac{1}{2}mv_{\mathrm{f}}^2 + \frac{1}{2}MV_{\mathrm{f}}^2. \end{aligned} \tag{5.67}$$

Sắp xếp lại các số hạng trong hai phương trình này ta có

$$\begin{aligned} m(v_{\mathrm{i}} - v_{\mathrm{f}}) &= M(V_{\mathrm{f}} - V_{\mathrm{i}}), \\ m(v_{\mathrm{i}}^2 - v_{\mathrm{f}}^2) &= M(V_{\mathrm{f}}^2 - V_{\mathrm{i}}^2). \end{aligned} \tag{5.68}$$

Chia phương trình thứ hai cho phương trình thứ nhất, ta có $v_i + v_f = V_i + V_f$. Do đó,

$$v_{\mathrm{i}} - V_{\mathrm{i}} = -(v_{\mathrm{f}} - V_{\mathrm{f}}), \tag{5.69}$$

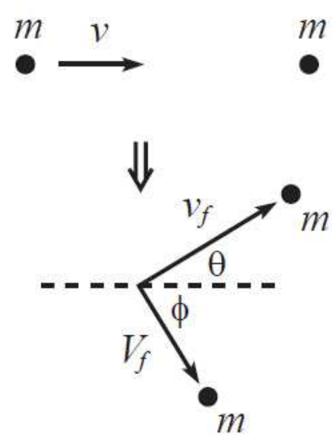
là kết quả mà chúng ta muốn chứng minh. Trong phép chia hai phương trình này, chúng ta đã làm mất nghiệm $v_f = v_i$ và $V_f = V_i$. Nhưng như chúng ta đã nói ở trên, đây là nghiệm tầm thường. □

Đây là một định lý tuyệt vời. Để chứng minh nó chúng ta đã phải sử dụng phương trình bậc hai (là phương trình của định luật bảo toàn năng lượng) trong đó. Vì vậy, việc sử dụng định lý này cùng với định luật bảo toàn động lượng (cả hai đều là phương trình bậc nhất và do đó sẽ dễ dàng giải chúng) sẽ cho ta thông tin giống như là cách làm trong phương trình (5.67). Có một cách chứng minh định lý này khá là nhanh như sau. Nói chung khá là đơn giản dể thấy rằng định lý này đúng trong hệ quy chiếu CM (như chúng ta đã lập luận trong ví dụ của Mục 5.6.1, do đó nó cũng sẽ đúng với hệ quy chiếu bất kỳ, bởi vì nó chỉ liên quan đến sự chênh lệch của vận tốc.

5.7.2 Chuyển động hai chiều

Bây giờ hãy xem xét chuyển động tổng quát trong trường hợp hai chiều. Trường hợp ba chiều cũng tương tự như trường hợp hai chiều, nên chúng ta sẽ giới hạn bài toán trong trường hợp hai chiều. Tất cả về cơ bản là giống như trong trường hợp một chiều, ngoại trừ có thêm một phương trình của định luật bảo toàn động lượng, và thêm một biến nữa cần tìm. Điều này sẽ được minh họa thông qua ví dụ sau đây.

Ví dụ (Bi a): Một quả bóng bi a chuyển động với vận tốc v tới một quả bóng giống nó đang nằm yên. Hai quả bóng va chạm đàn hồi với nhau và sau đó quả bóng tới sẽ tiếp tục chuyển động theo hướng lệch với hướng ban đầu một góc θ (xem Hình vẽ 5.15). Hãy tìm vận tốc sau va chạm của hai quả bóng? Hãy tìm góc ϕ là góc mà quả bóng đứng yên sẽ bị lệch đi sau va chạm?



Hình 5.15:

Lời giải: Gọi v_f và V_f là vận tốc sau va chạm của hai quả bóng. Khi đó, định luật bảo toàn của p_x, p_y và E cho ta

$$\begin{aligned} mv &= mv_\mathrm{f}\cos\theta + mV_\mathrm{f}\cos\phi, \\ 0 &= mv_\mathrm{f}\sin\theta - mV_\mathrm{f}\sin\phi, \\ \frac{1}{2}mv^2 &= \frac{1}{2}mv_\mathrm{f}^2 + \frac{1}{2}mV_\mathrm{f}^2. \end{aligned} \tag{5.70}$$

Chúng ta phải giải hệ ba phương trình đối với ba ẩn v_f, V_f và ϕ. Có rất nhiều cách để giải hệ này. Sau đây là một cách. Đầu tiên chúng ta loại bỏ ϕ bằng cách bình phương hai phương trình đầu rồi cộng chúng lại với nhau (sau khi chuyển số hạng chứa v_f sang vế trái) để nhận được

$$v^2 - 2vv_\mathrm{f}\cos\theta + v_\mathrm{f}^2 = V_\mathrm{f}^2. \tag{5.71}$$

Bây giờ chúng ta tiếp tục loại bỏ V_f bằng cách kết hợp phương trình này với phương trình thứ ba để nhận được[21]

$$v_{\rm f} = v\cos\theta. \tag{5.72}$$

Sau đó, từ phương trình thứ ba ta có

$$V_{\rm f} = v\sin\theta. \tag{5.73}$$

Phương trình thứ hai cho ta $m(v\cos\theta)\sin\theta = m(v\sin\theta)\sin\phi$, suy ra $\cos\theta = \sin\phi$ (hoặc $\phi = 0$, nghĩa là không có va chạm). Do đó

$$\phi = 90^{\rm o} - \theta. \tag{5.74}$$

Nói cách khác, hai quả bóng sẽ nảy ra theo một góc vuông đối với nhau. Đây là điều mà các tay cơ thủ đều biết. Bài tập 5.19 sẽ cho ta một cách dễ hiểu hơn để minh họa điều này. Chú ý rằng chúng ta cần phải biết trước một trong bốn đại lượng, v_f, V_f, θ, ϕ (chúng ta đã chọn θ), bởi vì chúng ta chỉ có ba phương trình. Một cách trực giác, chúng ta không thể mong đợi là có thể giải được cả bốn đại lượng này, bởi vì chúng ta có thể tưởng tượng là một quả bóng có thể tiến tới va chạm với một quả bóng khác tại một điểm lệch tâm bất kỳ thì nó sẽ làm cho quả bóng này sau đó chuyển động lệch đi một góc bất kỳ.

Như chúng ta đã thấy trong ví dụ va chạm một chiều trong Mục 5.6.1, bài toán va chạm thường dễ giải hơn nếu chúng ta sử dụng hệ quy chiếu CM. Sử dụng những lập luận tương tự (bảo toàn của p và E) mà chúng ta đã sử dụng trong ví dụ đó, chúng ta có thể kết luận rằng trong trường hợp 2-D (hoặc 3-D), tốc độ chuyển động sau va chạm đàn hồi của hai chất điểm phải giống như trước khi va chạm. Biến tự do duy nhất trong hệ quy chiếu CM là góc của đường thẳng chứa vận tốc (có hướng ngược lại) sau va chạm. Sự đơn giản của hệ quy chiếu CM tiếp tục cho ta lời giải đơn giản và dễ hiểu hơn so với hệ quy chiếu phòng thí nghiệm. Một ví dụ tốt cho điều này là Bài tập luyện tập 5.81, mà sẽ giúp chúng ta nhận lại kết quả về chuyển động vuông góc của hai quả bóng bi a sau va chạm trên.

5.8 Va chạm không đàn hồi

Có một lớp các bài toán khá thú vị khi mà hệ đang xét có tính chất không đàn hồi, thậm chí là thoạt nhìn hệ này có vẻ là đàn hồi. Trong dạng bài toán này, bất kể bạn làm cách gì đi chăng nữa khi thành lập bài toán, thì sẽ không thể tránh khỏi là một phần động năng

[21]Một nghiệm khác là $v_f = 0$. Trong trường hợp này, ϕ phải bằng không, và θ không được xác định. Đây chính là chuyển động một chiều của ví dụ trong Mục 5.6.1.

sẽ bị mất vì chuyển thành dạng năng lượng nhiệt. Tổng năng lượng thì tất nhiên vẫn bảo toàn vì dù sao thì nhiệt năng cũng là một dạng năng lượng. Nhưng điểm mấu chốt ở đây là nếu bạn cố viết ra một loạt các động năng $(1/2)mv^2$ và cho tổng của chúng bảo toàn thì bạn sẽ nhận được một kết quả sai. Ví dụ sau đây là một minh họa điển hình cho dạng bài toán này.

Ví dụ (Cát trên băng chuyền): Cát được thả rơi thẳng đứng (từ độ cao rất nhỏ) với tốc độ là σ kg/s lên trên một băng chuyền đang chuyển động.

(a) Xác định lực mà bạn phải tác động vào băng chuyền sao cho nó vẫn tiếp tục chuyển động với vận tốc không đổi v?

(b) Động năng mà phần cát nhận được trong một đơn vị thời gian là bao nhiêu?

(c) Công mà bạn phải tác động trong một đơn vị thời gian là bao nhiêu?

(d) Năng lượng bị mất do chuyển thành nhiệt năng trong một đơn vị thời gian là bao nhiêu?

Lời giải:

(a) Lực bạn tác động phải bằng tốc độ thay đổi động lượng. Nếu ta gọi m là tổng khối lượng của băng chuyền và cát trên băng chuyền thì

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} = m\frac{dv}{dt} + \frac{dm}{dt}v = 0 + \sigma v, \tag{5.75}$$

trong đó chúng ta đã sử dụng dữ kiện là v là hằng số.

(b) Động năng mà số cát nhận được trong một đơn vị thời gian là

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \frac{dm}{dt}\left(\frac{v^2}{2}\right) = \frac{\sigma v^2}{2}. \tag{5.76}$$

(c) Công do lực mà bạn tác động sinh ra trong một đơn vị thời gian là

$$\frac{d(\text{Công})}{dt} = \frac{F\ dx}{dt} = Fv = \sigma v^2, \tag{5.77}$$

trong đó chúng ta đã sử dụng phương trình (5.75).

(d) Do công của lực tác động trong một đơn vị thời gian là σv^2, và động năng cát nhận được trong một đơn vị thời gian là $\sigma v^2/2$, nên phần năng lượng bị mất do chuyển thành nhiệt năng trong một đơn vị thời gian là $\sigma v^2 - \sigma v^2/2 = \sigma v^2/2$.

Trong ví dụ này thì phần năng lượng bị mất do chuyển hóa thành nhiệt năng hóa ra chính bằng phần năng lượng chuyển hóa thành động năng của cát. Có một cách giải thích đơn giản và thú vị vì sao điều này xảy ra. Trong phần giải thích sau đây, để đơn giản chúng ta sẽ chỉ đề cập đến một chất điểm khối lượng M rơi lên trên băng chuyền.

Trong hệ quy chiếu trái đất, khối lượng nhận được động năng $Mv^2/2$ khi nó dừng chuyển động tương đối đối với băng chuyền và cùng băng chuyền chuyển động với vận tốc v. Bây giờ chúng ta sẽ xét hiện tượng này trong hệ quy chiếu băng chuyền. Trong hệ quy chiếu mới này, khối lượng ban đầu sẽ "bay" đến băng chuyền với động năng ban đầu là $Mv^2/2$, và sẽ chuyển động chậm dần, cuối cùng sẽ nằm yên trên băng chuyền. Do đó, tất cả năng lượng $Mv^2/2$ sẽ bị chuyển hóa thành nhiệt năng. Và vì phần nhiệt năng bị hao tán là như nhau khi xét trong hai hệ quy chiếu, nên phần nhiệt năng này cũng chính là phần nhiệt năng trong hệ quy chiếu trái đất.

Do đó chúng ta thấy rằng trong hệ quy chiếu trái đất, việc năng lượng bị mất do chuyển thành nhiệt và động năng vật nhận được bằng nhau là hệ quả của một thực tế là băng chuyền chuyển động trong hệ quy chiếu trái đất (với vận tốc v) cùng tốc độ với việc hệ quy chiếu trái đất chuyển động so với băng chuyền (với vận tốc cũng là v).

Trong lời giải của ví dụ trên, chúng ta không có bất cứ giả thiết gì về bản chất của lực ma sát giữa băng chuyền và cát. Phần năng lượng bị mất do chuyển thành nhiệt là điều hiển nhiên không thể tránh được. Bạn có thể nghĩ rằng nếu cát chuyển động trên băng chuyền thế nào đó sao cho nó cuối cùng nằm yên trên băng chuyền một cách rất "nhẹ nhàng" (có thể xảy ra nếu nó chuyển động trên băng chuyền trong một khoảng thời gian đủ lớn), thì bạn có thể tránh được việc năng lượng bị mất. Thế nhưng điều này không đúng. Trong tình huống giả định này, việc lực ma sát là nhỏ sẽ được bù bởi thực tế là lực đó sẽ tác động trên một quãng đường dài. Tương tự như vậy, nếu số cát trên sau khi rơi lên trên băng chuyền, sẽ nằm yên so với băng chuyền một cách rất đột ngột, thì lực ma sát giữa cát và băng chuyền sẽ rất lớn nhưng bù lại thì quãng đường chuyển động của cát cho đến khi dừng lại lại nhỏ. Theo bất cứ cách nào đi chăng nữa thì công của lực ma sát là một đại lượng khác không bằng nhau.

Trong những bài toán khác như bài toán sau đây, sẽ rất dễ nhận ra rằng quá trình va chạm là không đàn hồi. Nhưng cái khó là bạn phải sử dụng một cách chính xác công thức $F = dp/dt$ thay vì công thức $F = ma$, bởi vì $F = ma$ sẽ không còn áp dụng được trong trường hợp khối lượng thay đổi.

Ví dụ (Sợi xích trên bàn cân): Một sợi xích "lý tưởng" (xem phần nhận xét sau ví dụ) với chiều dài L và khối lượng riêng σ kg/m được giữ theo phương thẳng đứng trên bàn cân. Sau đó nó được thả ra. Hỏi đồng hồ của bàn cân chỉ giá trị khối lượng là bao nhiêu như là một hàm của độ cao của đầu trên của sợi xích?

Lời giải thứ nhất: Gọi y là độ cao của đầu trên của sợi xích, và gọi F là lực tác dụng mà bàn cân tác động lên sợi xích. Tổng các lực tác dụng lên sợi xích là $F-(\sigma L)g$ với chiều dương là chiều hướng lên trên. Động lượng của toàn bộ sợi xích (chỉ tính với phần đang chuyển động rơi xuống) là $(\sigma y)\dot{y}$. Chú ý rằng động lượng này có giá trị âm, bởi vì $\dot{y}$ âm. Cân bằng lực tác dụng với tốc độ thay đổi động lượng ta có

$$\begin{aligned} F - \sigma L\mathrm{g} &= \frac{d(\sigma y\dot{y})}{dt} \\ &= \sigma y\ddot{y} + \sigma\dot{y}^2. \end{aligned} \tag{5.78}$$

Phần của sợi xích mà nằm trên bàn cân đang rơi tự do. Do đó ta có $\ddot{y} = -g$. Và định luật bảo toàn năng lượng cho ta $\dot{y} = \sqrt{2g(L-y)}$, bởi vì sợi xích đã rơi một đoạn là $L - y$. Thay những đại lượng này vào phương trình (5.78) ta có

$$\begin{aligned} F &= \sigma L\mathrm{g} - \sigma y\mathrm{g} + 2\sigma(L-y)\mathrm{g} \\ &= 3\sigma(L-y)\mathrm{g}, \end{aligned} \tag{5.79}$$

với lực F tình cờ bằng ba lần trọng lượng của phần xích rơi xuống bàn cân. Kết quả này của lực F bằng không khi $y = L$ và đây là kết quả hợp lý. Và cũng rất là thú vị là nó bằng $3(\sigma L)g$ ngay trước khi phần cuối cùng của sợi xích chạm bàn cân. Một khi sợi xích hoàn toàn nằm trên bàn cân thì kết quả hiển thị trên đồng hồ bàn cân giảm đột ngột về giá trị khối lượng của sợi xích $(\sigma L)g$.

Nếu bạn sử dụng định luật bảo toàn năng lượng để giải bài toán này và giả sử rằng toàn bộ thế năng sẽ chuyển thành động năng của phần trên đang chuyển động của sợi xích thì bạn sẽ nhận được kết quả là phần (rất nhỏ) cuối cùng của sợi xích sẽ đạt được vận tốc vô cùng lớn trước khi va chạm với bàn cân. Kết quả này hiển nhiên là không đúng, và lý do là sẽ có một phần năng lượng không thể tránh được chuyển thành nhiệt khi các mắt xích của sợi xích va chạm không đàn hồi với mặt bàn cân.

Lời giải thứ hai: Phản lực từ mặt bàn cân có thể chia thành hai phần. Nó giúp giữ cho phần dưới của sợi xích mà đã hoàn toàn nằm trên bàn cân, và nó triệt tiêu phần động lượng của các chất điểm của sợi xích khi va chạm với mặt bàn cân và nằm yên. Phần đầu tiên đơn giản chỉ là trọng lượng của phần xích đang nằm trên bàn cân và bằng $F_{\text{trọng lượng}} = \sigma(L-y)g$.

Để tìm phần thứ hai của phản lực, chúng ta cần tìm vi phân thay đổi động lượng, dp, của phần xích mà sẽ va chạm với mặt bàn cân trong khoảng thời gian dt. Phần khối lượng của sợi xích mà sẽ va chạm với bàn cân trong thời gian dt là $dm = \sigma|dy| = \sigma|\dot{y}|dt = -\sigma\dot{y}dt$, bởi vì $\dot{y}$ là đại lượng âm. Phần khối lượng này ban đầu có vận tốc là $\dot{y}$, và sau đó do va chạm với mặt bàn cân có vận tốc bằng không.

Do vậy, động lượng bị thay đổi là $dp = 0 - (dm)\dot{y} = \sigma\dot{y}^2 dt$ có giá trị dương. Lực cần thiết để làm thay đổi động lượng này là

$$F_{dp/dt} = \frac{dp}{dt} = \sigma\dot{y}^2. \tag{5.80}$$

Nhưng, giống như trong lời giải thứ nhất, ta có $\dot{y} = \sqrt{2g(L-y)}$. Do đó, tổng lực từ bàn cân là

$$\begin{aligned} F = F_{\text{trọng lượng}} + F_{dp/dt} &= \sigma(L-y)\mathrm{g} + 2\sigma(L-y)\mathrm{g} \\ &= 3\sigma(L-y)\mathrm{g}. \end{aligned} \tag{5.81}$$

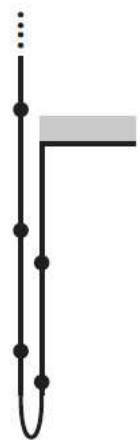
Chú ý rằng $F_{dp/dt} = 2F_{\text{trọng lượng}}$ (cho tới khi sợi xích nằm hoàn toàn trên bàn cân), không phụ thuộc vào chiều cao y.

Trong ví dụ này, chúng ta giả thiết rằng sợi xích được cho là "lý tưởng" theo nghĩa là nó hoàn toàn mềm dẻo, rất mỏng và không co giãn. Mô hình đơn giản nhất thỏa mãn những điều kiện này là một chuỗi các khối lượng chất điểm được nối với nhau bởi những sợi dây ngắn không khối lượng. Nhưng trong ví dụ trên, những sợi dây này thực ra không có ảnh hưởng gì. Bạn có thể coi sợi xích như là một chuỗi các khối lượng chất điểm không được nối với nhau và được giữ theo một đường thẳng đứng, với chất điểm cuối cùng nằm ngay trên mặt bàn cân. Nếu sau đó bạn thả tất cả chúng đồng thời một lúc, chúng sẽ liên tiếp va chạm với mặt bàn cân theo cùng một phương thức như thể chúng được nối với nhau bởi các sợi dây nhỏ; lực căng trong các sợi dây này sẽ bằng không. Tuy nhiên, thậm chí những sợi dây này là không cần thiết trong ví dụ sợi xích và bàn cân này thì cũng có rất nhiều mô hình khác liên quan đến sợi xích lý tưởng mà cần sự kết nối của những sợi dây, bởi vì lúc đó lực căng dây đóng vai trò cần thiết. Điều này sẽ xảy ra trong rất nhiều các bài tập và bài luyện tập ở cuối chương như bạn sẽ thấy.

Một sự thật rất thú vị là nếu thậm chí với định nghĩa như trên cho sợi xích lý tưởng thì có một vài mô hình (trái ngược với mô hình trên) trong đó chúng ta không thể xác định được ứng xử của mô hình nếu không cung cấp thêm một số thông tin khác. Những thông tin này liên quan đến kích thước tương đối của hai chiều dài xác định nào đó, như chúng ta sẽ thấy bên dưới. Để minh họa điều này, xét hai viễn cảnh sau cho cơ cấu trong Bài tập 5.28 (xem Hình vẽ 5.16, khi một sợi xích lý tưởng thẳng đứng được thả rơi với điểm cuối của nó được gắn vào bên dưới một giá đỡ.

- VIỄN CẢNH 1 (NĂNG LƯỢNG KHÔNG BẢO TOÀN): Cho khoảng cách giữa các khối lượng chất điểm trong sợi xích lý tưởng này là lớn so với độ rộng ngang tại vùng bị uốn trong sợi xích tại điểm dưới cùng của nó; xem Hình 5.17. Khi đó hệ này có thể coi là chuyển động một chiều. Mỗi một khối lượng chất điểm sẽ bị dừng đột ngột khi nó tới vùng uốn. Việc bị dừng đột ngột này là va chạm

Hình 5.16:



Hình 5.17:

không đàn hồi giống như ở trong ví dụ trên khi sợi xích rơi xuống bề mặt bàn cân. Chú ý rằng tại mọi thời điểm, vùng uốn chỉ bao gồm một sợi dây (không khối lượng) bị gập vào (hoặc có thể vùng uốn bao gồm cả một chất điểm khối lượng nếu chúng ta xét tại thời điểm ngay khi khối lượng này bị dừng lại). Sẽ không có lực căng trong sợi dây dưới cùng (vì nếu có, thì sợi dây bị uốn này sẽ có gia tốc là vô hạn hướng lên trên), do đó sẽ không có lực kéo hướng xuống dưới tác động vào phần sợi xích nằm bên trái vùng uốn. Như vậy, phần bên trái này sẽ rơi tự do.

- VIỄN CẢNH 2 (NĂNG LƯỢNG BẢO TOÀN): Bây giờ coi khoảng cách giữa các khối lượng chất điểm trong sợi xích lý tưởng này là nhỏ so với độ rộng ngang tại vùng bị uốn trong sợi xích tại điểm dưới cùng của nó; xem Hình 5.18. Hệ này bây giờ sẽ là chuyển động hai chiều, và các khối lượng chất điểm sẽ phân bố đều liên tục dọc theo sợi xích miễn là vùng uốn được hình thành. Điều này sẽ cho phép mỗi chất điểm sẽ dần dần chuyển về vị trí đứng yên, do đó sẽ không có việc dừng lại đột ngột không đàn hồi như trong viễn cảnh 1. Mỗi khối lượng trong vùng uốn sẽ giữ khoảng cách như nhau đối với hai khối lượng bên cạnh nó, trong khi đó ở trong viễn cảnh 1 thì khối lượng này sẽ dừng lại và sẽ nhìn khối lượng ngay sau nó chuyển động vụt qua nó trước khi cũng bị dừng lại. Quá trình xảy ra trong viễn cảnh 2 là đàn hồi và sẽ không có năng lượng bị mất đi.

Hình 5.18:

Sự khác nhau cơ bản giữa hai viễn cảnh trên là việc các sợi dây có bị chùng không tại vùng uốn. Nếu nó bị chùng thì tốc độ tương đối giữa một cặp khối lượng sẽ thay đổi đột ngột tại một thời điểm nào đó, điều này có nghĩa là động năng tương đối giữa hai khối lượng này sẽ chuyển thành chuyển động dao động có cản (hoặc là quá cản) trong sợi dây kết nối chúng, và sau đó sẽ bị biến thành thành chuyển động nhiệt ngẫu nhiên.[22]

Nếu năng lượng không bị mất đi do chuyển thành nhiệt ở trong viễn cảnh 2 thì bạn có thể nghĩ rằng phần cuối cùng của sợi xích sẽ có vận tốc vô cùng lớn. Tuy nhiên, sẽ không có cái gọi là phần *cuối cùng* của sợi xích. Khi phần bên trái của sợi xích biến mất và chúng ta chỉ còn lại với vùng uốn và phần bên phải. Vùng uốn dù nhỏ nhưng khác không sẽ là "mảnh" cuối cùng, và nó sẽ đung đưa theo phương ngang với vận tốc lớn. Rồi sau đó nó sẽ kéo toàn bộ sợi xích về một bên như là một chuyển động mà chúng ta có thể nhìn thấy được (chuyển động này có thể phát hiện bằng cách xem xét lực tác động ngang tại điểm giá đỡ), chuyển động này là chuyển động hai chiều. Thế năng ban đầu của sợi xích bây giờ được chuyển thành động năng của chuyển động đung đưa dạng sóng của sợi xích.

Một hệ quả của định luật bảo toàn năng lượng trong viễn cảnh 2 là với cùng một độ cao ban đầu, phần bên trái của sợi xích sẽ chuyển động nhanh hơn trong viễn cảnh này so với viễn cảnh 1. Nói một cách khác, phần bên trái của sợi xích trong viễn cảnh 2 có gia tốc chuyển động xuống dưới nhanh hơn gia tốc rơi tự do g. Mặc dù điều này có thể nhận thấy được một cách nhanh chóng từ việc xét năng lượng bảo toàn nhưng nó không

[22]Nếu những sợi dây kết nối được coi là những lò xo lý tưởng với độ cứng nhỏ thì năng lượng sẽ biến đổi qua lại giữa thế năng của sợi dây và động năng của các khối lượng chất điểm, điều này sẽ gây ra chuyển động dập dềnh của các khối lượng và chúng có thể sẽ va vào nhau. Nhưng chúng ta đang giả thiết rằng những sợi dây kết nối trong sợi xích lý tưởng là những lò xo cứng có khả năng cản cao.

dễ dàng gì lắm nếu chúng ta lập luận bằng việc xem xét các lực tác dụng. Rõ ràng là có một lực kéo ở điểm cuối bên trái của vùng uốn trong viễn cảnh 2 mà sẽ kéo toàn bộ phần xích bên trái xuống dưới làm cho nó rơi xuống nhanh hơn gia tốc rơi tự do g. Có một cách định tính để thấy tại sao lực kéo này tồn tại như sau. Đó là mỗi một mảnh nhỏ của sợi xích khi nó đi vào vùng uốn từ phần bên trái sẽ chuyển động chậm dần lại khi nó từ từ chuyển thành phần bên phải của sợi xích. Do đó sẽ phải có một lực kéo mảnh nhỏ này lên. Lực kéo lên này không thể xảy ra tại điểm cuối của mảnh nhỏ vì tại điểm này mọi lực căng trong sợi dây đều có tác dụng kéo nó xuống. Như vậy lực kéo lên sẽ phải xảy ra tại điểm trên của mảnh nhỏ. Nói cách khác, sẽ có lực căng dây tại điểm này và theo định luật Newton thứ ba thì lực căng dây này sẽ kéo phần bên trái sợi xích xuống, điều này làm cho nó có gia tốc lớn hơn g. Sẽ có một câu hỏi trong Bài tập 5.29 về việc tìm lực căng dây tại hai điểm cuối của vùng uốn này.

Có một cách đơn giản để chỉ ra sự tồn tại của lực căng dây mà kéo phần tự do của sợi xích xuống. Cơ cấu sau đây về cơ bản là cơ cấu sợi xích rơi tự do trong môi trường không trọng lượng, nhưng nó vẫn giữ những tính chất cần thiết cơ bản giống như cơ cấu sợi xích ở trên. Đặt một sợi dây nằm trên một mặt bàn tương đối nhẵn sao cho nó có hình chữ "U" rất mảnh đến mức mà trong nó giống như bị gập đôi vào. Sau đó ta sẽ kéo mạnh một đầu sợi dây theo hướng ra xa vùng uốn. Bạn sẽ thấy rằng đầu còn lại của sợi dây sẽ chuyển động ngược lại với hướng mà bạn kéo đầu kia tiến về phía vùng uốn (ít nhất là cho tới khi là đến vùng uốn và sau đó là sẽ bị kéo theo sợi dây theo hướng kéo của bạn). Như vậy phải có lực căng trong sợi dây kéo đầu dây còn lại về phía của vùng uốn (ngược hướng với hướng kéo của tay bạn). Nhưng có lẽ bạn không cần thiết phải nghe tôi giải thích làm gì - tất cả thứ bạn cần chỉ là một sợi dây. Bạn sẽ thấy lại hiện tượng này giống như trong ví dụ sợi xích trên nhưng nó sẽ xảy ra nhanh hơn vì sợi dây thì có khối lượng riêng không đổi, không giống như sợi xích.

Chú ý rằng chuyển động của một sợi dây mảnh mềm tuyệt đối với khối lượng riêng không đổi thực ra sẽ là đàn hồi giống như viễn cảnh 2 của sợi xích ở trên. Sợi dây liên tục có thể được coi như là một chuỗi các khối lượng chất điểm với khoảng cách vô cùng nhỏ, do đó khoảng cách rất nhỏ này sẽ nhỏ hơn rất nhiều so với độ rộng của vùng uốn, và mọi điểm của sợi dây sẽ chuyển động chậm dần và dừng lại từ từ. Do đó sẽ không có năng lượng bị mất do việc bị đột ngột dừng lại.

Quay trở lại với cơ cấu sợi xích bị thả rơi và coi sợi xích là lý tưởng, bạn có thể nghĩ rằng nếu vùng uốn được tạo là "rất" nhỏ sao cho cơ cấu có thể coi là chuyển động một chiều, thì nó sẽ phải ứng xử không đàn hồi giống như trong viễn cảnh 1. Tuy nhiên, cái chúng ta quan tâm duy nhất ở đây là có phải độ dài vùng uốn nhỏ hơn khoảng cách giữa các khối lượng chất điểm trong sợi xích lý tưởng hay không. Tất nhiên, khái niệm vùng uốn có độ dài là "nhỏ" ở trên là không có ý nghĩa gì, bởi vì chúng ta đang nói đến độ dài của vùng uốn, là một đại lượng có thứ nguyên độ dài. Nó chỉ có ý nghĩa khi chúng ta nói rằng nó là "nhỏ hơn", khi chúng ta so sánh độ dài đó với một độ dài nào khác. Độ dài khác ở đây là khoảng cách giữa các khối lượng chất điểm. Và nếu mà độ dài của vùng uốn mà lớn hơn khoảng cách này thì dù độ dài thực của của vùng uốn là lớn hay nhỏ thế nào đi chăng nữa thì cơ cấu cũng sẽ ứng xử đàn hồi giống như trong viễn cảnh 2 ở trên.

Vậy viễn cảnh nào ở trên sẽ miêu tả tốt hơn cho một sợi xích trong thực tế? Chi tiết về các thí nghiệm liên quan đến một sợi xích rơi được đưa ra trong Calkin và March (1989). Những kết quả này chỉ ra rằng một sợi xích trong thực tế về cơ bản ứng xử giống như sợi xích trong viễn cảnh 2 ở trên, ít nhất là cho tới giai đoạn cuối cùng của chuyển động. Nói cách khác, năng lượng là bảo toàn và phần bên trái có gia tốc rơi lớn hơn g.[23]

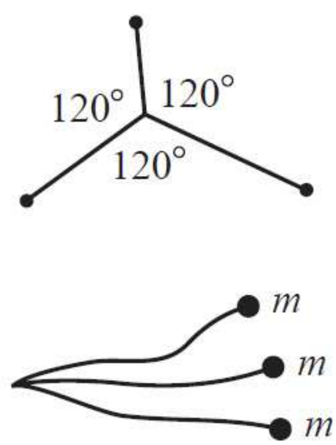
Với tất cả những vấn đề đặt ra ở trên thì hóa ra việc bảo toàn năng lượng trong viễn cảnh 2 dẫn đến những khó khăn trong các bài tập (như là việc tích phân số trong Bài tập 5.29, do vậy trong tất cả các bài tập và bài luyện tập trong chương này (loại trừ Bài tập 5.29, chúng ta sẽ giả thiết cơ cấu ứng xử không đàn hồi giống như trong viễn cảnh 1.

5.9 Bài tập

Mục 5.1: Định luật bảo toàn năng lượng trong trường hợp một chiều

5.1. Độ dài nhỏ nhất *

Cấu hình nhỏ nhất của sợi dây nối vào ba điểm cho trước được chỉ ra trong Hình 5.19,



Hình 5.19:

trong đó tất cả ba góc là 120^o.[24] Giải thích làm thế nào mà bạn có thể chứng minh điều này theo kiểu làm thí nghiệm bằng cách tạo ra ba lỗ trên một mặt bàn và sử dụng ba khối lượng bằng nhau được gắn vào các điểm cuối của các sợi dây, các đầu còn lại được nối lại với nhau như được chỉ ra trong cơ cấu thứ hai trong Hình vẽ 5.19.

[23]Những kết quả thí nghiệm rất bất ngờ (nhưng cũng rất thuyết phục) cũng được tiến hành bởi Wes Campbell trong phòng thí nghiệm vật lý của John Doyle tại Harvard.

[24]Nếu ba điểm tạo thành một tam giác có một góc lớn hơn 120^o, thì sợi dây đơn giản là sẽ đi qua điểm tại vị trí góc đó. Chúng ta sẽ không lo lắng gì về trường hợp này.

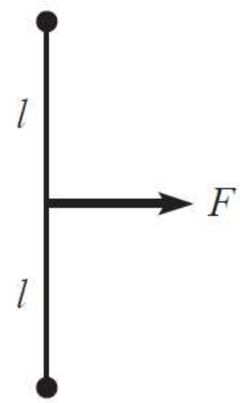
5.2. Tiến về điểm không *

Một chất điểm chuyển động tiến về điểm $x = 0$ dưới tác dụng của một hàm thế $V(x) = -A|x|^n$, trong đó $A > 0$ và $n > 0$. Chất điểm chỉ có đủ năng lượng để đạt đến điểm $x = 0$. Với giá trị của n bằng bao nhiêu thì nó sẽ đạt đến điểm $x = 0$ trong một khoảng thời gian hữu hạn?

5.3. Rời khỏi quả cầu *

Một khối lượng nhỏ nằm yên trên đỉnh một quả cầu cố định không ma sát. Khối lượng nhận được một tác động nhỏ và trượt xuống. Hỏi vật sẽ rời quả cầu tại điểm nào?

5.4. Kéo hai quả bóng khúc côn cầu **



Hình 5.20:

(a) Một sợi dây không khối lượng có độ dài $2l$ nối hai quả bóng khúc côn cầu nằm trên một mặt băng không ma sát. Một lực không đổi nằm ngang F tác dụng vào trung điểm của sợi dây, theo phương vuông góc với sợi dây (xem Hình 5.20). Bằng cách tính công thực hiện trong chuyển động ngang, tìm xem phần động năng bị mất khi hai quả bóng va chạm với nhau, với giả thiết rằng chúng sẽ dính chặt vào nhau.

(b) Kết quả mà bạn nhận được ở câu trên sẽ rất đẹp và gọn. Tìm một lời giải hay mà làm rõ tại sao kết quả này lại đẹp như vậy.

5.5. $\dot{y}$ không đổi **

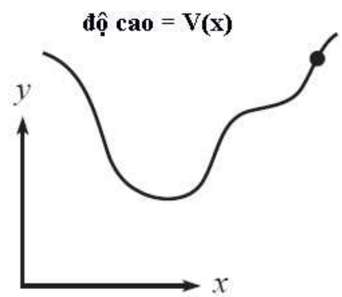
Môt hạt vòng, dưới tác động của trọng lực, trượt xuống một sợi dây không ma sát có độ cao được cho bởi hàm $y(x)$. Giả sử rằng tại vị trí $(x, y) = (0, 0)$, sợi dây là thẳng đứng và hạt vòng đi qua điểm này với tốc độ v_0 cho trước hướng xuống dưới. Hỏi hình dạng của sợi dây phải như thế nào (nghĩa là, hàm y có dạng như thế nào theo x) để cho vận tốc theo phương thẳng đứng của hạt vòng vẫn bằng v_0 tại mọi thời điểm? Giả sử rằng đường cong hướng về chiều dương của x.

5.6. Phân chia nhiệt ***

Một vật nằm yên trên một mặt bàn có hệ số ma sát động là μ_k. Bạn kéo vật với một vận tốc không đổi dọc trên mặt bàn bằng cách tác dụng một lực $\mu_k N$. Xét một chu kỳ thời gian trong đó vật di chuyển một khoảng cách d. Hỏi công tác dụng lên vật là bao nhiêu? Công tác dụng lên bàn là bao nhiêu? Nhiệt tăng lên trong vật và trong mặt bàn là bao nhiêu? Liệu có thể trả lời được những câu hỏi này không? *Gợi ý:* Bạn sẽ phải tạo ra một dạng mô hình, tuy nhiên mô hình này khá đơn giản, cho cách mà lực ma sát tác dụng.

5.7. $V(x)$ và một ngọn đồi ***

Một hạt vòng, dưới tác dụng của trọng lực, trượt dọc theo một sợi dây không ma sát mà



Hình 5.21:

độ cao của nó được cho bởi hàm $V(x)$, như chỉ ra trong Hình 5.21. Tìm một biểu thức của gia tốc theo phương nằm ngang của hạt vòng, $\ddot{x}$. (Nó có thể phụ thuộc vào bất cứ đại lượng nào mà bạn cần nó phụ thuộc.) Kết quả mà bạn tìm được phải *không* giống với $\ddot{x}$ cho một chất điểm chuyển động trong trường hợp một chiều dưới tác dụng của hàm thế $mgV(x)$, mà trong trường hợp này $\ddot{x} = -gV'$. Nhưng nếu bạn cầm lấy sợi dây, liệu có cách nào mà bạn có thể di chuyển sợi dây sao cho $\ddot{x}$ của hạt vòng bằng với kết quả $\ddot{x} = -gV'$ cho thế năng $mgV(x)$ của trường hợp một chiều?

Mục 5.2: Dao động nhỏ

5.8. Khối lượng treo

Thế năng của một khối lượng được treo vào một lò xo là $V(x) = ky^2/2 + mgy$, trong đó $y = 0$ tương ứng với vị trí độ dài tự nhiên của lò xo. Tìm tần số của dao động nhỏ xung quanh điểm cân bằng.

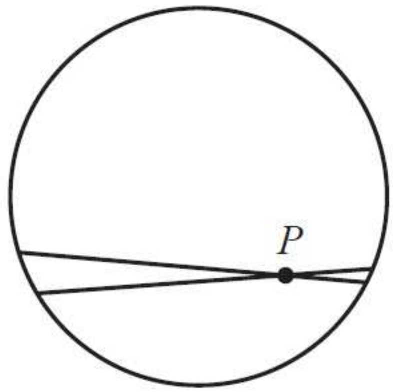
5.9. Những dao động nhỏ *

Một chất điểm chuyển động dưới ảnh hưởng của hàm thế $V(x) = -Cx^n e^{-ax}$. Tìm tần số của những dao động nhỏ xung quanh điểm cân bằng.

Mục 5.4.1: Trọng lực

5.10. Lực hấp dẫn bằng không bên trong một vỏ cầu *

Chỉ ra rằng lực hấp dẫn bên trong một vỏ cầu bằng không bằng cách chỉ ra rằng các mảnh khối lượng tại hai đáy của những hình nón mảnh trong Hình 5.22 tác dụng các lực triệt tiêu nhau tại điểm P.



Hình 5.22:

5.11. Vận tốc thoát *

(a) Tìm vận tốc thoát (nghĩa là, vận tốc mà một chất điểm có thể thoát ra tới $r = \infty$ với vận tốc ban đầu lớn hơn) cho một chất điểm trên một hành tinh hình cầu có bán kính R và khối lượng M. Hỏi giá trị số của giá trị này trên trái đất bằng bao nhiêu? Trên mặt trăng? Trên mặt trời?

(b) Tính toán một cách xấp xỉ xem một hành tinh hình cầu phải nhỏ đến cỡ nào để một người có thể nhảy ra khỏi nó? Giả sử rằng khối lượng riêng của hành tinh này đại khái bằng khối lượng riêng của trái đất?

5.12. Tỷ số của các thế năng **

Xét một khối lập phương có khối lượng riêng đồng nhất. Tìm tỷ số của các thế năng trọng trường của một khối lượng khi đặt tại góc và khi đặt tại tâm của hình lập phương. *Gợi ý:* Có một cách hay mà không cần phải dùng đến bất cứ một tích phân rắc rối nào.

5.13. Xuyên qua một lỗ thủng **

(a) Một lỗ thủng có bán kính R được cắt ra khỏi một tấm phẳng vô hạn có khối lượng riêng ρ trên một đơn vị diện tích. Gọi L là đường thẳng vuông góc với tấm và đi qua tâm của lỗ thủng. Hỏi lực tác dụng lên một khối lượng m nằm trên đường thẳng L, tại một điểm có khoảng cách là x từ tâm của lỗ thủng, bằng bao nhiêu? *Gợi ý:* Coi tấm phẳng như được cấu tạo bởi rất nhiều vành tròn đồng tâm.

(b) Nếu một chất điểm được thả ra từ trạng thái nằm yên trên đường L, rất gần với tâm của lỗ thủng, hãy chỉ ra rằng nó sẽ trải qua một chuyển động dao động, và hãy tìm tần số của những dao động này.

(c) Nếu một chất điểm được thả ra từ trạng thái nằm yên trên đường L, tại một điểm có khoảng cách là x so với tấm phẳng, hỏi vận tốc của chất điểm bằng bao nhiêu khi nó đi qua tâm của lỗ thủng? Kết quả này sẽ bằng bao nhiêu trong trường hợp giới hạn khi $x \gg R$?

Mục 5.5.1: Động lượng

5.14. Quả bóng tuyết *

Một quả bóng tuyết được ném vào một bức tường. Hỏi động lượng của nó đi đâu mất? Hỏi năng lượng của nó đi đâu mất?

5.15. Đẩy một chiếc xe **

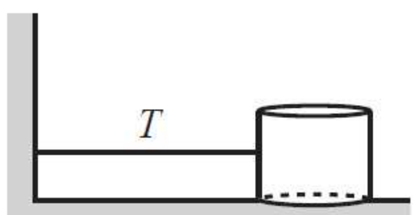
Với vài lý do khá kỳ lạ, bạn quyết định ném những quả bóng rổ vào một chiếc xe có khối lượng M mà có thể chuyển động tự do trên mặt đất không ma sát. Bạn ném những quả bóng vào đằng sau chiếc xe với vận tốc u, và chúng rời bàn tay bạn với tần suất khối lượng là σ kg/s (để đơn giản, giả sử rằng tần suất này là liên tục). Nếu chiếc xe ban đầu đứng yên, hãy tìm tốc độ và vị trí của nó như là một hàm của thời gian, giả sử rằng những quả bóng nảy lại đàn hồi thẳng ra sau từ cửa sau của xe.

5.16. Đẩy một chiếc xe lần nữa **

Làm bài toán trên, ngoại trừ việc giả thiết là cửa sau xe bây giờ được mở, do đó các quả bóng sẽ rơi vào trong xe.

5.17. Xô thủng **

Tại thời điểm $t = 0$, một cái xô không khối lượng chứa một lượng cát có khối lượng M.



Hình 5.23:

Nó được nối với một bức tường bởi một lò xo không khối lượng có lực căng không đổi T (nghĩa là, không phụ thuộc vào độ dài).[25] Xem Hình 5.23. Mặt đất là không ma sát, và

[25] Bạn có thể xây dựng một lò xo có lực căng không đổi bằng một lò xo thông thường mà tuân theo định luật Hooke theo cách sau đây. Chọn một lò xo có độ cứng rất nhỏ, và kéo lò xo này thành một lò xo rất dài. Cho lò xo này qua một lỗ trên tường, với đầu kia của nó được gắn chặt vào một điểm nằm cách xa tường về bên trái. Bất cứ sự thay đổi nào của vị trí của xô cũng sẽ làm lực căng của lò xo thay đổi một lượng không đáng kể.

khoảng cách ban đầu của xô đối với tường là L. Sau đó, gọi x là khoảng cách từ xô tới tường, và gọi m là khối lượng của cát trong xô. Chiếc xô được thả ra, và trên đường đi tới tường, cát bị rò ra khỏi xô với tốc độ $dm/dx = M/L$. Nói cách khác, tốc độ này là hằng số theo khoảng cách, không phải là theo thời gian; và khi chiếc xô đạt tới vị trí của tường nó không còn chứa ít cát nào. Chú ý rằng dx là âm, vì vậy dm cũng là âm.

(a) Hỏi động năng của (cát bên trong) xô là bao nhiêu, như là một hàm của x? Giá trị cực đại của động năng này là bao nhiêu?

(b) Độ lớn của động lượng của xô là bao nhiêu, như là một hàm của x? Giá trị cực đại của nó là bao nhiêu?

5.18. Một cái xô thủng khác ***

Xét cơ cấu như trong Bài tập 5.17, nhưng bây giờ cho cát bị rò ra ngoài với tốc độ tỷ lệ với gia tốc của chiếc xô. Nghĩa là, $dm/dt = b\ddot{x}$. Chú ý rằng $\ddot{x}$ là âm, vì vậy dm cũng là âm.

(a) Tìm khối lượng như là một hàm của thời gian, $m(t)$.

(b) Tìm $v(t)$ và $x(t)$ trong thời gian khi mà xô vẫn còn chứa cát. Cũng như vậy tìm $v(m)$ và $x(m)$. Hỏi tốc độ của xô bằng bao nhiêu ngay trước thời điểm khi xô không còn chứa ít cát nào (giả sử rằng nó vẫn chưa chạm tường)?

(c) Giá trị lớn nhất của động năng của xô là bao nhiêu, giả sử rằng nó đạt được động năng lớn nhất này trước khi nó chạm tường?

(d) Với giá trị b bằng bao nhiêu để cho chiếc xô trống rỗng ngay trước khi nó chạm tường?

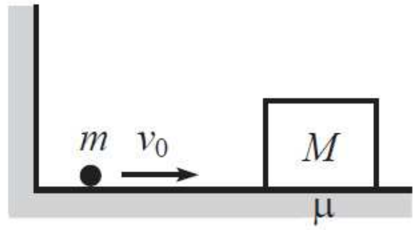
Mục 5.7: Va chạm

5.19. Góc vuông trong môn bi a *

Một quả bi a va chạm đàn hồi với một quả bi a khác giống hệt nó đang đứng yên. Sử dụng thực tế rằng $mv^2/2$ có thể được viết dưới dạng $m(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})/2$ để chỉ ra rằng góc giữa hai đường quỹ đạo sau va chạm là 90^o. *Gợi ý:* Lấy tích vô hướng của phương trình bảo toàn động lượng với chính nó.

5.20. Nảy lại và giật lại **

Một quả bóng có khối lượng m và có vận tốc ban đầu v_0 nảy đi nảy lại giữa một bức tường cố định và một vật khối lượng M, với $M \gg m$; xem Hình 5.24. Ban đầu vật đứng yên. Giả sử rằng quả bóng nảy lại một cách đàn hồi và tức thời. Hệ số ma sát động giữa vật và mặt đất là μ. Không có ma sát giữa quả bóng và mặt đất. Hỏi vận tốc của quả bóng bằng bao nhiêu sau lần va chạm thứ n với vật? Hỏi quãng đường mà cuối cùng vật sẽ chuyển động được là bao nhiêu? Hỏi tổng thời gian thực mà vật chuyển động là bao



Hình 5.24:

nhiêu? Giải bài toán trong trường hợp xấp xỉ khi $M \gg m$, và giả sử rằng khoảng cách tới tường là đủ lớn để cho vật đã dừng lại trước khi tiếp tục va chạm với quả bóng.

5.21. Lực cản tác dụng lên một tấm **

Một tấm có khối lượng M chuyển động với vận tốc V qua một vùng không gian chứa các hạt có khối lượng m và vận tốc v. Có n hạt như thế này trong một đơn vị thể tích. Tấm chuyển động theo hướng của vector pháp tuyến của nó. Giả sử rằng $m \ll M$, và giả sử rằng các hạt không tương tác với nhau.

(a) Nếu $v \ll V$, hỏi lực cản trên một đơn vị diện tích tác dụng lên tấm bằng bao nhiêu?

(b) Nếu $v \gg V$, hỏi lực cản trên một đơn vị diện tích tác dụng lên tấm bằng bao nhiêu? Để đơn giản, giả sử rằng thành phần của vận tốc của tất cả các hạt theo phương chuyển động của tấm chính xác bằng $\pm v/2$.[26]

5.22. Lực cản tác dụng lên một trụ **

Một hình trụ có khối lượng M và bán kính R chuyển động với tốc độ V qua một vùng không gian chứa các hạt có khối lượng m đang đứng yên. Có n hạt như thế này trong một đơn vị thể tích. Hình trụ chuyển động theo hướng vuông góc với trục của nó. Giả sử $m \ll M$, và giả sử rằng các hạt không tương tác với nhau. Hỏi lực cản trên một đơn vị độ dài của trụ bằng bao nhiêu?

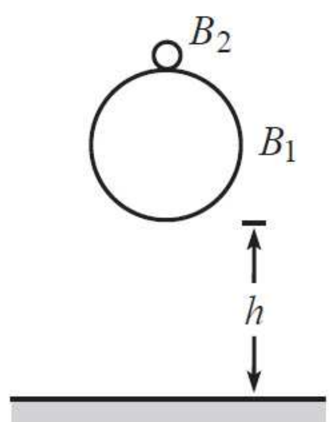
5.23. Quả bóng rổ và quả bóng tennis **

(a) Một quả bóng tennis có khối lượng m_2 nhỏ nằm trên đỉnh một quả bóng rổ có khối lượng m_1 lớn (xem Hình 5.25). Đáy của quả bóng rổ nằm ở một độ cao h so với mặt đất, và đáy của quả bóng tennis nằm ở độ cao $h + d$ so với mặt đất. Hai quả bóng được thả rơi. Hỏi quả bóng tennis sẽ nảy lên một độ cao bằng bao nhiêu? *Chú ý:* Giải bài toán trong trường hợp xấp xỉ khi m_1 lớn hơn m_2 rất nhiều, và giả sử rằng các quả bóng va chạm đàn hồi với nhau. Cũng giả sử, để cho bài toán trở nên gọn gàng và đẹp, rằng các quả bóng ban đầu cách nhau một khoảng cách nhỏ, và các quả bóng va chạm trong một khoảng thời gian tức thời.

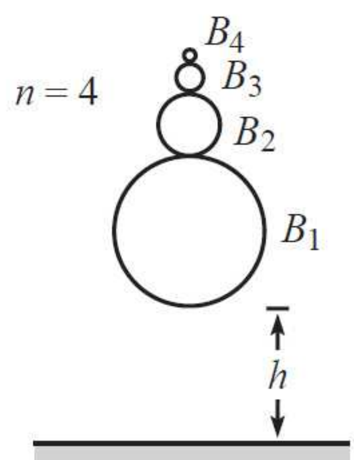
[26]Trong thực tế, các vận tốc là phân bố ngẫu nhiên, nhưng việc lý tưởng hóa này thực ra cho ta kết quả chính xác bởi vì, như bạn có thể chỉ ra, tốc độ trung bình theo bất kỳ phương nào đều là $|\bar{v_x}| = v/2$.

(b) Bây giờ xét n quả bóng, $B_1, \dots, B_n$, có khối lượng $m_1, m_2, \dots, m_n$ (với $m_1 \gg m_2 \gg \dots \gg m_n$), được xếp đứng lên nhau thành một chồng thẳng đứng (xem Hình 5.26). Đáy của quả bóng B_1 có độ cao là h so với mặt đất, và đáy của quả bóng B_n có độ cao là $h+l$ so với mặt đất. Các quả bóng được thả rơi. Biểu diễn qua n, hỏi quả bóng trên cùng sẽ nảy lên một độ cao bằng bao nhiêu? *Chú ý:* Sử dụng các xấp xỉ và giả thiết tương tự như trong phần (a).

Nếu $h = 1$ mét, hỏi số lượng tối thiểu của các quả bóng cần thiết bằng bao nhiêu sao cho quả bóng trên cùng nảy lên một độ cao ít nhất là 1 kilomet? Sao cho quả bóng đạt được vận tốc thoát? Giả sử rằng các quả bóng vẫn va chạm đàn hồi (mà giả thiết này hơi vô lý ở đây), và bỏ qua sức cản của gió, v.v..., và giả sử rằng ℓ là không đáng kể.



Hình 5.25:



Hình 5.26:

5.24. Góc chệch hướng lớn nhất ***

Một khối lượng M va chạm với một khối lượng m đứng yên. Nếu $M < m$, thì có thể xảy ra trường hợp vật M bật ngược lại sau va chạm. Tuy nhiên, nếu $M > m$, thì sẽ có một góc chệch hướng lớn nhất của M. Chỉ ra rằng góc lệch lớn nhất này bằng $\sin^{-1}(m/M)$.
Gợi ý: Có thể làm bài toán này trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm, nhưng bạn có thể tiết kiệm được rất nhiều thời gian bằng việc xem xét mọi việc xảy ra trong hệ tọa độ khối tâm, và sau đó chuyển kết quả lại qua hệ quy chiếu phòng thí nghiệm.

Mục 5.8: Va chạm không đàn hồi
Chú ý: Trong các bài toán liên quan đến các sợi xích trong mục này (ngoại trừ bài toán 5.29, chúng ta sẽ giả sử rằng các sợi xích là loại được miêu tả trong viễn cảnh thứ nhất ở phần gần cuối của Mục 5.8.

5.25. Các khối lượng va chạm *

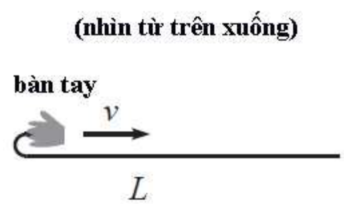
Một khối lượng M, ban đầu chuyển động với tốc độ V, va chạm và dính chặt với một khối lượng m, ban đầu đứng yên. Giả sử $M \gg m$, và giải bài toán với xấp xỉ này. Hỏi năng lượng sau va chạm của hai khối lượng này bằng bao nhiêu, và tìm xem có bao nhiêu năng lượng bị mất đi do chuyển thành nhiệt, trong:

(a) Hệ quy chiếu phòng thí nghiệm?

(b) Hệ quy chiếu trong đó vật M ban đầu đứng yên?

5.26. Kéo một sợi xích **

Một sợi xích có chiều dài L và khối lượng riêng là σ kg/m nằm thẳng trên một mặt phẳng



Hình 5.27:

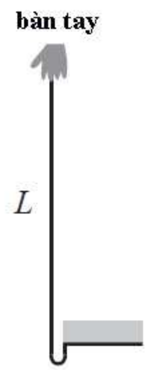
nằm ngang không ma sát. Bạn cầm một đầu sợi xích và kéo nó ngược lại theo hướng song song với sợi xích (xem Hình 5.27). Giả sử rằng bạn kéo nó với một tốc độ không đổi v. Hỏi lực mà bạn phải tác dụng là bao nhiêu? Hỏi tổng công mà bạn tác dụng là bao nhiêu, cho đến thời điểm sợi xích hoàn toàn bị kéo thẳng? Bao nhiêu phần năng lượng bị mất do chuyển thành nhiệt, nếu có?

5.27. Kéo một sợi xích nữa **

Một sợi xích với khối lượng riêng σ kg/m nằm thành một đống trên sàn nhà. Bạn cầm một đầu của nó và kéo theo phương ngang với một lực F không đổi. Hỏi vị trí của của đầu xích mà bạn cầm là bao nhiêu, như là một hàm của thời gian, khi sợi xích bị gỡ ra? Giả sử rằng sợi xích là trơn, do đó không có ma sát giữa các phần của nó.

5.28. Sợi xích rơi **

Một sợi xích có chiều dài L và khối lượng riêng là σ kg/m được giữ ở vị trí như chỉ ra trong Hình 5.28, với một đầu của nó được gắn vào một giá đỡ. Giả sử rằng chỉ có một phần chiều dài có thể bỏ qua được của sợi xích ban đầu nằm bên dưới giá đỡ. Sợi xích được thả ra. Tìm lực mà giá đỡ tác dụng lên sợi xích, như là một hàm của thời gian.



Hình 5.28:

5.29. Sợi xích rơi (năng lượng bảo toàn) ***

Xét cơ cấu như trong bài toán trước, nhưng bây giờ giả sử sợi xích là loại trong viễn cảnh thứ hai được miêu tả trong Mục 5.8. Hãy chỉ ra rằng tổng thời gian để sợi xích duỗi thẳng hoàn toàn bằng khoảng 85% thời gian để nó cũng duỗi thẳng hoàn toàn nhưng trong trường hợp phần bên trái là rơi tự do (như trong bài toán trước); bạn sẽ cần phải giải số phương trình nào đó. Và hãy chỉ ra rằng lực căng tại đầu bên trái của vùng uốn (rất nhỏ) bằng lực căng tại đầu bên phải tại mọi thời điểm.[27]

5.30. Rơi từ một mặt bàn ***

(a) Một sợi xích có chiều dài L nằm theo một đường thẳng trên một mặt bàn không ma sát, ngoại trừ một phần rất nhỏ tại một đầu của nó rủ xuống qua một lỗ trên mặt bàn. Phần này được thả ra, và sợi xích trượt xuống qua lỗ này. Hỏi vận tốc của sợi xích tại thời điểm nó mất liên kết với mặt bàn bằng bao nhiêu? (Xem Chú thích cuối trang 3.19.)

[27] "Các đầu" của vùng uốn thực ra là không được định nghĩa một cách rõ ràng, bởi vì sợi xích ít nhất là cũng bị uốn một chút tại mọi điểm. Nhưng bởi vì chúng ta đang giả sử rằng độ rộng theo phương ngang của sợi xích là rất nhỏ, chúng ta có thể định nghĩa chiều cao của vùng uốn, ví dụ như, bằng 100 lần độ rộng ngang này, và chiều cao này là rất nhỏ và có thể bỏ qua được khi so sánh với tổng chiều dài của sợi xích.

(b) Trả lời câu hỏi trên, nhưng bây giờ giả sử sợi xích nằm thành một đống trên mặt bàn, ngoại trừ một phần rất nhỏ tại một đầu của nó rủ xuống qua một lỗ. Giả sử rằng sợi xích là trơn, vì vậy không có ma sát giữa các phần của nó. Hỏi trường hợp nào trong hai trường hợp này sẽ cho vận tốc lớn hơn?

5.31. Hạt mưa ***
Giả sử rằng một đám mây chứa các hạt nước nhỏ li ti (phân bố đều và đứng yên) lơ lửng trong không khí, và xét một hạt mưa rơi xuyên qua chúng. Hỏi gia tốc của hạt mưa bằng bao nhiêu? Giả sử rằng ban đầu hạt mưa có kích thước ban đầu nhỏ không đáng kể và khi nó va chạm với các hạt nước, hạt nước sẽ gộp vào nó. Cũng giả sử rằng hạt mưa lúc nào cũng có dạng hình cầu.

5.10 Bài tập luyện tập

Mục 5.1: Định luật bảo toàn năng lượng trong trường hợp một chiều

5.32. Xe đẩy trong một thung lũng
Một xe đẩy chứa cát đầu tiên nằm yên và sau đó lăn, không bị mất năng lượng do ma sát, xuống một thung lũng và sau đó đi lên một ngọn đồi ở phía bên kia thung lũng. Gọi độ cao ban đầu là h_1, và gọi độ cao cuối cùng mà xe đạt được ở phía bên kia thung lũng là h_2. Nếu chiếc xe đẩy làm rơi cát trên đường đi, hãy so sánh h_2 và h_1.

5.33. Bước trên một thang cuốn
Một thang cuốn đang chuyển động xuống dưới với vận tốc không đổi. Bạn bước lên trên thang cuốn với cùng tốc độ, sao cho bạn đứng yên so với mặt đất. Trong hệ tọa độ mặt đất, bạn có đang thực hiện công không?

5.34. Rất nhiều công
Nếu bạn đẩy một bức tường bằng tay, bạn không thực hiện công, bởi vì tay bạn không di chuyển. Nhưng trong hệ tọa độ của một người đang di chuyển qua bạn (từ đằng trước ra đằng sau), thực ra bạn đang thực hiện rất nhiều công, bởi vì tay bạn đang chuyển động. Và bởi vì vận tốc của người đó có thể lớn tùy ý, nên bạn có thể thực hiện một công lớn tùy ý trong hệ tọa độ của người đó. Do đó nó có vẻ như bạn sẽ nhanh chóng sử dụng toàn bộ năng lượng của bữa tối hôm trước và trở nên rất đói. Nhưng không phải như vậy. Tại sao?

5.35. Năng lượng lò xo
Sử dụng biểu thức dạng hiển của vị trí của một khối lượng gắn vào đầu của một lò xo, $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$, hãy kiểm tra rằng tổng năng lượng là bảo toàn.

5.36. Công cản *

Một hệ dao động có cản (với $m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$) có vị trí ban đầu là x_0 và vận tốc ban đầu là v_0. Sau một khoảng thời gian khá lâu, nó cơ bản là đứng yên tại vị trí gốc tọa độ. Do đó, theo định lý công và năng lượng, công thực hiện bởi lực cản phải bằng $-kx_0^2/2 - mv_0^2/2$. Kiểm tra rằng điều này là đúng. *Gợi ý:* Sẽ khá là rắc rối để tìm dạng hiển của $\dot{x}$ phụ thuộc vào các điều kiện đầu rồi sau đó tính tích phân cần thiết. Một cách dễ dàng hơn là sử dụng phương trình $F = ma$ để viết lại $\dot{x}$ trong tích phân của bạn.

5.37. Tiến ra vô cùng *

Một chất điểm chuyển động dưới ảnh hưởng của hàm thế $V(x) = -A|x|^n$, trong đó $A > 0$ và $n > 0$. Nó bắt đầu chuyển động tại vị trí có x dương với một vận tốc nào đó có hướng theo chiều dương của x. Với giá trị nào của n để chất điểm sẽ tiến ra vô cùng trong một khoảng thời gian hữu hạn? Bạn có thể giả sử rằng $E > 0$, mặc dù điều này không thực sự cần thiết. (Bạn có thể so sánh bài tập luyện tập này với Bài tập 5.2.)

5.38. Giải bài toán trong các hệ quy chiếu khác nhau *

Một vật, ban đầu đứng yên, chịu tác dụng của một lực mà gây cho nó một gia tốc không đổi a trong khoảng thời gian t. Kiểm tra một cách tường minh rằng $W = \Delta K$ trong (a) hệ quy chiếu phòng thí nghiệm, và (b) một hệ quy chiếu chuyển động sang bên trái với tốc độ V.

5.39. Toa xe lửa *

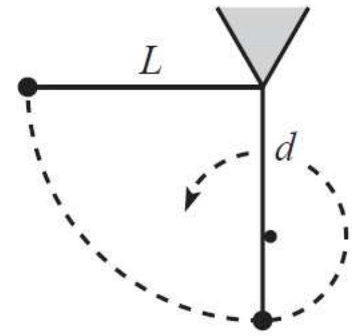
Một toa xe lửa ban đầu đứng yên và trượt xuống một đường ray không ma sát. Nó gặp một vòng tròn thẳng đứng có bán kính R. Hỏi ban đầu toa xe lửa phải có độ cao lớn hơn đỉnh của vòng tròn một khoảng bằng bao nhiêu để cho nó vẫn tiếp xúc với đường ray tại mọi thời điểm?

5.40. Con lắc đơn và cái chốt *

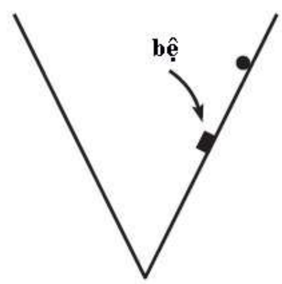
Một con lắc đơn có chiều dài L được giữ sao cho sợi dây của nó nằm ngang, và sau đó được thả ra. Sợi dây bị vướng vào một chốt nằm dưới điểm treo một khoảng d, như chỉ ra trong Hình 5.29. Hỏi giá trị nhỏ nhất của d bằng bao nhiêu để sợi dây vẫn luôn căng tại mọi thời điểm?

5.41. Chuyển động tròn xung quanh một hình nón *

Một hình nón rỗng cố định không có ma sát được đặt sao cho đỉnh của nó hướng xuống dưới. Một chất điểm được thả không vận tốc ban đầu lên mặt trong của hình nón. Sau khi nó trượt xuống đỉnh nón một khoảng, nó va chạm đàn hồi với một bệ. Bệ này được đặt nghiêng một góc 45^o dọc theo mặt trong của hình nón, vì vậy sau va chạm chuyển động của chất điểm bị lệch đi trở thành chuyển động ngang dọc theo bề mặt bên trong hình nón (nói một cách khác, nó sẽ đi vào bên trong trang giấy trong Hình 5.30). Nếu sau đó chuyển động của chất điểm là một hình tròn nằm ngang xung quanh mặt trong của hình nón, hỏi tỷ số của độ cao ban đầu của chất điểm và độ cao của bệ phải bằng bao nhiêu?



Hình 5.29:



Hình 5.30:

5.42. Lò xo treo *

Một lò xo không khối lượng với độ cứng k được treo thẳng đứng vào trần nhà, ban đầu nó ở trạng thái có độ dài tự nhiên. Một khối lượng m sau đó được gắn vào đáy của lò xo rồi sau đó được thả ra.

(a) Tính thế năng V của hệ, như là một hàm của độ cao y (có giá trị âm), với gốc thế năng tại vị trí ban đầu của khối lượng.

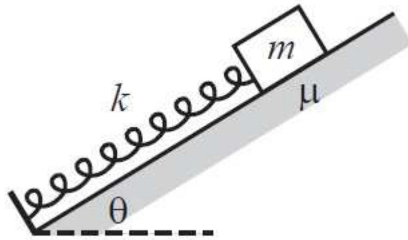
(b) Tìm y_0, là điểm mà tại đó thế năng có giá trị cực tiểu. Vẽ qua đồ thị của $V(y)$.

(c) Viết lại hàm thế năng như là một hàm của $z \equiv y - y_0$. Giải thích tại sao kết quả của bạn chỉ ra rằng một lò xo treo có thể được coi như là một lò xo trong một thế giới không trọng lực, với điều kiện là điểm cân bằng mới, y_0, bây giờ được gọi là độ dài "tự nhiên" của lò xo.

5.43. Loại bỏ ma sát *

Một vật khối lượng m được đỡ bởi một lò xo trên một mặt phẳng nghiêng, như trong Hình 5.31. Độ cứng của lò xo là k, góc nghiêng của mặt phẳng nghiêng là θ, và hệ số ma sát tĩnh giữa vật và mặt phẳng nghiêng là μ.

(a) Bạn dịch chuyển vật xuống dưới mặt phẳng nghiêng, làm cho lò xo bị nén. Hỏi độ nén lớn nhất của lò xo (so với độ dài tự nhiên của nó) bằng bao nhiêu để cho vật vẫn còn đứng yên khi bạn thả nó ra?

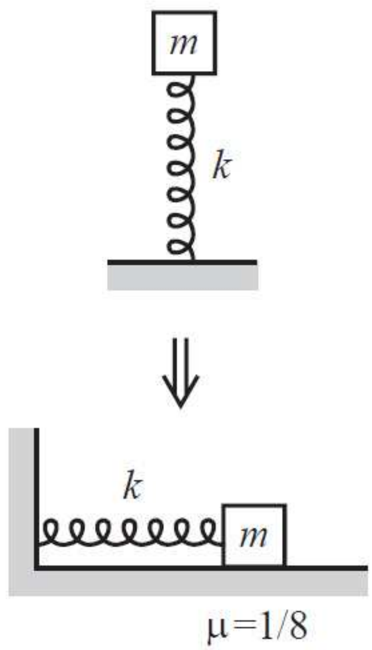


Hình 5.31:

(b) Giả sử rằng vật đang ở tại ví trí mà lò xo bị nén nhiều nhất như bạn đã tìm ra trong phần (a). Tại một thời điểm đã cho, bạn làm cách nào đó làm cho mặt phẳng nghiêng trở thành không ma sát, và vật sẽ bị đẩy lên phía trên dọc theo mặt phẳng nghiêng. Hỏi liên hệ giữa góc θ và hệ số ma sát ban đầu μ phải như thế nào để cho vật đạt vị trí cao nhất là vị trí mà lò xo có độ dài tự nhiên?

5.44. Lò xo và ma sát **

Một lò xo có độ cứng k đang ở vị trí thẳng đứng, và một khối lượng m được đặt lên đỉnh



Hình 5.32:

của nó. Khối lượng sẽ được hạ thấp từ từ xuống vị trí cân bằng của nó. Với lò xo được giữ tại trạng thái bị nén như trên, cả hệ được quay tới phương nằm ngang. Đầu trái của lò xo được gắn vào một bức tường, và khối lượng được đặt lên một mặt bàn có hệ số ma sát (cả động và tĩnh) là $\mu = 1/8$; xem Hình 5.32. Khối lượng được thả ra.

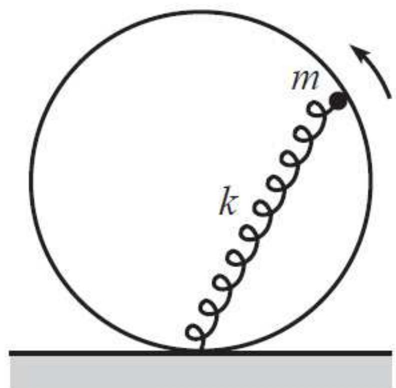
(a) Hỏi ban đầu lò xo bị nén một khoảng bằng bao nhiêu?

(b) Hỏi độ giãn lớn nhất (hoặc nhỏ nhất) của lò xo bị giảm sau mỗi nữa chu kỳ dao động bằng bao nhiêu?

(c) Hỏi vật sẽ dao động bao nhiêu chu kỳ trước khi dừng lại?

5.45. Giữ cho tiếp xúc **

Một hình tròn không ma sát bán kính R được làm ra từ một dải kim loại và được giữ



Hình 5.33:

cố định trong mặt phẳng thẳng đứng. Một lò xo không khối lượng với độ cứng k có một đầu được gắn vào đáy bên trong hình tròn, và đầu còn lại được gắn vào một khối lượng m. Lò xo bị nén tới độ dài không, với việc khối lượng chạm vào đáy bên trong của hình tròn. (Độ dài còn lại rất bé có thể bỏ qua được của lò xo về cơ bản là nằm theo phương ngang.) Lò xo sau đó được thả ra, và khối lượng ban đầu bị đẩy lên sang bên phải và dọc lên theo đường tròn; một trạng thái tại một thời điểm bất kỳ sau đó của hệ được chỉ ra trong Hình 5.33. Gọi ℓ là độ dài tại vị trí cân bằng của lò xo. Hỏi giá trị nhỏ nhất của ℓ bằng bao nhiêu để cho khối lượng vẫn còn tiếp xúc với đường tròn tại mọi thời điểm?

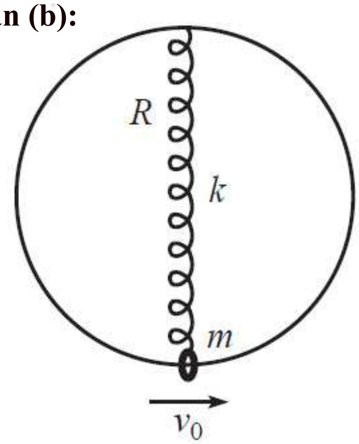
5.46. Lò xo và vòng tròn **

Một vòng tròn cố định bán kính R đứng thẳng đứng. Một lò xo có độ cứng k và độ dài tự nhiên bằng không được gắn vào đỉnh trên của vòng tròn.

(a) Một vật khối lượng m được gắn vào lò xo và được thả ra từ đỉnh của vòng tròn. Nếu chuyển động sau đó của khối lượng là một dao động tuyến tính theo phương thẳng đứng giữa đỉnh và đáy của vòng tròn, hỏi giá trị của k bằng bao nhiêu?

(b) Vật bây giờ được gỡ khỏi lò xo, và lò xo bị kéo dài và nối vào một hạt vòng, cũng có khối lượng m, đặt tại đáy của vòng tròn, như chỉ ra trong Hình 5.34. Hạt vòng bị giới hạn chuyển động dọc theo vòng tròn. Nó được truyền một chuyển động về bên phải với vận tốc ban đầu bằng v_0. Giả sử rằng nó chuyển động không ma sát, hỏi vận tốc của nó phụ thuộc như thế nào vào vị trí của nó dọc theo vòng tròn.

Phần (b):



Hình 5.34:

5.47. $\dot{x}$ không đổi **

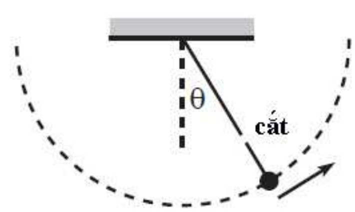
Một hạt vòng, dưới ảnh hưởng của trọng lực, trượt dọc theo một sợi dây không ma sát có độ cao được cho bởi hàm $y(x)$. Giả sử rằng tại vị trí $(x, y) = (0, 0)$, sợi dây là nằm ngang và hạt vòng qua vị trí này với tốc độ v_0 cho trước sang bên phải. Hỏi hình dạng của sợi dây phải như thế nào (nghĩa là, hàm y có dạng thế nào phụ thuộc vào x) sao cho vận tốc theo phương ngang vẫn bằng v_0 tại mọi thời điểm? Một nghiệm của bài toán này đơn giản là $y = 0$. Hãy tìm nghiệm khác.[28]

5.48. Vượt qua một ống **

Một ống hình trụ không ma sát có bán kính r được đặt sao cho trục của nó song song với mặt đất, tại độ cao h. Hỏi vận tốc nhỏ nhất mà một quả bóng được ném phải bằng bao nhiêu (từ mặt đất) để nó có thể vượt qua được ống? Xét hai trường hợp: (a) quả bóng được phép chạm ống, và (b) quả bóng không được phép chạm ống.

5.49. Chuyển động ném xiên của con lắc đơn **

Một con lắc đơn được giữ ở vị trí nằm ngang rồi sau đó được thả ra. Khối lượng quay



Hình 5.35:

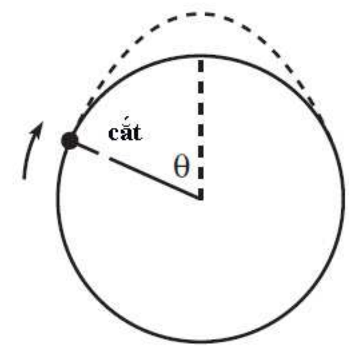
xuống, và trên đường đi lên, sợi dây bị cắt khi con lắc tạo một góc θ với phương thẳng

[28]Giải quyết bài tập này theo tinh thần của Bài tập 5.5, nghĩa là, bằng cách giải một phương trình vi phân. Một khi bạn có được kết quả, bạn sẽ thấy rằng bạn có thể đã viết ra được kết quả này mà không phải tính toán gì cả, dựa vào kiến thức của bạn về một số chuyển động vật lý.

đứng; xem Hình 5.35. Hỏi góc θ phải bằng bao nhiêu để khối lượng đạt được tầm xa lớn nhất khi nó lại có độ cao bằng độ cao tại vị trí dây bị cắt?

5.50. Chuyển động ném xiên đối xứng **

Một khối lượng được gắn vào đầu một sợi dây không khối lượng, đầu kia của sợi dây

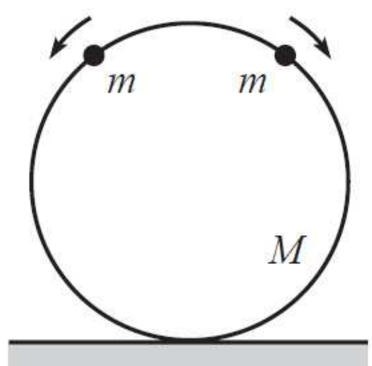


Hình 5.36:

được gắn vào một giá đỡ cố định. Khối lượng quay xung quanh một hình tròn thẳng đứng như trong Hình 5.36. Giả sử rằng khối lượng có vận tốc tối thiểu cần thiết tại đỉnh của hình tròn để giữ cho sợi dây không bị chùng, hỏi bạn phải cắt sợi dây tại vị trí nào sao cho chuyển động ném xiên sau đó của khối lượng đạt được độ cao lớn nhất tại vị trí nằm thẳng đứng ngay trên tâm của hình tròn?

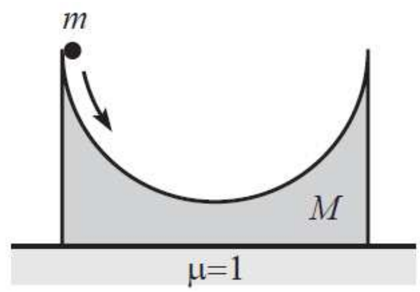
5.51. Các hạt vòng trên một vòng tròn **

Hai hạt vòng có khối lượng m ban đầu nằm yên tại đỉnh của một vòng tròn không ma



Hình 5.37:

sát có khối lượng M và bán kính R, nằm thẳng đứng trên mặt đất. Các hạt vòng được truyền một tác động rất nhỏ và chúng trượt xuống vòng tròn, một hạt trượt xuống bên phải và hạt kia trượt xuống về bên trái, như chỉ ra trong Hình 5.37. Hỏi tỷ số lớn nhất của m/M có thể bằng bao nhiêu để cho vòng tròn không bị nhấc lên khỏi mặt đất?



Hình 5.38:

5.52. Bát đứng yên ***

Một cái bát hình bán cầu có khối lượng M nằm yên trên một mặt bàn. Mặt trong của bát là không ma sát, trong khi đó hệ số ma sát giữa đáy bát và mặt bàn là $\mu = 1$. Một chất điểm khối lượng m được thả không vận tốc từ đỉnh của bát và trượt xuống, như chỉ ra trong Hình 5.38. Hỏi giá trị lớn nhất có thể của tỷ số m/M bằng bao nhiêu để cho bát không bao giờ trượt trên mặt bàn? *Gợi ý:* Góc mà bạn sẽ quan tâm *không phải* là 45^o.

5.53. Rơi khỏi hình bán cầu ****

Một chất điểm khối lượng m nằm yên trên đỉnh của một hình bán cầu không ma sát có khối lượng M, đang nằm trên một mặt bàn không ma sát. Chất điểm được truyền một chuyển động rất nhỏ và trượt xuống hình bán cầu (đang giật lùi lại). Tại góc θ bằng bao nhiêu (tính từ đỉnh của hình bán cầu) chất điểm sẽ rời khỏi hình bán cầu? Trong trường hợp trả lời câu hỏi này đối với $m \neq M$, sẽ là đủ khi bạn đưa ra một phương trình mà θ phải thỏa mãn (nó là một phương trình bậc ba). Tuy nhiên, trong trường hợp đặc biệt khi $m = M$, phương trình này có thể giải được không mấy khó khăn; hãy tìm giá trị của góc đó trong trường hợp này.

5.54. Bóng quấn (Tetherball) ****

Một quả bóng nhỏ được gắn vào một sợi dây không khối lượng có chiều dài L, và đầu kia của dây được gắn vào một cột rất mảnh. Quả bóng bị ném sao cho nó ban đầu chuyển động theo một đường tròn nằm ngang, với sợi dây tạo một góc θ_0 so với phương thẳng đứng. Theo thời gian, sợi dây sẽ tự quấn vào xung quanh cột. Giả sử rằng (1) cột là đủ mảnh sao cho chiều dài của sợi dây trong không khí giảm rất từ từ, vì vậy chuyển động của quả bóng luôn luôn có thể xấp xỉ coi như là một đường tròn, và (2) cột có đủ ma sát sao cho sợi dây không trượt trên cột, một khi nó đã chạm vào cột. Hãy chỉ ra rằng tỷ số của tốc độ cuối cùng của quả bóng (ngay trước khi nó chạm cột) và vận tốc ban đầu là $v_f/v_i = \sin\theta_0$.

Mục 5.4: Trọng lực

5.55. Ném xiên giữa các hành tinh *

Hai hành tinh có khối lượng M và bán kính R đang đứng yên (bằng một cách nào đó) với nhau, sao cho khoảng cách giữa các tâm của nó là $4R$. Bạn muốn bắn một vật từ bề mặt của một hành tinh này sang hành tinh kia. Hỏi tốc độ bắn tối thiểu phải bằng bao nhiêu để điều này có thể thực hiện được?

5.56. Quay nhanh *

Xét một hành tinh có khối lượng riêng đồng nhất bằng ρ. Nếu hành tinh này quay quá nhanh, nó sẽ bị vỡ ra. Chỉ ra rằng chu kỳ quay nhỏ nhất của nó được cho bởi

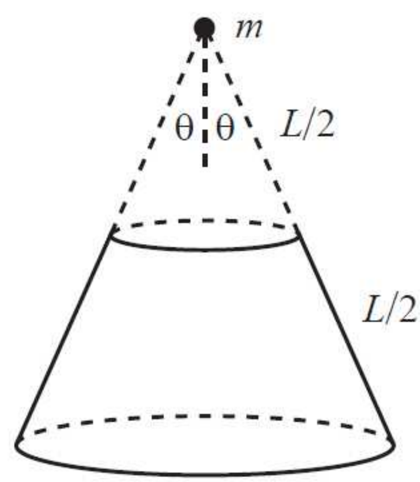
$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}.$$

Giá trị nhỏ nhất của T bằng bao nhiêu nếu $\rho = 5.5\ \mathrm{g/cm^3}$ (là khối lượng riêng trung bình của trái đất)?

5.57. Một hình nón **

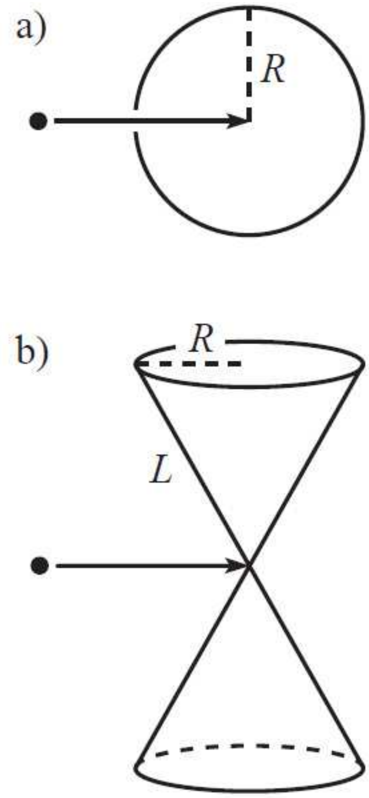
(a) Một chất điểm khối lượng m được đặt tại đỉnh một hình nón rỗng (như là một vỏ hình nón của một cây kem ốc quế) có khối lượng riêng bề mặt là σ. Chiều cao nghiêng của hình nón là L, và nửa góc tại đỉnh của nó là θ. Bạn có thể nói gì về lực hấp dẫn tác dụng lên khối lượng m gây ra bởi hình nón?

(b) Nếu nửa trên của hình nón bị bỏ đi (xem Hình 5.39), hỏi lực hấp dẫn tác dụng lên khối lượng m gây ra bởi phần còn lại bằng bao nhiêu? Với góc θ bằng bao nhiêu thì lực này đạt giá trị cực đại?



Hình 5.39:

5.58. Hình cầu và các hình nón **



Hình 5.40:

(a) Xét một vỏ hình cầu rỗng mỏng cố định có bán kính R và khối lượng riêng bề mặt là σ. Một chất điểm ban đầu nằm yên tại vô cùng và sau đó rơi vào vỏ cầu. Hỏi vận tốc của nó bằng bao nhiêu khi nó đến tâm của vỏ cầu? Giả sử rằng một lỗ rất nhỏ được cắt ra khỏi vỏ cầu để cho chất điểm đi qua; xem Hình 5.40(a).

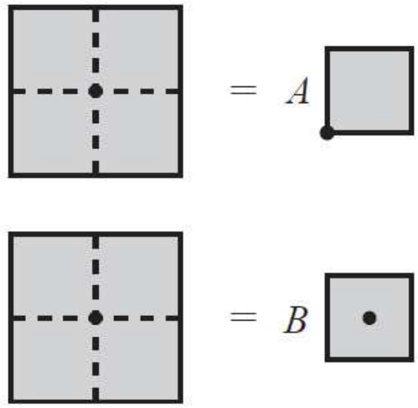
(b) Xét hai vỏ nón cố định rỗng (giống như các cây kem ốc quế mà không có kem bên trong), được đặt như trong Hình 5.40(b). Chúng có bán kính của đáy bằng R, độ cao nghiêng L, và khối lượng riêng bề mặt là σ. Một chất điểm ban đầu đứng yên tại vô cùng rồi sau đó rơi vào hình nón, dọc theo đường chia đôi vuông góc như được chỉ ra trong hình vẽ. Hỏi vận tốc của của chất điểm bằng bao nhiêu khi nó đi đến đỉnh của các hình nón?

5.59. Tỷ số các thế năng **

Xét hai hệ sau: (1) một khối lượng m được đặt tại góc của một tấm hình vuông phẳng khối lượng M, và (2) một khối lượng m được đặt tại tâm của một tấm hình vuông phẳng khối lượng M. Hỏi tỷ số của thế năng của m trong hai hệ trên bằng bao nhiêu? *Gợi ý:* Tìm A và B trong mối quan hệ được gợi ý đưa ra như trong Hình 5.41. Bạn sẽ cần phải sử dụng lập luận về tỷ lệ để tìm B.

5.60. Vận tốc thoát hệ mặt trời **

Vận tốc ban đầu nhỏ nhất (so với trái đất) cần thiết để cho một vật thoát khỏi hệ mặt



Hình 5.41:

trời bằng bao nhiêu?[29] Xét đến cả chuyển động của quỹ đạo quay quanh mặt trời của trái đất (nhưng bỏ qua chuyển động tự quay của trái đất, và bỏ qua các hành tinh khác). Bạn được phép tự do chọn (một cách thông minh nhất) hướng bắn vật. Hãy sử dụng một xấp xỉ (tốt) của quá trình này đó là nó được chia làm hai bước: đầu tiên vật sẽ thoát khỏi trái đất, và rồi sau đó nó thoát khỏi mặt trời (từ vị trí là bán kính của quỹ đạo quay của trái đất). Một vài đại lượng có ích cho bài toán này được cho trong lời giải Bài tập 5.11; hơn nữa, vận tốc trái đất quay trong quỹ đạo xung quanh mặt trời là vào khoảng 30 km/s. *Gợi ý:* một kết quả sai hay gặp là 13.5 km/s.

5.61. Vỏ cầu **

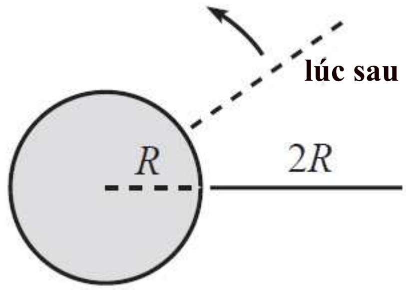
(a) Một vỏ hình cầu khối lượng M có bán kính trong R_1 và bán kính ngoài R_2. Một chất điểm khối lượng m được đặt tại vị trí cách tâm của vỏ cầu một khoảng r. Hãy tính (và vẽ phác họa đồ thị của) lực tác dụng lên m, như là một hàm của khoảng cách r, với $0 \le r \le \infty$.

(b) Nếu khối lượng m được thả từ $r = \infty$ và rơi vào chui qua vỏ cầu (giả sử rằng có một lỗ rất nhỏ được khoan xuyên qua vỏ cầu), hỏi vận tốc của nó tại tâm của vỏ cầu bằng bao nhiêu? Bạn có thể cho $R_2 = 2R_1$ trong phần này của bài tập để cho các công thức không quá rối rắm. Viết kết quả của bạn theo $R \equiv R_1$.

5.62. Thanh chuyển động theo quỹ đạo tròn **

Xét một hành tinh khối lượng M và bán kính R. Một thanh rất dài có chiều dài $2R$ kéo dài từ bề mặt của hành tinh ra đến khoảng cách bán kính $3R$. Nếu ban đầu chúng ta thiết lập một điều kiện thế nào đó để cho thanh chuyển động theo một quỹ đạo tròn và nó luôn có hướng hướng vào tâm của hành tinh dọc theo một bán kính (xem Hình 5.42), hỏi chu kỳ của quỹ đạo tròn này bằng bao nhiêu? Hãy so sánh chu kỳ này với chu kỳ của chuyển động tròn của một vệ tinh có bán kính $2R$.

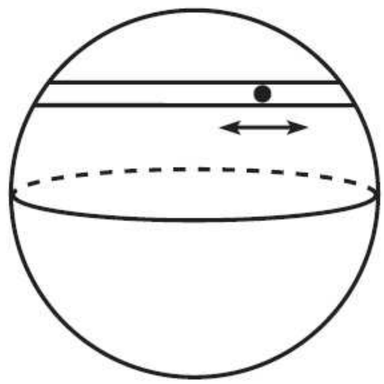
[29]Bài toán này được thảo luận bởi Hendel và Longo (1988).



Hình 5.42:

5.63. Chuyển động tốc độ nhanh **

Một ống thẳng được khoan giữa hai điểm trên bề mặt trái đất, như trong Hình 5.43.



Hình 5.43:

Một vật được thả vào trong ống. Hỏi chuyển động sau đó của vật là như thế nào? Thời gian để nó đi tới đầu bên kia bằng bao nhiêu? Bỏ qua ma sát, và giả sử (một cách không đúng) rằng khối lượng riêng của trái đất là hằng số ($\rho = 5.5$ g/cm^3).

5.64. Hầm mỏ **

(a) Nếu trái đất có khối lượng riêng không đổi, thì trọng lực sẽ giảm tuyến tính theo bán kính khi bạn đi xuống một hầm mỏ; xem phương trình (5.44). Tuy nhiên, khối lượng riêng của trái đất không phải là hằng số, và trong thực tế trọng lực *tăng* khi bạn đi xuống. Hãy chỉ ra rằng điều kiện tổng quát để cho điều này là đúng là $\rho_c < (2/3)\rho_{\text{avg}}$, trong đó ρ_{avg} là khối lượng riêng trung bình của trái đất, và ρ_c là khối lượng riêng của vỏ trái đất. (Những giá trị này của trái đất là $\rho_c \approx 3$g/cm^3 và $\rho_{\text{avg}} \approx 5.5$g/cm^3.) Xem Zaidins (1972).

(b) Một bài toán tương tự như bài trong phần (a), mà thực ra là chúng giống nhau, là như sau. Xét một tấm phẳng lớn nằm ngang làm bằng chất liệu có khối lượng riêng là ρ và độ dày là x. Hãy chỉ ra rằng lực hấp dẫn (từ trái đất và tấm phẳng) tại điểm nằm ngay dưới tấm là lớn hơn lực hấp dẫn tại điểm nằm ngay ở trên tấm nếu

$\rho < (2/3)\rho_{\text{avg}}$, trong đó ρ_{avg} là khối lượng riêng trung bình của trái đất. Một tấm làm bằng gỗ (với khối lượng riêng xấp xỉ bằng khối lượng riêng của nước) thỏa mãn bất đẳng thức này, nhưng một tấm bằng vàng thì không thỏa mãn. Một kết quả của Bài tập 5.13 sẽ có ích cho bài toán này.

(c) Giả sử rằng khối lượng riêng của một hành tinh là một hàm chỉ phụ thuộc vào bán kính, hỏi $\rho(r)$ phải có dạng như thế nào nếu bạn muốn lực hấp dẫn là không phụ thuộc vào độ sâu của hầm mỏ, trong suốt quãng đường đi xuống tâm của hành tinh?

5.65. Thang máy không gian **

(a) Gọi bán kính trái đất là R, khối lượng riêng trung bình của nó là ρ, và vận tốc góc quay của nó là ω. Hãy chỉ ra rằng một vệ tinh địa tĩnh nằm ở xích đạo phải chuyển động theo một đường tròn có bán kính là ηR, trong đó

$$\eta^3 = \frac{4\pi G\rho}{3\omega^2}. \tag{5.82}$$

Giá trị số của η bằng bao nhiêu?

(b) Thay vì một vệ tinh, xét một sợi dây thừng dài có khối lượng riêng không đổi được kéo dài theo phương bán kính của trái đất từ bề mặt trái đất tới điểm có bán kính $\eta' R$.[30] Hãy chỉ ra rằng nếu sợi dây được giữ tại vị trí không đổi trên tại xích đạo trong mọi khoảng thời gian, thì η' phải được cho dưới dạng

$$\eta'^2 + \eta' = \frac{8\pi G\rho}{3\omega^2}. \tag{5.83}$$

Giá trị số của η' bằng bao nhiêu? Tại điểm nào thì sợi dây có lực căng lớn nhất? *Gợi ý:* bạn sẽ không cần phải sử dụng các tính toán phức tạp.

5.66. Lực từ một sợi dây thẳng ***

Một chất điểm có khối lượng m được đặt tại ví trí cách một sợi dây thẳng dài vô hạn có khối lượng riêng là σ kg/m một khoảng cách ℓ. Hãy chỉ ra rằng lực tác dụng lên chất điểm là $F = 2G\sigma m/\ell$. Làm việc này theo hai cách:

(a) Tích phân lực tác dụng dọc theo chiều dài sợi dây.

(b) Tích phân thế năng dọc theo chiều dài của sợi dây, rồi sau đó lấy đạo hàm để nhận được lực tác dụng. Bạn sẽ thấy rằng thế năng gây ra bởi sợi dây dài vô hạn bằng vô cùng,[31] nhưng bạn có thể tránh được vấn đề khó khăn này bằng cách cho sợi dây có

[30] Bất cứ thang máy không gian được đề xuất nào cũng không có khối lượng riêng không đổi. Nhưng bài toán được đơn giản hóa này vẫn cho ta một ý tưởng tốt về những đặc điểm tổng quát. Để biết thêm về thang máy không gian, xem Aravind (2007).

[31] Không có gì là không ổn với điều này. Tất cả vấn đề ở đây khi chỉ quan tâm đến lực tác dụng là sự chênh lệch của thế năng, và sự chênh lệch này là hữu hạn.

một chiều dài rất lớn nhưng hữu hạn, rồi sau đó tìm thế năng và lực tác dụng, và sau đó cho chiều dài này tiến ra vô cùng.

5.67. Trọng lực lớn nhất ***

Cho một điểm P trong không gian, và cho trước một miếng vật chất dễ uốn có khối lượng riêng không đổi, hỏi bạn phải nặn và đặt miếng vật chất này như thế nào để tạo ra trường trọng lực lớn nhất tại điểm P?

Mục 5.5: Động lượng

5.68. Cực đại hóa P và E của một tên lửa *

Một tên lửa ban đầu nằm yên có khối lượng M phụt khí nhiên liệu ra sau với tốc độ cho trước u. Hỏi khối lượng của tên lửa (bao gồm cả phần nhiên liệu chưa sử dụng) bằng bao nhiêu tại thời điểm động lượng của nó có giá trị lớn nhất? Hỏi khối lượng của nó bằng bao nhiêu tại thời điểm năng lượng của nó là lớn nhất?

5.69. Tăng tốc tên lửa *

Giả sử rằng chúng ta không thể tạo ra một khoang chứa nhiên liệu có kết cấu chắc chắn mà có thể chứa một lượng nhiên liệu nhiều hơn, ví dụ như, chín lần khối lượng của nó (giới hạn thực tế có giá trị cao hơn giá trị này, nhưng hãy sử dụng giá trị này để tính toán cụ thể). Khi đó từ phương trình (5.54) giới hạn của vận tốc của tên lửa sẽ là $u \ln 10$. Làm thế nào để bạn có thể tạo một tên lửa có tốc độ nhanh hơn vận tốc này?

5.70. Tuyết rơi trên xe trượt tuyết, phân tích định lượng **

Xét cơ cấu trong ví dụ của Mục 5.5.1. Tại thời điểm $t = 0$, gọi khối lượng của xe trượt tuyết (bao gồm cả khối lượng của bạn) là M, và gọi vận tốc của nó là V_0. Nếu tuyết rơi vào trong xe với tần suất là σ kg/s, hãy tìm vận tốc của xe như là một hàm của thời gian cho ba trường hợp đã cho.

5.71. Xô thủng ***

Xét cơ cấu trong Bài tập 5.17, nhưng bây giờ giả sử cát bị rò ra ngoài với tốc độ là $dm/dt = -bM$. Nói cách khác, tốc độ này là không đổi theo thời gian, chứ không phải theo quãng đường. Chúng ta tách hệ số M ra ở đây, chỉ để cho các tính toán của ta trông đẹp hơn.

(a) Tìm $v(t)$ và $x(t)$ trong suốt thời gian khi xô còn chứa cát.

(b) Giá trị lớn nhất của động năng của xô bằng bao nhiêu, giả sử rằng nó đạt giá trị lớn nhất này trước khi nó va vào tường?

(c) Giá trị lớn nhất của độ lớn của động lượng của xô bằng bao nhiêu, giả sử rằng nó đạt giá trị lớn nhất này trước khi nó va vào tường?

(d) Với giá trị nào của b để cho xô không còn chứa ít cát nào ngay trước khi nó chạm tường?

5.72. Ném một viên gạch ***

Một viên gạch được ném lên từ mặt đất theo một góc θ so với phương nằm ngang. Giả sử rằng bề mặt dài của viên gạch luôn song song với mặt đất tại mọi thời điểm, và giả sử rằng không có biến dạng nào của mặt đất khi viên gạch rơi xuống va chạm với nó. Nếu hệ số ma sát giữa viên gạch và mặt đất là μ, hỏi góc θ phải bằng bao nhiêu để cho viên gạch đi được một quãng đường có tầm xa lớn nhất trước khi nó hoàn toàn dừng lại? Giả sử rằng viên gạch không bị nảy lên khỏi mặt đất. *Gợi ý:* Viên gạch sẽ chuyển động chậm dần khi nó va chạm với mặt đất. Hãy suy nghĩ về điều này với xung lực.

Mục 5.7: Va chạm

5.73. Một va chạm một chiều *

Xét va chạm một chiều sau đây. Một khối lượng $2m$ chuyển động về bên phải, và một khối lượng m chuyển động về bên trái, với cùng vận tốc v. Chúng va chạm đàn hồi với nhau. Hãy tìm vận tốc sau va chạm của chúng trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm. Giải bài toán này bằng cách:

(a) Xét hệ quy chiếu phòng thí nghiệm.

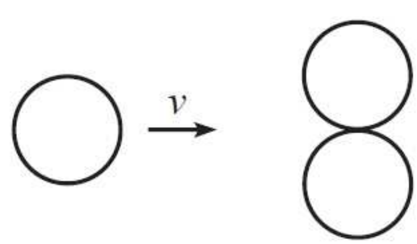
(b) Xét hệ quy chiếu khối tâm.

5.74. Các vector vuông góc *

Một vật đang chuyển động có khối lượng m va chạm đàn hồi với một vật đứng yên có khối lượng $2m$. Gọi vận tốc sau va chạm của chúng tương ứng là $\mathbf{v}_1$ và $\mathbf{v}_2$. Hãy chỉ ra rằng $\mathbf{v}_2$ phải vuông góc với $2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$. *Gợi ý:* Xem Bài tập 5.19.

5.75. Ba quả bóng bi a *

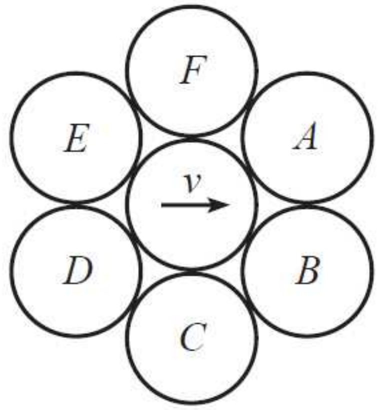
Một quả bóng bi a với vận tốc ban đầu v được ngắm vào giữa hai quả bóng khác, như chỉ ra trong Hình 5.44. Nếu hai quả bóng bên phải sau va chạm (đàn hồi) có cùng vận tốc, hãy tìm vận tốc sau va chạm của ba quả bóng này.



Hình 5.44:

5.76. Bẩy quả bóng bi a **

Bảy quả bóng bi a được đặt nằm yên như trong Hình 5.45. Quả bóng ở giữa bằng cách



Hình 5.45:

nào đó đột nhiên nhận được một vận tốc v hướng sang bên phải. Giả sử rằng các quả bóng, bắt đầu với quả A, được xếp theo một hình xoắn ốc ra phía ngoài một lượng vô cùng nhỏ. Vì vậy quả A ở gần tâm hơn quả B, và quả B ở gần tâm hơn quả C, vân vân... Điều này có nghĩa là quả bóng ở giữa sẽ va chạm với quả A đầu tiên, sau đó nó bị trệch hướng tới va chạm với quả B, và rồi nó bị chệch hướng tới và chạm với quả C, và cứ như vậy. Nhưng tất cả các va chạm sẽ xảy ra trong nháy mắt. Hỏi vận tốc của quả bóng ở giữa bằng bao nhiêu sau khi nó va chạm (đàn hồi) với tất cả sáu quả bóng? (Bạn có thể sử dụng các kết quả từ ví dụ trong Mục 5.7.2.)

5.77. Va chạm giữa trời **

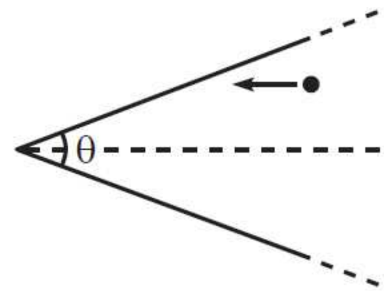
Một quả bóng được giữ rồi được thả ra. Tại thời điểm nó được thả ra, một quả bóng giống hệt nó, đang chuyển động theo phương nằm ngang với vận tốc v, va chạm đàn hồi với nó và bị lệch đi một góc hướng lên trên. Hỏi tầm xa lớn nhất mà quả bóng đến sau có thể đạt được là bao nhiêu khi nó rơi lại độ cao bằng với độ cao tại điểm va chạm? (Bạn có thể sử dụng các kết quả của ví dụ trong Mục 5.7.2.)

5.78. Va chạm nhiều nhất **

N quả bóng giống nhau bị ràng buộc chuyển động theo một phương. Nếu bạn được phép chọn các vận tốc ban đầu cho chúng, hỏi số lần va chạm lớn nhất giữa chúng mà bạn có thể sắp xếp được là bao nhiêu? Giả sử rằng các va chạm là đàn hồi.

5.79. Phòng hình tam giác **

Một quả bóng bị ném vào một bức tường của một phòng hình tam giác rất dài mà có góc ở đỉnh là θ. Hướng ban đầu của quả bóng là song song với đường phân giác (xem Hình 5.46). Hỏi quả bóng va chạm (đàn hồi) bao nhiêu lần? Giả sử rằng các bức tường là không ma sát.



Hình 5.46:

5.80. Các góc bằng nhau **

(a) Một khối lượng $2m$ đang chuyển động với vận tốc v_0 va chạm đàn hồi với một khối lượng m đứng yên. Nếu hai khối lượng bật ra với cùng một góc (khác không) so với phương va chạm, hỏi giá trị góc này bằng bao nhiêu?

(b) Hỏi con số lớn nhất có thể thay thế con số "2" ở trên là bao nhiêu, nếu bạn vẫn muốn hai khối lượng sau va chạm bật ra cùng một góc?

5.81. Góc vuông trong bi a **

Một quả bóng bi a va chạm đàn hồi với một quả bóng giống nó đang đứng yên. Bằng cách xem xét va chạm này trong hệ tọa độ khối tâm, hãy chỉ ra rằng góc giữa hai phương chuyển động của hai quả bóng sau va chạm trong hệ tọa độ phòng thí nghiệm là 90^o. (Chúng ta đã chứng minh kết quả này bằng cách sử dụng hệ quy chiếu phòng thí nghiệm trong ví dụ của Mục 5.7.2.)

5.82. Các vận tốc v_x bằng nhau **

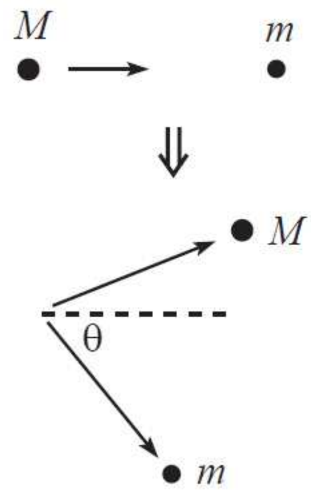
Một khối lượng m đang chuyển động với vận tốc v theo phương x thì va chạm đàn hồi với một khối lượng nm đứng yên, trong đó n là một số nào đó. Sau va chạm, chúng ta quan sát thấy rằng cả hai khối lượng có cùng vận tốc theo phương x. Hỏi góc nghiêng mà khối lượng nm tạo với phương x bằng bao nhiêu? (Bài toán này có thể giải được bằng việc sử dụng hệ quy chiếu phòng thí nghiệm hoặc hệ quy chiếu khối tâm, nhưng hệ quy chiếu khối tâm sẽ cho ta lời giải hay hơn.)

5.83. Cực đại hóa v_y **

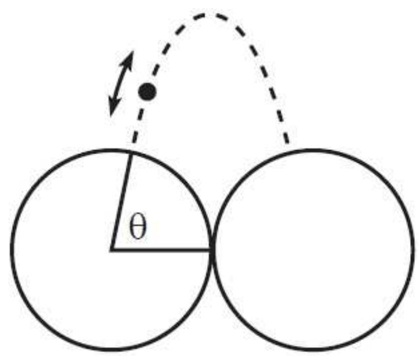
Một khối lượng M đang chuyển động theo phương x thì va chạm đàn hồi với một khối lượng m đang đứng yên. Va chạm không nhất thiết phải là trực diện, vì vậy các khối lượng có thể bị bật ra theo các góc khác nhau, như chỉ ra trong Hình 5.47. Gọi θ là góc mà khối lượng m bật ra. Hỏi góc θ phải bằng bao nhiêu để khối lượng m có vận tốc lớn nhất có thể theo phương y? *Gợi ý:* Hãy nghĩ xem va chạm sẽ như thế nào trong hệ tọa độ khối tâm.

5.84. Nảy giữa các vòng tròn **

Hai vòng tròn, tiếp xúc với nhau, đứng trong một mặt phẳng thẳng đứng. Một quả bóng



Hình 5.47:



Hình 5.48:

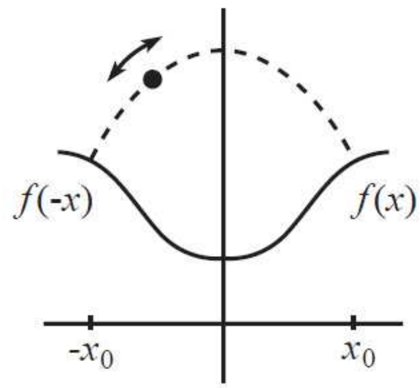
nảy một cách đàn hồi qua lại giữa hai vòng tròn này (xem Hình 5.48). Giả sử rằng các điều kiện ban đầu được thiết lập sao cho chuyển động của quả bóng luôn nằm trong một đường parabola. Giả sử đường parabola này cắt các vòng tròn theo một góc θ so với phương nằm ngang. Hãy chỉ ra rằng nếu bạn muốn độ lớn của sự thay đổi động lượng theo phương ngang của quả bóng tại mỗi lần va chạm đạt giá trị lớn nhất, thì bạn phải chọn $\cos\theta = (\sqrt{5} - 1)/2$, mà vô tình là giá trị nghịch đảo của tỷ số vàng.

5.85. Nảy giữa các bề mặt **

Xét trường hợp tổng quát của bài toán trên. Một quả bóng nảy qua lại giữa một mặt được định nghĩa bởi hàm $f(x)$ và đối xứng gương của nó qua trục y (xem Hình 5.49). Giả sử rằng các điều kiện ban đầu được thiết lập sao cho chuyển động của quả bóng luôn nằm trong một đường parabola, với điểm va chạm được đặt tại vị trí $\pm x_0$. Với dạng hàm nào của $f(x)$ để cho độ lớn của sự thay đổi động lượng theo phương ngang của quả bóng tại mỗi lần va chạm không phụ thuộc vào x_0?

5.86. Lực cản lên một quả cầu **

Một quả cầu khối lượng M và bán kính R chuyển động với vận tốc V qua một vùng

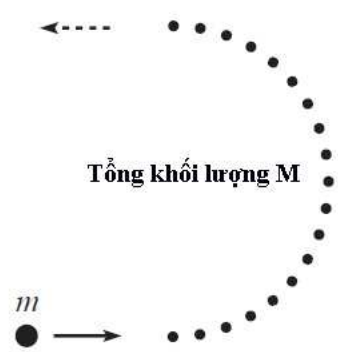


Hình 5.49:

không gian chứa các hạt khối lượng m đang nằm yên. Có n hạt như vậy trong một đơn vị thể tích. Giả sử $m \ll M$, và giả sử rằng các hạt không tương tác với nhau. Hỏi lực cản tác dụng lên quả cầu bằng bao nhiêu?

5.87. Các quả bóng trong nửa đường tròn ***

N quả bóng giống nhau nằm cách đều nhau trong một nửa đường tròn trên một mặt



Hình 5.50:

bàn nằm ngang không ma sát, như trong Hình 5.50. Tổng khối lượng của các quả bóng này là M. Một quả bóng khác khối lượng m tiến đến nửa đường tròn từ phía bên trái, với điều kiện được thiết lập ban đầu như thế nào đó để nó va chạm (đàn hồi) với tất cả N quả bóng trên và cuối cùng rời khỏi nửa đường tròn, theo hướng thẳng về bên trái (xem hình vẽ).

(a) Trong trường hợp $N \to \infty$ (vì vậy khối lượng của mỗi quả bóng trong nửa đường tròn, M/N, tiến về không), hãy tìm giá trị nhỏ nhất của M/m mà cho phép quả bóng đến sẽ đi ra thẳng theo hướng bên trái. *Gợi ý:* Bạn cần phải làm Bài tập 5.24 trước.

(b) Trong trường hợp M/m đạt giá trị nhỏ nhất trong câu (a), hãy chỉ ra rằng tỷ số của vận tốc cuối của m và vận tốc đầu của nó bằng $e^{-\pi}$.

5.88. Vật và bóng nảy ****

Một vật có khối lượng M lớn trượt với vận tốc V_0 trên một mặt bàn không ma sát tiến về một bức tường. Nó va chạm đàn hồi với một quả bóng có khối lượng m nhỏ, mà ban đầu quả bóng nằm yên tại ví trí cách bức tường một khoảng L. Quả bóng trượt về phía bức tường, nảy ra một cách đàn hồi, và sau đó tiếp tục nảy đi nảy lại giữa vật và bức tường.

(a) Vật có thể đến gần bức tường một khoảng bằng bao nhiêu?

(b) Hỏi quả bóng va chạm với vật bao nhiêu lần, cho đến thời điểm vật đã tiến đến vị trí gần tường nhất?

Giả sử $M \gg m$, và hãy đưa ra kết quả của bạn theo số hạng có bậc lớn nhất của m/M.

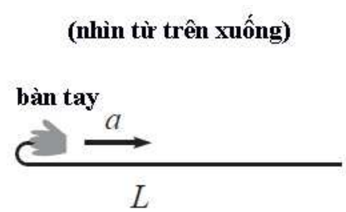
Mục 5.8: Va chạm không đàn hồi
Chú ý: Trong các bài tập liên quan đến các sợi xích trong mục này, chúng ta sẽ giả sử rằng các sợi xích là loại được miêu tả trong viễn cảnh thứ nhất ở phần cuối của Mục 5.8.

5.89. Chậm dần, tăng tốc *

Một đĩa có khối lượng M chuyển động theo phương ngang với vận tốc ban đầu v trên một mặt bàn không ma sát. Một khối lượng m được thả rơi theo phương thẳng đứng lên trên đĩa và sẽ nhanh chóng nằm yên trên mặt đĩa. Hỏi phải mất bao nhiêu năng lượng để làm cho hệ có vận tốc v lại như cũ? Giải thích một cách trực giác kết quả của bạn trong trường hợp giới hạn khi $M \gg m$.

5.90. Kéo một sợi xích về phía sau **

Một sợi xích có chiều dài L và khối lượng riêng σ kg/m bị kéo giãn nằm trên một mặt



Hình 5.51:

bàn nằm ngang không ma sát. Bạn cầm một đầu của nó và kéo nó ngược lại theo phương song song dọc theo chiều dài của nó, như chỉ ra trong Hình 5.51. Nếu tay bạn bắt đầu nằm yên và sau đó có gia tốc không đổi a, hỏi lực mà bạn tác dụng có giá trị bằng bao nhiêu ngay tại thời điểm trước khi sợi xích bị kéo thẳng ra.

5.91. Sợi xích rơi **

Một sợi xích có chiều dài L và khối lượng riêng là σ kg/m được giữ thành một đống, và bạn nắm một đầu của nó mà thò ra một chút ở trên đỉnh. Sợi xích sau đó được thả ra.

Hỏi lực mà tay bạn phải tác dụng là bao nhiêu, như là một hàm của thời gian, để giữ cho đầu trên của sợi xích không chuyển động? Giả sử rằng sợi xích không có ma sát giữa các phần của nó, vì vậy phần còn lại của đống là luôn luôn rơi tự do. Một trạng thái của cơ cấu trên tại một thời điểm bất kỳ sau đó được cho trong Hình 5.52.

Hình 5.52:

5.92. Kéo một sợi xích xuống dưới **

Một sợi xích có khối lượng riêng là σ kg/m nằm thành một đống tại cạnh của một bàn. Một đầu của sợi xích ban đầu thò ra một khoảng rất nhỏ từ đống này. Bạn cầm lấy đầu này và kéo nó xuống dưới với gia tốc a. Giả sử rằng không có ma sát giữa các phần của sợi xích khi nó bị gỡ ra. Hỏi lực mà tay bạn tác dụng là bao nhiêu, như là một hàm của thời gian? Hãy tìm giá trị của a làm cho lực của bạn luôn luôn bằng không. (Nói cách khác, tìm giá trị của a mà sợi xích rơi xuống một cách tự nhiên.)

5.93. Kéo một sợi xích lên trên **

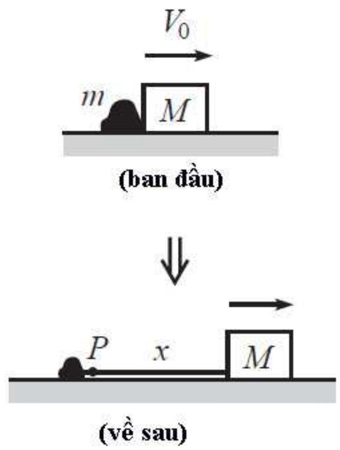
Một sợi xích có chiều dài L và khối lượng riêng σ kg/m nằm thành một đống trên mặt đất. Bạn cầm lấy một đầu của nó và kéo lên trên với một lực sao cho sợi xích chuyển động lên trên với vận tốc không đổi v. Hỏi tổng công mà bạn thực hiện bằng bao nhiêu, cho tới thời điểm toàn bộ sợi xích rời khỏi mặt đất? Hỏi có bao nhiêu năng lượng bị mất do nhiệt, nếu có? Giả sử rằng sợi xích là trơn, vì vậy không có ma sát giữa các phần của nó.

5.94. Xe hốt rác xuống dốc **

Một mặt phẳng nghiêng góc θ bị phủ đầy bụi. Một xe hốt rác nói chung là không có khối lượng di chuyển bằng các bánh xe được thả ra không vận tốc ban đầu và lăn xuống mặt phẳng nghiêng để hút bụi. Khối lượng riêng của bụi trên đường đi của xe là σ kg/m. Hỏi gia tốc của xe bằng bao nhiêu?

5.95. Đống xích và vật **

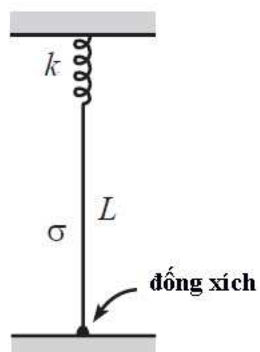
Một sợi xích có khối lượng riêng σ kg/m nằm thành một đống trên mặt sàn, với một đầu được gắn vào một vật khối lượng M. Vật được truyền một tác động và tức thời có vận tốc V_0. Gọi x là khoảng cách vật di chuyển đươc. Hỏi lực căng của sợi xích tại điểm nằm ngay bên phải của đống, nghĩa là tại điểm P chỉ ra trong Hình 5.53, có giá trị phụ thuộc vào x như thế nào? Không có ma sát trong bài toán này.



Hình 5.53:

5.96. Chạm sàn ****

Một sợi xích có khối lượng riêng σ kg/m được treo vào một lò xo có độ cứng k. Tại vị



Hình 5.54:

trí cân bằng, một phần có độ dài L của sợi xích nằm trong không khí, và phần bên dưới của sợi xích nằm thành một đống trên mặt sàn; xem Hình 5.54. Sợi xích được nâng lên một đoạn rất nhỏ, b, và sau đó được thả ra. Hỏi biên độ của dao động, như là một hàm của thời gian, là bao nhiêu?

Giả sử rằng (1) $L \gg b$, (2) sợi xích là rất mảnh, sao cho kích thước của đống trên mặt sàn là rất nhỏ so với b, (3) độ dài của sợi xích ở trong đống ban đầu là lớn hơn b, sao cho một phần của sợi xích luôn luôn tiếp xúc với mặt sàn, và (4) không có ma sát giữa các phần của sợi xích nằm bên trong đống.

5.11 Lời giải

5.1. Độ dài nhỏ nhất

Thả rơi các khối lượng qua ba lỗ, và cho hệ đạt đến vị trí cân bằng. Vị trí cân bằng là vị trí có thế năng của các khối lượng nhỏ nhất, nghĩa là, là vị trí mà độ dài của dây nằm dưới bàn dài nhất. Nói cách khác, nó là vị trí mà phần dây nằm trên mặt bàn có độ dài nhỏ nhất. Đây là cấu hình có độ dài nhỏ nhất mà chúng ta mong muốn.

Các góc tại đỉnh có giá trị bằng bao nhiêu? Lực căng trong tất cả ba sợi dây đều bằng mg, bởi vì chúng phải giữ các khối lượng. Đỉnh của sợi dây đang ở vị trí cân bằng, vì vậy lực tổng hợp tác dụng lên nó phải bằng không. Điều này suy ra rằng mỗi sợi dây phải nằm ở đường phân giác của góc tạo bởi hai sợi dây còn lại. Do đó, các góc giữa các sợi dây phải bằng 120^o.

5.2. Tiến về điểm không

Năng lượng của chất điểm là $E = mv^2/2 - A|x|^n$. Thông tin cho trong bài toán cho ta biết rằng $v = 0$ khi $x = 0$. Do đó, $E = 0$, nghĩa là có thể suy ra rằng $v = -\sqrt{2Ax^n/m}$ (chúng ta sẽ giả thiết rằng $x > 0$; trường hợp $x < 0$ sẽ được làm tương tự). Chúng ta đã chọn dấu âm của căn bởi vì chất điểm đang tiến tới điểm không. Viết x dưới dạng dx/dt và tách biến ta có

$$\int_{x_0}^{0} \frac{dx}{x^{n/2}} = -\sqrt{\frac{2A}{m}} \int_0^T dt = -T\sqrt{\frac{2A}{m}}, \tag{5.84}$$

trong đó x_0 là vị trí ban đầu và T là thời gian để chất điểm đạt tới điểm gốc tọa độ. Tích phân của vế trái là hữu hạn khi và chỉ khi $n/2 < 1$. Do đó, điều kiện để T hữu hạn là $n < 2$.

NHẬN XÉT: Nếu $0 < n < 1$, thì $V(x)$ có một điểm góc tại $x = 0$ (là điểm mà có độ dốc vô hạn ở một bên), vì vậy rõ ràng là T có giá trị hữu hạn. Nếu $n = 1$, thì độ dốc là một hằng số hữu hạn, vì vậy T cũng rõ ràng là hữu hạn. Nếu $n > 1$, thì độ dốc của $V(x)$ bằng không tại $x = 0$, vì vậy sẽ không hiển nhiên để biết cái gì sẽ xảy ra với T. Nhưng những tính toán ở trên chỉ ra rằng $n = 2$ là giá trị mà T trở thành vô hạn.

Do đó chất điểm sẽ cần một khoảng thời gian hữu hạn để đến đỉnh của một tam giác hoặc của đường cong $-Ax^{3/2}$. Nhưng nó cần một khoảng thời gian là vô hạn để đến đỉnh một parabola, một đường bậc ba, vân vân... Một đường tròn trông giống một đường parabola tại đỉnh của nó, vì vậy T cũng là vô hạn trong trường hợp này. Thực ra, bất cứ hàm đa thức $V(x)$ nào cũng yêu cầu một khoảng thời gian vô hạn T để đạt được đến một điểm cực đại địa phương, bởi vì chuỗi khai triển Taylor bắt đầu với số hạng (ít nhất là) bậc hai xung quanh một điểm cực trị. ♣

5.3. Rời khỏi quả cầu

LỜI GIẢI THỨ NHẤT: Gọi R là bán kính của quả cầu, và gọi θ là góc của khối lượng được đo từ đỉnh của quả cầu. Phương trình $F = ma$ theo phương bán kính là

$$mg\cos\theta - N = \frac{mv^2}{R}, \tag{5.85}$$

trong đó N là phản lực. Khối lượng mất tiếp xúc với quả cầu khi phản lực bằng không (nghĩa là, khi thành phần theo phương phản lực của trọng lực là vừa đủ để cho gia tốc hướng tâm của khối lượng). Do đó, khối lượng rời khỏi quả cầu khi

$$\frac{mv^2}{R} = mg\cos\theta. \tag{5.86}$$

Nhưng từ định luật bảo toàn năng lượng ta có $mv^2/2 = mgR(1-\cos\theta)$. Do đó, $v = \sqrt{2gR(1-\cos\theta)}$. Thay giá trị này vào phương trình (5.86) ta có

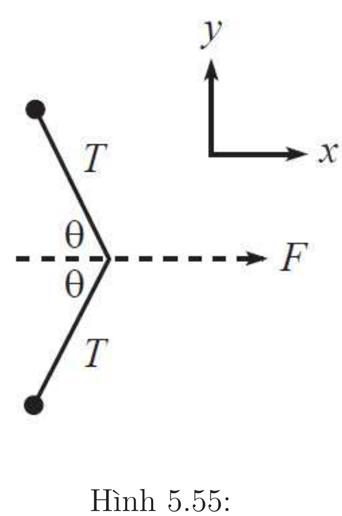
$$\cos\theta = \frac{2}{3} \quad \Longrightarrow \quad \theta \approx 48.2^{\mathrm{o}}. \tag{5.87}$$

LỜI GIẢI THỨ HAI: Giả sử (một cách không chính xác) rằng khối lượng luôn luôn tiếp xúc với quả cầu, và sau đó tìm điểm mà tại đó thành phần nằm ngang của vận tốc v bắt đầu giảm, mà điều này tất nhiên là không thể xảy ra, bởi vì phản lực không có thành phần "ngược lại". Từ phần trên, thành phần nằm ngnag của v là

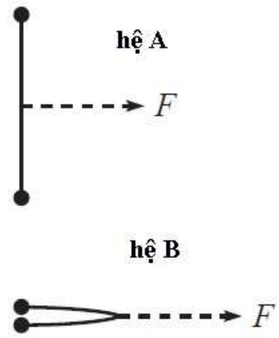
$$v_x = v\cos\theta = \sqrt{2gR(1-\cos\theta)}\cos\theta. \tag{5.88}$$

Lấy đạo hàm của biểu thức này, chúng ta tìm được giá trị lớn nhất của nó xảy ra khi $\cos\theta = 2/3$. Vì vậy đây là điểm v_x sẽ bắt đầu có giá trị giảm nếu khối lượng vẫn còn tiếp xúc với quả cầu. Nhưng mà không có lực liên kết nào có thể gây ra điều này, vì vậy khối lượng rời quả cầu khi $\cos\theta = 2/3$.

5.4. Kéo hai quả bóng khúc côn cầu



Hình 5.55:



Hình 5.56:

(a) Gọi θ là góc được định nghĩa như trong Hình 5.55. Khi đó lực căng trong sợi dây là $T = F/(2\cos\theta)$, bởi vì lực tác dụng lên điểm gấp mà không có khối lượng của dây phải bằng không. Xét quả bóng "phía trên". Thành phần của lực căng theo hướng y là $-T\sin\theta = -(F/2)\tan\theta$. Công thực hiện lên quả bóng bởi thành phần lực này do đó là

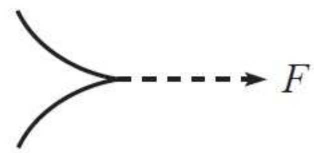
$$\begin{aligned} W_y &= \int_{\ell}^{0} \frac{-F\tan\theta}{2} dy = \int_{\pi/2}^{0} \frac{-F\tan\theta}{2} d(\ell\sin\theta) \\ &= \int_{\pi/2}^{0} \frac{-F\ell\sin\theta}{2} d\theta \\ &= \frac{F\ell\cos\theta}{2}\bigg|_{\pi/2}^{0} = \frac{F\ell}{2}. \end{aligned} \tag{5.89}$$

Sử dụng định lý về công và động năng (hoặc một cách tương đương, bằng cách tách biến và lấy tích phân $F_y = mv_y dv_y/dy$), công này có giá trị bằng $mv_y^2/2$ ngay trước khi xảy ra va chạm. Có hai quả bóng, vì vậy tổng động năng bị mất khi hai quả bóng dính vào nhau bằng hai lần giá trị này (v_x không đổi trong quá trình va chạm), và bằng Fl.

(b) Xét hai hệ, A và B (xem Hình 5.56). Hệ A là cơ cấu ban đầu, trong khi đó hệ B bắt đầu với góc θ đã bằng không. Giả sử hai quả bóng trong cả hai hệ cùng bắt đầu tại $x = 0$. Khi lực F được tác dụng, cả bốn quả bóng sẽ có cùng $x(t)$, bởi vì lực như nhau theo phương x, bằng $F/2$, được tác dụng vào tất cả bốn quả bóng tại mọi thời điểm. Sau va chạm, cả hai hệ do đó sẽ trở thành giống nhau.

Giả sử va chạm giữa các quả bóng xảy ra tại $x = d$. Tại điểm này, công $F(d + l)$ được thực hiện trong hệ A, bởi vì tâm của sợi dây (là điểm mà lực tác dụng) cuối cùng sẽ di chuyển nhiều hơn hai quả bóng một đoạn ℓ. Tuy nhiên, chỉ có công Fd được thực hiện trong hệ B. Bởi vì cả hai hệ có cùng năng lượng sau va chạm, thành phần công thêm Fl thực hiện trong hệ A phải là phần bị mất trong va chạm.

NHẬN XÉT: Lập luận trong lời giải thứ hai này có thể được sử dụng để giải bài toán trong trường hợp khi chúng ta có một sợi dây thừng có khối lượng phân bố đều (vì vậy sợi dây sẽ gập vào, như trong Hình 5.57). Trọng tâm của sợi dây thừng sẽ chuyển động giống y hệt theo cách của vị trí của hai quả bóng trong hệ B (với giả thiết rằng khối lượng của mỗi quả bóng được chọn bằng một nửa khối lượng của dây), bởi vì có cùng lực F tác dụng lên cả hai hệ. Bạn có thể chỉ ra rằng điều này suy ra lực này tác dụng lên sợi dây thừng trên một quãng đường nhiều hơn một lượng $\ell/2$ so với quãng đường nó tác dụng trong hệ B, tính đến thời điểm mà sợi dây thừng bị gập lại thành một đoạn thẳng. Từ lập luận ở trên, công $F\ell/2$ do đó phải bị mất đi và chuyển thành nhiệt ở trong sợi dây. ♣



Hình 5.57:

5.5. $\dot{y}$ không đổi

Từ định luật bảo toàn năng lượng, vận tốc của hạt vòng tại mọi thời điểm được cho bởi (chú ý rằng y là âm ở đây)

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad \Longrightarrow \quad v = \sqrt{v_0^2 - 2\mathrm{g}y}. \tag{5.90}$$

Thành phần theo phương thẳng đứng của vận tốc này là $\dot{y} = v\sin\theta$, trong đó θ là góc (âm) của sợi dây tạo với phương nằm ngang. Độ dốc của dây là $\tan\theta = dy/dx \equiv y'$, mà cho ta nhận được $\sin\theta = y'/\sqrt{1+y'^2}$. Điều kiện $\dot{y} = -v_0$, mà tương đương với $v\sin\theta = -v_0$, do đó có thể được viết dưới dạng

$$\sqrt{v_0^2 - 2\mathrm{g}y} \cdot \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = -v_0. \tag{5.91}$$

Bình phương hai vế và giải ra để tìm $y' \equiv dy/dx$ ta có $dy/dx = -v_0/\sqrt{-2gy}$. Tách biến và lấy tích phân ta có

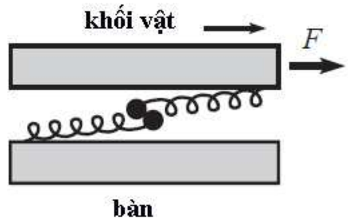
$$\int \sqrt{-2\mathrm{g}y}\,dy = -v_0 \int dx \quad \Longrightarrow \quad \frac{(-2\mathrm{g}y)^{3/2}}{3\mathrm{g}} = v_0 x, \tag{5.92}$$

trong đó hằng số tích phân được chọn là bằng không, bởi vì $(x, y) = (0, 0)$ là một điểm thuộc đường cong. Do đo,

$$y = -\frac{(3\mathrm{g}v_0 x)^{2/3}}{2\mathrm{g}}. \tag{5.93}$$

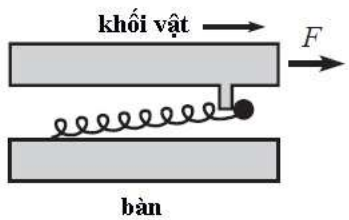
5.6. Phân chia nhiệt

Hóa ra là không thể trả lời những câu hỏi này được nếu không có thêm các thông tin được cho. Cách mà công tác dụng được chia ra như thế nào giữa các vật phụ thuộc vào việc bề mặt của chúng có dạng như thế nào. Về mặt lý thuyết thì một vật có thể nhận được toàn bộ nhiệt, trong khi vật kia không nhận được phần nhiệt nào.

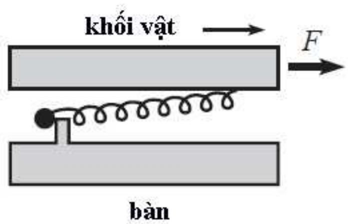


Hình 5.58:

Để hiểu được điều này, chúng ta cần phải tạo ra một mô hình miêu tả cách mà lực ma sát tác động ở đây. Nói chung thì lực ma sát xuất hiện là do sự cọ xát giữa các phân tử của bề mặt này lên bề mặt kia. Những hạt phân tử sẽ bị kéo ra khỏi vị trí cân bằng sang một bên và rồi bật lại và dao động. Chuyển động dao động này là phần động năng sẽ bị chuyển thành nhiệt. Mô hình mà chúng ta sẽ sử dụng ở đây sẽ là rất nhiều lò xo với các khối lượng gắn vào các đầu của chúng, được đặt vào cả hai bề mặt tại mặt tiếp xúc. Khi các bề mặt cọ xát vào nhau, các khối lượng sẽ bị vướng vào nhau một lúc (như được chỉ ra trong Hình 5.58), và sau đó chúng rời khỏi nhau, và rồi chúng dao động qua lại trên các lò xo. Đây là phần động năng mà chúng ta thấy sẽ chuyển thành nhiệt. Mặc dù đây là một mô hình rất đơn giản, nhưng nó cơ bản là cách mà lực ma sát xuất hiện.



Hình 5.59:



Hình 5.60:

Bây giờ, nếu tất cả đều là đối xứng giữa hai vật (nghĩa là, nếu các lò xo và các khối lượng trên một vật là giống như trên vật kia), thì cả hai vật sẽ nhận được một lượng nhiệt bằng nhau. Nhưng mọi thứ không nhất thiết phải là đối xứng. Bạn có thể tưởng tượng các lò xo trên một bề mặt là cứng hơn rất nhiều (nghĩa là, có giá trị độ cứng k lớn hơn rất nhiều) so với các lò xo trên bề mặt kia. Hoặc, bạn thậm chí có thể lấy giới hạn khi một bề mặt (ví dụ như, bề mặt của vật trong bài toán) được tạo bởi các răng cưa có độ cứng tuyệt đối, như chỉ ra trong Hình 5.59 (cho một răng cưa). Trong trường hợp này, chỉ có bề mặt bên dưới (là mặt bàn) cuối cùng sẽ nhận được nhiệt từ các chuyển động dao động của các phân tử.

Liệu kết quả về sự không đối xứng này phù hợp với kết quả mà ta nhận được từ định lý công và động năng? Thực ra, tổng công tác dụng lên vật là bằng không, bởi vì lực do bạn kéo sinh công Fd dương (trong đó $F = \mu_k N$), trong khi đó lực ma sát (là tổng của tất cả các lực do các khối lượng nhỏ của bề mặt bàn tác dụng lên các răng cưa nhỏ của vật) sinh công Fd âm. Do đó, bởi vì tổng công tác dụng lên vật là bằng không, tổng năng lượng của nó là hằng số. Và bởi vì động năng của chuyển động của nó như là một khối là hằng số, nên năng lượng nhiệt bên trong nó cũng phải là một hằng số. Nói cách khác, nó không bị nóng lên.

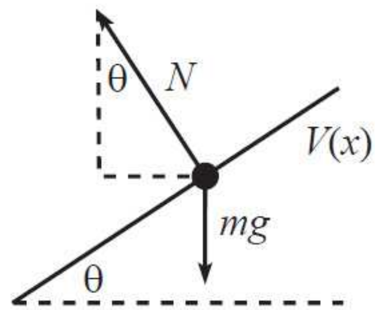
Tổng công tác dụng lên bàn trong trường hợp giả thiết này là do lực của các răng cưa tác dụng lên các khối lượng nhỏ của các lò xo. Những răng cưa này sinh một công Fd dương lên toàn bộ các hệ lò xo-khối lượng, vì vậy Fd là công tác dụng lên mặt bàn. Do đó, tổng năng lượng của nó tăng lên một lượng Fd. Và bởi vì động năng của chuyển động của nó như là một khối là một hằng số (bằng không, vì bàn đứng yên), nên năng lượng nhiệt bên trong của nó phải tăng lên một lượng Fd. Nói cách khác, nó bị nóng lên.

Bây giờ hãy xét trường hợp ngược lại, khi mặt bàn có các răng cưa tuyệt đối cứng và vật có các lò xo và các khối lượng, như chỉ ra trong Hình 5.60. Vật bây giờ là thứ sẽ bị nóng lên, bởi vì nó có các chuyển động dao động của các khối lượng. Và như ở trên, chúng ta có thể chỉ ra rằng kết quả này là nhất quán với định lý công và năng lượng như sau. Trong trường hợp này, lực từ các răng cưa của bàn không sinh công lên vật (bởi vì các răng cưa là tuyệt đối cứng nên nó không chuyển động), vì vậy tổng công tác dụng lên vật đơn giản là Fd do lực bạn kéo nó, vì vậy nó sẽ bị nóng lên. Tương tự như vậy, các khối lượng nhỏ không sinh công lên các răng cưa (bởi vì các răng cưa không chuyển động), vì vậy công tác dụng lên mặt bàn bằng không, do đó nó không bị nóng lên.

Đối với trường hợp ở giữa khi độ cứng của lò xo của hai vật là như nhau, tổng công tác dụng lên mỗi vật là $Fd/2$, trong đó d là khoảng cách và vật đi được. Điều này là đúng bởi vì hai khối lượng trong Hình 5.58, mỗi khối lượng di chuyển một khoảng cách bằng một nửa khoảng cách mà vật di chuyển được. Vì vậy công tác dụng lên vật là $Fd - Fd/2 = Fd/2$ (đây là công dương sinh ra bởi lực kéo của bạn, cộng với công âm sinh ra bởi các khối lượng nhỏ của mặt bàn). Và công tác dụng lên mặt bàn là $Fd/2$ (đây là công dương sinh ra bởi các khối lượng nhỏ của vật). Vì vậy vật và mặt bàn bị nóng lên với một năng lượng bằng nhau. Để xem thêm các thảo luận về vấn đề của bài toán này, xem Sherwood (1984).

5.7. V(x) và một ngọn đồi

LỜI GIẢI THỨ NHẤT: Xét phản lực N tác dụng lên hạt vòng tại một điểm đã cho. Gọi θ là góc



Hình 5.61:

mà tiếp tuyến của $V(x)$ tạo với phương nằm ngang, như chỉ ra trong Hình 5.61. Thành phần nằm ngang của phương trình $F = ma$ là

$$-N\sin\theta = m\ddot{x}. \tag{5.94}$$

Thành phần thẳng đứng của phương trình $F = ma$ là

$$N\cos\theta - mg = m\ddot{y} \quad \Longrightarrow \quad N\cos\theta = mg + m\ddot{y}. \tag{5.95}$$

Chia phương trình (5.94) cho phương trình (5.95) ta có

$$-\tan\theta = \frac{\ddot{x}}{\mathrm{g} + \ddot{y}}. \tag{5.96}$$

Nhưng $\tan\theta = V'(x)$. Do đó,

$$\ddot{x} = -(\mathrm{g} + \ddot{y})V'. \tag{5.97}$$

Chúng ta thấy rằng kết quả này không bằng $-gV'$. Thực ra, có một cách tổng quát để xây dựng một đường cong với độ cao $z(x)$ mà cho chuyển động theo phương ngang giống như chuyển động gây ra bởi thế năng một chiều $mgV(x)$ đối với tất cả các điều kiện đầu. Chúng ta sẽ cần $-(g+\ddot{z})z' = -gV'$, với mọi x. Nhưng tại một x đã cho, các đại lượng V' và z' là cố định, trong khi đó $\ddot{z}$ phụ thuộc vào các điều kiện đầu. Ví dụ như, nếu có một vùng uốn trong sợi dây, thì $\ddot{z}$ sẽ rất lớn nếu $\dot{z}$ là lớn. Và $\dot{z}$ (nói chung) phụ thuộc vào khoảng cách mà hạt vòng rơi xuống bao xa.

Phương trình (5.97) giúp chúng ta có thể xây dựng một trường hợp mà cho kết quả $\ddot{x} = -gV'$. Tất cả những việc mà chúng ta phải làm là loại bỏ số hạng $\ddot{y}$. Vì vậy đây là cách mà chúng ta sẽ làm. Chúng ta cầm sợi dây $y = V(x)$ và di chuyển nó lên và/hoặc xuống theo một cách chính xác nào đó để làm cho hạt vòng luôn ở một độ cao không đổi so với mặt đất. (Thực ra, làm cho hạt vòng có vận tốc không đổi là đủ.) Điều này làm cho số hạng $\ddot{y}$ biến mất như chúng ta mong muốn. Việc di chuyển theo phương thẳng đứng không làm thay đổi độ dốc V' tại một điểm có giá trị x đã cho, vì vậy góc θ trong phương trình trên là không thay đổi.

Chú ý rằng đại lượng y ở đây là vị trí theo phương thẳng đứng của hạt vòng. Nó bằng $V(x)$ nếu đường cong là nằm yên, nhưng nó sẽ không bằng $V(x)$ nữa nếu đường cong bị di chuyển lên xuống.

> NHẬN XÉT: Có một trường hợp mà $\ddot{x}$ (xấp xỉ) bằng $-gV'$, thậm chí khi sợi dây vẫn đứng yên. Trong trường hợp dao động nhỏ của hạt vòng xung quanh điểm cực tiểu của $V(x)$, $\ddot{y}$ là nhỏ so với g. Do đó, phương trình (5.97) sẽ cho thấy rằng $\ddot{x}$ là xấp xỉ bằng $-gV'$. Vì vậy, đối với dao động nhỏ, sẽ là hợp lý khi mô hình một chất điểm chuyển động với thế năng $mgV(x)$ trong trường hợp một chiều như một chất điểm trượt trong một thung lũng có độ cao được cho bởi $y = V(x)$. ♣

LỜI GIẢI THỨ HAI: Thành phần của trọng lực dọc theo sợi dây là nguyên nhân gây ra sự thay đổi vận tốc của hạt vòng. Nghĩa là,

$$-\,\mathrm{g}\sin\theta = \frac{dv}{dt}, \tag{5.98}$$

trong đó θ được cho bởi

$$\tan\theta = V'(x) \quad\Longrightarrow\quad \sin\theta = \frac{V'}{\sqrt{1+V'^2}}, \quad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+V'^2}}. \tag{5.99}$$

Tuy nhiên, chúng ta không quan tâm đến tốc độ thay đổi của v, mà quan tâm đến thay đổi của $\dot{x}$. Dựa vào điều này, chúng ta hãy viết v phụ thuộc vào $\dot{x}$. Bởi vì $\dot{x} = v\cos\theta$, ta có $v = \dot{x}/\cos\theta = \dot{x}\sqrt{1+V'^2}$ (dấu chấm ở đây là ký hiệu của d/dt, dấu phẩy là ký hiệu của d/dx). Do đó, phương trình (5.98) trở thành

$$\begin{aligned}\frac{-\mathrm{g}V'}{\sqrt{1+V'^2}} &= \frac{d}{dt}\left(\dot{x}\sqrt{1+V'^2}\right)\\ &= \ddot{x}\sqrt{1+V'^2} + \frac{\dot{x}V'(dV'/dt)}{\sqrt{1+V'^2}}.\end{aligned} \tag{5.100}$$

Vì vậy, $\ddot{x}$ được cho bởi

$$\ddot{x} = \frac{-\mathrm{g}V'}{1+V'^2} - \frac{\dot{x}V'(dV'/dt)}{1+V'^2}. \tag{5.101}$$

Lát nữa chúng ta sẽ rút gọn biểu thức này, nhưng đầu tiên hãy đưa ra một nhận xét.

> NHẬN XÉT: Một sai lầm hay gặp cho nghiệm của bài toán này là như sau. Gia tốc dọc theo đường cong là $g\sin\theta = -g(V'/\sqrt{1+V'^2})$. Tính toán thành phần theo phương nằm ngang

của gia tốc này sẽ đem lại một hệ số của $\cos\theta = 1/\sqrt{1+V'^2}$. Do đó, chúng ta có thể nghĩ rằng

$$\ddot{x} = \frac{-gV'}{1+V'^2} \quad \text{(không đúng)}. \tag{5.102}$$

Chúng ta vừa đã bỏ qua số hạng thứ hai trong phương trình (5.101). Vậy đâu là sai lầm của chúng ta? Lỗi ở đây là chúng ta đã quên không tính vào sự thay đổi của độ dốc của đường cong có thể xảy ra (phương trình (5.102) là đúng cho các đường thẳng). Chúng ta chỉ đề cập đến gia tốc do sự thay đổi của *độ lớn vận tốc*. Chúng ta đã quên không xét đến gia tốc gây ra do sự thay đổi *hướng* của chuyển động (số hạng mà chúng ta đã bỏ qua là số hạng có dV'/dt). Một cách trực giác, nếu chúng ta có một vùng uốn rất gấp trong sợi dây, thì $\dot{x}$ có thể thay đổi với một tốc độ lớn tùy ý, thậm chí nếu v gần như là không đổi. Dựa vào thực tế này, phương trình (5.102) là hoàn toàn không chính xác, bởi vì nó bị chặn (thực tế là bởi $g/2$). ♣

Để rút gọn phương trình (5.101), chú ý rằng $V' \equiv dV/dx = (dV/dt)/(dx/dt) \equiv \dot{V}/\dot{x}$ ($\dot{V}$ chỉ là tốc độ thay đổi độ cao của hạt vòng). Do đó, tử số của số hạng thứ hai trong vế phải của phương trình (5.101) là

$$\begin{aligned}\dot{x}V'\frac{dV'}{dt} &= \dot{x}V'\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{V}}{\dot{x}}\right) = \dot{x}V'\left(\frac{\dot{x}\ddot{V} - \dot{V}\ddot{x}}{\dot{x}^2}\right) \\ &= V'\ddot{V} - V'\ddot{x}\left(\frac{\dot{V}}{\dot{x}}\right) = V'\ddot{V} - V'^2\ddot{x}.\end{aligned} \tag{5.103}$$

Thay kết quả này vào trong phương trình (5.101) ta nhận được

$$\ddot{x} = -(g+\ddot{V})V', \tag{5.104}$$

phù hợp với phương trình (5.97), bởi vì $y = V(x)$ nếu sợi dây đứng yên. Phương trình (5.104) chỉ có giá trị khi hàm $V(x)$ là cố định. Nếu chúng ta cầm sợi dây và bắt đầu di chuyển nó lên xuống, thì nghiệm ở trên sẽ không còn đúng nữa, bởi vì điểm xuất phát của chúng ta, phương trình (5.98), là dựa trên giả thiết rằng trọng lực là lực duy nhất sinh công lên hạt vòng. Nhưng nếu chúng ta di chuyển sợi dây, thì phản lực cũng sẽ sinh công.

Hóa ra rằng đối với một sợi dây chuyển động, chúng ta đơn giản chỉ cần thay $\ddot{V}$ trong phương trình (5.104) bởi $\ddot{y}$, rồi sau đó nhận được phương trình (5.97). Điều này có thể được thấy khi xem xét mọi thứ trong hệ quy chiếu có gia tốc theo phương thẳng đứng mà trong đó sợi dây là không chuyển động. Chúng ta sẽ không xét đến hệ quy chiếu có gia tốc cho tới Chương 10, vì vậy chúng ta chỉ sử dụng ở đây kết quả là sẽ có thêm một lực "tịnh tiến" ảo trong hệ quy chiếu có gia tốc này, và hệ quả của điều này là hạt vòng sẽ nghĩ rằng nó đang ở trong một thế giới trong đó gia tốc của trọng lực là $g + \ddot{h}$ (nếu $\ddot{h}$ là dương, thì hạt vòng sẽ nghĩ là trọng lực sẽ lớn hơn), trong đó h là vị trí của tay bạn đang tăng tốc cho sợi dây. Trong hệ quy chiếu mới này, sợi dây là đứng yên, vì vậy nghiệm ở trên là có giá trị. Do đó với việc gia tốc g trong phương trình (5.104) được thay bởi $g+\ddot{h}$, chúng ta có $\ddot{x} = -(g+\ddot{h}+\ddot{V})V'$. Nhưng $\ddot{V}$ (là thành phần gia tốc theo phương thẳng đứng của hạt vòng trong hệ tọa độ mới) cộng với $\ddot{h}$ (là thành phần gia tốc theo phương thẳng đứng của hệ quy chiếu mới so với mặt đất) bằng $\ddot{y}$ (là, theo định nghĩa của chúng ta trong phần lời giải thứ nhất, thành phần gia tốc theo phương thẳng đứng của hạt vòng đối với mặt đất). Do đó chúng ta vừa nhận lại được phương trình (5.97).

5.8. Khối lượng treo

Chúng ta sẽ tính toán vị trí cân bằng y_0, và sau đó sử dụng $\omega = \sqrt{V''(y_0)/m}$. Đạo hàm của V là

$$V'(y) = ky + mg. \tag{5.105}$$

Do đó, $V'(y) = 0$ khi $y = -mg/k \equiv y_0$. Đạo hàm bậc hai của V là

$$V''(y) = k. \tag{5.106}$$

Do đó chúng ta có

$$\omega = \sqrt{\frac{V''(y_0)}{m}} = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{5.107}$$

NHẬN XÉT: Giá trị này không phụ thuộc vào y_0, điều này hợp lý bởi vì ảnh hưởng duy nhất của trọng lực là làm thay đổi vị trí cân bằng. Chính xác hơn, nếu y_r là vị trí tương đối đối với y_0 (sao cho $y \equiv y_0 + y_r$), thì tổng lực tác dụng như là một hàm của y_r là

$$F(y_r) = -k(y_0 + y_r) - mg = -k\left(-\frac{mg}{k} + y_r\right) - mg = -ky_r, \tag{5.108}$$

vì vậy nó trông vẫn giống là lực của một lò xo thông thường. (Điều này chỉ đúng đối với các lò xo tuyến tính.) Theo một cách khác, bạn có thể sử dụng thế năng; đây là nhiệm vụ của Bài tập luyện tập 5.42. ♣

5.9. Những dao động nhỏ

Chúng ta sẽ tìm vị trí cân bằng x_0, và sau đó sử dụng $\omega = \sqrt{V''(x_0)/m}$. Đạo hàm của V là

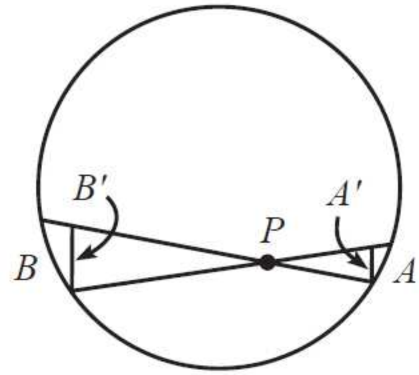
$$V'(x) = -Ce^{-ax}x^{n-1}(n - ax). \tag{5.109}$$

Do đó, $V'(x) = 0$ khi $x = n/a \equiv x_0$. Đạo hàm bậc hai của V là

$$V''(x) = -Ce^{-ax}x^{n-2}\Big((n-1-ax)(n-ax) - ax\Big). \tag{5.110}$$

Thay $x_0 = n/a$ vào sẽ rút gọn biểu thức này được một ít, và ta tìm được

$$\omega = \sqrt{\frac{V''(y_0)}{m}} = \sqrt{\frac{Ce^{-n}n^{n-1}}{ma^{n-2}}}. \tag{5.111}$$



Hình 5.62:

5.10. Lực hấp dẫn bằng không bên trong một vỏ cầu

Gọi a là khoảng cách từ P tới mảnh A, và gọi b là khoảng cách từ điểm P tới mảnh B (xem Hình 5.62). Kẻ các đáy "vuông góc" của các hình nón, và gọi chúng là A' và B'. Tỷ số của các diện tích của A' và B' là a^2/b^2. Điểm mấu chốt ở đây là góc giữa các mặt phẳng của A và A' bằng góc giữa B và B'. Điều này đúng vì dây cung giữa A và B giao với đường tròn tạo thành các góc bằng nhau tại hai đầu của nó. Vì vậy tỷ số của diện tích của A và B cũng là a^2/b^2. Nhưng lực hấp dẫn giảm theo dạng $1/r^2$, và điều này triệt tiêu với tỷ số a^2/b^2 của hai diện tích. Do đó, các lực tại P gây ra bởi A và B (mà có thể coi là các khối lượng chất điểm, bởi vì các hình nón được giả thiết là rất mảnh) có độ lớn bằng nhau; và tất nhiên là có hướng ngược chiều nhau. Nếu chúng ta vẽ một số lượng đủ lớn các hình nón để phủ hết toàn bộ vỏ cầu, thì các thành phần lực tác dụng từ những mảnh nhỏ này trên toàn bộ vỏ cầu sẽ bị triệt tiêu từng đôi một, vì vậy chúng ta có lực không tại P. Điều này là đúng đối với mọi điểm P bên trong vỏ cầu.

NHẬN XÉT: Rất thú vị là lực tác dụng bên trong một vỏ hình ellipse có khối lượng riêng không đổi (trên một đơn vị thể tích) cũng bằng không, với giả thiết rằng vỏ này được định nghĩa là vùng giữa hai mặt có phương trình $ax^2 + by^2 + cz^2 = k$, với hai giá trị k khác nhau. Nói tóm lại, điều này là đúng bởi vì một vỏ ellipse đơn giản là một vỏ cầu bị kéo giãn ra. Một cách chi tiết: Giả sử vỏ cầu ở trên có độ dày là dr (đại lượng này không quan trọng đối với vỏ cầu, nhưng nó quan trọng đối với trường hợp vỏ ellipse). Từ phần trên, chúng ta biết rằng các khối lượng của đáy của các hình nón mảnh trong vỏ cầu gây ra các lực triệt tiêu nhau. Nếu chúng ta kéo dài vỏ cầu thành một vỏ ellipse (đồng nhất theo mỗi phương, nhưng hệ số kéo dài theo ba phương có thể khác nhau), thì các khoảng cách từ các đáy tới điểm P vẫn có tỷ số là a trên b (như bạn có thể kiểm tra lại). Và khối lượng các đáy vẫn có tỷ số là a^2 trên b^2, bởi vì khối lượng của các đáy thay đổi với cùng một hệ số. Điều này là đúng bởi vì mọi khối lập phương vô cùng bé bên trong hai đáy này thay đổi với cùng một hệ số (bằng $f_x f_y f_z$, trong đó các hệ số f là các hệ số kéo dài theo mỗi phương). Vì vậy khối lượng của các đáy vẫn có tỷ số là a^2 trên b^2, và chúng ta cũng có các lực hấp dẫn triệt tiêu nhau giống như lập luận trong phần vỏ cầu. Chú ý rằng kết quả không này không còn đúng đối với trường hợp vỏ ellipse có độ dày không đổi, bởi vì một vỏ như thế này không phải là kết quả của việc kéo giãn một vỏ cầu (bởi vì việc kéo giãn này sẽ cho một vỏ ellipse mà dày hơn tại hai đầu của nó vì tại hai đầu này vỏ ellipse sẽ "nhọn" hơn). ♣

5.11. Vận tốc thoát

(a) Trường hợp tới hạn là khi chất điểm vừa đủ năng lượng để đến vô cùng, nghĩa là, nó có vận tốc bằng không tại vô cùng. Định luật bảo toàn năng lượng đối với trường hợp này cho ta

$$\frac{1}{2}mv_{\text{thoát}}^2 - \frac{GMm}{R} = 0 + 0. \tag{5.112}$$

Nói cách khác, động năng ban đầu, $mv_{\text{thoát}}^2/2$, phải được tính toán sao cho có thể đạt được thế năng, GMm/R. Do đó,

$$v_{\text{thoát}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}. \tag{5.113}$$

Sử dụng gia tốc, $g = GM/R^2$, tại bề mặt của hành tinh, chúng ta có thể viết lại vận tốc này dưới dạng $v_{\text{thoát}} = \sqrt{2gR}$. Sử dụng $M = 4\pi\rho R^3/3$, chúng ta cũng có thể viết lại nó dưới dạng $v_{\text{thoát}} = \sqrt{8\pi G R^2 \rho/3}$. Vì vậy đối với một giá trị của khối lượng riêng đã cho ρ, $v_{\text{thoát}}$ tăng theo R. Sử dụng giá trị của g và R cho trong Phụ lục J, ta có:

$$\text{Đối với trái đất, } v_{\text{thoát}} = \sqrt{2gR} \approx \sqrt{2(9.8\,\text{m/s}^2)(6.4\cdot 10^6\text{m})} \approx 11.2\,\text{km/s}.$$

$$\text{Đối với mặt trăng, } v_{\text{thoát}} = \sqrt{2gR} \approx \sqrt{2(1.6\,\text{m/s}^2)(1.7\cdot 10^6\text{m})} \approx 2.3\,\text{km/s}.$$

$$\text{Đối với mặt trời, } v_{\text{thoát}} = \sqrt{2gR} \approx \sqrt{2(270\,\text{m/s}^2)(7.0\cdot 10^6\text{m})} \approx 620\,\text{km/s}.$$

NHẬN XÉT: Một câu hỏi hợp lý khác để hỏi là: vận tốc thoát khỏi mặt trời của một vật được đặt tại vị trí của trái đất (nhưng tưởng tượng là trái đất không còn ở vị trí đó nữa)? Câu trả lời là $\sqrt{2GM_S/R_{ES}}$, trong đó R_{ES} là khoảng cách giữa trái đất và mặt trời. Giá trị số của vận tốc này là

$$\sqrt{2(6.67\cdot 10^{-11}\ \text{m}^3/\text{kg s}^2)(2\cdot 10^{30}\ \text{kg})/(1.5\cdot 10^{11}\ \text{m})} \approx 42\ \text{km/s}. \tag{5.114}$$

Nếu bạn muốn đem trái đất đặt trở lại vào vị trí của nó (nhưng hãy giả sử là nó nằm yên và không tự quay) và tìm vận tốc thoát (khỏi cả mặt trời mà trái đất) từ một điểm nằm trên bề mặt của trái đất, bạn không thể chỉ cộng hai kết quả 42 km/s và 11.2 km/s. Thực ra bạn phải lấy căn của tổng bình phương của hai giá trị đó. Điều này có được từ phương trình (5.112) và từ thực tế là các thế năng đơn giản là có thể lấy tổng được. Kết quả là vào khoảng 43.5 km/s. Nhiệm vụ của Bài tập luyện tập 5.60 là đi tìm vận tốc thoát nếu chuyển động quay quanh mặt trời của trái đất cũng được tính vào. ♣

(b) Để có được một kết quả gần đúng, chúng ta sẽ giả sử rằng vận tốc nhảy lên của một người trên hành tinh nhỏ đó bằng với vận tốc nhảy trên trái đất. Điều này có thể không hoàn toàn đúng, nhưng nó đủ cho mục đích của chúng ta ở đây. Một người có thể nhảy tối đa lên cao khoảng một mét. Với khả năng nhảy lên này, định luật bảo toàn năng lượng cho ta $mv^2/2 = mg(1\text{m})$. Do đó, $v = \sqrt{2g(1\text{m})} \approx \sqrt{20}$m/s. Vì vậy chúng ta muốn $\sqrt{20}$m/s$= \sqrt{8\pi G R^2 \rho/3}$. Sử dụng $\rho \approx 5500\text{kg/m}^3$, ta tìm được $R \approx 2.5$km. Trên một hành tinh như thế này, bạn nên bước đi một cách nhẹ nhàng.

5.12. Tỷ số của các thế năng

Gọi ρ là khối lượng riêng của khối lập phương. Gọi $V_\ell^{\text{góc}}$ là thế năng của một khối lượng đặt tại góc của một khối lập phương có cạnh dài ℓ, và gọi $V_\ell^{\text{tâm}}$ là thế năng của một khối lượng m đặt tại tâm của một khối lập phương có cạnh dài ℓ. Sử dụng phân tích thứ nguyên ta có

$$V_\ell^{\text{góc}} \propto \frac{G(\rho\ell^3)m}{\ell} \propto \ell^2. \tag{5.115}$$

Do đó,[32]

$$V_\ell^{\text{góc}} = 4V_{\ell/2}^{\text{góc}}. \tag{5.116}$$

Nhưng một khối lập phương có chiều dài ℓ có thể được tạo thành bởi tám khối lập phương có chiều dài $\ell/2$. Vì vậy bởi nguyên lý chồng chất, ta có

$$V_\ell^{\text{tâm}} = 8V_{\ell/2}^{\text{góc}}, \tag{5.117}$$

bởi vì tâm của khối lập phương lớn là góc của tám khối lập phương nhỏ (và bởi vì thế năng có thể lấy tổng được). Do đó,

$$\frac{V_\ell^{\text{góc}}}{V_\ell^{\text{tâm}}} = \frac{4V_{\ell/2}^{\text{góc}}}{8V_{\ell/2}^{\text{góc}}} = \frac{1}{2}. \tag{5.118}$$

5.13. Xuyên qua một lỗ thủng

(a) Do đối xứng, chỉ có thành phần của lực hấp dẫn theo phương vuông góc với mặt tấm là tồn tại. Một mảnh khối lượng dm nằm tại vị trí có bán kính r trên tấm gây ra lực hấp dẫn bằng $Gm(dm)/(r^2 + x^2)$. Để nhận được thành phần vuông góc với mặt tấm của lực này,

[32] Nói cách khác, giả sử chúng ta kéo dài một khối lập phương chiều dài $\ell/2$ thành khối lập phương chiều dài ℓ. Nếu chúng ta xét các mảnh nhỏ tương ứng của hai khối lập phương này, thì mảnh lớn hơn có khối lượng gấp $2^3 = 8$ lần khối lượng của mảnh nhỏ. Nhưng các khoảng cách tương ứng trong khối lớn chỉ gấp hai lần so với khối nhỏ. Vì vậy, các mảnh của khối lớn hơn góp phần thế năng vào $V_\ell^{\text{góc}}$ gấp $8/2 = 4$ lần so với phần thế năng mà các mảnh nhỏ góp vào $V_{\ell/2}^{\text{góc}}$.

chúng ta phải nhân nó với $x/\sqrt{r^2+x^2}$. Cắt tấm phẳng thành các vành tròn có khối lượng $dm = (2\pi r dr)\sigma$, chúng ta tìm được tổng lực tác dụng là

$$\begin{aligned} F(x) = -\int_R^\infty \frac{Gm(2\pi r\sigma\ dr)x}{(r^2+x^2)^{3/2}} &= 2\pi\sigma\ Gmx(r^2+x^2)^{-1/2}\Big|_{r=R}^{r=\infty} \\ &= -\frac{2\pi\sigma\ Gmx}{\sqrt{R^2+x^2}}. \end{aligned} \tag{5.119}$$

Chú ý rằng nếu $R = 0$ (nghĩa là chúng ta có một tấm phẳng đồng nhất không có lỗ nào), thì $F = -2\pi\sigma G m$, mà giá trị này không phụ thuộc vào khoảng cách từ tấm phẳng.

(b) Nếu $x \ll R$, thì phương trình (5.119) cho ta $F(x) \approx -2\pi\sigma Gmx/R$, vì vậy phương trình $F = ma$ cho ta

$$\ddot{x} + \left(\frac{2\pi\sigma G}{R}\right)x = 0. \tag{5.120}$$

Tần số của dao động nhỏ do đó bằng

$$\omega = \sqrt{\frac{2\pi\sigma G}{R}}, \tag{5.121}$$

mà không phụ thuộc vào m.

> NHẬN XÉT: Với giá trị thông thường trong cuộc sống của R, giá trị này rất nhỏ bởi vì G quá nhỏ. Hãy xem nó có giá trị bằng khoảng bao nhiêu. Nếu tấm phẳng có độ dày là d, và nếu nó được làm từ vật liệu có khối lượng riêng ρ (trên một đơn vị thể tích), thì $\sigma = \rho d$. Vì vậy $\omega = \sqrt{2\pi\rho d G/R}$. Trong phân tích ở trên, chúng ta đã giả sử rằng tấm phẳng là cực kỳ mỏng. Trong thực tế, chúng ta cần d nhỏ hơn rất nhiều so với biên độ của dao động. Nhưng biên độ dao động này cũng phải nhỏ hơn rất nhiều so với R để cho các xấp xỉ của chúng ta là hợp lý. Vì vậy chúng ta đi đến kết luận là $d \ll R$. Để có được giá trị xấp xỉ của cận trên của ω, ta hãy chọn $d/R = 10$. Và giả sử tấm phẳng của chúng ta được làm bằng vàng (với $\rho \approx 2\cdot 10^4 \mathrm{kg/m^3}$). Khi đó chúng ta tìm được $\omega \approx 1\cdot 10^{-3}\mathrm{s}^{-1}$, tương ứng với dao động có chu kỳ là 100 phút. Với một hệ tương tự có chứa các hạt tích điện, tần số này lớn hơn rất nhiều, bởi vì lực điện tích là mạnh hơn rất nhiều so với lực hấp dẫn. ♣

(c) Tích phân lực trong phương trình (5.119) để nhận được hàm thế năng (với gốc thế năng là tại tâm của lỗ) ta có

$$\begin{aligned} V(x) = -\int_0^x F(x)dx &= \int_0^x \frac{2\pi\sigma Gmx\ dx}{\sqrt{R^2+x^2}} \\ &= 2\pi\sigma Gm\sqrt{R^2+x^2}\Big|_0^x = 2\pi\sigma Gm\Big(\sqrt{R^2+x^2}-R\Big). \end{aligned} \tag{5.122}$$

Từ định luật bảo toàn năng lượng, vận tốc tại tâm của lỗ được cho bởi phương trình $mv^2/2 = V(x)$. Do đó,

$$v = 2\sqrt{\pi\sigma G\left(\sqrt{R^2+x^2} - R\right)}. \tag{5.123}$$

Đối với $x \gg R$ kết quả này rút gọn về $v \approx 2\sqrt{\pi\sigma G x}$.

> NHẬN XÉT: Bạn cũng có thể nhận được kết quả cuối cùng này bằng việc chú ý rằng đối với giá trị x lớn, lực trong phương trình (5.119) có dạng $F = -2\pi\sigma G m$. Đây là lực không đổi, vì vậy về cơ bản là nó giống như một lực trọng lực $F = mg'$, trong đó $g' \equiv 2\pi\sigma G$. Nhưng chúng ta biết rằng trong trường hợp quen thuộc này, $v = \sqrt{2g'h} \to \sqrt{2(2\pi\sigma G)x}$ như kết quả trên. ♣

5.14. Quả bóng tuyết

Tất cả động lượng của quả bóng tuyết được truyền vào trái đất, mà làm cho trái đất sau đó dịch chuyển (và quay) nhanh hơn một chút (hoặc chậm hơn, tùy thuộc vào việc bạn ném quả bóng tuyết theo hướng nào).

Thế còn năng lượng thì sao? Gọi m và v là khối lượng và vận tốc ban đầu của quả bóng tuyết. Gọi M và V là khối lượng và vận tốc về sau của trái đất (đối với hệ quy chiếu ban đầu đứng yên của trái đất). Bởi vì $m \ll M$, định luật bảo toàn động lượng cho ta $V \approx mv/M$. Động năng của trái đất do đó bằng

$$\frac{1}{2}M\left(\frac{mv}{M}\right)^2 = \frac{1}{2}mv^2\left(\frac{m}{M}\right) \ll \frac{1}{2}mv^2. \tag{5.124}$$

Cũng có động năng quay của trái đất có độ lớn cùng bậc với động năng trên, nhưng điều này không quan trọng. Chúng ta thấy rằng về cơ bản thì không có phần năng lượng nào của quả bóng được chuyển qua trái đất. Do đó tất cả năng lượng của nó sẽ chuyển thành nhiệt, mà làm cho một phần của quả bóng bị tan chảy (và/hoặc làm bức tường nóng lên). Đây là một kết quả tổng quát đối với một vật nhỏ va chạm với một vật lớn: Vật lớn sẽ nhận hầu như toàn bộ tất cả động lượng nhưng về cơ bản thì không nhận bất cứ phần năng lượng nào (ngoại trừ khả năng là năng lượng dưới dạng nhiệt).

5.15. Đẩy một chiếc xe

Gọi vận tốc của xe là $v(t)$. Xét va chạm của một quả bóng có khối lượng dm với chiếc xe. Trong hệ quy chiếu tức thời đứng yên gắn với xe, vận tốc của quả bóng là $u - v$. Trong hệ quy chiếu này, quả bóng sẽ bật lại với vận tốc không đổi sau khi va chạm (bởi vì chiếc xe có khối lượng lớn hơn quả bóng rất nhiều), vì vậy động lượng của nó thay đổi $-2(u-v)dm$. Đây cũng là phần động lượng thay đổi trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm, bởi vì hai hệ quy chiếu được liên hệ với nhau bởi một vận tốc đã cho tại mọi thời điểm. Do đó, trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm chiếc xe nhận được một phần động lượng là $2(u-v)dm$ cho mỗi lần một quả bóng va chạm vào nó. Tốc độ thay đổi động lượng của chiếc xe (nghĩa là, lực tác dụng vào nó) do đó bằng

$$\frac{dp}{dt} = 2\sigma'(u-v), \tag{5.125}$$

trong đó $\sigma' \equiv dm/dt$ là tần suất của khối lượng quả bóng va chạm với xe. σ' được biểu diễn qua σ bởi $\sigma' = \sigma(u-v)/u$, bởi vì mặc dù bạn ném các quả bóng với vận tốc là u, thì vận tốc tương đối của quả bóng đối với chiếc xe chỉ là $(u-v)$. Do đó ta có

$$\begin{aligned} M\frac{dv}{dt} = \frac{2(u-v)^2\sigma}{u} \quad &\Longrightarrow \quad \int_0^v \frac{dv}{(u-v)^2} = \frac{2\sigma}{Mu}\int_0^t dt \\ &\Longrightarrow \quad \frac{1}{u-v} - \frac{1}{u} = \frac{2\sigma t}{Mu} \\ &\Longrightarrow \quad v(t) = \frac{\left(\frac{2\sigma t}{M}\right)u}{1+\frac{2\sigma t}{M}}. \end{aligned} \tag{5.126}$$

Chú ý rằng $v \to u$ khi $t \to \infty$ và kết quả này là hợp lý. Viết vận tốc này dưới dạng $u(1-1/(1+2\sigma t/M))$, chúng ta có thể tích phân nó để nhận được hàm vị trí,

$$x(t) = ut - \frac{Mu}{2\sigma}\ln\left(1+\frac{2\sigma t}{M}\right), \tag{5.127}$$

trong đó hằng số tích phân bằng không bởi vì $x=0$ tại $t=0$. Chúng ta thấy rằng mặc dù vận tốc này tiến tới u, chiếc xe cuối cùng sẽ ở đằng sau một vật chuyển động với vận tốc không đổi u một khoảng cách lớn tùy ý (ví dụ như, giả sử rằng quả bóng đầu tiên bạn ném trượt chiếc xe và nó tiếp tục chuyển động về phía trước với vận tốc u).

5.16. Đẩy một chiếc xe lần nữa

Chúng ta có thể sử dụng lại một số kết quả trong bài toán trước. Sự thay đổi duy nhất trong việc tính toán lực tác dụng lên chiếc xe là bởi vì các quả bóng không bật lại, nên chúng ta không lấy hệ số 2 trong phương trình (5.125) nữa. Do đó lực tác dụng lên xe là

$$m\frac{dv}{dt} = \frac{(u-v)^2\sigma}{u}, \tag{5.128}$$

trong đó $m(t)$ là khối lượng của xe cộng với khối lượng của các quả bóng ở trong xe, như là một hàm của thời gian. Sự khác nhau căn bản giữa bài toán này và bài toán trước là khối lượng m này thay đổi bởi vì các quả bóng là rơi vào trong xe. Từ bài toán trước, tần suất của khối lượng bóng rơi vào trong xe là $\sigma' = \sigma(u-v)/u$. Do đó,

$$\frac{dm}{dt} = \frac{(u-v)\sigma}{u}. \tag{5.129}$$

Bây giờ chúng ta phải giải hai phương trình vi phân này. Chia phương trình (5.128) cho phương trình (5.129), và tách biến, ta có[33]

$$\int_0^v \frac{dv}{u-v} = \int_M^m \frac{dm}{m} \quad \Longrightarrow \quad -\ln\left(\frac{u-v}{u}\right) = \ln\left(\frac{m}{M}\right) \quad \Longrightarrow \quad m = \frac{Mu}{u-v}. \tag{5.130}$$

Chú ý rằng $m \to \infty$ khi $v \to u$ và đây là kết quả hợp lý. Thay giá trị này của m vào trong phương trình (5.128) hoặc (5.129) ta có

$$\begin{aligned} \int_0^v \frac{dv}{(u-v)^3} = \int_0^t \frac{\sigma\, dt}{Mu^2} \quad &\Longrightarrow \quad \frac{1}{2(u-v)^2} - \frac{1}{2u^2} = \frac{\sigma t}{Mu^2} \\ &\Longrightarrow \quad v(t) = u - \frac{u}{\sqrt{1+\frac{2\sigma t}{M}}}. \end{aligned} \tag{5.131}$$

Chú ý rằng $v \to u$ khi $t \to \infty$ và nó phải như vậy. Tích phân vận tốc này để nhận được hàm vị trí, ta có

$$x(t) = ut - \frac{Mu}{\sigma}\sqrt{1+\frac{2\sigma t}{M}} + \frac{Mu}{\sigma}, \tag{5.132}$$

trong đó hằng số tích phân được chọn sao cho $x = 0$ khi $t = 0$. Đối với một thời gian t đã cho, vận tốc $v(t)$ trong phương trình (5.131) nhỏ hơn so với vận tốc $v(t)$ trong phương trình (5.126) của bài toán trước, điều này có thể dễ dàng nhìn ra nếu chúng ta viết vận tốc sau dưới dạng $u(1 - 1(1 + 2\sigma t/M))$. Điều này hợp lý, bởi vì trong bài toán này các quả bóng ít có tác dụng lên $v(t)$, bởi vì (1) chúng không bật lại về sau, và (2) khối lượng của hệ xe-các quả bóng là lớn hơn khối lượng của hệ chỉ có xe.

5.17. Xô thủng

(a) LỜI GIẢI THỨ NHẤT: Vị trí ban đầu là $x = L$. Từ tốc độ rò cát đã cho suy ra rằng khối lượng của xô tại vị trí x là $m = M(x/L)$. Do đó, phương trình $F = ma$ cho ta $-T = (Mx/L)\ddot{x}$. Viết gia tốc dưới dạng vdv/dx, và sau đó tách biến rồi lấy tích phân, ta có

$$-\frac{TL}{M}\int_L^x \frac{dx}{x} = \int_0^v vdv \quad \Longrightarrow \quad -\frac{TL}{M}\ln\left(\frac{x}{L}\right) = \frac{v^2}{2}. \tag{5.133}$$

Động năng tại vị trí x do đó bằng

$$E = \frac{mv^2}{2} = \left(\frac{Mx}{L}\right)\frac{v^2}{2} = -Tx\ln\left(\frac{x}{L}\right). \tag{5.134}$$

Biểu diễn qua phân số $z \equiv x/L$, ta có $E = -TLz\ln z$. Cho $dE/dz = 0$ để tìm giá trị lớn nhất ta có

$$z = \frac{1}{e} \quad \Longrightarrow \quad E_{\max} = \frac{TL}{e}. \tag{5.135}$$

[33]Chúng ta cũng có thể nhận được phương trình này một cách nhanh chóng bởi cách viết ra định luật bảo toàn động lượng trong khoảng thời gian khi một khối lượng dm rơi vào trong xe: $dmu + mv = (m + dm)(v + dv)$. Điều này giúp ta có được phương trình đầu tiên trong phương trình (5.130). Nhưng chúng ta vẫn cần sử dụng một trong hai phương trình (5.128) và (5.129) cho các phần sau.

Chú ý rằng vị trí (dạng tỷ số) của $E_{\max}$ không phụ thuộc gì vào M, T và L, nhưng giá trị lớn nhất này phụ thuộc vào T và L. Những kết quả này có thể tìm được bằng phương pháp phân tích thứ nguyên.

NHẬN XÉT: Chúng ta đã bắt đầu lời giải này bằng cách viết phương trình $F = ma$, trong đó m là khối lượng của xô. Bạn có thể thắc mắc là tại sao chúng ta không sử dụng phương trình $F = dp/dt$ trong đó p là động lượng của xô. Nếu làm điều này chúng ta sẽ nhận được một kết quả khác, bởi vì $dp/dt = d(mv)/dt = ma + (dm/dt)v$. Chúng ta đã sử dụng $F = ma$ bởi vì tại bất cứ thời điểm nào khối lượng m là khối lượng đang bị gia tốc bởi lực F.

Nếu bạn muốn, bạn có thể tưởng tượng quá trình này xảy ra theo các bước rời rạc như sau: Lực kéo tác dụng vào khối lượng trong một khoảng thời gian ngắn, sau đó một phần khối lượng nhỏ rơi ra. Sau đó lực kéo lại tác dụng vào phần khối lượng mới, rồi một phần khối lượng nhỏ khác bị rơi ra. Và cứ tiếp tục như thế. Trong quá trình tưởng tượng này, rõ ràng phương trình $F = ma$ là phương trình phù hợp, bởi vì nó đúng đối với mỗi bước của quá trình.

Thực ra phương trình $F = dp/dt$ cũng là đúng, nếu bạn gọi F là *tổng* lực tác dụng trong bài toán, và gọi p là *tổng* động lượng. Lực căng T là lực tác dụng theo phương ngang duy nhất trong bài toán, bởi vì chúng ta đã giả sử là mặt đất không có ma sát. Tuy nhiên, tổng động lượng bao gồm cả động lượng của cát trong xô *và* động lượng của cát mà đã bị rò ra ngoài và đang trượt trên mặt đất. Nếu chúng ta sử dụng $F = dp/dt$, trong đó p là tổng động lượng, chúng ta sẽ nhận được (nhớ rằng dm/dt là một đại lượng âm)

$$-T = \frac{dp_{\text{xô}}}{dt} + \frac{dp_{\text{bị rò}}}{dt} = \left(ma + \frac{dm}{dt}v\right) + \left(-\frac{dm}{dt}\right)v = ma, \tag{5.136}$$

là kết quả mà ta mong đợi. Xem Phụ lục C để biết thêm về thảo luận trong việc sử dụng $F = ma$ và $F = dp/dt$. ♣

LỜI GIẢI THỨ HAI: Xét một khoảng thời gian nhỏ trong đó xô di chuyển được từ vị trí x đến $x + dx$ (trong đó dx là âm). Động năng của xô thay đổi một lượng là $(-T)dx$ (giá trị này là dương) do công thực hiện của lò xo, và cũng thay đổi một lượng tỷ lệ với dx/x (giá trị này là âm) do bị rò rỉ. Do đó, $dE = -T dx + E dx/x$, hoặc

$$\frac{dE}{dx} = -T + \frac{E}{x}. \tag{5.137}$$

Trong việc giải phương trình vi phân này, sẽ tiện lợi hơn nếu chúng ta sử dụng biến mới $y \equiv E/x$. Khi đó $E' = xy' + y$, trong đó dấu phẩy ký hiệu cho đạo hàm theo x. Phương trình (5.137) khi đó trở thành $xy' = -T$, mà cho ta

$$\int_0^{E/x} dy = -T \int_L^x \frac{dx}{x} \quad \Longrightarrow \quad E = -Tx \ln\left(\frac{x}{L}\right), \tag{5.138}$$

giống như nghiệm của cách giải thứ nhất.

(b) Từ phương trình (5.133), vận tốc là $v = \sqrt{2TL/M}\sqrt{-\ln z}$, trong đó $z \equiv x/L$. Do đó, độ lớn của động lượng là

$$p = mv = (Mz)v = \sqrt{2TLM}\sqrt{-z^2 \ln z}. \tag{5.139}$$

Đặt $dp/dz = 0$ để tìm giá trị lớn nhất ta có

$$z = \frac{1}{\sqrt{e}} \quad \Longrightarrow \quad p_{\max} = \sqrt{\frac{TLM}{e}}. \tag{5.140}$$

Chú ý rằng vị trí (dạng tỷ số) của $p_{\max}$ không phụ thuộc gì vào M, T và L, nhưng giá trị của nó phụ thuộc vào cả ba tham số trên. Kết quả này có thể tìm được bằng phương pháp phân tích thứ nguyên.

> NHẬN XÉT: $E_{\max}$ xảy ra tại vị trí gần bức tường hơn (nghĩa là, tại thời gian lâu hơn) vị trí của $p_{\max}$. Lý do của việc này là v có ảnh hưởng lớn hơn trong $E = mv^2/2$ hơn là trong $p = mv$. Khi chỉ quan tâm đến E, thì chiếc xô sẽ nhận được thêm một phần vận tốc (đến một giá trị nào đó) nếu nó bị mất đi một ít khối lượng. ♣

5.18. Một cái xô thủng khác

(a) Phương trình $F = ma$ cho ta $-T = m\ddot{x}$. Kết hợp điều này với phương trình $dm/dt = b\ddot{x}$ đã cho ta nhận được $mdm = -bTdt$. Sau đó lấy tích phân ta có $m^2/2 = C - bTt$. Nhưng $m = M$ tại thời điểm $t = 0$, vì vậy ta có $C = M^2/2$. Do đó,

$$m(t) = \sqrt{M^2 - 2bTt}. \tag{5.141}$$

Kết quả này đúng đối với $t < M^2/2bT$, miễn là chiếc xô vẫn chưa va vào tường.

(b) Lấy tích phân phương trình $dm/dt = b\ddot{x} = bdv/dt$ đã cho ta có $v = m/b + D$. Nhưng $v = 0$ khi $m = M$, vì vậy ta có $D = -M/b$. Do đó,

$$v(m) = \frac{m - M}{b} \quad \Longrightarrow \quad v(t) = \frac{\sqrt{M^2 - 2bTt}}{b} - \frac{M}{b}. \tag{5.142}$$

Tại thời điểm ngay trước khi tất cả lượng cát bị rò hết ra khỏi xô, ta có $m = 0$. Do đó, $v = -M/b$ tại thời điểm này. Tích phân $v(t)$ để nhận được $x(t)$, ta tìm được

$$x(t) = \frac{-(M^2 - 2bTt)^{3/2}}{3b^2T} - \frac{M}{b}t + L + \frac{M^3}{3b^2T}, \tag{5.143}$$

trong đó hằng số tích phân được chọn sao cho $x = L$ khi $t = 0$. Giải ra t đối với m từ phương trình (5.141), thay kết quả tìm được vào phương trình (5.143), và rút gọn, ta có

$$x(m) = L - \frac{(M - m)^2(M + 2m)}{6b^2T}. \tag{5.144}$$

(c) Sử dụng phương trình (5.142), động năng là (sẽ dễ dàng hơn khi biểu diễn theo m ở đây)

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2b^2}m(m-M)^2. \tag{5.145}$$

Lấy đạo hàm dE/dm để tìm giá trị lớn nhất, ta nhận được

$$m = \frac{M}{3} \quad \Longrightarrow \quad E_{\max} = \frac{2M^3}{27b^2}. \tag{5.146}$$

(d) Sử dụng phương trình (5.142), động lượng là

$$p = mv = \frac{1}{b}m(m-M). \tag{5.147}$$

Lấy đạo hàm để tìm giá trị lớn nhất của độ lớn của động lượng, ta nhận được

$$m = \frac{M}{2} \quad \Longrightarrow \quad |p|_{\max} = \frac{M^2}{4b}. \tag{5.148}$$

(e) Chúng ta muốn $x = 0$ khi $m = 0$, vì vậy phương trình (5.144) cho

$$0 = L - \frac{M^3}{6b^2T} \quad \Longrightarrow \quad b = \sqrt{\frac{M^3}{6TL}}. \tag{5.149}$$

Đây là biểu thức duy nhất của M, T và L có đơn vị của b, là kg s/m. Nhưng chúng ta cần phải thực hiện các tính toán để tìm ra hệ số $1/\sqrt{6}$.

5.19. Góc vuông trong môn bi a

Gọi $\mathbf{v}$ là vận tốc ban đầu, và gọi $\mathbf{v}_1$ và $\mathbf{v}_2$ là vận tốc sau va chạm. Bởi vì các khối lượng là bằng nhau, định luật bảo toàn động lượng cho ta $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$. Lấy tích vô hướng của phương trình này với chính nó ta có

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2. \tag{5.150}$$

Và định luật bảo toàn năng lượng cho ta (bỏ đi các hệ số $m/2$)

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2. \tag{5.151}$$

Lấy hiệu của hai phương trình này ta có

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0. \tag{5.152}$$

Vì vậy $v_1 v_2 \cos\theta = 0$, nghĩa là $\theta = 90^o$. (Hoặc $v_1 = 0$, nghĩa là quả bóng tới sẽ dừng lại bởi vì va chạm là trực diện. Hoặc là $v_2 = 0$, nghĩa là hai quả bóng không va chạm nhau.)

5.20. Nảy lại và giật lại

Gọi v_i là vận tốc của quả bóng sau lần va chạm thứ i, và gọi V_i là vận tốc của vật ngay sau lần va chạm thứ i. Khi đó từ định luật bảo toàn động lượng ta có

$$mv_i = MV_{i+1} - mv_{i+1}. \tag{5.153}$$

Nhưng Định lý 5.3 nói rằng $v_i = V_{i+1} + v_{i+1}$. Giải hệ hai phương trình tuyến tính này ta có

$$v_{i+1} = \frac{(M-m)v_i}{M+m} \equiv \frac{(1-\epsilon)v_i}{1+\epsilon} \approx (1-2\epsilon)v_i, \quad \text{và} \quad V_{i+1} \approx 2\epsilon v_i, \tag{5.154}$$

trong đó $\epsilon \equiv m/M \ll 1$. Biểu thức của v_{i+1} này suy ra rằng vận tốc của quả bóng sau lần va chạm thứ n là

$$v_n = (1-2\epsilon)^n v_0, \quad \text{trong đó} \quad \epsilon \equiv m/M. \tag{5.155}$$

Tổng quãng đường mà vật di chuyển được có thể được tính bằng cách xét công thực hiện bởi lực ma sát. Xét cho cùng thì năng lượng của quả bóng là nhỏ có thể bỏ qua được vì vậy tất cả phần năng lượng ban đầu bị mất do chuyển thành nhiệt là từ lực ma sát. Do đó, $mv_0^2/2 = F_f d = (\mu M g)d$ cho ta

$$d = \frac{mv_0^2}{2\mu M\mathrm{g}}. \tag{5.156}$$

Để tìm tổng thời gian chuyển động, chúng ta có thể lấy tổng các thời gian, t_n, là thời gian mà vật di chuyển sau mỗi lần va chạm. Bởi vì tích của lực và thời gian bằng động lượng, nên ta có $F_f t_n = MV_n$, và vì vậy $(\mu M g)t_n = M(2\epsilon v_{n-1}) = 2M\epsilon(1-2\epsilon)^{n-1}v_0$. Do đó,

$$t = \sum_{n=1}^{\infty} t_n = \frac{2\epsilon v_0}{\mu\mathrm{g}} \sum_{n=0}^{\infty}(1-2\epsilon)^n = \frac{2\epsilon v_0}{\mu\mathrm{g}} \cdot \frac{1}{1-(1-2\epsilon)} = \frac{v_0}{\mu\mathrm{g}}. \tag{5.157}$$

Chúng ta cũng có thể tính d ở trên bằng cách lấy tổng của một dãy cấp số nhân của quãng đường đi được sau mỗi lần va chạm.

NHẬN XÉT: Kết quả $t = v_0/\mu g$ này lớn hơn rất nhiều kết quả nhận được trong trường hợp khi mà quả bóng dính chặt vào vật sau lần va chạm đầu tiên, trong trường hợp này kết quả là $t = mv_0/(\mu M g)$. Tổng thời gian chuyển động là tỷ lệ với tổng động lượng mà vật nhận được, và kết quả $t = v_0/\mu g$ lớn hơn bởi vì bức tường sau mỗi lần va chạm truyền cho quả bóng một lượng động lượng dương, và rồi sau đó động lượng này được truyền cho vật.

Ngược lại, quãng đường d là giống nhau trong hai trường hợp. Tổng quãng đường chuyển động là tỷ lệ với năng lượng mà vật nhận được, và trong cả hai trường hợp tổng năng lượng truyền cho vật là $mv_0^2/2$. Bức tường (mà coi như là gắn chặt với trái đất có khối lượng rất lớn) về cơ bản là không truyền ít năng lượng nào cho quả bóng.

Kết quả $t = v_0/\mu g$ là không phụ thuộc gì vào các khối lượng (miễn là $M \gg m$), mặc dù về mặt trực giác nó không phải là hiển nhiên lắm nếu chúng ta giữ v_0 không đổi, nhưng giảm khối lượng m đi 100 lần, khi đó chúng ta vẫn nhận được thời gian t như trên. Tuy nhiên, khoảng cách d sẽ giảm đi 100 lần. ♣

5.21. Lực cản tác dụng lên một tấm

(a) Chúng ta sẽ cho $v = 0$ ở đây. Khi tấm va chạm với một hạt, hạt sẽ nhận được một vận tốc về cơ bản là $2V$. Kết quả này là từ Định lý 5.3, hoặc bằng cách xét va chạm trong hệ quy chiếu của tấm nặng. Động lượng của hạt sau đó là $2mV$. Tại thời điểm t, tấm quét qua vùng có thể tích là AVt, trong đó A là diện tích của tấm. Do đó, tại thời điểm t, tấm đã va chạm với $AVtn$ hạt. Do đó tấm bị mất động lượng với tốc độ là $dP/dt = -(AVn)(2mV)$. Nhưng $F = dP/dt$, vì vậy độ lớn của lực cản tấm trên một đơn vị diện tích là

$$\frac{F}{A} = 2nmV^2 \equiv 2\rho V^2, \tag{5.158}$$

trong đó ρ là khối lượng riêng của các hạt. Chúng ta thấy rằng lực cản phụ thuộc vào giá trị bình phương của V.

(b) Nếu $v \gg V$, các hạt bây giờ sẽ va chạm với tấm theo nhiều hướng khác nhau ở cả hai phía của tấm, nhưng chúng ta chỉ cần xét đến chuyển động của các hạt dọc theo đường thẳng chuyển động của tấm. Như được trình bày trong bài toán, chúng ta sẽ giả sử rằng tất cả vận tốc theo phương này bằng $\pm v/2$. Chú ý rằng chúng ta sẽ không thể cho V chính xác bằng không ở đây, bởi vì khi đó chúng ta sẽ nhận được một lực bằng không và sẽ bỏ qua mất ảnh hưởng có bậc thấp nhất.

Xét một hạt nằm đằng trước tấm, đang chuyển động ra phía sau của tấm. Vận tốc tương đối giữa hạt và tấm là $v/2+V$. Vận tốc tương đối này sẽ đổi chiều trong quá trình va chạm, vì vậy sự thay đổi động lượng của hạt là $2m(v/2+V)$. Chúng ta vừa mới sử dụng một thực tế là vận tốc của tấm nặng về cơ bản là không bị ảnh hưởng gì từ va chạm. Tần suất mà các hạt va chạm với tấm là $A(v/2+V)(n/2)$, có được từ các lập luận giống như trong phần (a). Hệ số $n/2$ là do một nửa các hạt chuyển động hướng về tấm, và một nửa chuyển động ra xa tấm.

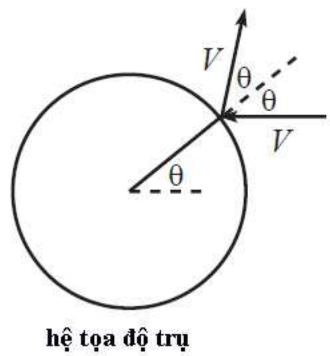
Bây giờ xét một hạt nằm đằng sau tấm, chuyển động ra phía trước của tấm. Vận tốc tương đối giữa hạt và tấm là $v/2-V$. Vận tốc tương đối này sẽ đổi chiều trong quá trình va chạm, vì vậy sự thay đổi động lượng của hạt là $-2m(v/2-V)$. Và tần suất mà các hạt va chạm với tấm là $A(v/2-V)(n/2)$. Do đó, độ lớn của lực cản trên một đơn vị diện tích sẽ là

$$\begin{aligned}\frac{F}{A} &= \frac{1}{A}\cdot\left|\frac{dP}{dt}\right| \\ &= \left(\frac{n}{2}(v/2+V)\right)\Big(2m(v/2+V)\Big) + \left(\frac{n}{2}(v/2-V)\right)\Big(-2m(v/2-V)\Big) \\ &= 2nmvV \equiv 2\rho vV,\end{aligned} \tag{5.159}$$

trong đó ρ là khối lượng riêng của các hạt. Chúng ta thấy rằng lực cản phụ thuộc tuyến tính vào V. Việc kết quả này giống với kết quả của phần (a) trong trường hợp $v = V$ chỉ là sự tình cờ. Không kết quả nào trong hai kết quả này là đúng trong trường hợp $v = V$.

5.22. Lực cản tác dụng lên một trụ

Xét một hạt mà va chạm với hình trụ theo một góc θ so với phương đường thẳng chuyển động



Hình 5.63:

của nó. Trong hệ tọa độ của hình trụ nặng (xem Hình 5.63), hạt đi đến hình trụ với vận tốc là $-V$ và sau đó bật lại với thành phần vận tốc theo phương ngang là $V\cos 2\theta$. Vì vậy trong hệ tọa độ này (và do đó cũng trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm), động lượng theo phương ngang của hạt tăng lên $mV(1+\cos 2\theta)$. Do đó hình trụ sẽ bị mất đi phần động lượng này.

Phần diện tích của hình trụ nằm giữa θ và $\theta + d\theta$ sẽ quét một phần thể tích với tần suất là $(Rd\theta\cos\theta)Vl$, trong đó ℓ là chiều dài của hình trụ. Hệ số $\cos\theta$ ở đây là hệ số chiếu theo phương vuông góc với phương chuyển động. Do đó lực cản tác dụng lên hình trụ trên một đơn vị độ dài (nghĩa là, tốc độ thay đổi động lượng trên một đơn vị độ dài) là

$$\begin{aligned}\frac{F}{\ell} &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\Big(n(Rd\theta\ \cos\theta)V\Big)\Big(mV(1+\cos 2\theta)\Big)\\ &= 2nmRV^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta(1-\sin^2\theta)d\theta\\ &= 2nmRV^2\left(\sin\theta-\frac{1}{3}\sin^3\theta\right)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}\\ &= \frac{8}{3}nmRV^2 \equiv \frac{8}{3}\rho RV^2, \end{aligned} \tag{5.160}$$

trong đó ρ là khối lượng riêng của các hạt. Chú ý rằng lực cản trung bình trên mặt cắt ngang, $F/(2Rl)$, bằng $(4/3)\rho V^2$. Giá trị này nhỏ hơn lực cản tác dụng lên tấm phẳng trong bài toán trước và nó phải như vậy bởi vì trong trường hợp hình trụ các hạt sau va chạm ở một mức độ nào đó bị bật lại sang hai bên.

5.23. Quả bóng rổ và quả bóng tennis

(a) Ngay trước khi quả bóng rổ chạm vào mặt đất, cả hai quả bóng chuyển động xuống dưới với vận tốc (sử dụng $mv^2/2 = mgh$)

$$v = \sqrt{2gh}. \tag{5.161}$$

Ngay sau khi quả bóng rổ bật lên khỏi mặt đất, nó di chuyển lên trên với vận tốc v, trong khi đó quả bóng tennis vẫn chuyển động xuống dưới với vận tốc v. Vận tốc tương đối của hai quả bóng do đó bằng $2v$. Sau khi hai quả bóng va chạm với nhau, vận tốc tương đối vẫn là $2v$ (điều này là kết quả của Định lý 5.3, hoặc bằng cách xét va chạm trong hệ tọa độ của quả bóng rổ nặng). Bởi vì vận tốc hướng lên trên của quả bóng rổ về cơ bản vẫn bằng v, nên vận tốc hướng lên trên của quả bóng tennis là $2v + v = 3v$. Từ định luật bảo toàn năng lượng, quả bóng tennis do đó sẽ nảy lên tới một độ cao $H = d + (3v)^2/(2g)$. Nhưng $v^2 = 2gh$, vì vậy ta có

$$H = d + 9h. \tag{5.162}$$

(b) Ngay trước khi quả bóng B_1 chạm đất, tất cả các quả bóng đều chuyển động xuống dưới với vận tốc $v = \sqrt{2gh}$. Chúng ta sẽ xác định theo phương pháp quy nạp vận tốc của mỗi quả bóng sau khi nó va chạm với quả bóng ở bên dưới nó. Nếu quả bóng B_i nhận được một vận tốc là v_i sau khi va chạm với quả bóng B_{i-1}, thì vận tốc của quả bóng B_{i+1} bằng bao nhiêu sau khi nó va chạm với B_i? Vận tốc tương đối giữa hai quả bóng B_{i+1} và B_i (ngay tại thời điểm trước khi chúng va chạm với nhau) là $v + v_i$. Đây cũng là vận tốc tương đối của chúng sau khi va chạm. Do đó, bởi vì B_i sau đó về cơ bản vẫn chuyển động lên trên với vận tốc v_i, nên chúng ta thấy rằng vận tốc cuối cùng hướng lên của quả bóng B_{i+1} là $(v + v_i) + v_i$. Do vậy,

$$v_{i+1} = 2v_i + v. \tag{5.163}$$

Bởi vì $v_1 = v$, chúng ta nhận được $v_2 = 3v$ (trùng với kết quả của phần (a)), và do đó $v_3 = 7v$, và do đó $v_4 = 15v$, vân vân... Nói chung,

$$v_n = (2^n - 1)v, \tag{5.164}$$

mà dễ dàng thấy nó thỏa mãn phương trình (5.163), với giá trị đầu là $v_1 = v$. Từ định luật bảo toàn năng lượng, quả bóng B_n do đó sẽ nảy lên một độ cao là

$$H = \ell + \frac{((2^n - 1)v)^2}{2\mathrm{g}} = \ell + (2^n - 1)^2 h. \tag{5.165}$$

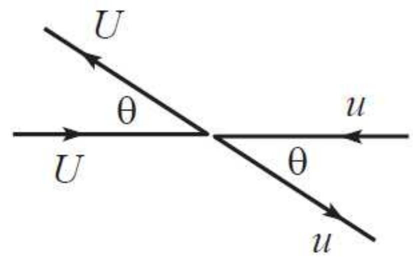
Nếu h bằng 1 mét, và nếu chúng ta muốn độ cao này bằng 1000 mét, thì (với giả sử rằng ℓ không quá lớn) chúng ta cần $2^n - 1 > \sqrt{1000}$. Năm quả bóng sẽ không đủ để làm điều này, nhưng sáu quả thì sẽ đủ. Vận tốc thoát khỏi trái đất (là $v_{\text{thoát}} = \sqrt{2gR} \approx 11200\text{m/s}$) sẽ đạt được khi

$$v_n \ge v_{\text{thoát}} \quad \Longrightarrow \quad (2^n - 1)\sqrt{2\mathrm{g}h} \ge \sqrt{2\mathrm{g}R} \quad \Longrightarrow \quad n \ge \log_2\left(\sqrt{\frac{R}{h}} + 1\right). \tag{5.166}$$

Với $R = 6.4 \cdot 10^6$m và $h = 1$m, ta tìm được $n \geq 12$. Tất nhiên, giả thiết va chạm là đàn hồi là vô lý trong trường hợp này, cũng như khái niệm bạn có thể tìm 12 quả bóng với tính chất $m_1 \gg m_2 \gg \cdots \gg m_{12}$.

5.24. Góc chệch hướng lớn nhất

LỜI GIẢI THỨ NHẤT: Hãy tìm hiểu xem va chạm sẽ như thế nào trong hệ tọa độ khối tâm. Nếu



Hình 5.64:

M có vận tốc ban đầu là V trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm, thì hệ quy chiếu khối tâm sẽ chuyển động với vận tốc $V_{CM} = MV/(M+m)$. Vận tốc của M và m trong hệ quy chiếu khối tâm do đó sẽ bằng, một cách tương ứng,

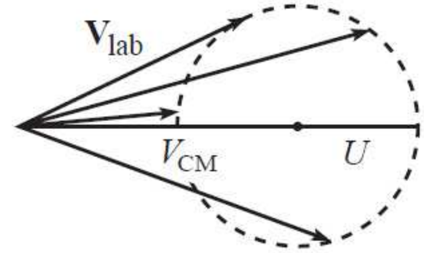
$$U = V - V_{\text{CM}} = \frac{mV}{M+m}, \quad \text{và} \quad u = |-V_{\text{CM}}| = \frac{MV}{M+m}. \tag{5.167}$$

Trong hệ quy chiếu khối tâm, va chạm là rất đơn giản. Các vật giữ nguyên độ lớn vận tốc của chúng, nhưng đơn giản là chúng sẽ đổi hướng chuyển động cho nhau (trong khi vẫn chuyển động theo hướng ngược lại), như chỉ ra trong Hình 5.64. Góc θ có thể có giá trị tùy ý. Viễn cảnh này rõ ràng là thỏa mãn định luật bảo toàn động lượng và năng lượng, vì vậy nó sẽ phải xảy ra.

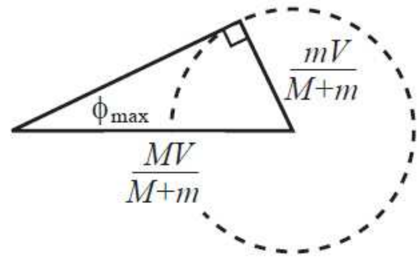
Điểm quan trọng phải chú ý là bởi vì θ có thể có giá trị bất kỳ, nên đầu mũi của vector vận tốc $\mathbf{U}$ có thể ở vị trí bất kỳ trên một đường tròn bán kính U. Nếu sau đó chúng ta quay trở lại hệ quy chiếu phòng thí nghiệm, chúng ta sẽ thấy rằng vận tốc sau va chạm của M trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm, $\mathbf{V}_{\text{lab}}$, sẽ được nhận lại bằng cách cộng $\mathbf{V}_{CM}$ với vector $\mathbf{U}$, và vector này có thể có hướng bất kỳ với đầu mũi của nó nằm trên đường tròn chấm chấm trong Hình 5.65. Một vài trường hợp có thể xảy ra đối với $\mathbf{V}_{\text{lab}}$ được vẽ trong hình. Góc chệch hướng lớn nhất có thể nhận được khi $\mathbf{V}_{\text{lab}}$ tiếp xúc với đường tròn chấm chấm, và trường hợp này được vẽ trong Hình 5.66. Do đó, góc chệch hướng lớn nhất, $\phi_{\max}$, được cho bởi

$$\sin\phi_{\max} = \frac{U}{V_{\text{CM}}} = \frac{mV/(M+m)}{MV/(M+m)} = \frac{m}{M}. \tag{5.168}$$

Nếu $M < m$, thì đường tròn chấm chấm sẽ vượt qua góc bên trái của tam giác về phía bên trái của nó. Điều này có nghĩa là góc ϕ có thể có giá trị bất kỳ. Nói riêng, là M có thể nảy ngược lại sau khi va chạm.



Hình 5.65:



Hình 5.66:

LỜI GIẢI THỨ HAI: Chúng ta sẽ giải bài toán này trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm. Gọi V' và v' là hai vận tốc sau va chạm, và gọi ϕ và γ là hai góc tương ứng bật ra của M và m trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm. Khi đó do p_x, p_y và E là bảo toàn nên ta có

$$MV = MV' \cos\phi + mv' \cos\gamma, \tag{5.169}$$

$$0 = MV' \sin\phi - mv' \sin\gamma, \tag{5.170}$$

$$\frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}MV'^2 + \frac{1}{2}Mv'^2. \tag{5.171}$$

Chuyển các số hạng của ϕ sang vế trái trong các phương trình (5.169) và (5.170), rồi sau đó bình phương rồi cộng lại với nhau các phương trình này ta có

$$M^2(V^2 + V'^2 - 2VV' \cos\phi) = m^2v'^2. \tag{5.172}$$

Cân bằng biểu thức của $m^2v'^2$ này với biểu thức của nó nhận được khi nhân hai vế phương trình (5.171) với m ta có

$$M^2(V^2 + V'^2 - 2VV' \cos\phi) = m(V - V'^2)$$
$$\Longrightarrow \quad (M+m)V'^2 - (2MV\cos\phi)V' + (M-m)V^2 = 0. \tag{5.173}$$

Một nghiệm của phương trình bậc hai đối với V' này tồn tại nếu và chỉ nếu định thức của nó phải không âm. Do đó, chúng ta phải có

$$
\begin{aligned}
(2MV\cos\phi)^2 - 4(M+m)(M-m)V^2 \geq 0& \\
\Longrightarrow \quad & m^2 \geq M^2(1-\cos^2\phi) \\
\Longrightarrow \quad & m^2 \geq M^2\sin^2\phi \\
\Longrightarrow \quad & \frac{m}{M} \geq \sin\phi. \qquad (5.174)
\end{aligned}
$$

5.25. Các khối lượng va chạm

(a) Do định luật bảo toàn động lượng, vận tốc sau va chạm của hai vật dính vào nhau là $MV/(M+m) \approx (1-m/M)V$, cộng với số hạng bé hơn bậc cao. Năng lượng sau va chạm do đó là

$$
\begin{aligned}
E_m &= \frac{1}{2}m\left(1-\frac{m}{M}\right)^2 V^2 \approx \frac{1}{2}mV^2, \\
E_M &= \frac{1}{2}M\left(1-\frac{m}{M}\right)^2 V^2 \approx \frac{1}{2}MV^2 - mV^2.
\end{aligned} \qquad (5.175)
$$

Tổng của hai năng lượng này là $MV^2/2 - mV^2/2$, nhỏ hơn năng lượng trước khi va chạm của khối lượng M, là $MV^2/2$, một lượng $mV^2/2$. Do đó, $mV^2/2$ là phần năng lượng bị mất do chuyển thành nhiệt.

(b) Trong hệ tọa độ này, khối lượng m có vận tốc ban đầu là V, vì vậy năng lượng ban đầu của nó là $E_\text{i} = mV^2/2$. Từ định luật bảo toàn động lượng, vận tốc sau va chạm của hai khối lượng là $mV/(M+m) \approx (m/M)V$, cộng với một đại lượng vô cùng bé bậc cao hơn. Năng lượng sau va chạm do đó bằng

$$
\begin{aligned}
E_m &= \frac{1}{2}m\left(\frac{m}{M}\right)^2 V^2 = \left(\frac{m}{M}\right)^2 E_\text{i} \approx 0, \\
E_M &= \frac{1}{2}M\left(\frac{m}{M}\right)^2 V^2 = \left(\frac{m}{M}\right)^2 E_\text{i} \approx 0.
\end{aligned} \qquad (5.176)
$$

Năng lượng sau va chạm có thể bỏ qua được này có giá trị xấp xỉ bằng không và nhỏ hơn E_i một lượng $mV^2/2$. Do đó, $mV^2/2$ là phần năng lượng bị mất do nhiệt, trùng với kết quả trong phần (a).

5.26. Kéo một sợi xích

Gọi x là quãng đường mà tay bạn dịch chuyển. Khi đó $x/2$ là chiều dài của phần bị dịch chuyển của sợi xích, bởi vì sợi xích là đang "gập đôi" lại. Động lượng của phần dịch chuyển này do đó bằng $p = (\sigma x/2)\dot{x}$. Lực mà tay bạn tác dụng lên sợi xích được tìm từ phương trình $F = dp/dt$, mà cho ta $F = (\sigma/2)(\dot{x}^2 + x\ddot{x})$. Nhưng bởi vì v là hằng số, nên hệ số $\ddot{x}$ bị triệt tiêu. Sự thay đổi của động lượng ở đây đơn giản là do có thêm các phần khối lượng nhận được vận tốc v, và không phải là do bất cứ sự tăng vận tốc nào của phần xích đã chuyển động. Do đó,

$$
F = \frac{\sigma v^2}{2}, \qquad (5.177)
$$

là một hằng số. Tay bạn tác dụng lực này trên một quãng đường tổng cộng là $2L$, vì vậy tổng công bạn tác dụng là

$$F(2L) = \sigma L v^2. \tag{5.178}$$

Khối lượng của sợi xích là σL, vì vậy động năng cuối của sợi xích là $(\sigma L)v^2/2$. Đây chỉ bằng một nửa phần công mà bạn tác dụng. Do đó, một phần năng lượng $\sigma L v^2/2$ bị mất do chuyển thành nhiệt. Mỗi phân tử trong sợi xích đột ngột có vận tốc v từ trạng thái nằm yên, và không có cách nào để tránh được việc năng lượng bị mất do nhiệt trong một quá trình như thế này. Điều này sẽ rõ ràng khi được quan sát trong hệ tọa độ tay của bạn. Trong hệ tọa độ này, sợi xích ban đầu chuyển động với vận tốc v và sau đó cuối cùng đứng yên, từng phần một. Vì vậy tất cả năng lượng ban đầu của nó, $(\sigma L)v^2/2$, bị chuyển thành nhiệt.

5.27. Kéo một sợi xích nữa

Gọi x là vị trí của đầu sợi xích. Động lượng của sợi xích sau đó bằng $p = (\sigma x)\dot{x}$. Phương trình $F = dp/dt$ cho ta (sử dụng thực tế là F không đổi) $Ft = p$, vì vậy chúng ta có $Ft = (\sigma x)\dot{x}$. Tách biến và lấy tích phân ta nhận được

$$\int_0^x \sigma x dx = \int_0^t F t dt \quad \Longrightarrow \quad \frac{\sigma x^2}{2} = \frac{Ft^2}{2} \quad \Longrightarrow \quad x = t\sqrt{F/\sigma}. \tag{5.179}$$

Do đó vị trí của đầu xích tăng tuyến tính theo thời gian. Nói cách khác, vận tốc là hằng số, và nó bằng $\sqrt{F/\sigma}$.

> NHẬN XÉT: Trong thực tế, khi bạn cầm đầu dây xích, sẽ có một phần rất nhỏ ban đầu của x (gọi nó là ϵ). Tích phân theo dx ở trên bây giờ có cận dưới là ϵ thay vì bằng 0, vì vậy x sẽ có dạng, $x = \sqrt{Ft^2/\sigma + \epsilon^2}$. Nếu ϵ rất nhỏ, vận tốc sẽ nhanh chóng đạt được giá trị $\sqrt{F/\sigma}$. Thậm chí nếu ϵ không phải là giá trị nhỏ, thì vị trí của đầu xích sẽ có vị trí gần $t\sqrt{F/\sigma}$ một giá trị tùy ý khi t rất lớn. Do đó "phần thò ra ban đầu" ϵ sẽ không giúp bạn nhiều khi bạn kéo sợi xích trong thời gian dài. ♣

5.28. Sợi xích rơi

LỜI GIẢI THỨ NHẤT: Phần bên trái của sợi xích là rơi tự do (bởi vì chúng ta đang làm việc với sợi xích được miêu tả trong viễn cảnh đầu tiên của chúng ta), vì vậy tại thời điểm t nó sẽ chuyển động với vận tốc là gt và đã rơi được một khoảng cách $gt^2/2$. Sợi xích bị gập đôi ở bên dưới giá đỡ, vì vậy một phần chỉ có chiều dài $gt^2/4$ là đang bị treo nằm yên. Do đó, một phần của sợi xích có chiều dài $L - gt^2/4$ đang rơi với vận tốc gt. Với chiều hướng lên trên được chọn là chiều dương, động lượng của toàn bộ sợi xích (mà tất nhiên chỉ là động lượng của phần đang chuyển động) do đó bằng

$$p = \sigma(L - \mathrm{g}t^2/4)(-\mathrm{g}t) = -\sigma L g t + \sigma \mathrm{g}^2 t^3/4. \tag{5.180}$$

Nếu F_s là lực tác dụng của giá đỡ, thì tổng lực tác dụng lên toàn bộ sợi xích là $F_s - \sigma Lg$. Vì vậy phương trình $F = dp/dt$ cho toàn bộ sợi xích cho ta

$$F_\mathrm{s} - \sigma L\mathrm{g} = \frac{d}{dt}\left(-\sigma L\mathrm{g}t + \frac{\sigma \mathrm{g}^2 t^3}{4}\right) \quad \Longrightarrow \quad F_\mathrm{s} = \frac{3\sigma \mathrm{g}^2 t^2}{4}. \tag{5.181}$$

Kết quả này có giá trị cho đến khi đầu trên của sợi xích rơi được quãng đường bằng $2L$ (tại thời điểm $T = \sqrt{4L/g}$). Trước thời điểm T, lực F_s bằng ba lần khối lượng, $\sigma(gt^2/4)g$, của phần sợi xích đang được treo nằm yên. Sau thời điểm T, F_s đơn giản bằng toàn bộ khối lượng của sợi xích, σLg. Vì vậy tại thời điểm T, F_s đột ngột giảm từ $3\sigma Lg$ xuống σLg.

LỜI GIẢI THỨ HAI: F_s có tác dụng làm hai việc: (1) Nó giữ phần khối lượng sợi xích đang được treo nằm yên bên dưới giá đỡ, và (2) nó thay đổi động lượng của các phân tử trong sợi xích mà bị đột ngột dừng lại tại điểm uốn của sợi xích. Nói cách khác, $F_s = F_{\text{khối lượng}} + F_{dp/dt}$. Từ lời giải phía trên, chúng ta có $F_{\text{khối lượng}} = \sigma(gt^2/4)g$.

Bây giờ hãy tìm $F_{dp/dt}$. Tại thời điểm t, vận tốc của sợi xích là gt, vì vậy trong một khoảng thời gian nhỏ dt, đầu trên của sợi xích rơi xuống một đoạn $(gt)dt$. Nhưng do hiệu ứng "gập đôi", chỉ có một nửa độ dài này chuyển về trạng thái đứng yên trong thời gian dt. Do đó, một phần khối lượng nhỏ $\sigma(1/2)(gt)dt$ đang chuyển động với vận tốc gt bị đột ngột chuyển về trạng thái đứng yên. Động lượng ban đầu của nó là $(\sigma/2)(gt)^2 dt$ hướng xuống dưới, và rồi trở thành bằng không. Do vậy, $dp = +(\sigma/2)g^2t^2dt$, và vì vậy $F_{dp/dt} = dp/dt = (\sigma/2)g^2t^2$. Do đó,

$$F_\mathrm{s} = F_{\text{khối lượng}} + F_{dp/dt} = \frac{\sigma \mathrm{g}^2 t^2}{4} + \frac{\sigma \mathrm{g}^2 t^2}{2} = \frac{3\sigma \mathrm{g}^2 t^2}{4}. \tag{5.182}$$

5.29. Sợi xích rơi (năng lượng bảo toàn)

Gọi σ là khối lượng riêng của sợi xích, gọi L là tổng độ dài của nó, và gọi x là quãng đường (được định nghĩa như là một giá trị dương) mà đầu trên của sợi xích rơi xuống. Đối với một giá trị x đã cho, một mảnh của sợi xích có khối lượng σx và có vị trí của trọng tâm là $L - x/2$ được thay thế bởi một hình chữ "U" mảnh bên dưới giá đỡ, có độ cao là $x/2$; vì vậy trọng tâm của nó có vị trí là $-x/4$. Phần thế năng bị mất đi do đó bằng $(\sigma x)g(L-x/2)-(\sigma x)g(-x/4) = \sigma xg(L-x/4)$. Bởi vì chúng ta đang giả thiết rằng năng lượng được bảo toàn trong cơ cấu này, phần thế năng bị mất này sẽ chuyển thành động năng của phần đang chuyển động của sợi xích. Phần này có độ dài là $L - x/2$ (bởi vì $x/2$ là độ dài của phần sợi xích đang bị treo ở bên dưới giá đỡ), vì vậy định luật bảo toàn năng lượng cho ta

$$\frac{1}{2}\sigma(L - x/2)v^2 = \sigma x\mathrm{g}(L - x/4) \quad \Longrightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2\mathrm{g}x(L - x/4)}{L - x/2}}. \tag{5.183}$$

Giá trị này có một tính chất mà chúng ta đang mong đợi đó là nó tiến tới vô cùng khi $x \to 2L$. Tuy nhiên, việc vùng uốn có kích thước hữu hạn sẽ trở nên có liên quan khi x tiến gần đến giá trị $2L$, vì vậy tất cả năng lượng cuối cùng sẽ không bao giờ tập trung ở trong một mảnh vô cùng nhỏ của sợi xích. Vì vậy tất cả các vận tốc sẽ vẫn là hữu hạn và chúng phải như vậy.

Viết v dưới dạng dx/dt trong phương trình (5.183), và tách biến rồi lấy tích phân ta có

$$t = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{g}}}\int_0^{2L}\sqrt{\frac{L-x/2}{2x(L-x/4)}}\,dx \quad\Longrightarrow\quad t=\sqrt{\frac{L}{\mathrm{g}}}\int_0^{2}\sqrt{\frac{1-z/2}{2z(1-z/4)}}\,dz, \tag{5.184}$$

trong đó chúng ta đã đổi biến $z \equiv x/L$. Tích phân số biểu thức này cho ta tổng thời gian chuyển động của sợi xích là $t \approx (1.694)\sqrt{L/g}$. Bởi vì thời gian rơi tự do của sợi xích trong bài toán trước được cho bởi $gt^2/2 = 2L \Longrightarrow t = 2\sqrt{L/g}$, chúng ta thấy rằng thời gian rơi trong trường hợp năng lượng được bảo toàn đang xét là vào khoảng 0.847 lần thời gian trong trường hợp sợi xích rơi tự do.

Để tìm lực căng T tại đầu bên trái của vùng uốn, hãy đánh dấu một điểm trên sợi xích tại vị trí đó. Chúng ta sẽ tìm gia tốc của phần đang rơi nằm trên điểm này và sau đó dùng phương trình $F = ma$. Gia tốc của phần đang rơi là $a = dv/dt$, trong đó v được cho trong phương trình (5.183). Lấy đạo hàm, bạn có thể chỉ ra rằng (đừng quên số hạng dx/dt từ quy tắc lấy đạo hàm của hàm hợp) a có thể viết được dưới dạng,

$$a = \mathrm{g}\left(1+\frac{(x/2)(L-x/4)}{(L-x/2)^2}\right). \tag{5.185}$$

Phương trình $F = ma$ cho phần của sợi xích nằm trên điểm đánh dấu, với chiều dương là chiều hướng xuống dưới, cho ta $T + mg = ma \Longrightarrow T = m(a - g)$. Do đó, với $m = \sigma(L - x/2)$, chúng ta có

$$T = \sigma(L-x/2)\mathrm{g}\left(\frac{(x/2)(L-x/4)}{(L-x/2)^2}\right) = \frac{\sigma \mathrm{g} x(L-x/4)}{2(L-x/2)} = \frac{\sigma v^2}{4}, \tag{5.186}$$

trong đó chúng ta đã sử dụng phương trình (5.183). Kết quả này có một tính chất mong đợi là nó bằng không khi $x = 0$ và phân kỳ khi $x \to 2L$. Để tìm lực căng tại đầu bên phải của vùng uốn, chú ý rằng tổng lực căng hướng lên trên tác dụng lên vùng uốn rất bé này bằng tốc độ thay đổi động lượng của vùng uốn (trọng lực của nó là bé và được bỏ qua). Trong một khoảng thời gian nhỏ dt, một độ dài $vdt/2$ của sợi xích bị đưa về trạng thái đứng yên (hệ số 2 là do hiệu ứng "gập đôi"). Chiều dài này đang chuyển động với vận tốc v thì đứng yên, vì vậy sự thay đổi động lượng là $\sigma(vdt/2)v$ hướng lên trên. Do đó, $dp/dt = \sigma v^2/2$. Giá trị này phải bằng tổng lực hướng lên trên tác dụng vào vùng uốn, và bởi vì chúng ta đã tìm được ở phần trên là lực hướng lên trên tại đầu bên trái của vùng uốn là $\sigma v^2/4$, nên phải có một lực hướng lên trên tại đầu bên phải của vùng uốn có độ lớn $\sigma v^2/4$. Do đó lực căng tại hai đầu của vùng uốn là bằng nhau.

5.30. Rơi từ một mặt bàn

(a) LỜI GIẢI THỨ NHẤT: Gọi σ là khối lượng riêng của sợi xích. Từ định luật bảo toàn năng lượng, chúng ta biết rằng động năng tại thời điểm cuối của sợi xích bằng $(\sigma L)v^2/2$, bằng với phần năng lượng thế năng bị mất đi. Phần thế năng bị mất này bằng $(\sigma L)(L/2)g$, bởi vì trọng tâm của sợi xích rơi xuống một quãng đường bằng $L/2$. Do đó,

$$v = \sqrt{\mathrm{g}L}. \tag{5.187}$$

Giá trị này bằng vận tốc mà một vật rơi xuống một quãng đường $L/2$ nhận được. Chú ý rằng nếu phần ban đầu rủ xuống qua lỗ là ngắn tùy ý, thì sợi xích sẽ mất một khoảng thời gian lớn tùy ý để rơi xuống. Nhưng vận tốc cuối cùng của nó vẫn là (gần tùy ý tới) $\sqrt{gL}$.

LỜI GIẢI THỨ HAI: Gọi x là độ dài rủ xuống qua lỗ. Trọng lực tác dụng lên độ dài này, bằng $(\sigma x)g$, là lực làm thay đổi động lượng của toàn bộ sợi xích, bằng $(\sigma L)\dot{x}$. Do đó, phương trình $F = dp/dt$ cho ta $(\sigma x)g = (\sigma L)\ddot{x}$, mà đơn giản là phương trình $F = ma$. Do vậy, $\ddot{x} = (g/L)x$, và nghiệm tổng quát của phương trình này là[34]

$$x(t) = Ae^{t\sqrt{\mathrm{g}/L}} + Be^{-t\sqrt{\mathrm{g}/L}}. \tag{5.188}$$

Gọi T là thời gian sao cho $x(T) = L$. Nếu ϵ là rất nhỏ, thì T sẽ rất lớn. Nhưng đối với giá trị t lớn (chính xác hơn, đối với $t \gg \sqrt{L/g}$), chúng ta có thể bỏ qua số hạng có số mũ âm trong phương trình (5.188). Sau đó chúng ta có

$$x \approx Ae^{t\sqrt{\mathrm{g}/L}} \quad \Longrightarrow \quad \dot{x} \approx \left(Ae^{t\sqrt{\mathrm{g}/L}}\right)\sqrt{\mathrm{g}/L} \approx x\sqrt{\mathrm{g}/L} \quad \text{(đối với } t \text{ lớn).} \tag{5.189}$$

Khi $x = L$, chúng ta nhận được

$$\dot{x}(T) = L\sqrt{\mathrm{g}/L} = \sqrt{\mathrm{g}L}, \tag{5.190}$$

trùng với kết quả trong lời giải thứ nhất.

(b) Gọi σ là khối lượng riêng của sợi xích, và gọi x là độ dài rủ xuống qua lỗ. Trọng lực của phần độ dài này, bằng $(\sigma x)g$, là nguyên nhân gây ra sự thay đổi động lượng của sợi xích. Động lượng này bằng $(\sigma x)\dot{x}$, bởi vì chỉ có phần rủ xuống là đang chuyển động. Do đó, phương trình $F = dp/dt$ cho ta

$$x\mathrm{g} = x\ddot{x} + \dot{x}^2. \tag{5.191}$$

Chú ý rằng phương trình $F = ma$ sẽ cho ta một phương trình sai, bởi vì nó bỏ qua một thực tế là phần khối lượng đang chuyển động, σx, là đang thay đổi. Nó do đó sẽ thiếu số hạng thứ hai trong vế phải của phương trình (5.191). Tóm lại, động lượng của sợi xích tăng lên bởi vì nó đang tăng dần vận tốc (mà cho ta số hạng $x\ddot{x}$) *và* bởi vì có thêm khối lượng

[34]Nếu ϵ là giá trị ban đầu của x, thì $A = B = \epsilon/2$ thỏa mãn điều kiện đầu $x(0) = \epsilon$ và $\dot{x}(0) = 0$, trong trường hợp này chúng ta có thể viết $x(t) = \epsilon\cosh(t\sqrt{g/L})$. Nhưng chúng ta không cần thông tin này cho phần tiếp theo.

liên tục được thêm vào phần đang chuyển động (mà cho ta số hạng $\dot{x}^2$, như bạn có thể chỉ ra).

Bây giờ hãy giải phương trình (5.191) để tìm ra $x(t)$. Bởi vì g là tham số duy nhất trong phương trình, nên nghiệm $x(t)$ có thể chỉ liên quan đến g và t.[35] Bằng phương pháp phân tích thứ nguyên, $x(t)$ khi đó phải có dạng $x(t) = bgt^2$, trong đó b là một hằng số cần xác định. Thay biểu thức này của $x(t)$ vào trong phương trình (5.191) và chia cho g^2t^2 ta có $b = 2b^2 + 4b^4$. Do đó, $b = 1/6$, và nghiệm của chúng ta có thể được viết dưới dạng

$$x(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{g}{3}\right)t^2. \tag{5.192}$$

Đây là phương trình cho một vật chuyển động xuống dưới với gia tốc $g' = g/3$. Thời gian để sợi xích rơi xuống một quãng đường L khi đó được cho bởi $L = g't^2/2$, và ta nhận được $t = \sqrt{2L/g'}$. Vận tốc cuối do đó bằng

$$v = \mathrm{g}'t = \sqrt{2L\mathrm{g}'} = \sqrt{\frac{2\mathrm{g}L}{3}}. \tag{5.193}$$

Giá trị này nhỏ hơn kết quả $\sqrt{gL}$ trong phần (a). Do đó chúng ta thấy rằng mặc dù tổng thời gian chuyển động của trường hợp trong câu (a) là rất lớn, nhưng vận tốc cuối của sợi xích trong trường hợp đó thực ra là lớn hơn trong trường hợp này. Bạn có thể chỉ ra rằng vận tốc trong phần (a) là nhỏ hơn vận tốc trong phần (b) đối với x nhỏ hơn $2L/3$, nhưng lớn hơn đối với x lớn hơn $2L/3$.

NHẬN XÉT: Sử dụng phương trình (5.193), bạn có thể chỉ ra rằng (1/3) thế năng bị mất do chuyển thành nhiệt. Phần năng lượng bị mất không thể tránh được này xảy ra trong chuyển động đột ngột mà các phân tử đột nhiên có vận tốc từ trạng thái nằm yên khi chúng gia nhập vào phần có chuyển động của sợi xích. Do đó định luật bảo toàn năng lượng *không* có giá trị sử dụng khi giải phần (b). Nếu bạn sử dụng định luật bảo toàn năng lượng, bạn sẽ (như bạn có thể kiểm tra) nhận được một gia tốc không chính xác là $g/2$. Theo lời giải phía trên dựa trên phương trình $F = dp/dt$, kết quả $g/2$ này không thể đúng được, bởi vì đơn giản là không có đủ lực hướng xuống dưới trong cơ cấu này để đạt được gia tốc này. Lực hướng xuống dưới duy nhất là trọng lực, và bạn đã chỉ ra ở trên rằng lực này dẫn đến một gia tốc là $g/3$.

Nếu bạn muốn cố gắng không để bị mất phần năng lượng bị mất này và bằng cách nào đó nhận được gia tốc $g/2$, một ý tưởng khả thi đó là sử dụng một sợi dây thừng liên tục

[35] Các đại lượng có thứ nguyên khác trong bài toán, L và σ, không xuất hiện trong phương trình (5.191), vì vậy chúng không xuất hiện trong nghiệm. Hơn nữa, vị trí và vận tốc ban đầu (mà nói chung thường xuất hiện trong nghiệm $x(t)$, bởi vì phương trình (5.191) là phương trình vi phân cấp hai) không xuất hiện trong trường hợp này, bởi vì chúng đều bằng không.

thay vì sử dụng loại xích lý tưởng mà chúng ta đang dùng này. Như đã đề cập ở phần cuối của Mục 5.8 một sợi dây thừng là một hệ bảo toàn năng lượng. Tuy nhiên, từ lập luận ở phần trước, bây giờ chúng ta sẽ có lực căng khác không ở *khắp mọi nơi* dọc theo sợi dây thừng, thậm chí ở phần bên trong của đống dây; đây là cái giá mà bạn phải trả để không có điểm nào trong sợi dây thừng mà đột ngột có vận tốc từ trạng thái nằm yên. Khi đó lực căng này gây ra (tất cả) phần dây trong đống chuyển động. Hệ do đó sẽ hoàn toàn khác với hệ ban đầu với sợi xích lý tưởng của chúng ta, trong đó nó được hiểu rằng tất cả các sợi dây nối các điểm khối lượng lý tưởng trong đống ban đầu là trùng với lực căng bằng không; lực căng trong một sợi dây nhỏ đã cho sẽ khác không chỉ khi nó gia nhập phần đang chuyển động. Do đó nghiệm của cơ cấu mới có năng lượng được bảo toàn này phụ thuộc vào cách mà sợi dây thừng trong đống ban đầu được đặt như thế nào; vì vậy chúng ta cần phải có thêm thông tin để giải bài toán này. Nhưng một điều là chắc chắn: cơ cấu mới này là chắc chắn sẽ không nhận được gia tốc bằng $g/2$, bởi vì lời giải của trường hợp năng lượng được bảo toàn mà dẫn đến kết quả $g/2$ là được dựa trên giả thiết rằng toàn bộ phần thế năng bị mất chỉ chuyển qua động năng của phần dây thừng đang rời ra ở dưới mặt bàn. Việc phần dây thừng bên trong đống bây giờ cũng chuyển động đã phá hỏng giả thiết này. ♣

5.31. Hạt mưa

Gọi ρ là khối lượng riêng của hạt mưa, và gọi λ là khối lượng riêng trung bình trong không gian của các hạt nước. Gọi $r(t)$, $M(t)$, và $v(t)$ tương ứng là bán kính, khối lượng, và vận tốc của hạt mưa. Chúng ta cần ba phương trình để giải ra ba ẩn này. Các phương trình mà chúng ta sẽ sử dụng là hai biểu thức khác nhau của dM/dt, và biểu diễn $F = dp/dt$ của hạt mưa. Biểu thức đầu tiên của $\dot{M}$ nhận được bằng cách lấy đạo hàm của $M = (4/3)\pi r^3 \rho$, mà cho ta

$$\dot{M} = 4\pi r^2 \dot{r} \rho \tag{5.194}$$

$$= 3M\frac{\dot{r}}{r}. \tag{5.195}$$

Biểu thức thứ hai của $\dot{M}$ nhận được bằng việc chú ý rằng sự thay đổi của M là do nhận được các hạt nước. Hạt mưa quét một thể tích theo một tốc độ cho bởi diện tích mặt cắt của nó nhân với vận tốc của nó. Do đó,

$$\dot{M} = \pi r^2 v \lambda. \tag{5.196}$$

Phương trình $F = dp/dt$ được tìm như sau. Trọng lực là Mg, và động lượng là Mv. Do đó, $F = dp/dt$ cho ta

$$M\mathrm{g} = \dot{M}v + M\dot{v}. \tag{5.197}$$

Chúng ta bây giờ có ba phương trình liên quan đến ba ẩn, r, M và v.[36] Mục đích của chúng ta là đi tìm $\dot{v}$. Chúng ta sẽ làm điều này bằng cách là đầu tiên đi tìm $\ddot{r}$. Cân bằng biểu thức của $\dot{M}$ trong các phương trình (5.195) và (5.196) ta có

$$v = \tfrac{4\rho}{\lambda}\dot{r} \tag{5.198}$$

$$\Longrightarrow \quad \dot{v} = \tfrac{4\rho}{\lambda}\ddot{r}. \tag{5.199}$$

Thay các phương trình (5.195), (5.199), và (5.199) vào trong phương trình (5.197) ta có

$$M\mathrm{g} = \left(3M\frac{\dot{r}}{r}\right)\left(\frac{4\rho}{\lambda}\dot{r}\right) + M\left(\frac{4\rho}{\lambda}\ddot{r}\right). \tag{5.200}$$

Do đó,

$$\tilde{g}r = 12\dot{r}^2 + 4r\ddot{r}, \tag{5.201}$$

trong đó chúng ta đã định nghĩa $\tilde{g} \equiv g\lambda/\rho$, để cho thuận tiện. Tham số duy nhất trong phương trình (5.201) là $\tilde{g}$. Do đó, $r(t)$ có thể phụ thuộc duy nhất vào $\tilde{g}$ và t.[37] Do vậy, bằng việc phân tích thứ nguyên, r phải có dạng

$$r(t) = A\tilde{g}t^2, \tag{5.202}$$

trong đó A là một hằng số cần tìm. Thay biểu thức này của r vào trong phương trình (5.201) ta có

$$\begin{aligned} \tilde{g}(A\tilde{g}t^2) &= 12(2A\tilde{g}t)^2 + 4(A\tilde{g}t^2)(2A\tilde{g}) \\ \Longrightarrow \quad A &= 48A^2 + 8A^2. \end{aligned} \tag{5.203}$$

Do đó, $A = 1/56$, và vì vậy $\ddot{r} = 2A\tilde{g} = \tilde{g}/28 = g\lambda/28\rho$. Phương trình (5.199) khi đó cho ta gia tốc của hạt mưa là

$$\dot{v} = \frac{\mathrm{g}}{7}, \tag{5.204}$$

không phụ thuộc vào ρ và λ. Để biết thêm thảo luận về bài toán hạt mưa, xem Krane (1981).

NHẬN XÉT: Một nghiệm không chính xác hay gặp phải trong bài toán này là như sau, đó là sử dụng (sai) định luật bảo toàn năng lượng: Thực tế rằng v tỷ lệ với $\dot{r}$ (như được chỉ ra

[36] Chú ý rằng chúng ta *không thể* viết ra phương trình bảo toàn năng lượng một cách ngây thơ (mà nó nói rằng phần giảm thế năng của nước bằng với phần tăng động năng của nó), bởi vì năng lượng cơ học là *không* bảo toàn. Các va chạm giữa hạt mưa và các hạt nước là hoàn toàn không đàn hồi. Hạt nước sẽ, trong thực tế, bị nóng lên. Xem nhận xét ở phần cuối của lời giải.

[37] Các đại lượng có thứ nguyên khác trong bài toán, ρ và λ, không xuất hiện trong phương trình (5.201), ngoại trừ thông qua $\tilde{g}$, vì vậy chúng không thể xuất hiện trong nghiệm. Hơn nữa, giá trị ban đầu của r và $\dot{r}$ (nói chung xuất hiện trong nghiệm của $r(t)$, bởi vì phương trình (5.201) là một phương trình vi phân cấp hai) không xuất hiện trong trường hợp này, bởi vì chúng đều bằng không.

trong phương trình (5.199)) nghĩa là thể tích vùng bị quét bởi hạt mưa là một hình nón. Trọng tâm của hình nón là điểm có vị trí bằng 1/4 trên đường từ đáy cho tới đỉnh (như bạn có thể chỉ ra bằng cách tích phân các lát cắt hình tròn nằm ngang). Do đó, nếu M là khối lượng của hạt mưa sau khi nó rơi xuống một độ cao h, thì một áp dụng (sai) của định luật bảo toàn năng lượng cho ta

$$\frac{1}{2}Mv^2 = M\mathrm{g}\frac{h}{4} \quad \Longrightarrow \quad v^2 = \frac{\mathrm{g}h}{2}. \tag{5.205}$$

Lấy đạo hàm biểu thức này (hoặc chỉ sử dụng một kết quả tổng quát, $v^2 = 2ah$) ta có

$$\dot{v} = \frac{\mathrm{g}}{4} \quad \text{không đúng.} \tag{5.206}$$

Lý do tại sao nghiệm này không đúng là các va chạm giữa hạt mưa và các hạt nước là hoàn toàn không đàn hồi. Nhiệt được sinh ra, và tổng động năng của hạt mưa là nhỏ hơn giá trị bạn mong đợi.

Hãy tính xem có bao nhiêu năng lượng cơ học bị mất đi (và do đó xem hạt mưa bị nóng lên mức độ nào) như là một hàm của độ cao rơi xuống. Phần mất đi của năng lượng cơ học là

$$E_{\text{bị mất}} = M\mathrm{g}\frac{h}{4} - \frac{1}{2}Mv^2. \tag{5.207}$$

Sử dụng $v^2 = 2(g/7)h$, giá trị này trở thành

$$\Delta E_{\text{nội năng}} = E_{\text{bị mất}} = \frac{3}{28}M\mathrm{g}h, \tag{5.208}$$

trong đó $\Delta E_{\text{nội năng}}$ là phần nội năng hạt mưa nhận được. Năng lượng cần thiết để đun nóng 1g nước lên 1^oC là 1 calorie (= 4.18 J). Do đó, năng lượng để đung nóng 1kg nước lên 1^oC là $\approx$ 4200J. Nói cách khác,

$$\Delta E_{\text{nội năng}} = 4200M\ \Delta T, \tag{5.209}$$

trong đó M được đo bởi kg, và T được đo bởi độ Celsius. Các phương trình (5.208) và (5.209) cho ta nhiệt độ tăng lên của hạt mưa như là một hàm của h,

$$4200\ \Delta T = \frac{3}{28}\mathrm{g}h. \tag{5.210}$$

Hỏi hạt mưa phải rơi từ một độ cao là bao nhiêu để nó bắt đầu bị sôi? Nếu chúng ta giả sử rằng các hạt nước có nhiệt độ gần bằng không, thì độ cao mà hạt mưa phải rơi qua để có $\Delta T = 100^o$C được tìm bởi phương trình (5.210) là

$$h \approx 400\ 000\ m = 400\ \text{km}, \tag{5.211}$$

lớn hơn độ cao của tầng khí quyển. Tất nhiên chúng ta đã lý tưởng hóa bài toán một cách quá mạnh. Nhưng không cần phải nói, không có gì phải lo lắng về việc bị bỏng do mưa. Một giá trị điển hình của h là một vài kilomet, đủ để làm nhiệt độ của hạt mưa chỉ tăng lên vài độ. Hiện tượng này bị triệt tiêu hoàn toàn bởi rất nhiều các yếu tố khác. ♣

Chương 6

Phương pháp Lagrange

Trong chương này chúng ta sẽ nghiên cứu một phương pháp mới để giải các bài toán cơ học. Xét hệ gồm một vật gắn vào đầu một lò xo. Chúng ta tất nhiên có thể phân tích bài toán này bằng việc sử dụng phương trình định luật II Newton $F = ma$ để viết ra $m\ddot{x} = -kx$. Nghiệm của phương trình này là các hàm tuần hoàn, như chúng ta đã biết rất rõ về chúng. Tuy nhiên chúng ta có thể giải quyết bài toán bằng cách sử dụng phương pháp khác mà không sử dụng dạng hiển của phương trình $F = ma$. Trong rất nhiều (thực ra, là hầu như tất cả) các tình huống vật lý, phương pháp mới này là ưu việt hơn rất nhiều so với phương pháp sử dụng phương trình $F = ma$. Bạn sẽ nhanh chóng tự khám phá phương pháp này khi bạn giải các bài tập và các bài tập luyện tập trong chương này. Chúng ta sẽ trình bày phương pháp mới này bằng cách ban đầu đưa ra các nguyên tắc của nó (mà không có bất cứ chứng minh nào) và chỉ ra rằng chúng cuối cùng bằng một cách thần kỳ nào đó cho chúng ta kết quả chính xác. Sau đó chúng ta sẽ đưa ra các chứng minh về tính đúng đắn của phương pháp.

6.1 Các phương trình Euler-Lagrange

Đây là các bước thực hiện phương pháp. Xét một tổ hợp mà có vẻ rất là ngớ ngẩn giữa động năng và thế năng (tương ứng là T và V) như sau :

$$L \equiv T - V. \tag{6.1}$$

Đây được gọi là *hàm Lagrange*. Ở đây, chúng ta có một dấu trừ bên trong công thức định nghĩa (dấu cộng đơn giản là sẽ cho tổng năng lượng). Trong bài toán một vật được treo vào đầu một lò xo, $T = m\dot{x}^2/2$ và $V = kx^2/2$, ta có

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2. \tag{6.2}$$

Bây giờ chúng ta viết

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x}. \tag{6.3}$$

Đừng lo lắng, chúng ta sẽ chỉ ra trong Mục 6.2 từ đâu mà có phương trình này. Phương trình này được gọi là *phương trình Euler-Lagrange (E-L)*. Với bài toán nêu trên, ta có $\partial L/\partial \dot{x} = m\dot{x}$ và $\partial L/\partial x = -kx$ (xem phụ lục B cho định nghĩa của đạo hàm riêng), vì vậy phương trình (6.3) cho ta

$$m\ddot{x} = -kx, \tag{6.4}$$

trùng với kết quả nhận được khi sử dụng phương trình $F = ma$. Một phương trình có dạng như (6.4), mà được nhận được từ phương trình Euler-Lagrange, được gọi là một *phương trình chuyển động*.[1] Nếu bài toán liên quan đến nhiều hơn một tọa độ, như là hầu hết các bài toán thường gặp, thì chúng ta sẽ chỉ phải áp dụng công thức (6.3) cho mỗi tọa độ. Chúng ta sẽ nhận được số phương trình chuyển động bằng số tọa độ. Mỗi phương trình có thể liên quan đến rất nhiều tọa độ (xem ví dụ bên dưới, trong đó cả hai phương trình liên quan đến cả x và θ).

Tới thời điểm này, bạn có thể đang nghĩ, "Đó là một cách làm mẹo rất hay, nhưng chúng ta đã gặp may trong bài toán lò xo. Cách làm trên sẽ không áp dụng được trong một tình huống tổng quát hơn." Vậy, hãy xem thế nào. Nếu chúng ta xét bài toán tổng quát hơn về một chất điểm chuyển động dưới tác dụng của một hàm thế năng $V(x)$ bất kỳ thì sao (chúng ta bây giờ chỉ xét chuyển động một chiều). Khi đó hàm Lagrange có dạng

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x), \tag{6.5}$$

và phương trình Euler-Lagrange, (6.3), cho ta

$$m\ddot{x} = -\frac{dV}{dx}. \tag{6.6}$$

Nhưng $-dV/dx$ là lực tác dụng lên chất điểm. Vì vậy chúng ta thấy rằng các phương trình (6.1) và (6.3) cùng với nhau cho chúng ta biết chính xác những gì mà phương trình $F = ma$ cho chúng ta biết, khi sử dụng một hệ tọa độ Đề Các trong trường hợp một chiều (nhưng kết quả này thực ra là hoàn toàn tổng quát, như chúng ta sẽ thấy trong Mục 6.4). Chú ý rằng khi thay đổi hàm thế năng bởi một hằng số đã cho thì sẽ không ảnh hưởng gì đến phương trình chuyển động, bởi vì phương trình (6.3) chỉ liên quan đến đạo hàm của V. Điều này tương đương với việc nói rằng chỉ những sự khác nhau của năng lượng là có liên quan, chứ không phải là các giá trị thực của chúng, như chúng ta đã biết rất rõ về điều này.

Trong một cơ cấu ba chiều được biểu diễn trong hệ tọa độ Đề Các, hàm thế năng có dạng $V(x, y, z)$, do đó hàm Lagrange là

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - V(x, y, z). \tag{6.7}$$

[1] Thuật ngữ "phương trình chuyển động" là hơi không rõ ràng. Nó được hiểu là đề cập đến phương trình vi phân cấp hai mà x phải thỏa mãn, và nó không phải là một phương trình của x như là một hàm của t, như là $x = Acos(\omega t + \phi)$ ở trong bài toán này, mà nhận được bằng cách tích phân phương trình chuyển động hai lần.

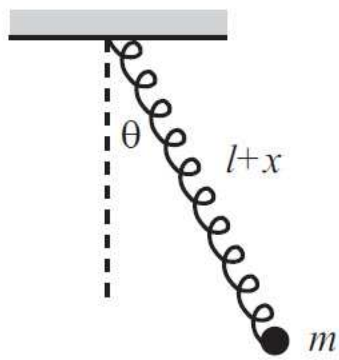
Khi đó, bằng cách áp dụng phương trình (6.3) cho các biến x, y, z chúng ta nhận được hệ ba phương trình Euler-Lagrange mà có thể biểu diễn dưới dạng vector như sau

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -\nabla V. \tag{6.8}$$

Nhưng $-\nabla V = \mathbf{F}$, vì vậy chúng ta một lần nữa nhận lại phương trình của định luật II Newton, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, bây giờ là trong không gian ba chiều.

Hãy xét thêm một ví dụ nữa để thuyết phục bạn rằng những việc chúng ta làm ở trên hoàn toàn không phải là vô nghĩa.

Ví dụ (Con lắc lò xo): Xét một con lắc đơn cấu tạo bởi một lò xo có một vật



Hình 6.1:

khối lượng m gắn vào một đầu của nó (xem Hình 6.1). Lò xo được bố trí sao cho nó luôn nằm trên một đường thẳng (mà chúng ta có thể bố trí như thế bằng cách, ví dụ như, quấn lò xo xung quanh một thanh cứng không khối lượng). Chiều dài của lò xo tại vị trí cân bằng là l. Gọi chiều dài của lò xo tại thời điểm t là $l + x(t)$ và gọi góc nghiêng giữa nó và phương thẳng đứng là $\theta(t)$. Giả sử rằng chuyển động xảy ra trong một mặt phẳng thẳng đứng, hãy tìm phương trình chuyển động đối với x và θ.

Lời giải: Động năng của hệ có thể chia thành các thành phần tiếp tuyến và thành phần bán kính, vì vậy ta có

$$T = \frac{1}{2}m\Big(\dot{x}^2 + (\ell + x)^2\dot{\theta}^2\Big). \tag{6.9}$$

Thế năng của hệ gồm thế năng của trọng lực và thế năng của lò xo, vì vậy ta có

$$V(x, \theta) = -mg(\ell + x)\cos\theta + \frac{1}{2}kx^2. \tag{6.10}$$

Do đó hàm Lagrange là

$$L \equiv T - V = \frac{1}{2}m\Big(\dot{x}^2 + (\ell + x)^2\dot{\theta}^2\Big) + mg(\ell + x)\cos\theta - \frac{1}{2}kx^2. \tag{6.11}$$

Ở đây chúng ta có hai biến x và θ. Như đã đề cập ở trên, điều rất đẹp về phương pháp Lagrange là chúng ta có thể đơn giản sử dụng phương trình (6.3) hai lần, một lần đối với biến x và một lần đối với biến θ. Vì vậy hai phương trình Euler-Lagrange là

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x} \quad \Longrightarrow \quad m\ddot{x} = m(\ell + x)\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta - kx, \tag{6.12}$$

và

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \theta} \quad &\Longrightarrow \quad \frac{d}{dt}\Big(m(\ell + x)^2\dot{\theta}\Big) = -mg(\ell + x)\sin\theta \\
&\Longrightarrow \quad m(\ell + x)^2\ddot{\theta} + 2m(\ell + x)\dot{x}\dot{\theta} = -mg(\ell + x)\sin\theta \\
&\Longrightarrow \quad m(\ell + x)\ddot{\theta} + 2m\dot{x}\dot{\theta} = -mg\sin\theta. \qquad (6.13)
\end{aligned}$$

Phương trình (6.12) đơn giản chỉ là phương trình $F = ma$ viết theo phương bán kính, bao gồm cả gia tốc hướng tâm, $-(l+x)\dot{\theta}^2$. Và dòng đầu tiên của phương trình (6.13) chỉ ra rằng moment lực tác dụng lên vật bằng tốc độ biến thiên moment động lượng (đây là một trong các chủ đề của Chương 8). Nói một cách khác, nếu bạn muốn làm việc trong một hệ tọa độ quay, thì phương trình (6.12) sẽ là phương trình $F = ma$ theo phương bán kính, bao gồm cả lực hướng tâm, $-(l+x)\dot{\theta}^2$. Và dòng thứ ba của phương trình (6.13) là phương trình $F = ma$ viết theo phương tiếp tuyến, bao gồm cả lực Coriolis, $-2m\dot{x}\dot{\theta}$. Nhưng đừng bận tâm về điều này bây giờ. Chúng ta sẽ làm việc với hệ quy chiếu quay trong Chương 10.[2]

NHẬN XÉT: Sau khi viết được các phương trình E-L, tốt nhất bạn nên kiểm tra lại các kết quả đạt được bằng cách cố gắng nhận dạng chúng như là các phương trình $F = ma$ và/hoặc $\tau = dL/dt$ (một khi bạn đã học về điều này). Tuy nhiên, đôi khi việc nhận dạng này không hiển nhiên cho lắm. Và đối với các trường hợp khi mọi thứ là rõ ràng (nghĩa là, khi bạn nhìn các phương trình E-L và thốt lên ,"Ôi trời, tất nhiên phải như thế!"), nó thông thường chỉ sáng tỏ *sau khi* bạn đã nhận được các phương trình. Nói chung, phương pháp an toàn nhất để giải một bài toán là sử dụng phương pháp Lagrange và sau đó kiểm tra mọi thứ lại với phương trình "$F = ma$" và/hoặc "$\tau = dL/dt$" nếu bạn có thể. ♣

[2]Trong suốt chương này chúng ta sẽ liên tục chỉ ra các moment lực, các moment động lượng, các lực hướng tâm và các đại lượng khác khi chúng xuất hiện trong các phương trình chuyển động, mặc dù chúng ta đến bây giờ vẫn chưa nghiên cứu gì về chúng. Tôi cho rằng sẽ không có vấn đề gì khi làm bạn phải chú ý đến chúng. Nhưng hãy yên tâm, việc hiểu rõ về các đại lượng này là điều không cần thiết để hiểu về mọi thứ chúng ta sẽ làm trong chương này, vì vậy hãy bỏ qua việc tìm hiểu chúng nếu bạn muốn. Một trong những điều tuyệt vời nhất của phương pháp Lagrange là thậm chí nếu bạn chưa bao giờ được nghe tới các thuật ngữ như "moment lực", "lực hướng tâm", "lực Coriolis", hay thậm chí cả phương trình "$F = ma$", bạn vẫn có thể nhận được các phương trình vi phân chuyển động một cách chính xác bằng cách đơn giản là viết ra động năng và thế năng, và sau đó thực hiện vài phép lấy đạo hàm.

Tới thời điểm này thì có vẻ như tùy vào sở thích cá nhân, và về mặt lý thuyết, bạn có thể dùng một trong hai phương pháp Lagrange hoặc phương pháp $F = ma$. Cả hai phương pháp đều cho ta các phương trình chuyển động giống nhau. Tuy nhiên, trong các bài toán mà liên quan đến nhiều hơn một biến, thông thường nó sẽ đơn giản hơn *rất nhiều* khi viết ra T và V, thay vì viết ra tất cả các lực tác động. Điều này là do động năng T và thế năng V là các hàm vô hướng đơn giản và đẹp đẽ. Mặt khác, các lực là các vector, và chúng ta sẽ rất dễ nhầm lẫn nếu chúng chỉ theo các hướng khác nhau. Phương pháp Lagrange có thuận lợi là một khi bạn đã viết ra được $L \equiv T - V$, bạn không cần phải suy nghĩ thêm gì nữa. Tất cả việc các bạn phải làm chỉ là cứ thực hiện vài phép lấy đạo hàm.[3]

Nhưng ngoài việc đơn giản về việc tính toán, liệu có sự khác nhau cơ bản nào giữa hai phương pháp không? Liệu có nguyên nhân sâu xa nào đằng sau phương trình (6.3) không? Thực ra, có ...

6.2 Nguyên lý tác dụng dừng

Xét đại lượng,

$$S \equiv \int_{t_1}^{t_2} L(x, \dot{x}, t)dt. \tag{6.14}$$

S được gọi là *hàm tác dụng*. Đó là một đại lượng có đơn vị là (Năng lượng) x (Thời gian). S phụ thuộc vào L, và L lại phụ thuộc vào $x(t)$ thông qua phương trình (6.1)[4]. Cho trước hàm bất kỳ $x(t)$, chúng ta có thể tính được đại lượng S. Bây giờ chúng ta sẽ chỉ xem xét trường hợp chỉ có một tọa độ, x.

Các tích phân giống như trong phương trình (6.14) được gọi là các *phiếm hàm*, và S đôi khi được kí hiệu bởi $S[x(t)]$. Nó phụ thuộc vào toàn bộ hàm $x(t)$, và không chỉ phụ thuộc vào một số đầu vào, như là một hàm $f(t)$ thông thường. S có thể được xem như là một hàm của một số vô hạn các biến, gọi là các giá trị của $x(t)$ đối với t biến thiên từ t_1 đến t_2. Nếu bạn không thích tính chất vô hạn này, bạn có thể tưởng tượng chia khoảng thời gian thành, ví dụ như, một triệu các khoảng nhỏ, và sau đó thay thế việc lấy tích phân bởi một tổng rời rạc.

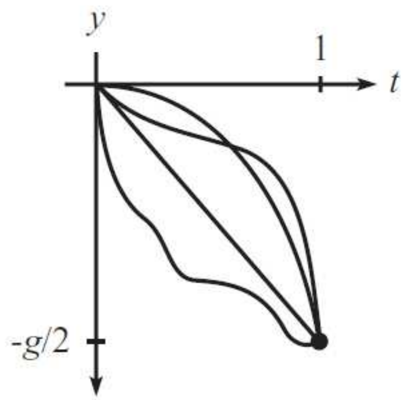
Bây giờ hãy đặt câu hỏi như sau: Xét một hàm $x(t)$, với $t_1 \leq t \leq t_2$, có điểm đầu và điểm cuối là cố định (nghĩa là $x(t_1) = x_1$ và $x(t_2) = x_2$, trong đó x_1 và x_2 được cho trước), và có giá trị bất kỳ tại các điểm khác. Hỏi với giá trị nào của hàm $x(t)$ thì S sẽ có một điểm dừng? Một điểm dừng là một điểm cực tiểu, cực đại địa phương, hoặc là một

[3]Tất nhiên, sau cùng bạn cũng phải giải các phương trình vi phân chuyển động tìm được, nhưng bạn cũng phải làm việc này khi sử dụng phương pháp $F = ma$

[4]Trong một vài trường hợp, động năng và thế năng trong $L \equiv T - V$ có thể phụ thuộc hiển vào thời gian, vì vậy chúng ta đã tính đến cả biến "t" trong phương trình (6.14)

điểm yên ngựa.[5]

Ví dụ như, xét một quả bóng rơi từ trạng thái nằm yên, và xét hàm $y(t)$ với $0 \leq t \leq 1$. Giả sử rằng bằng cách nào đó chúng ta biết rằng $y(0) = 0$ và $y(1) = -g/2$.[6] Một số khả năng đối với $y(t)$ được chỉ ra trong Hình 6.2, và mỗi khả năng này (về mặt lý thuyết) có thể được thay vào trong phương trình (6.1) và (6.14) để tính toán ra S. Với khả năng nào chúng ta sẽ nhận được điểm dừng của S? Định lý sau đây sẽ cho chúng ta câu trả lời.



Hình 6.2:

Định lý 6.1. *Nếu hàm $x_0(t)$ làm cho phiếm hàm S đạt giá trị dừng (nghĩa là, một điểm cực đại, cực tiểu địa phương hoặc điểm yên ngựa), thì*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_0}\right) = \frac{\partial L}{\partial x_0}. \tag{6.15}$$

Nó được hiểu rằng chúng ta đang xem xét lớp các hàm mà các điểm đầu và điểm cuối của chúng cố định. Nghĩa là $x(t_1) = x_1$ và $x(t_2) = x_2$.

Chứng minh. Chúng ta sẽ sử dụng thực tế là nếu một hàm $x_0(t)$ nào đó làm cho phiếm hàm S đạt giá trị dừng, thì bất kì hàm nào rất gần với $x_0(t)$ (với cùng các điểm đầu và điểm cuối) về cơ bản sẽ cho giá trị của phiếm hàm S là giống nhau, với sai khác tới bậc nhất của bất cứ độ lệch nào của $x_0(t)$. Đây thực ra là định nghĩa của giá trị dừng. Sự tương đương đối với các hàm thông thường là nếu $f(b)$ là một giá trị dừng của f, thì $f(b + \epsilon)$ có giá trị sai khác so với $f(b)$ chỉ một đại lượng vô cùng bé bậc hai của ϵ. Điều này là đúng bởi vì $f'(b) = 0$, vì vậy không có số hạng bậc nhất trong khai triển chuỗi Taylor trong lân cận xung quanh điểm b.

Giả sử rằng hàm $x_0(t)$ làm cho phiếm hàm S có giá trị dừng, và xét hàm

$$x_a(t) \equiv x_0(t) + a\beta(t), \tag{6.16}$$

[5]Một điểm yên ngựa là điểm mà tại đó đạo hàm cấp một của S bằng không theo mọi hướng, và đạo hàm cấp hai của S có thể dương theo một số hướng và có thể âm theo một số hướng khác (giống như điểm giữa của một cái yên ngựa, tất nhiên.)

[6]Điều này suy ra từ $y = -gt^2/2$, nhưng cứ coi như chúng ta chưa biết gì về công thức này.

trong đó a là một số, và $\beta(t)$ thỏa mãn $\beta(t_1) = \beta(t_2) = 0$ (để làm cho các điểm đầu và cuối của hàm đã cho cố định), và có giá trị tùy ý tại các điểm khác. Khi tính toán hàm tác dụng $S[x_a(t)]$ trong (6.14), biến t sẽ được lấy tích phân lên, vì vậy S chỉ là một số. Nó phụ thuộc vào a, cùng với t_1 và t_2. Yêu cầu của chúng ta là đạo hàm bậc nhất của S theo biến a bằng 0. Hỏi S sẽ phụ thuộc vào a như thế nào? Sử dụng quy tắc đạo hàm hàm hợp, chúng ta có

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial a}S[x_a(t)] = \frac{\partial}{\partial a}\int_{t_1}^{t_2} L\ dt &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial a}\ dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial x_a}\frac{\partial x_a}{\partial a} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a}\frac{\partial \dot{x}_a}{\partial a}\right) dt. \end{aligned} \tag{6.17}$$

Nói cách khác, a ảnh hưởng đến S thông qua ảnh hưởng của nó vào x, và cũng thông qua ảnh hưởng của nó vào $\dot{x}$. Từ phương trình (6.16), ta có:

$$\frac{\partial x_a}{\partial a} = \beta, \quad \text{và} \quad \frac{\partial \dot{x}_a}{\partial a} = \dot{\beta}, \tag{6.18}$$

vì vậy phương trình (6.17) trở thành[7]

$$\frac{\partial}{\partial a}S[x_a(t)] = \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial x_a}\beta + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a}\dot{\beta}\right) dt. \tag{6.19}$$

Bây giờ mới đến phần mẹo hay của chứng minh. Chúng ta sẽ lấy tích phân số hạng thứ hai bằng phương pháp tích phân từng phần (bạn sẽ thấy mẹo này rất nhiều lần khi nghiên cứu vật lý). Sử dụng

$$\int \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a}\dot{\beta} dt = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a}\beta - \int\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a}\right)\beta\ dt, \tag{6.20}$$

phương trình (6.19) trở thành

$$\frac{\partial}{\partial a}S[x_a(t)] = \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial x_a} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a}\right)\beta\ dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a}\beta\bigg|_{t_1}^{t_2}. \tag{6.21}$$

Nhưng $\beta(t_1) = \beta(t_2) = 0$, do đó số hạng cuối cùng (là "số hạng biên") sẽ bị triệt tiêu. Bây giờ chúng ta sẽ sử dụng thực tế là $(\partial/\partial a)S[x_a(t)]$ phải bằng 0 đối với *bất cứ* hàm $\beta(t)$ nào, bởi vì chúng ta đang giả thiết rằng $x_0(t)$ là điểm dừng. Cách duy nhất để điều này có thể đúng là nếu đại lượng trong dấu ngoặc đơn phía trên (được tính toán tại $a = 0$) phải đồng nhất bằng không, nghĩa là,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_0}\right) = \frac{\partial L}{\partial x_0}. \tag{6.22}$$

□

[7]Chú ý rằng chúng ta không giả thiết ở đâu rằng x_a và $\dot{x}_a$ là các biến độc lập. Các đạo hàm riêng trong phương trình (6.18) có liên hệ mật thiết với nhau, trong đó một đạo hàm là đạo hàm của đạo hàm kia. Việc sử dụng quy tắc lấy đạo hàm hàm hợp trong phương trình (6.17) vẫn có giá trị.

Do đó phương trình E-L, (6.3), không phải là phương trình có được bởi sự tình cờ. Nó là một hệ quả của yêu cầu rằng hàm tác dụng đạt giá trị dừng. Do đó chúng ta có thể thay thế phương trình $F = ma$ bởi nguyên lý sau đây.

Nguyên lý tác dụng dừng:

Đường chuyển động thực của phần tử là đường làm cho hàm tác dụng có giá trị dừng.

Nguyên lý này (cũng được biết đến như là nguyên lý Hamilton) là tương đương với phương trình $F = ma$ bởi vì định lý trên chỉ ra rằng nếu (và chỉ nếu, như bạn có thể chỉ ra bằng cách chứng minh theo các bước ngược lại) chúng ta có một điểm dừng của S, thì các phương trình E-L sẽ đúng. Và các phương trình E-L là tương đương với $F = ma$ (như chúng ta đã chỉ ra đối với hệ tọa độ Đề Các trong Mục 6.1, và như chúng ta sẽ chứng minh là nó đúng đối với bất kỳ hệ tọa độ nào trong Mục 6.4). Vì vậy, "nguyên lý tác dụng dừng" là tương đương với phương trình $F = ma$.

Nếu chúng ta có một cơ cấu nhiều chiều trong đó hàm Lagrange là một hàm của các biến $x_1(t), x_2(t), \ldots$, thì nguyên lý tác dụng dừng trên vẫn là tất cả những gì mà chúng ta cần. Với trường hợp có nhiều hơn một biến, chúng ta bây giờ có thể biến đổi mỗi đường chuyển động bằng cách biến đổi mỗi tọa độ (hoặc tổ hợp của chúng). Sự thay đổi của mỗi tọa độ sẽ cho ta một phương trình E-L mà, như chúng ta đã thấy trong trường hợp hệ tọa độ Đề Các, là tương đương với một phương trình $F = ma$.

Với một bài toán cơ học cổ điển, chúng ta có thể giải nó bằng phương pháp $F = ma$, hoặc chúng ta có thể giải nó bằng việc sử dụng các phương trình E-L, mà chúng là hệ quả của nguyên lý tác dụng dừng (thường được gọi là nguyên lý "tác dụng tối thiểu" hoặc nguyên lý "tác dụng cực tiểu", nhưng bạn hãy xem nhận xét thứ tư ở bên dưới). Sử dụng phương pháp nào cũng giúp ta giải quyết được bài toán. Nhưng như đã đề cập trong phần cuối của Mục 6.1, thông thường sẽ dễ dàng hơn nếu chúng ta sử dụng phương pháp thứ hai, bởi vì nó sẽ tránh được việc sử dụng các lực mà có thể làm cho bạn nhầm lẫn nếu bạn có các lực chỉ theo tất cả các hướng phức tạp khác nhau.

Bây giờ hãy quay lại với ví dụ về một quả bóng rơi không vận tốc ban đầu, đã đề cập ở trên. Hàm Lagrange là $L = T - V = m\dot{y}^2/2 - mgy$, vì vậy phương trình (6.22) cho ta $\ddot{y} = -g$, mà đơn giản là phương trình $F = ma$ (sau khi chia cả hai vế cho m), như mong đợi. Nghiệm của phương trình này là $y(t) = -gt^2/2 + v_0 t + y_0$, như chúng ta đã biết rõ. Nhưng các điều kiện đầu cho chúng ta biết rằng $v_0 = y_0 = 0$, vì vậy nghiệm của chúng ta là $y = -gt^2/2$. Tôi khuyến khích các bạn hãy kiểm tra một cách tường minh rằng nghiệm $y(t)$ này sẽ cho ta hàm tác dụng là giá trị dừng của phiếm hàm có dạng, ví dụ như, $y(t) = -gt^2/2 + \epsilon t(t-1)$, mà phiếm hàm này cũng thỏa mãn các điều kiện của các điểm cuối (đây là nhiệm vụ của Bài tập luyện tập 6.40). Tất nhiên, có một số vô hạn các cách khác để biến đổi $y(t)$, nhưng kết quả cụ thể này sẽ giúp thuyết phục bạn về tính đúng đắn của Định lý 6.1.

Chú ý rằng tính chất điểm dừng được suy ra từ phương trình Euler-Lagrange, phương trình (6.22), là một phát biểu *địa phương*. Nó chỉ cho chúng ta thông tin về các con đường gần nhau. Nó không cho chúng ta biết gì về bản chất *toàn cục* của cách mà hàm tác dụng phụ thuộc vào tất cả các đường khả dĩ. Nếu chúng ta thấy rằng một nghiệm của phương trình (6.22) vô tình cho ta một điểm cực tiểu địa phương (trái ngược với một điểm cực đại hoặc một điểm yên ngựa), thì cũng chưa có lý do gì để kết luận rằng nó là điểm cực tiểu toàn cục, mặc dù trong rất nhiều trường hợp điều này hóa ra là đúng (xem Bài tập luyện tập 6.32, với trường hợp một quả bóng bị ném).

NHẬN XÉT:

1. Định lý 6.1 được dựa trên giả thiết rằng thời gian cuối, t_2, của chuyển động là đã được cho trước. Nhưng làm thế nào mà chúng ta biết được thời điểm kết thúc? Thực ra, chúng ta không biết. Trong ví dụ về việc ném một quả bóng hướng lên trên, tổng thời gian để quả bóng đi lên cao rồi rơi xuống tay bạn là bất kỳ, phụ thuộc vào vận tốc ban đầu của quả bóng. Vận tốc ban đầu này sẽ xuất hiện như là một hằng số tích phân khi giải các phương trình E-L. Chuyển động sẽ phải kết thúc tại một thời điểm nào đó, và nguyên lý tác dụng dừng nói rằng đối với bất cứ thời gian kết thúc nào thì con đường chuyển động thực sẽ là một điểm dừng của hàm tác dụng.

2. Định lý 6.1 chỉ ra rằng chúng ta có thể giải thích các phương trình E-L bằng nguyên lý tác dụng dừng. Tuy nhiên, điều này đơn giản sẽ làm thay đổi khó khăn trong chứng minh. Bây giờ chúng ta phải lập luận chỉ ra tại sao chúng ta phải có hàm tác dụng có một giá trị dừng. Một tin tốt đó là chúng ta có một lập luận chặt chẽ cho việc này. Tin xấu là lập luận này liên quan đến cơ học lượng tử, vì vậy chúng ta không thảo luận điều này một cách chính xác ở đây. Sẽ đủ để nói rằng một chất điểm thực ra thực hiện tất cả các con đường có thể khi đi từ một vị trí này tới một vị trí khác, và mỗi một con đường đi sẽ tương ứng với một số phức $e^{iS/\hbar}$ (với $\hbar = 1.05.10^{-34} J$ là *hằng số Planck*). Những số phức này có giá trị tuyệt đối bằng 1 và chúng được gọi là các "pha". Hóa ra rằng các pha từ tất cả các con đường khả dĩ phải được cộng với nhau để nhận được "biên độ" của việc di chuyển từ một điểm tới một điểm khác. Sau đó giá trị tuyệt đối của biên độ này phải được bình phương lên để nhận được xác xuất.[8]

   Khi đó, điểm cơ bản là tại một giá trị không dừng của S, các pha của các đường đi khác nhau sẽ khác nhau (tuyệt vời, bởi vì $\hbar$ là quá nhỏ so với kích cỡ thông thường của hàm tác dụng đối với một hạt vĩ mô), điều này thực ra dẫn đến việc cộng rất nhiều các vector ngẫu nhiên trong mặt phẳng phức. Những vector này cuối cùng sẽ

[8]Đây là một trong các nhận xét mà hoàn toàn không có gì có ích, bởi vì nó rất khó hiểu đối với những ai mà chưa biết gì về chủ đề này trước đó, và nó là điều tầm thường đối với những ai đã hiểu rồi. Tôi xin lỗi về điều này. Nhưng nhận xét này và các nhận xét tiếp theo là hoàn toàn không cần thiết để hiểu về các vấn đề trong chương này. Nếu các bạn thích đọc thêm về các vấn đề cơ học lượng tử này, bạn nên xem cuốn sách của Richard Feynman (Feynman, 2006). Xét cho cùng, Feynman là người đầu tiên nghĩ ra ý tưởng này.

triệt tiêu lẫn nhau, dẫn đến tổng của chúng về cơ bản là bằng không. Do đó sẽ không có bất cứ sự đóng góp tới biên độ tổng thể từ các giá trị không dừng của S. Do vậy, chúng ta không quan sát các con đường ứng với các hàm S này. Tuy nhiên, tại một giá trị dừng của hàm S tất cả các pha về cơ bản là nhận cùng một giá trị, do đó các pha là cộng hưởng với nhau thay vì là triệt tiêu nhau. Do đó có một xác suất khác không cho phần tử để có một con đường đi là đường tương ứng với điểm dừng của S. Vì vậy đây là con đường ứng mà chúng ta quan sát được.

3. Nhưng một lần nữa, nhận xét phía trên đơn giản là làm dịch chuyển việc khó khăn trong chứng minh thêm một bước nữa. Bây giờ chúng ta phải lập luận làm rõ tại sao các pha $e^{iS/\hbar}$ này tồn tại, và tại sao hàm Lagrange mà xuất hiện trong S lại bằng $T - V$. Nhưng đây là điểm mà chúng ta sẽ dừng lại.

4. Nguyên lý tác dụng dừng đôi khi được đề cập đến như là nguyên lý tác dụng "tối thiểu", nhưng điều này dễ gây nhầm lẫn. Thật ra, thông thường thì điểm dừng là điểm có giá trị nhỏ nhất, nhưng nó không nhất thiết phải như vậy, như chúng ta có thể thấy trong ví dụ sau đây. Xét một dao động điều hòa mà có hàm Lagrange bằng

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2. \tag{6.23}$$

Gọi $x_0(t)$ là một hàm mà là điểm dừng của hàm tác dụng. Khi đó chúng ta biết rằng $x_0(t)$ thỏa mãn phương trình E-L, $m\ddot{x}_0 = -kx_0$. Xét một thay đổi nhỏ của con đường ứng với hàm này, $x_0(t) + \xi(t)$, trong đó $\xi(t)$ thỏa mãn $\xi(t_1) = \xi(t_2) = 0$. Với hàm mới này, hàm tác dụng trở thành

$$S_\xi = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{m}{2}(\dot{x}_0^2 + 2\dot{x}_0\dot{\xi} + \dot{\xi}^2) - \frac{k}{2}(x_0^2 + 2x_0\xi + \xi^2)\right)dt \tag{6.24}$$

Hai số hạng chéo có tổng bằng không, bởi vì sau khi lấy tích phân số hạng $\dot{x}_0\dot{\xi}$ bằng công thức tích phân từng phần, tổng của chúng là

$$m\dot{x}_0\xi|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2}(m\ddot{x}_0 + kx_0)\xi dt \tag{6.25}$$

Số hạng đầu tiên bằng không, do điều kiện biên của ξt. Số hạng thứ hai bằng không, do phương trình E-L. Chúng ta cơ bản vừa mới chứng minh lại Định lý 6.1 cho một trường hợp đặc biệt của dao động điều hòa ở đây.

Các số hạng trong phương trình (6.24) chỉ liên quan đến x_0 cho ta giá trị dừng của hàm tác dụng (gọi nó là S_0). Để xác định xem S_0 là một điểm cực tiểu, một điểm cực đại hay là một điểm yên ngựa, chúng ta phải xét hiệu

$$\Delta S \equiv S_\xi - S_0 = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}(m\dot{\xi}^2 - k\xi^2)dt. \tag{6.26}$$

Sẽ luôn có thể tìm được một hàm ξ làm cho δS dương. Đơn giản là chọn ξ nhỏ, nhưng nó biến đổi rất nhanh, sao cho $\dot{\xi}$ lớn. Do đó, S_0 sẽ *không bao giờ* là điểm cực đại. Chú ý rằng lập luận này có thể áp dụng cho bất kỳ hàm thế năng nào, không chỉ riêng đối với dao động điều hòa, miễn là nó chỉ là hàm của biến vị trí (nghĩa là, nó không chứa các đạo hàm, như chúng ta vẫn luôn giả sử từ trước đến giờ).

Bạn cũng rất có thể sẽ sử dụng cùng lập luận này để nói rằng luôn có thể tìm được một hàm ξ làm cho δS âm, bằng cách chọn ξ lớn và $\dot{\xi}$ nhỏ. Nếu điều này là đúng, thì chúng ta có thể đặt mọi thứ lại với nhau và kết luận rằng tất cả các điểm dừng đều là điểm yên ngựa, đối với một dao động điều hòa. Tuy nhiên, *không phải* lúc nào chúng ta cũng có thể chọn được hàm ξ đủ lớn và $\dot{\xi}$ đủ nhỏ sao cho δS là âm, do chúng ta bị ràng buộc bởi điều kiện biên $\xi(t_1) = \xi(t_2) = 0$. Nếu ξ thay đổi từ không đến một vị trí khá lớn rồi sau đó trở lại vị trí bằng không, thì $\dot{\xi}$ có thể cũng phải rất lớn, nếu khoảng thời gian chuyển động là đủ nhỏ. Bài tập 6.6 chúng ta sẽ đề cập đến vấn đề này một cách định lượng. Còn bây giờ, hãy chỉ công nhận rằng trong một vài trường hợp S_0 là một điểm cực tiểu, trong một vài trường hợp nó là điểm yên ngựa, và nó không bao giờ là điểm cực đại. "Tác dụng tối thiểu" do đó là một thuật ngữ sai.

5. Đôi khi chúng ta nói rằng các hiện tượng tự nhiên xảy ra là có "mục đích" của nó, ở đó nó sẽ xảy ra theo một cách mà sinh ra hàm tác dụng nhỏ nhất. Với quan điểm của nhận xét thứ hai ở trên, điều này là không đúng. Thực ra, một cách chính xác thì các hiện tượng tự nhiên xảy ra theo cách hoàn toàn ngược lại. Nó có thể xảy ra theo *mọi* cách, và nó coi các cách đó là có cơ sở như nhau. Chúng ta cuối cùng sẽ chỉ thấy cái cách mà nó xảy ra là một điểm dừng của hàm tác dụng, bởi vì nó phải theo cái cách mà các pha của cơ học lượng tử được cộng lại với nhau. Thực ra, sẽ là một đòi hỏi quá quất để yêu cầu tự nhiên phải có một quyết định ở mức độ "toàn cục" (nghĩa là, nó phải so sánh các cách khác nhau mà các cách này không có liên hệ gần gũi với nhau) và chọn một cách mà hàm tác dụng có giá trị nhỏ nhất toàn cục. Thay vào đó, chúng ta thấy rằng mọi thứ xảy ra trong một mức độ "địa phương". Các pha gần nhau đơn giản là được cộng lại với nhau, và mọi thứ sẽ xảy ra một cách tự động.

   Khi một người bắn cung bắn một mũi tên xuyên qua không khí, thì hướng người đó ngắm là hướng sao cho khi bắn tất cả các mũi tên khác nhau thì đường đi của các mũi tên này sẽ ở gần nhau, mỗi đường đi về cơ bản là có cùng hàm tác dụng. Tương tự như vậy, khi bạn đi bộ xuống đường với một điểm đến nào đó trong đầu, thì sẽ không chỉ có mỗi mình bạn sẽ đi theo con đường đó ...

6. Xét một hàm, $f(x)$, là hàm một biến (để đơn giản về mặt thuật ngữ). Gọi $f(b)$ là một giá trị cực tiểu địa phương của hàm f. Có hai tính chất cơ bản của giá trị cực tiểu này. Tính chất thứ nhất là $f(b)$ nhỏ hơn các giá trị lân cận nó. Tính chất thứ hai là độ dốc của hàm f tại điểm b bằng không. Từ các chú ý ở trên, chúng ta thấy rằng (miễn là chúng ta chỉ quan tâm đến hàm tác dụng S) tính chất thứ nhất là hoàn toàn không có liên quan gì, và tính chất thứ hai là điểm mấu chốt. Nói một cách khác, các điểm yên ngựa (và các điểm cực đại địa phương, mặc dù chúng ta đã chỉ ra ở trên rằng những điểm này không bao giờ tồn tại đối với S) thì cũng chỉ giống như các

điểm cực tiểu, miễn là chúng ta chỉ quan tâm đến việc cộng hưởng của các pha $e^{iS/\hbar}$.

7. Với việc cho rằng cơ học cổ điển là một lý thuyết xấp xỉ, trong khi cơ học lượng tử là một lý thuyết chính xác (hơn), thì sẽ hoàn toàn là ngớ ngẩn khi chứng minh nguyên lý tác dụng dừng bằng cách chỉ ra sự tương đương của nó với phương trình $F = ma$, như chúng ta đã làm ở trên. Chúng ta nên làm việc này theo một cách khác. Tuy nhiên, bởi vì trực giác của chúng ta là dựa trên phương trình $F = ma$, nên nó sẽ dễ dàng hơn khi bắt đầu với phương trình $F = ma$ như là một thực tế đã cho, hơn là sử dụng trực giác về cơ học lượng tử ẩn sâu bên trong tất cả chúng ta. Có thể một ngày nào đó chúng ta sẽ bắt đầu với trực giác này ...

   Dù sao đi chăng nữa, trong các lý thuyết tiên tiến hơn đề cập đến các vấn đề cơ bản liên quan đến các thành phần cấu tạo vật chất rất nhỏ (trong đó các hàm tác dụng có độ lớn cùng bậc với độ lớn của $\hbar$), thì lý thuyết xấp xỉ $F = ma$ sẽ không còn đúng nữa, và bạn *phải* sử dụng phương pháp Lagrange.

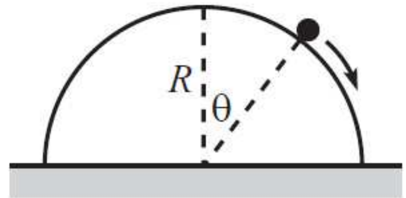
8. Khi làm việc với một hệ trong đó có mặt một lực không bảo toàn như lực ma sát, thì phương pháp Lagrange sẽ mất đi nhiều tính chất đẹp đẽ của nó. Lý do của điều này là do các lực không bảo toàn thì không có hàm thế năng đi cùng với chúng, vì vậy sẽ không có một hàm $V(x)$ xác định nào mà bạn có thể viết ra trong biểu thức của hàm Lagrange. Mặc dù thực ra các lực ma sát vẫn có thể được dùng trong phương pháp Lagrange, bạn về cơ bản phải gộp chúng vào trong các phương trình E-L một cách thủ công. Chúng ta sẽ không đề cập gì đến các lực không bảo toàn trong chương này.

♣

6.3 Các lực liên kết

Một điều rất đẹp của phương pháp Lagrange là chúng ta có thể tự do đặt bất kỳ các ràng buộc cho trước nào đó khi bắt đầu giải một bài toán, do đó số biến trong phương trình ngay lập tức sẽ bị giảm đi. Điều này luôn luôn được thực hiện (có thể mà chẳng phải suy nghĩ gì) mỗi khi một chất điểm bị ràng buộc phải chuyển động trên một sợi dây hoặc một bề mặt, v.v... Thông thường chúng ta không quan tâm đến bản chất chính xác của các lực sinh ra trong các ràng buộc, mà chúng ta chỉ quan tâm đến chuyển động sau đó của vật, miễn là các ràng buộc được thỏa mãn. Bằng việc áp đặt các liên kết vào chuyển động, chúng ta có thể tìm ra chuyển động, nhưng chúng ta không thể nói bất cứ điều gì về các lực liên kết.

Nếu chúng ta muốn xác định các lực liên kết, chúng ta phải tiếp cận theo một cách khác. Ý tưởng chính của cách làm này, như chúng ta sẽ chỉ ra ở dưới, là chúng ta sẽ không áp đặt các ràng buộc vào một cách quá sớm. Điều này sẽ làm cho bài toán có một số lượng lớn các biến phải xét, vì vậy việc tính toán sẽ cồng kềnh hơn. Nhưng lợi ích của nó là chúng ta có thể tìm được các lực liên kết.



Hình 6.3:

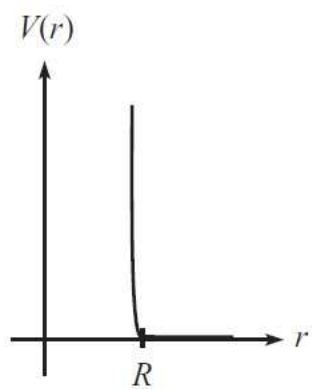
Xét một cơ cấu của một chất điểm trượt xuống một hình bán cầu không ma sát bán kính R (xem Hình 6.3). Hãy coi như chúng ta chỉ quan tâm đến việc tìm phương trình chuyển động đối với góc θ, và không quan tâm gì đến lực liên kết. Khi đó chúng ta có thể viết mọi thứ biểu diễn qua θ, bởi vì chúng ta đã biết rằng khoảng cách theo phương bán kính r bị giới hạn bằng R. Động năng là $mR^2\dot{\theta}^2/2$, và thế năng (đối với đáy của hình bán cầu) là $mgRcos\theta$, vì vậy hàm Lagrange là

$$L = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 - mgR\cos\theta, \tag{6.27}$$

và phương trình chuyển động, thông qua phương trình (6.3), là

$$\ddot{\theta} = (\mathrm{g}/R)\sin\theta, \tag{6.28}$$

là tương đương với phương trình $F = ma$ theo phương tiếp tuyến.



Hình 6.4:

Bây giờ hãy coi như chúng ta muốn đi tìm phản lực liên kết do bán cầu tác dụng lên chất điểm. Để làm điều này, hãy giải bài toán theo một cách khác và viết mọi thứ theo cả hai biến r và θ. Hơn nữa (và đây là bước quyết định), hãy coi như r không còn bị giới hạn *chính xác* bằng R nữa, bởi vì trong thực tế chất điểm thực ra sẽ lún vào trong mặt cầu một chút. Điều này nghe ra có vẻ là ngớ ngẩn, nhưng thực ra nó là cả vấn đề. Chất điểm sẽ đẩy và lún vào vào bên trong bề mặt bán cầu một khoảng rất bé cho đến khi bán cầu bị nén đến mức đủ để làm cho nó đẩy chất điểm lại với một lực đủ để giữ cho chất điểm không lún vào bên trong nó thêm nữa (hãy coi như bán cầu được làm từ rất nhiều các lò xo rất nhỏ với độ cứng lò xo rất lớn). Do đó chất điểm chịu tác dụng của một hàm thế (có độ dốc rất lớn) sinh ra từ lực của mặt bán cầu. Thế năng liên kết này, $V(r)$, trông giống như đồ thị được vẽ trong Hình 6.4. Do đó hàm Lagrange thực sự của hệ sẽ là

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - mgr\cos\theta - V(r). \tag{6.29}$$

(Số hạng $\dot{r}^2$ trong biểu thức động năng sẽ trở nên không cần thiết). Các phương trình chuyển động nhận được từ việc thay đổi θ và r do đó sẽ là

$$\begin{aligned} mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} &= mgr\sin\theta, \\ m\ddot{r} &= mr\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta - V'(r). \end{aligned} \tag{6.30}$$

Sau khi đã viết được các phương trình chuyển động, chúng ta *bây giờ* sẽ áp dụng điều kiện ràng buộc là $r = R$. Điều kiện này có nghĩa là $\dot{r} = \ddot{r} = 0$. (Tất nhiên, r *thực ra* không bằng R, nhưng bất cứ sự sai khác nào cũng không ảnh hưởng gì đến kết quả tính toán từ giờ trở đi.) Phương trình thứ nhất trong phương trình (6.30) bây giờ trở thành phương trình (6.28), trong khi đó phương trình thứ hai cho ta

$$-\left.\frac{dV}{dr}\right|_{r=R} = mg\cos\theta - mR\dot{\theta}^2. \tag{6.31}$$

Nhưng $F_{\text{N}} \equiv -dV/dr$ là phản lực liên kết tác dụng theo phương của r, là lực mà chúng ta đang cần tìm. Do đó phản lực liên kết là

$$F_{\text{N}}(\theta, \dot{\theta}) = mg\cos\theta - mR\dot{\theta}^2. \tag{6.32}$$

Phương trình này là tương đương với phương trình $F = ma$ theo phương bán kính, $mg\cos\theta - F_{\text{N}} = mR\dot{\theta}^2$ (mà chắc chắn là cách nhanh hơn để tìm phản lực liên kết trong bài toán này). Chú ý rằng kết quả này chỉ đúng khi $F_{\text{N}}(\theta, \dot{\theta}) > 0$. Nếu lực liên kết trở nên bằng không, thì điều này có nghĩa là chất điểm đã rời khỏi mặt cầu, trong trường hợp đó r sẽ không còn bằng R nữa.

NHẬN XÉT:

1. Điều gì sẽ xảy ra nếu chúng ta đã chọn (một cách không thông minh) hệ tọa độ Đề Các, x và y, thay vì hệ tọa độ cực, r và θ? Bởi vì khoảng cách từ chất điểm đến bề mặt bán cầu là $\eta \equiv \sqrt{x^2 + y^2} - R$, chúng ta sẽ nhận được hàm Lagrange thật sự sẽ bằng

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy - V(\eta). \tag{6.33}$$

Các phương trình chuyển động là (sử dụng quy tắc lấy đạo hàm hàm hợp)

$$m\ddot{x} = -\frac{dV}{d\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}, \quad \text{và} \quad m\ddot{y} = -mg - \frac{dV}{d\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}. \tag{6.34}$$

Bây giờ chúng ta áp dụng điều kiện ràng buộc $\eta = 0$. Bởi vì $-dV/d\eta$ bằng lực liên kết F, bạn có thể chỉ ra rằng các phương trình mà chúng ta sẽ nhận được (chính là hai phương trình E-L và phương trình ràng buộc) là

$$m\ddot{x} = F\frac{x}{R}, \quad m\ddot{y} = -mg + F\frac{y}{R}, \quad \text{và} \quad \sqrt{x^2+y^2} - R = 0. \tag{6.35}$$

Ba phương trình này là đủ để xác định ba ẩn chưa biết $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, và F như là các hàm của các đại lượng $x, \dot{x}, y$ và $\dot{y}$. Xem Bài tập 6.37, mà sẽ thuyết phục bạn rằng việc chọn hệ tọa độ cực sẽ là cách mà bạn phải theo. Nói chung, chiến thuật để giải ra F là lấy đạo hàm hai lần phương trình liên kết và sau đó triệt tiêu các đạo hàm cấp hai của các biến tọa độ bằng cách sử dụng các phương trình E-L (quá trình này là không có gì đặc biệt trong hệ tọa độ cực).

2. Bạn có thể thấy từ phương trình (6.35) rằng các phương trình E-L cuối cùng sẽ có dạng,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} + F\frac{\partial \eta}{\partial q_i}, \tag{6.36}$$

với mỗi tọa độ q_i. Đại lượng η là đại lượng xuất hiện trong phương trình liên kết, $\eta = 0$. Trong bài toán bán cầu của chúng ta, ta có $\eta = r - R$ trong hệ tọa độ cực, và $\eta = \sqrt{x^2+y^2} - R$ trong hệ tọa độ Cartersian. Các phương trình E-L, kết hợp với điều kiện $\eta = 0$, cho chúng ta chính xác số phương trình (có $N+1$ phương trình, trong đó N là số lượng các tọa độ) cần thiết để xác định tất cả $N+1$ biến chưa biết (gồm tất cả $\ddot{q}_i$, và F) phụ thuộc vào q_i và $\dot{q}_i$.

Việc viết các phương trình trong phương trình (6.36) về cơ bản là phương pháp nhân tử Lagrange, trong đó nhân tử Lagrange hóa ra là lực liên kết. Nhưng nếu bạn không quen thuộc với phương pháp này, thì không cần phải lo lắng; bạn có thể nhận được mọi thứ từ đầu bằng cách sử dụng kỹ thuật ở trên liên quan đến hàm thế năng có độ dốc lớn. Nếu các bạn đã làm quen với phương pháp này rồi, thì thực ra có thể sẽ cần phải lo lắng về việc là làm thế nào để áp dụng nó, như nhận xét sau đây sẽ giải thích về điều này.

3. Khi cố gắng xác định các lực liên kết, bạn có thể chỉ cần bắt đầu với phương trình (6.36), mà không cần phải bận tâm viết ra $V(\eta)$. Nhưng bạn phải cẩn thận chắc chắn rằng η đang biểu diễn khoảng cách thực của chất điểm từ vị trí của nó. Trong hệ tọa độ cực, nếu ai đó đưa ra cho bạn điều kiện ràng buộc đối với mặt bán cầu có dạng $7(r - R) = 0$, và nếu bạn sử dụng vế trái của phương trình này cho η trong phương trình (6.36), thì bạn sẽ nhận được lực liên kết sai; nó sẽ quá nhỏ do phải chia cho hệ số 7. Tương tự như vậy, trong tọa độ Đề Các, việc viết phương trình ràng buộc dưới dạng $y - \sqrt{(R^2 - r^2)} = 0$ sẽ cho bạn lực liên kết sai. Cách tốt nhất để tránh khỏi vấn đề này là, tất nhiên, hãy chọn một trong các biến của bạn là khoảng cách của phần tử so với điểm cần thiết nào đó (với sai khác bởi một hằng số cộng, như trong trường hợp $r - R = 0$). ♣

6.4 Thay đổi hệ tọa độ

Khi hàm Lagrange L được viết theo các tọa độ Cartersian x, y, z, chúng ta đã chỉ ra trong Mục 6.1 rằng các phương trình Euler-Lagrange là tương đương với các phương trình định luật II của Newton $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$; xem phương trình (6.8). Nhưng đối với các trường hợp khi chúng ta sử dụng hệ tọa độ cực, hệ tọa độ cầu hay các hệ tọa độ nào khác thì sao? Sự tương đương của các phương trình E-L và $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ sẽ không còn là quá hiển nhiên nữa. Miễn là bạn tin tưởng các phương trình E-L đối với các hệ tọa độ này, bạn có thể yên tâm sử dụng cả hai phương pháp này. Bạn có thể chấp nhận nguyên lý tác dụng dừng như là một cái gì đó rất đẹp và sâu sắc đến mức mà nó đơn giản phải đúng đối với bất cứ hệ tọa độ được chọn nào. Hoặc, bạn có thể đi theo một cách thông thường hơn và chỉ ra thông qua một phép đổi tọa độ rằng nếu các phương trình E-L đúng đối với một tập các hệ tọa độ (và chúng ta biết rằng chúng *đã* đúng đối với ít nhất một tập, đó là các tọa độ Đề Các), thì chúng cũng đúng đối với bất kỳ các hệ tọa độ khác (có một dạng nào đó, mà sẽ được miêu tả ở bên dưới). Trong mục này, chúng ta sẽ minh họa tính đúng đắn của các phương trình E-L thông qua biến đổi dưới dạng hiện của các hệ tọa độ.[9]

Xét tập các tọa độ,

$$x_i : \quad (x_1, x_2, \ldots, x_N). \tag{6.37}$$

Ví dụ như, nếu $N = 6$ thì x_1, x_2, x_3 có thể là các tọa độ Đề Các x, y, z của một chất điểm, và x_4, x_5, x_6 có thể là các tọa độ cực r, θ, ϕ của chất điểm thứ hai, và v.v... Giả sử rằng các phương trình E-L là đúng đối với các biến này, nghĩa là,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial x_i} \quad (1 \le i \le N). \tag{6.38}$$

Xét một tập các biến mới là các hàm của x_i và t,

$$q_i = q_i(x_1, x_2, \ldots, x_N; t). \tag{6.39}$$

Chúng ta sẽ tự giới hạn trong trường hợp khi các hàm q_i không phụ thuộc vào $\dot{x}_i$. (Điều này là hoàn toàn có lý. Nếu các tọa độ phụ thuộc vào các vận tốc, thì chúng ta sẽ không thể đánh dấu được các điểm trong không gian chỉ với các tọa độ xác định. Chúng ta sẽ phải lo lắng về việc các phần tử sẽ ứng xử như thế nào khi chúng ở tại vị trí các điểm đó. Đây sẽ là các tọa độ kỳ lạ một cách thực sự). Về mặt lý thuyết, chúng ta lấy nghịch đảo phương trình (6.39) và biểu diễn tọa độ x_i như là hàm của q_i và t,

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \ldots, q_N; t). \tag{6.40}$$

[9] Việc tính toán này là đơn giản và dễ hiểu nhưng khá rối rắm, vì vậy bạn có thể muốn bỏ qua mục này và chấp nhận là nó đúng với lập luận là nó "đẹp và sâu sắc".

Khẳng định 6.2. *Nếu phương trình* (6.38) *là đúng đối với các tọa độ* x_i, *và nếu* x_i *và* q_i *được liên hệ với nhau bởi phương trình* (6.40), *thì phương trình* (6.38) *cũng đúng đối với các tọa độ* q_i. *Nghĩa là,*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_m} \quad (1 \leq m \leq N). \tag{6.41}$$

Chứng minh. Ta có:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_m}. \tag{6.42}$$

(Chú ý rằng nếu x_i phụ thuộc vào $\dot{q}_i$, thì chúng ta phải có thêm một số hạng nữa, $\sum(\partial L/\partial x_i)(\partial x_i/\partial \dot{q}_m)$. Nhưng ta phải loại trừ khả năng phụ thuộc này). Hãy viết lại số hạng $\partial \dot{x}_i/\partial \dot{q}_m$. Từ phương trình (6.40), ta có

$$\dot{x}_i = \sum_{m=1}^{N} \frac{\partial x_i}{\partial q_m}\dot{q}_m + \frac{\partial x_i}{\partial t}. \tag{6.43}$$

Do đó,

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_m} = \frac{\partial x_i}{\partial q_m}. \tag{6.44}$$

Thay phương trình này vào phương trình (6.42) và lấy đạo hàm hai vế theo thời gian ta có

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}\right) = \sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right)\frac{\partial x_i}{\partial q_m} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_m}\right). \tag{6.45}$$

Ở trong số hạng thứ hai ở đây, chúng ta có thể thay đổi thứ tự phép toán lấy đạo hàm toàn phần, d/dt, và phép toán lấy đạo hàm riêng, $\partial/\partial q_m$.

NHẬN XÉT: Trong trường hợp mà bạn nghi ngờ về điều này, hãy chứng minh việc thay đổi thứ tự này là được phép.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_m}\right) &= \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_m}\right)\dot{q}_k + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_m}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial q_m}\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial x_i}{\partial t}\right) \\ &= \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_m}.\end{aligned} \tag{6.46}$$

♣

Trong số hạng đầu tiên ở vế phải của phương trình (6.45), chúng ta có thể sử dụng thông tin đã cho trong phương trình (6.38) và viết lại số hạng $(d/dt)(\partial L/\partial \dot{x}_i)$. Khi đó chúng ta nhận được

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}\right) &= \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_m} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_m} \\ &= \frac{\partial L}{\partial q_m},\end{aligned} \tag{6.47}$$

là điều chúng ta muốn chứng minh. □

Như vậy chúng ta đã chứng minh rằng nếu các phương trình Euler-Lagrange là đúng đối với một tập các tọa độ, x_i (chúng *là* đúng đối với các tọa độ Đề Các), thì chúng cũng đúng đối với bất kì tập các tọa độ khác, q_i, mà thỏa mãn phương trình (6.39). Nếu bạn có xu hướng xem nguyên lý tác dụng dừng là không đáng tin cậy, nghĩ rằng nó có thể là một nguyên lý phụ thuộc vào việc chọn hệ tọa độ, thì chúng minh này sẽ làm bạn không còn nghi ngờ gì về điều đó nữa. Các phương trình Euler-Lagrange là đúng trong bất kỳ hệ tọa độ nào.

Chú ý rằng chứng minh ở trên không sử dụng bất kỳ dạng chính xác nào của phương trình Lagrange. Nếu L bằng với $T+V$, hay $8T+\pi V^2/T$, hoặc bất kì hàm nào khác, thì kết quả của chúng ta vẫn đúng: Nếu phương trình (6.38) là đúng đối với một tập các tọa độ nào đó, thì nó cũng đúng đối với bất kì một tập các tọa độ q_i khác thỏa mãn phương trình (6.39). Điểm mấu chốt là chỉ có duy nhất L mà giả thiết trên là đúng (nghĩa là, phương trình (6.38) đúng) là $L \equiv T-V$ (hoặc nhân nó với một hằng số bất kỳ nào đó).

NHẬN XÉT: Một mặt, thật là ngạc nhiên là chúng ta chỉ đưa ra rất ít các giả thiết trong chứng minh khẳng định trên. *Bất cứ* các tọa độ mới nào có dạng tổng quát như trong phương trình (6.39) đều thỏa mãn các phương trình E-L, miễn là các tọa độ ban đầu là thỏa mãn. Nếu các phương trình E-L mà có, ví dụ như, thêm một hệ số 5 nhân vào vế phải của phương trình (6.38), thì chúng sẽ *không* còn đúng đối với các hệ tọa độ bất kỳ. Để thấy điều này, đơn giản là chứng minh lại với hệ số 5 này.

Mặt khác, khẳng định này là hoàn toàn đáng tin cậy, nếu bạn làm một cách tương tự đối với một hàm thay vì đối với một phiếm hàm. Xét hàm $f(z)=z^2$. Hàm này có một điểm cực tiểu tại $z=0$, phù hợp với thực tế là $df/dz=0$ tại $z=0$. Nhưng bây giờ hãy viết hàm f biểu diễn qua biến y được định nghĩa bởi, ví dụ như, $z=y^4$. Khi đó $f(y)=y^8$, và hàm f có một giá trị cực tiểu tại $y=0$, phù hợp với thực tế là $df/dy=0$ tại $y=0$. Vì vậy $f'=0$ đúng trong cả hai tọa độ tại các điểm tương ứng $y=z=0$. Đây là sự tương tự (đơn giản) của việc các phương trình E-L là đúng trong cả hai hệ tọa độ. Trong cả hai trường hợp, phương trình đạo hàm miêu tả điểm mà tại đó giá trị dừng xảy ra.

Kết quả của việc thay đổi các biến này có thể được phát biểu trong một cách liên quan đến hình học (và tiện lợi) hơn. Nếu bạn vẽ đồ thị của một hàm và rồi sau đó kéo dãn trục hoành theo một cách bất kỳ (là điều xảy ra khi bạn thay đổi hệ tọa độ), thì một giá trị dừng (nghĩa là, giá trị mà tại đó độ dốc bằng không) sẽ vẫn là một giá trị dừng sau khi kéo dãn.[10] Hiển nhiên là, một minh họa (hoặc thậm chí chỉ là sự suy nghĩ về nó) cũng đáng giá

[10]Tuy nhiên, cũng có một ngoại lệ. Một điểm dừng trong một hệ tọa độ cũng có thể đạt được tại một điểm đứt gãy trong một hệ tọa độ khác, sao cho f' không xác định tại điểm đó. Ví dụ như, nếu chúng ta đã định nghĩa y bởi $z=y^{1/4}$, thì $f(y)=y^{1/2}$, là hàm có độ dốc không xác định tại $y=0$. Về cơ bản, thì chúng ta đã kéo dãn (hoặc co lại) trục hoành bởi một hệ số bằng vô cùng tại gốc tọa độ, và đây là một quá trình mà có thể thay đổi một độ dốc bằng không thành một độ dốc không xác định. Nhưng hãy đừng lo lắng về điều này.

bằng cả tá các phương trình.

Như là một ví dụ của một phương trình mà *không* đúng đối với tất cả các hệ tọa độ, xét ví dụ trên, nhưng với $f' = 1$ thay vì $f' = 0$. Biểu diễn qua z, $f' = 1$ khi $z = 1/2$. Và biểu diễn theo y, $f' = 1$ khi $y = (1/8)^{1/7}$. Nhưng điểm $z = 1/2$ và $y = (1/8)^{1/7}$ không phải là cùng một điểm. Nói cách khác, $f' = 1$ không phải là một phát biểu không phụ thuộc vào hệ tọa độ. Điều đặc biệt về $f' = 0$ là một điểm dừng vẫn là một điểm dừng không phụ thuộc vào việc bạn nhìn nó như thế nào. ♣

6.5 Các định luật bảo toàn

6.5.1 Các tọa độ Cyclic

Xét trường hợp khi hàm Lagrange không phụ thuộc vào một tọa độ q_k nào đó. Khi đó

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = C, \tag{6.48}$$

trong đó C là một hằng số, nghĩa là, không phụ thuộc vào thời gian. Trong trường hợp này, chúng ta nói rằng q_k là tọa độ *cyclic*, và $\partial L/\partial \dot{q}_k$ là một đại lượng *bảo toàn* (có nghĩa là nó không đổi theo thời gian). Nếu các tọa độ Đề Các được sử dụng, thì $\partial L/\partial \dot{x}_k$ đơn giản là động lượng, $m\dot{x}_k$, bởi vì $\dot{x}_k$ chỉ xuất hiện trong số hạng động năng $m\dot{x}_k^2/2$ (chúng ta loại trừ trường hợp khi hàm thế năng phụ thuộc vào $\dot{x}_k$). Do đó chúng ta gọi $\partial L/\partial \dot{q}_k$ là *động lượng suy rộng* tương ứng với tọa độ q_k. Và trong các trường hợp khi $\partial L/\partial \dot{q}_k$ không thay đổi theo thời gian, chúng ta gọi nó là một *động lượng bảo toàn*. Chú ý rằng một động lượng suy rộng không nhất thiết phải có đơn vị của động lượng, như là các ví dụ về moment động lượng được chỉ ra dưới đây.

Ví dụ (Động lượng): Xét một quả bóng được ném vào không khí. Trọng trường hợp ba chiều, hàm Lagrange sẽ là

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz. \tag{6.49}$$

Không có sự phụ thuộc vào x và y ở đây, vì vậy cả hai biểu thức $\partial L/\partial \dot{x} = m\dot{x}$ và $\partial L/\partial \dot{y} = m\dot{y}$ là hằng số. Một cách rất hay để nói về điều này là sự bảo toàn của $p_x \equiv m\dot{x}$ nảy sinh từ sự bất biến của phép tịnh tiến trong không gian theo phương x. Thực tế mà hàm Lagrange không phụ thuộc vào x có nghĩa là sẽ không có vấn đề gì nếu bạn ném quả bóng từ một điểm, hay từ một điểm khác cùng nằm trên một con đường nhưng cách đó hàng dặm. Cơ cấu sẽ không phụ thuộc gì vào giá trị của x. Tính không phụ thuộc này dẫn đến sự bảo toàn của p_x. Cũng tương tự như vậy đối với p_y.

Ví dụ (Động lượng và moment động lượng trong hệ tọa độ trụ): Xét một hàm thế năng chỉ phụ thuộc vào khoảng cách tới trục z. Trong hệ tọa độ trụ, hàm Lagrange là

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) - V(r). \tag{6.50}$$

Không có sự phụ thuộc vào z ở đây, vì vậy $\partial L/\partial \dot{z} = m\dot{z}$ là hằng số. Cũng như thế, không có sự phụ thuộc vào θ, vì vậy $\partial L/\partial \dot{\theta} = m\dot{\theta}$ là hằng số. Bởi vì $r\dot{\theta}$ là vận tốc theo phương tiếp tuyến xung quanh trục z, nên chúng ta thấy rằng đại lượng bảo toàn của chúng ta, $mr(r\dot{\theta})$, là moment động lượng (được thảo luận trong Chương 7 - 9) xung quanh trục z. Giống như trong ví dụ trước, sự bảo toàn moment động lượng xung quanh trục z nảy sinh từ bất biến của phép quay quanh trục z.

Ví dụ (Moment động lượng trong hệ tọa độ cầu): Trong hệ tọa độ cầu, xét một hàm thế năng phụ thuộc vào r và θ. Quy ước của chúng ta trong hệ tọa độ cầu là góc θ là góc tính từ cực bắc xuống, và góc ϕ là góc vòng xung quanh đường xích đạo. Phương trình Lagrange là

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\;\dot{\phi}^2) - V(r,\theta). \tag{6.51}$$

Không có sự phụ thuộc vào ϕ ở đây, vì vậy $\partial L/\partial \dot{\phi} = mr^2\sin^2\theta\dot{\phi}$ là hằng số. Bởi vì $r\sin\theta$ là khoảng cách so với trục z, và bởi vì $r\sin\theta\dot{\phi}$ là vận tốc theo phương tiếp tuyến xung quanh trục z, chúng ta thấy rằng đại lượng bảo toàn của chúng ta, $m(r\sin\theta)(r\sin\theta\dot{\phi})$, là moment động lượng xung quanh trục z.

6.5.2 Bảo toàn năng lượng

Bây giờ chúng ta sẽ nhận được một định luật bảo toàn khác, có tên là định luật bảo toàn năng lượng. Định luật bảo toàn động lượng hay moment động lượng ở trên được rút ra khi hàm Lagrange là độc lập đối với x, y, z, θ hoặc ϕ. Sự bảo toàn năng lượng nảy sinh khi hàm Lagrange là độc lập với thời gian. Định luật bảo toàn này khác so với các định luật khác trong các ví dụ về động lượng ở trên, bởi vì t không phải là một tọa độ mà nguyên lý tác dụng dừng có thể được áp dụng. Chúng ta có thể tưởng tượng về việc thay đổi các toạ độ x, θ, v.v... mà là các hàm của t. Nhưng không thể tưởng tượng nổi khi thay đổi t. Do đó, chúng ta sẽ phải chứng minh định luật bảo toàn này theo một cách khác. Xét đại lượng

$$E \equiv \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right) - L. \tag{6.52}$$

Đại lượng E (thông thường) hóa ra là năng lượng. Chúng ta sẽ chỉ ra điều này ở bên dưới. Mục đích của biểu diễn đối với E này đến từ lý thuyết của biến đổi Legendre, nhưng chúng ta sẽ không đi sâu vào điều này ở đây. Chúng ta đơn giản sẽ chấp nhận định nghĩa trong phương trình (6.52) và sẽ chứng minh một kết quả rất có ích về nó.

Khẳng định 6.3. *Nếu L không phụ thuộc hiển vào thời gian (nghĩa là, $\partial L/\partial t = 0$), thì E là bảo toàn (nghĩa là, $dE/dt = 0$), với giả thiết rằng chuyển động tuân theo các phương trình $E - L$ (mà thực tế là như vậy).*

Chú ý rằng có một đạo hàm riêng và một đạo hàm toàn phần trong phát biểu này.

Chứng minh. L là một hàm của q_i, của $\dot{q}_i$, và có thể của t. Sử dụng một số lần quy tắc lấy đạo hàm của hàm hợp, ta có

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right) - \frac{dL}{dt}\\ &= \sum_{i=1}^{N}\left(\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i\right) + \frac{\partial L}{\partial t}\right).\end{aligned} \tag{6.53}$$

Có năm số hạng ở đây. Số hạng thứ hai triệt tiêu với số hạng thứ tư. Số hạng thứ nhất (sau khi sử dụng phương trình $E - L$, phương trình (6.3), để viết lại) triệt tiêu với số hạng thứ ba. Do đó chúng ta nhận được kết quả đơn giản,

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \tag{6.54}$$

Trong trường hợp mà $\partial L/\partial t = 0$ (nghĩa là, không có các ký hiệu t nằm trong công thức của L khi bạn viết nó ra), là trường hợp chúng ta thường xét (bởi vì nói chung chúng ta sẽ không đề cập đến các dạng hàm thế năng phụ thuộc vào thời gian), ta có $dE/dt = 0$. □

Không có quá nhiều đại lượng là bất biến đối với thời gian, và đại lượng E có đơn vị của năng lượng, vì vậy chúng ta có thể đoán nó là hàm năng lượng. Hãy chỉ ra điều này là đúng trong hệ tọa độ Đề Các (tuy nhiên, hãy xem phần nhận xét bên dưới). Hàm Lagrange là

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z), \tag{6.55}$$

vì vậy phương trình (6.52) cho ta

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + V(x, y, z), \tag{6.56}$$

là năng lượng toàn phần.

Tất nhiên, việc lấy động năng T trừ đi thế năng V để nhận được L, và sau đó sử dụng phương trình (6.52) để tính $E = T + V$, dường như là một cách lòng vòng để đi đến biểu thức $T + V$. Nhưng mục đích của tất cả những việc này là chúng ta đã sử dụng các phương trình $E - L$ để *chứng minh* rằng E là bảo toàn. Mặc dù chúng ta biết rất rõ từ các phương pháp $F = ma$ trong Chương 5 rằng tổng $T + V$ là bảo toàn, nhưng nó cũng sẽ không công bằng lắm khi giả thiết rằng nó là bảo toàn trong phương pháp Lagrange mới của chúng ta. Chúng ta phải chỉ ra rằng điều này *có được* từ các phương trình $E - L$.

Cùng với sự bất biến đối với phép tịnh tiến và phép quay mà chúng ta đã quan sát được trong các ví dụ trong Mục 6.5.1, chúng ta thấy rằng sự bảo toàn năng lượng cũng nảy sinh từ sự bất biến đối với phép dịch chuyển thời gian. Nếu hàm Lagrange không phụ thuộc hiển vào thời gian t, thì cơ cấu đang xét trong ngày hôm nay sẽ giống như cơ cấu đó trong ngày hôm qua. Điều này dẫn đến việc năng lượng là bảo toàn.

NHẬN XÉT: Đại lượng E trong phương trình (6.52) cho ta năng lượng của hệ chỉ khi toàn bộ hệ được biểu diễn qua các hàm Lagrange. Nghĩa là, hàm Lagrange phải biểu diễn một hệ kín không có ngoại lực tác dụng trong đó. Nếu hệ là không kín, thì Khẳng định 6.3 (hay tổng quát hơn, phương trình (6.54)) vẫn hoàn toàn có tác dụng đối với E được định nghĩa trong phương trình (6.52), nhưng E này có thể có thể không là năng lượng của hệ. Bài tập 6.8 là một ví dụ điển hình của tình huống này.

Một ví dụ khác được xét như sau. Tưởng tượng một thanh dài trong mặt phẳng nằm ngang $x-y$. Thanh hướng theo phương x, và một hạt vòng tự do trượt không ma sát dọc theo thanh. Tại thời điểm $t=0$, một động cơ ngoài được sắp xếp để gia tốc thanh theo chiều âm của phương y (nghĩa là vuông góc với thanh) với gia tốc là $-g$. Vì vậy $\dot{y}=-gt$. Không có thế năng trong bên trong hệ này, vì vậy hàm Lagrange chỉ là động năng, $L=m\dot{x}^2/2+m(gt)^2/2$. Phương trình (6.52) do đó cho ta $E=m\dot{x}^2/2-m(gt)^2/2$, mà không phải là năng lượng của hệ. Nhưng phương trình (6.54) vẫn là đúng, bởi vì

$$\frac{dE}{dt}=-\frac{\partial L}{\partial t} \iff m\dot{x}\ddot{x}-mg^2t=-mg^2t \iff \ddot{x}=0, \tag{6.57}$$

vẫn là đúng. Tuy nhiên, cơ cấu này chính xác giống như là chuyển động ném xiên trong mặt phẳng $x-y$, trong đó y bây giờ là trục thẳng đứng, miễm là chúng ta bỏ thanh đi và coi trọng lực chứ không phải động cơ là nguyên nhân gây ra gia tốc theo phương y. Nhưng nếu chúng ta đang nghĩ đến các số hạng của trọng lực, thì một việc rất thông thường phải làm là nói rằng chất điểm của chúng ta chuyển động dưới ảnh hưởng của thế năng $V(y)=mgy$. Hàm Lagrange cho hệ kín này (hạt vòng và trái đất) là $L=m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)/2-mgy$, và vì vậy phương trình (6.52) cho ta $E=m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)/2+mgy$, chính là năng lượng của chất điểm. Nhưng bất chấp tất cả những điều chúng ta vừa nói, hầu hết các hệ mà chúng ta sẽ xét đến đều là hệ kín, vì vậy thông thường bạn có thể lờ đi nhận xét này và giả sử rằng đại lượng E trong phương trình (6.52) cho ta hàm năng lượng. ♣

6.6 Định lý Noether

Bây giờ chúng ta sẽ trình bày một trong những lý thuyết đẹp nhất và hữu ích nhất trong vật lý. Nó liên quan đến hai nội dung cơ bản, đó là các *tính đối xứng* và *đại lượng bảo toàn*. Định lý này (đưa ra bởi Emmy Noether) có thể được phát biểu như sau.

Định lý 6.4. *(Định lý Noether) Đối với mỗi tính đối xứng của hàm Lagrange, tồn tại một đại lượng bảo toàn.*

Với "tính đối xứng", chúng ta muốn nói rằng nếu các tọa độ bị thay đổi bởi một số các đại lượng nhỏ, thì sự thay đổi của hàm Lagrange sẽ không chứa số hạng bậc nhất của các đại lượng này. Với "đại lượng bảo toàn", chúng ta muốn nói đến một đại lượng không đổi theo thời gian. Kết quả trong Mục 6.5.1 đối với các tọa độ cyclic là một trường hợp đặc biệt của định lý này.

Chứng minh. Coi hàm Lagrange là bất biến, tới vô cùng bé bậc nhất của số có giá trị nhỏ ϵ, dưới sự thay đổi các tọa độ,

$$q_i \longrightarrow q_i + \epsilon K_i(q). \tag{6.58}$$

Mỗi $K_i(q)$ có thể là một hàm của tất cả các biến q_i, mà chúng ta kí hiệu chúng một cách ngắn gọn bởi q.

NHẬN XÉT: Như là một ví dụ để xem những hàm K_i này trông như thế nào, xét hàm Lagrange, $L = (m/2)(5\dot{x}^2 - 2\dot{x}\dot{y} + 2\dot{y}^2) + C(2x - y)$. Chúng ta vừa mới chỉ lấy đại một hàm, mặc dù hàm Lagrange này vô tình là dạng của hàm L nảy sinh trong các bài toán của máy Atwood; xem Bài tập 6.9 và Bài luyện tập 6.40. Hàm Lagrange L này là bất biến đối với sự đổi biến $x \to x + \epsilon$ và $y \to y + 2\epsilon$, bởi vì các số hạng đạo hàm là không bị ảnh hưởng, và hiệu $2x - y$ là không đổi. (Nó thực ra là bất biến đối với tất cả các bậc của độ lớn của ϵ, chứ không riêng gì bậc nhất. Nhưng điều này là không cần thiết để cho định lý vẫn đúng.) Do đó, $K_x = 1$ và $K_y = 2$, mà vô tình là không phụ thuộc gì vào các tọa độ. Trong các bài toán chúng ta sẽ làm, thì các hàm K_i nói chung có thể được xác định một cách đơn giảm bằng cách xem xét số hạng thế năng.

Tất nhiên, ai đó khác cũng có thể lấy $K_x = 3$ và $K_y = 6$, cũng là một trường hợp thỏa mãn tính đối xứng. Và thực ra, bất cứ một hệ số nào cũng có thể được rút ra khỏi ϵ và sau đó đưa nó vào trong K_i cũng không làm thay đổi đại lượng $\epsilon K_i(q)$ trong phương trình (6.58). Và bất kỳ thay đổi nào dạng này sẽ sinh ra một hệ số hằng số chung (và do đó không làm thay đổi tính chất bảo toàn) của đại lượng bảo toàn trong phương trình (6.61) bên dưới . Do đó điều này không có gì là quan trọng cả. ♣

Thực tế là hàm Lagrange không thay đổi đến bậc nhất của ϵ có nghĩa là

$$\begin{aligned} 0 = \frac{dL}{d\epsilon} &= \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial \epsilon} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \epsilon} \right) \\ &= \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} K_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{K}_i \right). \end{aligned} \tag{6.59}$$

Sử dụng phương trình $E - L$, phương trình (6.3), chúng ta có thể viết lại điều này như sau

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_i \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) K_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{K}_i \right) \\ &= \frac{d}{dt}\left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} K_i \right). \end{aligned} \tag{6.60}$$

Do đó, đại lượng

$$P(q, \dot{q}) \equiv \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} K_i(q) \tag{6.61}$$

không thay đổi theo thời gian. Nó được gọi tên theo đặc điểm của nó là *động lượng bảo toàn*. Nhưng nó không cần thiết phải có đơn vị của động lượng. □

Ví dụ 1: Xét hàm Lagrange trong phần nhận xét ở trên, $L = (m/2)(5\dot{x}^2 - 2\dot{x}\dot{y} + 2\dot{y}^2) + C(2x - y)$. Ta thấy rằng $K_x = 1$ và $K_y = 2$. Động lượng bảo toàn do đó sẽ bằng

$$\begin{aligned} P(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} K_x + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} K_y &= m(5\dot{x} - \dot{y})(1) + m(-\dot{x} + 2\dot{y})(2) \\ &= m(3\dot{x} + 3\dot{y}). \end{aligned} \tag{6.62}$$

Hệ số chung toàn thể $3m$ là không quan trọng.

Ví dụ 2: Xét một quả bóng bị ném. Ta có $L = (m/2)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz$. Biểu thức này bất biến đối với phép tịnh tiến theo x, nghĩa là, $x \to x + \epsilon$; và cũng bất biến đối với phép tịnh tiến theo y, nghĩa là, $y \to y + \epsilon$. (Cả x và y đều là các tọa độ cyclic.) Chúng ta chỉ cần tính chất bất biến tới bậc nhất của ϵ để cho định lý Noether có giá trị, nhưng hàm Lagrangeian này là bất biến đối với tất cả các bậc của ϵ.

Do đó chúng ta có hai tính đối xứng trong hàm Lagrange của chúng ta. Tính đối xứng thứ nhất có $K_x = 1, K_y = 0$, và $K_z = 0$. Tính đối xứng thứ hai có $K_x = 0, K_y = 1$, và $K_z = 0$. Tất nhiên, các hàm khác không K_i ở đây có thể được chọn bằng bất kỳ hằng số nào, nhưng chúng ta cũng có thể chọn chúng bằng 1. Hai động lượng bảo toàn là

$$\begin{aligned} P_1(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} K_x + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} K_y + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} K_z = m\dot{x}, \\ P_2(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} K_x + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} K_y + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} K_z = m\dot{y}. \end{aligned} \tag{6.63}$$

Những đại lượng này đơn giản là các thành phần theo phương x và y của động lượng của hệ, như chúng ta đã thấy ở trong ví dụ đầu tiên trong Mục 6.5.1. Chú ý rằng bất kỳ một sự kết hợp nào của các động lượng này, ví dụ như $3P_1 + 8P_2$, cũng là đại lượng bảo toàn. (Nói cách khác, $x \to x + 3\epsilon, y \to y + 8\epsilon, z \to z$ là một tính đối xứng của hàm Lagrange.) Nhưng P_1 và P_2 ở trên là các động lượng đơn giản nhất được chọn như là một "cơ sở" cho một số vô hạn các động lượng bảo toàn (là số các động lượng bảo toàn mà bạn có, nếu như tồn tại hai hoặc nhiều hơn các tính đối xứng liên tục độc lập với nhau).

Ví dụ 3: Xét một vật được gắn vào một lò xo, với độ dài tự nhiên bằng không, trong mặt phẳng $x - y$. Hàm Lagrange, $L = (m/2)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - (k/2)(x^2 + y^2)$, là bất biến đối với phép biến đổi tọa độ, $x \to x + \epsilon y$ và $y \to y - \epsilon x$, tới bậc nhất của ϵ (như bạn có thể kiểm tra). Vì vậy chúng ta có $K_x = y$ và $K_y = -x$. Động lượng bảo toàn do đó là

$$P(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} K_x + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} K_y = m(\dot{x}y - \dot{y}x). \tag{6.64}$$

Đây là thành phần moment động lượng (âm) theo phương z. Ở đây, moment động lượng là bảo toàn bởi vì hàm thế năng, $V(x, y) \propto x^2 + y^2 = r^2$, chỉ phụ thuộc vào khoảng cách từ điểm đang xét tới gốc tọa độ. Chúng ta sẽ thảo luận các hàm thế năng như thế này trong Chương 7.

Khác với hai ví dụ đầu tiên ở trên, phép biến đổi $x \to x + \epsilon y, y \to y - \epsilon x$ là không quá hiển nhiên ở đây. Vậy làm cách nào chúng ta có được phép biến đổi này? Thật không may là có vẻ như không có một phương pháp nào mà nói chung lúc nào cũng có thể xác định được K_i, vì vậy đôi khi chúng ta phải đoán dạng của nó. Nhưng trong rất nhiều bài toán, K_i đơn giản là các hằng số mà rất dễ được nhận thấy.

NHẬN XÉT:

1. Như chúng ta đã thấy ở trên, trong một vài trường hợp K_i là các hàm của các tọa độ, và trong một vài trường hợp thì không.
2. Kết quả về tọa độ cyclic trong phương trình (6.48) là một trường hợp đặc biệt của định lý Noether, vì lý do sau đây. Nếu L không phụ thuộc vào một tọa độ q_k nào đó, thì phép biến đổi $q_k \to q_k + \epsilon$ chắc chắn là một tính đối xứng. Do vậy $K_k = 1$ (với tất cả các giá trị K_i khác bằng không), và phương trình (6.60) sẽ đưa về phương trình (6.48).
3. Chúng ta sử dụng thuật ngữ "tính đối xứng" để để miêu tả tình huống khi phép biến đổi trong phương trình (6.58) không sinh ra số hạng bậc nhất trong sự biến đổi của hàm Lagrange. Đây là một sự lựa chọn thuật ngữ gần đúng, bởi vì hàm Lagrange miêu tả hệ, và nếu hệ về cơ bản là không thay đổi gì khi các tọa độ bị biến đổi, thì chúng ta nói rằng hệ là đối xứng. Ví dụ như, nếu chúng ta có một cơ cấu mà không phụ thuộc gì vào θ, thì chúng ta nói rằng hệ này là đối xứng đối với các phép quay. Ta có thể quay hệ tọa độ một cách tùy ý, và hệ vẫn không đổi. Hai ứng dụng phổ biến nhất của định lý Noether là định luật bảo toàn moment động lượng, là kết quả của tính đối xứng đối với phép quay; và định luật bảo toàn động lượng, là kết quả của tính đối xứng đối với phép tịnh tiến.
4. Trong những hệ đơn giản, như trong Ví dụ 2 ở trên, tại sao P là bảo toàn thì rất là rõ ràng. Nhưng trong các hệ phức tạp hơn, như trong Ví dụ 1 ở trên, kết quả của P

có thể không có một ý nghĩa hiển nhiên lắm. Nhưng ít nhất thì bạn cũng biết rằng nó là bảo toàn, và điều này sẽ luôn luôn giúp bạn trong việc hiểu về một cơ cấu.

5. Mặc dù các đại lượng bảo toàn là cực kỳ hữu ích trong việc nghiên cứu một tình huống vật lý, cũng phải nên nhấn mạnh rằng các thông tin chứa đựng trong chúng cũng không nhiều hơn các thông tin ở trong các phương trình $E-L$. Các đại lượng bảo toàn đơn giản là kết quả của việc lấy tích phân các phương trình $E-L$. Ví dụ như, nếu chúng ta viết ra phương trình $E-L$ đối với Ví dụ 1 ở trên, và sau đó cộng phương trình của "x" (là phương trình $5m\ddot{x}-m\ddot{y}=2C$) với hai lần phương trình của "y" (là phương trình $-m\ddot{x}+2m\ddot{y}=-C$), thì bạn sẽ nhận được phương trình $3m(\ddot{x}+\ddot{y})=0$. Nói cách khác, $3m(\dot{x}+\dot{y})$ là hằng số, như chúng ta đã tìm được khi sử dụng định lý Noether.

   Tất nhiên, bạn có thể phải làm một vài dự đoán để tìm ra sự kết hợp chính xác của các phương trình $E-L$ mà cho vế phải của nó bằng không. Nhưng dù sao thì bạn cũng phải làm một vài dự đoán, để tìm ra tính đối xứng đối với định lý Noether. Dù thế nào đi chăng nữa, một đại lượng bảo toàn là hữu ích bởi vì nó là một dạng tích phân của các phương trình $E-L$. Điều này dẫn bạn thêm một bước gần hơn nữa trong việc giải một bài toán, so với việc bạn bắt đầu giải bài toán với các phương trình vi phân bậc hai $E-L$.

6. Liệu có phải mọi hệ đều có một đại lượng động lượng bảo toàn? Chắc chắn là không. Bài toán một chiều về một quả bóng rơi ($m\ddot{z}=-mg$) không có đại lượng động lượng bảo toàn nào. Và nếu bạn viết ra một hàm thế năng bất kỳ trong không gian ba chiều, thì điều kỳ lạ ở đây là sẽ không có một động lượng bảo toàn nào. Theo một cách nào đó, mọi thứ phải được thiết kế một cách đẹp đẽ để có một động lượng được bảo toàn. Trong một vài bài toán, bạn có thể chỉ nhìn cơ hệ vật lý và thấy tính đối xứng của nó là gì, nhưng trong các bài tập khác, (ví dụ như, trong các bài toán về máy Atwood trong chương này), thì tính đối xứng sẽ không hiển nhiên một chút nào.

7. Bằng việc sử dụng thuật ngữ "đại lượng bảo toàn", chúng ta muốn nói về một đại lượng mà phụ thuộc (nhiều nhất) vào các tọa độ và các đạo hàm bậc nhất của chúng (nghĩa là, không phụ thuộc vào các đạo hàm bậc hai của chúng). Nếu chúng ta không đưa vào hạn chế này, thì rất dễ dàng xây dựng được các đại lượng mà không phụ thuộc gì vào thời gian. Ví dụ như, trong Ví dụ 1 ở trên, phương trình $E-L$ đối với tọa độ "x" (là phương trình $5m\ddot{x}-m\ddot{y}=2C$) cho ta biết rằng $5m\ddot{x}-m\ddot{y}$ có đạo hàm theo thời gian bằng không. Chú ý rằng một cách tương đương để loại trừ những trường hợp tầm thường này là nói rằng giá trị của một đại lượng bảo toàn phụ thuộc vào điều kiện đầu (nghĩa là, các vận tốc và các vị trí đầu). Đại lượng $5m\ddot{x}-m\ddot{y}$ không thỏa mãn tiêu chuẩn này, bởi vì giá trị của nó luôn luôn bị ràng buộc phải bằng $2C$.

   ♣

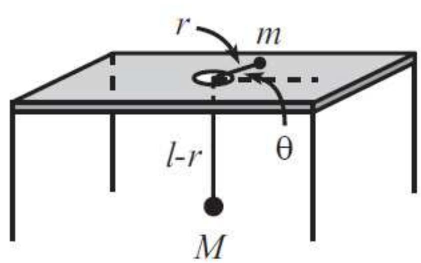
6.7 Dao động nhỏ

Trong rất nhiều hệ vật lý, một chất điểm trải qua các dao động nhỏ xung quanh một điểm cân bằng. Trong Mục 5.2, chúng ta đã chỉ ra rằng tần số của những dao động nhỏ này là

$$\omega = \sqrt{\frac{V''(x_0)}{m}}, \tag{6.65}$$

trong đó $V(x)$ là hàm thế năng, và x_0 là điểm cân bằng. Tuy nhiên, kết quả này chỉ đúng cho trường hợp chuyển động *một chiều* (chúng ta sẽ thấy ở bên dưới tại sao điều này lại đúng). Trong những hệ phức tạp hơn, như hệ được miêu tả ở bên dưới, chúng ta cần phải sử dụng một cách làm khác để nhận được tần số dao động ω. Cách làm này là một phương pháp an toàn, có thể ứng dụng được trong tất cả các trường hợp. Tuy nhiên, phương pháp này sẽ rắc rối hơn một chút so với việc chỉ đơn giản viết ra phương trình (6.65). Vì vậy trong các bài toán một chiều, phương trình (6.65) vẫn là kết quả mà bạn muốn sử dụng. Chúng ta sẽ minh họa phương pháp an toàn này thông qua bài toán sau đây.

Bài toán: Một khối lượng m trượt tự do trên một mặt bàn nhẵn và được nối, bởi một sợi dây luồn qua một lỗ trên mặt bàn, với một khối lượng M được treo bên dưới mặt bàn (xem Hình 6.5). Giả sử rằng khối lượng M chỉ chuyển động theo đường thẳng đứng, và giả sử rằng sợi dây luôn luôn căng.



Hình 6.5:

(a) Tìm các phương trình vi phân chuyển động đối với các biến r và θ được chỉ ra như trong hình vẽ.

(b) Với điều kiện nào thì m chuyển động theo quỹ đạo tròn?

(c) Trong trường hợp m chuyển động tròn này, hãy tìm tần số của dao động nhỏ (theo biến r)?

Lời giải:

(a) Gọi chiều dài của dây là ℓ (chiều dài này sẽ không ảnh hưởng gì đến kết quả tính toán). Khi đó hàm Lagrange (chúng ta kí hiệu là "$\mathcal{L}$" ở đây, còn L thì để dành cho moment động lượng, mà sẽ xuất hiện sau) là

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + Mg(\ell - r). \tag{6.66}$$

Đối với hàm thế năng, chúng ta đã coi mặt bàn có độ cao bằng không, nhưng bất kì giá trị nào cũng có thể được chọn. Các phương trình chuyển động $E-L$ nhận được đối với θ và r là

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0, \\ &(M+m)\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 - Mg. \end{aligned} \tag{6.67}$$

Phương trình thứ nhất cho chúng ta biết rằng moment động lượng là bảo toàn. Phương trình thứ hai cho ta biết rằng trọng lực Mg là lực gây ra gia tốc của hai khối lượng dọc theo phương của sợi dây, cùng với gia tốc hướng tâm của khối lượng m.

(b) Phương trình thứ nhất trong (6.67) cho ta biết rằng $mr^2\dot{\theta} = L$, trong đó L là một hằng số nào đó (moment động lượng) mà phụ thuộc vào các điều kiện đầu. Thay $\dot{\theta} = L/mr^2$ vào trong phương trình thứ hai của (6.67) ta có

$$(M+m)\ddot{r} = \frac{L^2}{mr^3} - Mg. \tag{6.68}$$

Chuyển động tròn xảy ra khi $\dot{r} = \ddot{r} = 0$. Do đó, bán kính của quỹ đạo tròn được cho bởi

$$r_0^3 = \frac{L^2}{Mmg}. \tag{6.69}$$

Bởi vì $L = mr^2\dot{\theta}$, phương trình (6.69) là tương đương với

$$mr_0\dot{\theta}^2 = Mg, \tag{6.70}$$

mà cũng có thể nhận được bằng việc cho $\ddot{r} = 0$ vào trong phương trình thứ hai của (6.67). Nói cách khác, trọng lực tác dụng lên M chính là lực gây ra gia tốc hướng tâm của m nếu chuyển động là một chuyển động tròn. Cho trước r_0, phương trình (6.70) sẽ cho ta biết giá trị của $\dot{\theta}$ phải bằng bao nhiêu để có được chuyển động tròn, và ngược lại.

(c) Để tìm tần số của các dao động nhỏ trong chuyển động tròn, chúng ta cần xem điều gì sẽ xảy ra với r nếu chúng ta thay đổi giá trị của nó một chút so với giá trị của nó tại vị trí cân bằng r_0. Phương pháp an toàn của chúng ta là như sau.

Gọi $r(t) \equiv r_0 + \delta(t)$, trong đó $\delta(t)$ là rất nhỏ (một cách chính xác hơn, $\delta(t) \ll r_0$), và khai triển phương trình (6.68) tới số hạng bậc nhất của $\delta(t)$. Sử dụng

$$\frac{1}{r^3} \equiv \frac{1}{(r_0+\delta)^3} \approx \frac{1}{r_0^3 + 3r_0^2\delta} = \frac{1}{r_0^3(1+3\delta/r_0)} \approx \frac{1}{r_0^3}\left(1 - \frac{3\delta}{r_0}\right), \tag{6.71}$$

chúng ta nhận được

$$(M+m)\ddot{\delta} \approx \frac{L^2}{mr_0^3}\left(1 - \frac{3\delta}{r_0}\right) - M\text{g}. \tag{6.72}$$

Các số hạng không phụ thuộc vào δ trong vế phải bị triệt tiêu, do định nghĩa của r_0 được cho trong phương trình (6.69). Sự triệt tiêu này luôn xuất hiện trong một bài toán như thế này tại trạng thái này, do định nghĩa của điểm cân bằng. Do đó chúng ta còn lại

$$\ddot{\delta} + \left(\frac{3L^2}{(M+m)mr_0^4}\right)\delta \approx 0. \tag{6.73}$$

Đây là một phương trình dao động điều hòa đơn giả theo biến δ mà chúng ta đã biết rất rõ. Do đó, tần số của các dao động nhỏ theo một quỹ đạo tròn bán kính r_0 là

$$\omega \approx \sqrt{\frac{3L^2}{(M+m)mr_0^4}} = \sqrt{\frac{3M}{M+m}}\sqrt{\frac{\text{g}}{r_0}}, \tag{6.74}$$

trong đó chúng ta đã sử dụng phương trình (6.69) để triệt tiêu L trong biểu thức thứ hai.

Tóm lại, tần số trên là tần số của các dao động nhỏ theo biến r. Nói một cách khác, nếu bạn có một chuyển động gần tròn, và nếu bạn vẽ r như là một hàm của thời gian (và không quan tâm đến θ), thì bạn sẽ nhận được một đồ thị hình sine đẹp đẽ mà tần số của nó được cho bởi phương trình (6.74). Chú ý rằng tần số này không cần thiết phải liên quan gì đến các tần số liên quan khác trong bài toán này, như tần số của chuyển động tròn, mà bằng $\sqrt{M/m}\sqrt{g/r_0}$, từ phương trình (6.70).

NHẬN XÉT: Hãy xem một vài trường hợp giới hạn. Đối với một giá trị của r_0 cho trước, nếu $m \gg M$, thì $\omega \approx \sqrt{3Mg/mr_0} \approx 0$. Điều này là hợp lý, bởi vì mọi thứ sẽ chuyển động rất chậm. Tần số này bằng $\sqrt{3}$ lần tần số của chuyển động tròn, là $\sqrt{Mg/mr_0}$, mà là kết quả không hiển nhiên chút nào. Đối với một giá trị r_0 cho trước, nếu $m \ll M$, thì $\omega \approx \sqrt{3g/r_0}$, mà cũng là kết quả không hiển nhiên chút nào.

Tần số của các dao động nhỏ bằng với tần số của chuyển động tròn nếu $M = 2m$, mà, một lần nữa, cũng không hiển nhiên chút nào. Điều kiện này không phụ thuộc vào r_0. ♣

Phương pháp tìm tần số của các dao động nhỏ ở trên có thể được tóm tắt theo ba bước như sau: (1) tìm các phương trình chuyển động; (2) tìm vị trí điểm cân bằng; và (3) đặt $x(t) \equiv x_0 + \delta(t)$, trong đó x_0 là điểm cân bằng của biến đang xét, và khai triển một trong các phương trình chuyển động (hoặc một tổ hợp của chúng) tới số hạng bậc nhất của δ, để nhận được một phương trình dao động điều hòa đơn giản đối với δ. Nếu điểm cân bằng vô tình là tại $x = 0$ (là trường hợp thường xảy ra), thì mọi việc sẽ được đơn giản đi rất nhiều. Sẽ không cần phải giới thiệu δ, và việc khai triển trong bước thứ ba ở trên một cách đơn giản sẽ yêu cầu bỏ qua các số mũ có bậc lớn hơn bậc nhất đối với x.

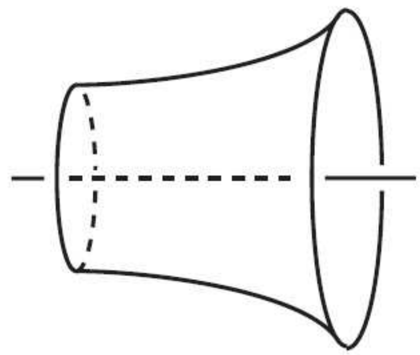
NHẬN XÉT: Nếu bạn chỉ sử dụng hàm thế năng cho bài toán ở trên (đó là Mgr, với sai khác bởi một hằng số) trong phương trình (6.65), thì bạn sẽ nhận được một tần số bằng không, là một kết quả sai. Bạn *có thể* sử dụng phương trình (6.65) để tìm tần số, nếu bạn thay vào đó sử dụng hàm "thế năng hiệu dụng" đối với bài toán này, bằng $L^2/(2mr^2) + Mgr$, và nếu bạn sử dụng tổng khối lượng, $M + m$, như là khối lượng trong phương trình (6.65), như bạn có thể kiểm tra điều này. Lý do tại sao việc này có tác dụng sẽ trở nên rõ ràng trong Chương 7 khi chúng ta giới thiệu về hàm thế năng hiệu dụng.Tuy nhiên, trong rất nhiều bài toán, sẽ không hiển nhiên lắm để biết hàm thế năng hiệu dụng phù hợp nào nên được sử dụng, hoặc khối lượng nào sẽ được thay vào phương trình (6.65). Vì vậy nói chung nó sẽ an toàn hơn rất nhiều khi hít một hơi dài rồi làm theo các bước lấy khai triển tương tự như là bước trong phần (c) của ví dụ trên.

Tất nhiên, kết quả của trường hợp một chiều trong phương trình (6.65) là một trường hợp đặc biệt của phương pháp khai triển ở trên. Chúng ta có thể nhận lại các kết quả trong Mục 5.2 theo ngôn ngữ này. Trong trường hợp một chiều, phương trình chuyển động $E-L$ là $m\ddot{x} = -V'(x)$. Gọi x_0 là một điểm cân bằng, vì vậy $V'(x_0) = 0$. Và gọi $x(t) \equiv x_0 + \delta(t)$. Khai triển $m\ddot{x} = -V'(x)$ tới số hạng bậc nhất của δ, ta có $m\ddot{\delta} = -V'(x_0) - V''(x_0)\delta$, cộng với các số hạng bậc cao hơn. Bởi vì $V'(x_0) = 0$, ta có $m\ddot{\delta} \approx -V''(x_0)\delta$, là điều ta mong muốn.

6.8 Những ứng dụng khác

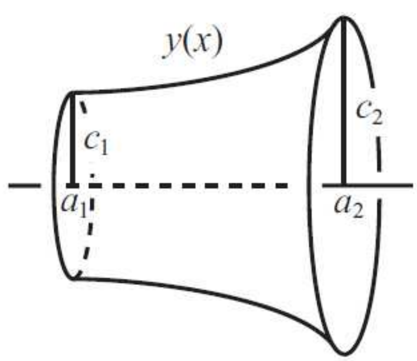
Phương pháp hình thức phát triển trong Mục 6.2 là đúng cho *bất kỳ* hàm $L(x, \dot{x}, t)$ nào. Nếu mục tiêu của chúng ta là tìm ra các điểm dừng của $S \equiv \int L$ thì phương trình (6.15) luôn đúng, với bất kỳ dạng nào của L. L không cần thiết phải bằng $T - V$, hoặc đúng ra, là không cần thiết phải liên quan gì đến vật lý. Và t cũng không cần thiết phải là thời gian. Tất cả mọi thứ được yêu cầu ở đây là đại lượng x phụ thuộc theo tham số t, và L chỉ phụ thuộc vào $x, \dot{x}$ và t (và không phụ thuộc vào, ví dụ như, $\ddot{x}$; xem Bài tập luyện tập 6.34). Phương pháp hình thức này là rất tổng quát và rất mạnh, như ví dụ sau đây sẽ minh họa điều này.

Ví dụ (Cực tiểu mặt tròn xoay): Một mặt tròn xoay có hai vòng tròn song song cho trước được coi là biên của nó, xem Hình 6.6. Hỏi hình dạng của mặt tròn xoay phải như thế nào để cho diện tích của mặt là bé nhất có thể? Chúng ta sẽ trình bày ba lời giải. Lời giải thứ tư sẽ được để dành cho Bài tập 6.22.



Hình 6.6:

LỜI GIẢI THỨ NHẤT: Giả sử mặt tròn xoay được sinh ra bằng việc quay đường cong $y = y(x)$ xung quanh trục x. Các điều kiện biên là $y(a_1) = c_1$ và $y(a_2) = c_2$; xem Hình 6.7. Cắt mặt tròn xoay thành những vành tròn thẳng đứng, chúng ta thấy



Hình 6.7:

rằng diện tích của mặt tròn xoay được cho bởi

$$A = \int_{a_1}^{a_2} 2\pi y\sqrt{1 + y'^2}\, dx. \tag{6.75}$$

Mục đích của chúng ta là đi tìm hàm $y(x)$ làm cực tiểu tích phân trên. Vì vậy chúng ta có tình huống giống như tình huống trong Mục 6.2, ngoại trừ việc x ở đây bây giờ là tham số (thay vì tham số t), và y bây giờ là hàm (thay cho x). Do vậy "hàm

Lagrange" của chúng ta là $L \propto y\sqrt{1+y'^2}$. Để làm cực tiểu tích phân A, chúng ta "đơn giản" là phải viết ra phương trình $E-L$,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) = \frac{\partial L}{\partial y}, \tag{6.76}$$

và tính các đạo hàm. Tuy nhiên việc tính toán này là hơi dài dòng nhàm chán, vì vậy tôi sẽ chuyển nó xuống thành Bổ đề 6.5 ở phần cuối của mục này. Bây giờ chúng ta sẽ chỉ sử dụng kết quả của phương trình (6.86) mà cho ta (với $f(y) = y$ ở đây)

$$1 + y'^2 = By^2. \tag{6.77}$$

Tới thời điểm này chúng ta có thể dự đoán một cách thông minh (xuất phát từ thực tế là $1+\sinh^2 z = \cosh^2 z$) rằng nghiệm của phương trình này là

$$y(x) = \frac{1}{b}\cosh b(x+d), \tag{6.78}$$

trong đó $b = \sqrt{B}$, và d là một hằng số tích phân. Hoặc chúng ta có thể tách biến để nhận được (một lần nữa với $b = \sqrt{B}$)

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{(by)^2 - 1}}, \tag{6.79}$$

và sau đó chúng ta sử dụng thực tế là tích phân của $1/\sqrt{z^2-1}$ bằng $\cosh^{-1} z$, để nhận được kết quả giống như trên. Do đó, kết quả của bài toán của chúng ta là $y(x)$ sẽ có dạng trong phương trình (6.78), với b và d được xác định bởi các điều kiện biên,

$$c_1 = \frac{1}{b}\cosh b(a_1+d), \quad \text{và} \quad c_2 = \frac{1}{b}\cosh b(a_2+d). \tag{6.80}$$

Trong trường hợp đối xứng khi $c_1 = c_2$, chúng ta biết rằng cực tiểu của hàm xảy ra tại điểm giữa, vì vậy chúng ta có thể chọn $d = 0$ và $a_1 = -a_2$.

Các nghiệm của b và d chỉ tồn tại đối với các miền giá trị nào đó của a và c. Nói chung, nếu $a_2 - a_1$ quá lớn, thì sẽ không có nghiệm. Trong trường hợp này, "mặt" cực tiểu hóa ra sẽ là hai đường tròn đã cho, được nối với nhau bởi một đường thẳng (mà không phải là một mặt hai chiều đẹp đẽ gì). Nếu bạn tiến hành một thí nghiệm với những bong bóng xà phòng (mà muốn cực tiểu hóa diện tích bề mặt của chúng), và nếu bạn kéo hai vòng tròn ra quá xa, thì bề mặt bong bóng xà phòng sẽ bị phá vỡ và sẽ biến mất khi nó cố gắng tạo ra hai vòng tròn. Bài tập 6.23 sẽ giải quyết vấn đề này.

LỜI GIẢI THỨ HAI: Xét đường cong mà chúng ta quay xung quanh trục x bây giờ được miêu tả bởi hàm $x(y)$. Nghĩa là, giả sử x là hàm của y. Diện tích khi đó được cho bởi

$$A = \int_{c_1}^{c_2} 2\pi y \sqrt{1 + x'^2}\, dy, \tag{6.81}$$

trong đó $x' \equiv dx/dy$. Chú ý rằng hàm $x(y)$ có thể nhận giá trị kép, vì vậy nó có thể không thực sự là một hàm. Nhưng nó trông giống như một hàm trong lân cận địa phương, và toàn bộ phương pháp hình thức của chúng ta liên quan đến các biến đổi địa phương.

"Hàm Lagrange" của chúng ta bây giờ là $L \propto y\sqrt{1 + x'^2}$, và phương trình $E - L$ là

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial L}{\partial x'}\right) = \frac{\partial L}{\partial x} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{dy}\left(\frac{yx'}{\sqrt{1 + x'^2}}\right) = 0. \tag{6.82}$$

Một điều rất đẹp về nghiệm này là số ”0” ở vế phải, mà từ đó suy ra thực tế là L không phụ thuộc vào x (nghĩa là, x là tọa độ xyclic). Do đó, $yx'/\sqrt{1 + x'^2}$ là hằng số. Nếu chúng ta định nghĩa hằng số này là $1/b$, thì chúng ta có thể giải ra x' và sau đó tách biến để nhận được

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{(by)^2 - 1}}, \tag{6.83}$$

phù hợp với phương trình (6.79). Quá trình tìm nghiệm được tiến hành như ở trên.

LỜI GIẢI THỨ BA: "Hàm Lagrange" trong lời giải thứ nhất ở trên, $L \propto y\sqrt{1 + y'^2}$, là độc lập với x. Vì vậy, tương tự với trường hợp bảo toàn năng lượng (mà chúng ta đã rút ra từ một hàm Lagrange độc lập với t), đại lượng

$$E \equiv y'\frac{\partial L}{\partial y'} - L = \frac{y'^2 y}{\sqrt{1 + y'^2}} - y\sqrt{1 + y'^2} = \frac{-y}{\sqrt{1 + y'^2}} \tag{6.84}$$

là hằng số (nghĩa là, độc lập với x). Phát biểu này tương đương với phương trình (6.77), và quá trình tìm nghiệm sẽ diễn ra như ở trên. Như đã được minh họa bởi sự ngắn gọn của lời giải thứ hai và thứ ba ở đây, việc sử dụng các đại lượng bảo toàn bất kì khi nào có thể là một lợi thế rất tốt.

Bây giờ chúng ta hãy chứng minh bổ đề sau đây, là bổ đề mà chúng ta đã dùng đến trong lời giải thứ nhất ở trên. Bổ đề này là rất hữu ích, bởi vì chúng ta sẽ thường xuyên gặp các bài toán trong đó một đại lượng cần phải cực tiểu hóa phụ thuộc vào độ dài cung, $\sqrt{1 + y'^2}$, và có dạng $\int f(y)\sqrt{1 + y'^2}dx$. Chúng ta sẽ đưa ra hai chứng minh. Chứng minh đầu tiên sử dụng phương trình Euler-Lagrange. Các tính toán sẽ hơi rối rắm một chút, vì vậy sẽ là một ý hay khi chỉ thực hiện nó một lần và sau đó chỉ cần ứng dụng các kết quả của nó khi cần. Cái cách để nhận được kết quả này không phải là thứ mà bạn sẽ muốn thực hiện lại một cách thường xuyên. Chứng minh thứ hai có sử dụng một đại lượng bảo toàn. Và đối lập với chứng minh thứ nhất, phương pháp này là rất đơn giản và rõ ràng. Phương pháp này thực ra *là* cái mà bạn muốn thực hiện lại một cách thường xuyên. Nhưng chúng ta cũng chỉ sẽ thực hiện nó một lần duy nhất.

Khẳng định 6.5. *Gọi $f(y)$ là một hàm đã cho của y. Khi đó hàm $y(x)$ mà làm cực trị hóa tích phân,*

$$\int_{x_1}^{x_2} f(y)\sqrt{1+y'^2}\,dx, \tag{6.85}$$

sẽ thỏa mãn phương trình vi phân,

$$1+y'^2 = Bf(y)^2, \tag{6.86}$$

trong đó B là một hằng số tích phân.[11]

Chứng minh. **Chứng minh thứ nhất:** Mục đích của chúng ta là đi tìm phương trình $y(x)$ mà cực trị hóa tích phân trong phương trình (6.85). Do đó chúng ta chính xác có tình huống tương tự như trong Mục 6.2, ngoại trừ việc t được thay bởi x và x được thay bởi y. "Hàm Lagrange" của chúng ta khi đó là $L = f(y)\sqrt{1+y'^2}$, và phương trình Euler-Lagrange là

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) = \frac{\partial L}{\partial y} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(f\cdot y'\cdot\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = f'\sqrt{1+y'^2}, \tag{6.87}$$

trong đó $f' \equiv df/dy$. Chúng ta bây giờ phải thực hiện vài phép tính đạo hàm một cách trực tiếp (mặc dù điều này là dài dòng và tẻ nhạt). Sử dụng quy tắc lấy đạo hàm của hàm tích của ba nhân tử ở vế trái, và sử dụng quy tắc lấy đạo hàm của hàm hợp một vài lần, ta nhận được

$$\frac{f'y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} + \frac{fy''}{\sqrt{1+y'^2}} - \frac{fy'^2y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = f'\sqrt{1+y'^2}. \tag{6.88}$$

Nhân cả hai vế với $(1+y'^2)^{3/2}$ và rút gọn ta có

$$fy'' = f'(1+y'^2). \tag{6.89}$$

Chúng ta đã vừa hoàn thành bước thứ nhất của chứng minh, gọi là đưa ra phương trình vi phân Euler- Lagrange. Chúng ta bây giờ phải tích phân nó. Phương trình (6.89) là tình là khả tích đối với bất kì hàm $f(y)$ nào. Nếu chúng ta nhân cả hai vế với y' và sắp xếp lại, ta sẽ nhận được

$$\frac{y'y''}{1+y'^2} = \frac{f'y'}{f}. \tag{6.90}$$

[11]Hằng số B và cũng như một hằng số tích phân khác (xuất hiện khi phương trình (6.86) được lấy tích phân để nhận được y) được xác định từ các điều kiện biên của $y(x)$; xem, ví dụ như, phương trình (6.80). Tình huống này, trong đó hai hằng số tích phân được xác định bằng các giá trị của hàm tại các điểm, là hơi khác một chút so với tình huống trong các bài toán vật lý mà chúng ta đã làm trong đó hai hằng số tích phân được xác định bằng giá trị (nghĩa là, vị trí ban đầu) và độ dốc (nghĩa là, vận tốc) tại chỉ một điểm. Nhưng theo cách nào đi chăng nữa, hai dữ kiện ban đầu phải được sử dụng.

Tích phân theo dx cả hai vế cho ta $(1/2)\ln(1+y'^2) = \ln(f)+C$, trong đó C là một hằng số tích phân. Sau đó lấy hàm mũ ta có (với $B \equiv e^{2C}$)

$$1 + y'^2 = Bf(y)^2, \tag{6.91}$$

là điều mà chúng ta đã muốn chỉ ra. Trong một bài toán thực tế, chúng ta sẽ giải phương trình này đối với y', và sau đó tách biến và lấy tích phân. Nhưng chúng ta cần được cho trước một hàm $f(y)$ cụ thể để có thể làm được điều này.

Chứng minh thứ hai: "Hàm Lagrange" của chúng ta, $L = f(y)\sqrt{1+y'^2}$, là độc lập với biến x. Do đó, tương tự với việc năng lượng được bảo toàn được cho trong phương trình (6.52), đại lượng

$$E \equiv y'\frac{\partial L}{\partial y'} - L = \frac{-f(y)}{\sqrt{1+y'^2}} \tag{6.92}$$

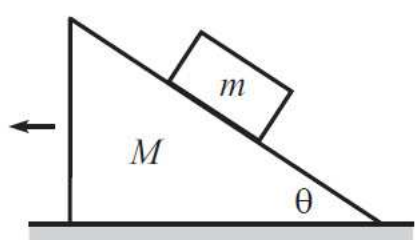
là độc lập với biến x. Gọi nó là $1/\sqrt{B}$. Sau đó chúng ta nhận lại được phương trình (6.91) một cách dễ dàng. Để thực hành, bạn cũng có thể chứng minh được bổ đề này bằng việc xem x như là một hàm của y, như chúng ta đã làm trong lời giải thứ hai ở trong ví dụ của mặt phẳng cực tiểu ở trên. □

6.9 Bài tập

Mục 6.1: Các phương trình Euler-Lagrange

6.1. Mặt phẳng nghiêng chuyển động **

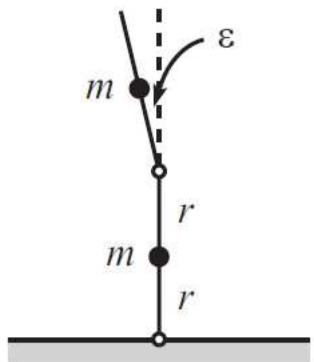
Một vật có khối lượng m được giữ nằm yên trên một mặt phẳng nghiêng khối lượng M, nghiêng một góc θ (xem Hình 6.8). Mặt phẳng nghiêng đứng yên trên một mặt phẳng nằm ngang không ma sát. Vật m được thả ra. Tìm gia tốc theo phương ngang của mặt phẳng nghiêng? (Bài toán này đã được đưa ra trong Bài tập 3.8. Nếu bạn chưa từng làm bài này, hãy thử giải bài này bằng phương pháp $F = ma$. Sau đó bạn sẽ phải cám ơn phương pháp Lagrange rất nhiều.)



Hình 6.8:

6.2. Hai thanh rơi **

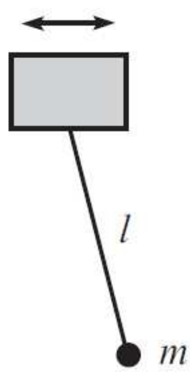
Hai thanh không khối lượng có chiều dài $2r$, được gắn bản lề ở một đầu, ở giữa mỗi thanh có gắn cố định một khối lượng m. Một thanh được đặt trên đỉnh thanh kia, như được chỉ ra trong Hình 6.9. Điểm cuối bên dưới của thanh nằm dưới được gắn bản lề với mặt đất. Chúng được giữ sao cho thanh ở bên dưới có vị trí thẳng đứng, và thanh ở trên nghiêng một góc nhỏ ϵ so với phương thẳng đứng. Sau đó chúng được thả ra. Tại thời điểm này, hãy tìm gia tốc góc của hai thanh? Giải bài toán trong trường hợp xấp xỉ khi ϵ là rất nhỏ.



Hình 6.9:

6.3. Con lắc đơn có điểm treo dao động **

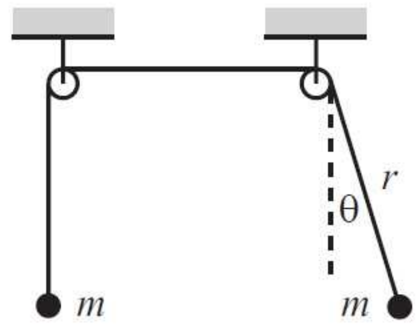
Một con lắc đơn gồm một khối lượng m và một thanh không khối lượng có chiều dài ℓ. Điểm treo của con lắc dao động theo phương nằm ngang với vị trí của nó được cho bởi phương trình $x(t) = A\cos(\omega t)$; xem Hình 6.10. Hãy tìm nghiệm tổng quát cho góc lệch của con lắc như là một hàm của thời gian?



Hình 6.10:

6.4. Hai khối lượng, một đang đung đưa ***

Hai khối lượng m bằng nhau, nối với nhau bởi một sợi dây không khối lượng, vắt qua hai ròng rọc (có kích thước không đáng kể), như được chỉ ra trên Hình 6.11. Khối lượng bên trái chuyển động theo một đường thẳng đứng, còn khối lượng bên phải là tự do đung đưa qua lại trong mặt phẳng của các khối lượng và các ròng rọc. Hãy tìm các phương trình chuyển động đối với r và θ, như đã chỉ ra trong hình vẽ. Giả sử rằng khối lượng bên trái

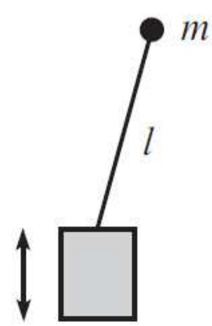


Hình 6.11:

chuyển động từ trạng thái nằm yên, và khối lượng bên phải trải qua các dao động nhỏ với biên độ góc ϵ (với $\epsilon \ll 1$). Hãy tìm gia tốc trung bình ban đầu (được lấy trung bình theo một vài chu kỳ) của khối lượng bên trái? Nó chuyển động theo hướng nào?

6.5. Con lắc ngược ****

Một con lắc đơn gồm một khối lượng m được gắn vào một đầu một thanh không khối lượng có chiều dài ℓ. Đầu còn lại của thanh được làm cho dao động theo phương thẳng đứng với vị trí của nó được cho bởi phương trình $y(t) = A\cos(\omega t)$, trong đó $A \ll l$. Xem Hình 6.12. Hóa ra rằng nếu ω là đủ lớn, và nếu con lắc ban đầu có vị trí gần như là bị dựng ngược lại theo phương thẳng đứng, thì rất là ngạc nhiên là nó sẽ *không* bị rơi xuống theo thời gian. Thay vào đó, nó (phần nào) sẽ dao động qua lại xung quanh vị trí thẳng đứng. Nếu bạn muốn tự làm thí nghiệm này, hãy xem minh họa thứ 28 của tập hợp các thí nghiệm giải trí của Ehrlich (1994). Hãy tìm phương trình chuyển động đối với góc lệch



Hình 6.12:

của con lắc đơn (đo từ vị trí nằm ngược của nó). Hãy giải thích tại sao con lắc không bị rơi xuống, và hãy tìm tần số của dao động qua lại của nó?

Mục 6.2: Nguyên lý tác dụng dừng

6.6. Điểm cực tiểu hoặc điểm yên ngựa **

(a) Trong phương trình (6.26), để thuận tiện đặt $t_1 = 0$ và $t_2 = T$. Và đặt $\xi(t)$ là một hàm "tam giác" rất dễ để khảo sát, có dạng như sau

$$\xi(t) = \begin{cases} \epsilon\, t/T, & 0 \le t \le T/2, \\ \epsilon\,(1 - t/T), & T/2 \le t \le T. \end{cases} \tag{6.93}$$

Dưới điều kiện nào thì toán tử điều hòa ΔS trong phương trình (6.26) là âm?

(b) Hãy trả lời câu hỏi tương tự, nhưng bây giờ với $\xi(t) = \epsilon \sin(\pi t/T)$.

Mục 6.3 Các lực liên kết

6.7. Phản lực từ một mặt phẳng nghiêng **

Một khối lượng m trượt xuống một mặt phẳng nghiêng không ma sát nghiêng một góc θ. Hãy chỉ ra, sử dụng phương pháp trong Mục 6.3, rằng phản lực từ mặt phẳng nghiêng tác dụng lên khối lượng có dạng quen thuộc là $mg\cos\theta$.

Mục 6.5: Các định luật bảo toàn

6.8. Hạt vòng trên một thanh *

Một thanh bị gắn bản lề tại gốc tọa độ và được bố trí để quay tròn trong một mặt phẳng nằm ngang với vận tốc góc không đổi ω. Một hạt vòng có khối lượng m trượt không ma sát dọc theo thanh. Gọi r là vị trí theo phương bán kính của hạt. Hãy tìm đại lượng bảo toàn E được cho bởi phương trình (6.52). Hãy giải thích tại sao đại lượng này *không phải* là năng lượng của hạt.

Mục 6.6: Định lý Noether

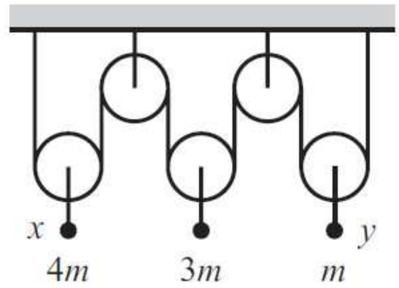
6.9. Máy Atwood **

Xét máy Atwood được chỉ ra như trên Hình 6.13. Các khối lượng là $4m, 3m$ và m. Gọi x và y là độ cao của các khối lượng bên trái và bên phải, so với vị trí ban đầu của chúng. Hãy tìm động lượng bảo toàn của hệ?

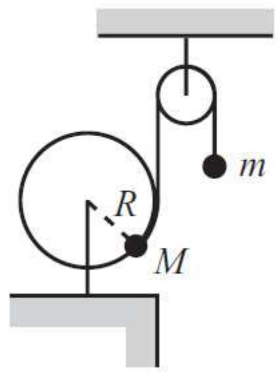
Mục 6.7: Dao động nhỏ

6.10. Vòng tròn và ròng rọc **

Một khối lượng M được gắn vào một vòng tròn không khối lượng bán kính R mà nằm trong một mặt phẳng thẳng đứng. Vòng tròn là tự do quay xung quanh tâm cố định của nó. Khối lượng M được buộc vào một sợi dây mà cuốn một phần xung quanh vòng tròn, sau đó đi lên trên theo phương thẳng đứng và vắt lên trên một ròng rọc không khối lượng. Một khối lượng m treo vào đầu còn lại của sợi dây (xem Hình 6.14). Hãy tìm phương trình chuyển động đối với góc quay của vòng tròn. Hỏi tần số của dao động nhỏ là bao nhiêu? Giả sử rằng m chỉ chuyển động theo phương thẳng đứng, và giả sử $M > m$.



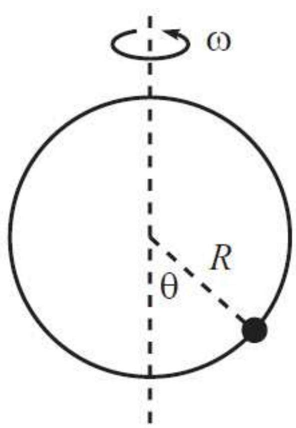
Hình 6.13:



Hình 6.14:

6.11. Hạt vòng trên một vòng tròn đang quay **

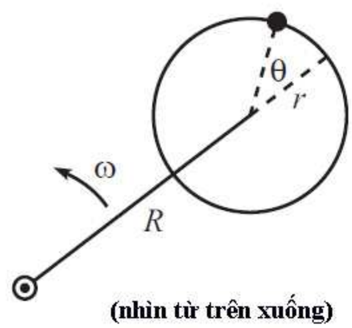
Một hạt vòng tự do trượt dọc theo một vòng tròn không ma sát bán kính R. Vòng tròn quay với vận tốc góc ω không đổi xung quanh một đường kính thẳng đứng (xem Hình 6.15). Tìm phương trình chuyển động đối với góc θ như đã được chỉ ra trên hình? Những điểm nào là các vị trí cân bằng? Hỏi tần số của các dao động nhỏ xung quanh điểm cân bằng ổn định là bao nhiêu? Có một giá trị của ω khá là đặc biệt; đó là giá trị nào và tại sao nó đặc biệt?



Hình 6.15:

6.12. Bài toán khác về hạt vòng trên một vòng tròn đang quay **

Một hạt vòng tự do trượt dọc theo một vòng tròn không ma sát bán kính r. Mặt phẳng chứa vòng tròn là mặt phẳng nằm ngang, và tâm của vòng tròn chuyển động theo một đường tròn nằm ngang bán kính R, với vận tốc góc ω không đổi xung quanh một điểm cho trước (xem Hình 6.16). Tìm phương trình chuyển động đối với góc θ như đã chỉ ra trong hình vẽ. Hơn nữa, hãy tìm tần số của các dao động nhỏ xung quanh điểm cân bằng.



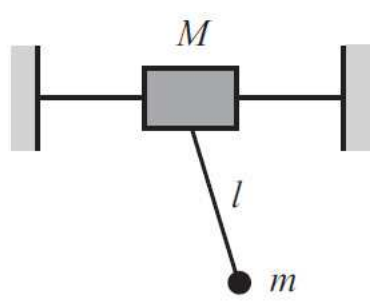
Hình 6.16:

6.13. Khối lượng trên một bánh xe **

Một khối lượng m được gắn cố định vào một điểm cho trước trên vành của bánh xe bán kính R đang lăn không trượt trên mặt đất. Bánh xe là không khối lượng, ngoại trừ một khối lượng M được đặt tại tâm của bánh xe. Tìm phương trình chuyển động đối với góc quay của xe. Đối với trường hợp khi mà bánh xe thực hiện dao động nhỏ, hãy tìm tần số dao động?

6.14. Con lắc đơn với điểm treo tự do **

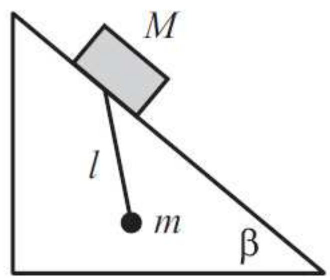
Một khối lượng M tự do trượt dọc theo một đường ray không ma sát. Một con lắc đơn có chiều dài ℓ và khối lượng m nối với M (xem Hình 6.17). Tìm các phương trình chuyển động của hệ? Đối với các dao động nhỏ, hãy tìm các mode trực giao và các tần số của chúng?



Hình 6.17:

6.15. Điểm treo con lắc đơn trên một mặt phẳng nghiêng **

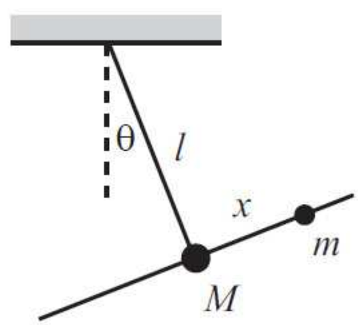
Một khối lượng M tự do trượt xuống một mặt nhẵn nghiêng không ma sát có góc nghiêng là β. Một con lắc đơn có chiều dài ℓ và khối lượng m được treo vào M; xem Hình 6.18 (giả thiết rằng M thò ra một đoạn ngắn ra ngoài mặt nghiêng, vì vậy con lắc có thể treo vào nó được). Tìm các phương trình vi phân chuyển động của hệ? Đối với các dao động nhỏ, hãy tìm các mode trực giao và các tần số của chúng?



Hình 6.18:

6.16. Mặt phẳng bị nghiêng ***

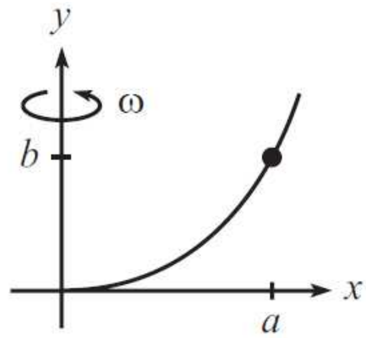
Một khối lượng M được gắn cố định tại đỉnh góc vuông tại đó có một thanh không khối lượng chiều dài ℓ được gắn vào một một thanh rất dài (xem Hình 6.19). Một khối lượng m tự do chuyển động không ma sát dọc theo thanh dài (giả thiết rằng vật m có thể di chuyển xuyên qua M). Thanh có chiều dài ℓ được gắn khớp bản lề vào một điểm treo, và toàn bộ cơ hệ có thể quay tự do quanh khớp trong mặt phẳng của các thanh. Gọi θ là góc quay của hệ, và gọi x là khoảng cách giữa m và M. Tìm các phương trình chuyển động. Tìm các mode trực giao khi θ và x cả hai là rất nhỏ.



Hình 6.19:

6.17. Đường cong quay ***

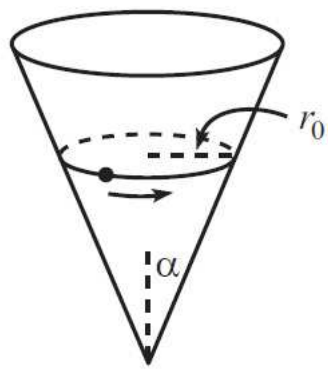
Đường cong $y(x) = b(x/a)^\lambda$ được quay xung quanh trục y với vận tốc góc không đổi ω (xem Hình 6.20). Một hạt vòng chuyển động không ma sát dọc theo đường cong. Hãy tìm tần số của các dao động nhỏ xung quanh vị trí cân bằng. Dưới các điều kiện nào thì các dao động tồn tại? (Bài toán này sẽ khá là cồng kềnh trong tính toán.)



Hình 6.20:

6.18. Chuyển động trong một hình nón ***

Một chất điểm trượt trên mặt trong của một hình nón không ma sát. Nón được giữ cố định với đỉnh của nón chạm đất và trục của nó có phương thẳng đứng. Nửa góc ở đỉnh của nón bằng α (xem Hình 6.21). Gọi r là khoảng cách từ chất điểm tới trục thẳng đứng, và gọi θ là góc quay xung quanh hình nón. Hãy tìm các phương trình chuyển động. Nếu



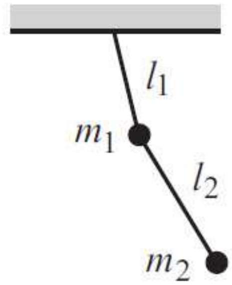
Hình 6.21:

chất điểm chuyển động theo một đường tròn bán kính r_0, hỏi tần số góc, ω, của chuyển động này bằng bao nhiêu? Nếu sau đó chất điểm bị đẩy nhẹ một chút ra khỏi chuyển động tròn này, hỏi tần số, Ω, của dao động xung quanh bán kính r_0 này bằng bao nhiêu? Dưới các điều kiện nào thì $\Omega = \omega$?

6.19. Con lắc kép ****

Xét một con lắc kép được cấu tạo bởi hai khối lượng, m_1 và m_2, và hai thanh chiều dài ℓ_1 và ℓ_2 (xem Hình 6.22). Hãy tìm các phương trình chuyển động. Đối với các dao động nhỏ, hãy tìm các mode trực giao và tần số của chúng trong trường hợp đặc biệt $\ell_1 = \ell_2$ (và xét các trường hợp $m_1 = m_2$, $m_1 \gg m_2$, và $m_1 \ll m_2$). Làm tương tự đối với trường hợp đặc biệt $m_1 = m_2$ (và xét với các trường hợp $\ell_1 = \ell_2$, $\ell_1 \gg \ell_2$, và $\ell_1 \ll \ell_2$).

Mục 6.8: Những ứng dụng khác



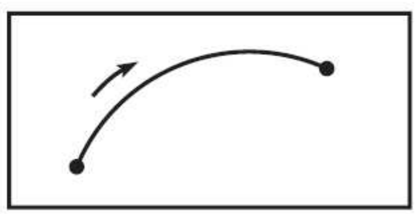
Hình 6.22:

6.20. Khoảng cách ngắn nhất trong một mặt phẳng *

Trên tinh thần của Mục 6.8, hãy chỉ ra rằng con đường ngắn nhất giữa hai điểm trong một mặt phẳng là một đường thẳng.

6.21. Hệ số khúc xạ **

Giả sử rằng vận tốc ánh sáng truyền trong một tấm vật liệu đã cho tỷ lệ với chiều cao phía trên tính từ đáy của tấm.[12] Hãy chỉ ra rằng ánh sáng chuyển động theo các cung tròn trong vật liệu này; xem Hình 6.23. Bạn có thể giả thiết rằng ánh sáng đi theo con đường có thời gian chuyển động là ngắn nhất giữa hai điểm (Nguyên lý Fermat về thời gian cực tiểu).



Hình 6.23:

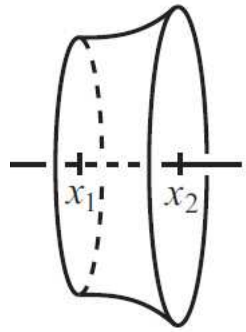
6.22. Mặt cực tiểu **

Nhận lại hình dạng của mặt cực tiểu đã được thảo luận trong Mục 6.8, bằng việc yêu cầu rằng một vành mặt cắt (nghĩa là, miền nằm giữa hai mặt $x = x_1$ và $x = x_2$) ở trạng thái cân bằng; xem Hình 6.24. *Gợi ý*: Lực căng phải là không đổi trên toàn bộ bề mặt (giả sử rằng chúng ta đang bỏ qua trọng lực).

6.23. Sự tồn tại của một mặt cực tiểu **

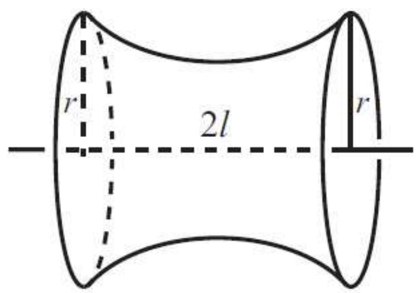
Xét mặt cực tiểu trong Mục 6.8, và xét trường hợp đặc biệt trong đó hai vòng tròn có

[12]Nếu bạn muốn đưa ra một phát biểu tương đương theo "hệ số khúc xạ" của vật liệu, thường được ký hiệu bởi n, thì bạn có thể nói rằng: Như là một hàm của độ cao y, hệ số n được cho bởi $n(y) = y_0/y$, trong đó y_0 là một độ dài nào đó mà lớn hơn độ dày của tấm. Phát biểu này tương đương với phát biểu ban đầu bởi vì vận tốc ánh sáng trong một vật liêu bằng c/n.



Hình 6.24:

cùng bán kính là r (xem Hình 6.25). Gọi $2l$ là khoảng cách giữa hai vòng tròn. Hỏi giá trị lớn nhất của l/r bằng bao nhiêu để cho vẫn tồn tại một mặt cực tiểu? Bạn sẽ phải giải một phương trình nào đó bằng phương pháp số ở đây.



Hình 6.25:

6.24. Đường brachistochrone ***

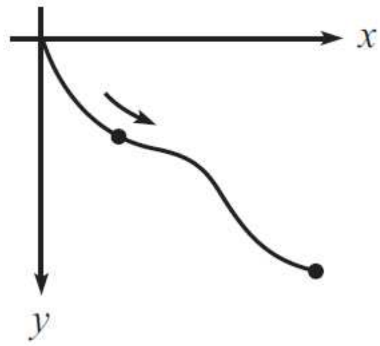
Một hạt vòng được thả không vận tốc từ điểm gốc tọa độ và trượt xuống một dây không ma sát nối giữa điểm gốc tọa độ với một điểm cho trước, như chỉ ra trong Hình 6.26. Bạn muốn nắn sợi dây theo một đường cong nào đó sao cho hạt vòng sẽ đạt đến điểm cuối trong một khoảng thời gian ngắn nhất có thể. Giả sử đường cong mong muốn được miêu tả bởi hàm $y(x)$, với chiều dương là chiều hướng thẳng đứng xuống dưới. Hãy chỉ ra rằng hàm $y(x)$ thỏa mãn

$$1 + y'^2 = \frac{B}{y}, \tag{6.94}$$

trong đó B là một hằng số. Sau đó hãy chỉ ra rằng x và y có thể được viết dưới dạng

$$x = a(\theta - \sin\theta), \quad y = a(1 - \cos\theta). \tag{6.95}$$

Đây là phương trình tham số hóa của một đường *cycloid*, mà là đường cong vạch ra bởi chất điểm nằm trên vành bánh xe đang lăn.



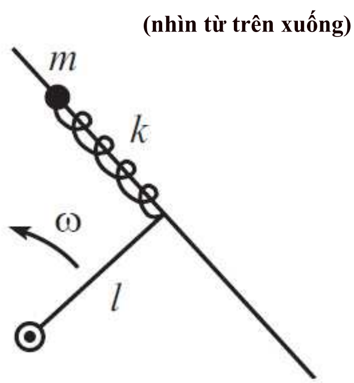
Hình 6.26:

6.10 Bài tập luyện tập

Mục 6.1 *Các phương trình Euler-lagrange*

6.25. Lò xo lồng vào một thanh chữ T **

Một thanh rắn hình chữ T bao gồm một thanh dài được gắn vuông góc với một thanh khác có chiều dài ℓ và thanh này được gắn bản lề tại gốc tọa độ. Thanh chữ T quay tròn trong một mặt phẳng nằm ngang với vận tốc góc không đổi ω. Một khối lượng m tự do trượt dọc theo thanh dài và được nối với giao điểm của hai thanh bởi một lò xo có độ cứng k và độ dài tự nhiên bằng không (xem Hình 6.27). Hãy tìm $r(t)$, trong đó r là vị trí của khối lượng dọc theo thanh dài. Có một giá trị đặc biệt của ω; hãy tìm giá trị đó, và tại sao nó lại đặc biệt?



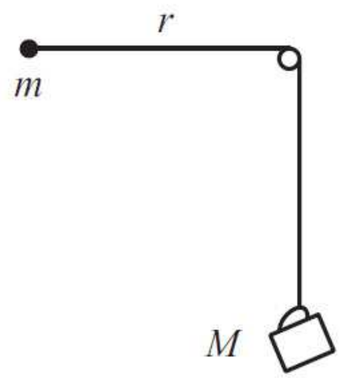
Hình 6.27:

6.26. Lò xo lồng vào một thanh hình chữ T, trường hợp có trọng lực ***

Xét cơ cấu trong bài tập trên, nhưng bây giờ cho thanh hình chữ T quay trong một mặt phẳng thẳng đứng với vận tốc góc không đổi ω. Tìm $r(t)$. Có một giá trị đặc biệt của ω; hãy tìm giá trị đó, và tại sao nó lại đặc biệt? (Bạn có thể giả thiết $\omega < \sqrt{k/m}$.)

6.27. Cốc cà phê và khối lượng **

Một cốc cà phê có khối lượng M được nối với một khối lượng m bởi một sợi dây. Cốc cà phê treo trên một ròng rọc không ma sát có kích thước không đáng kể, và khối lượng m ban đầu được giữ sao cho sợi dây ở vị trí nằm ngang, như được chỉ ra trên Hình 6.28. Khối lượng m sau đó được thả ra. Hãy tìm các phương trình chuyển động đối với r (là độ dài của sợi dây giữa m và ròng rọc) và θ (là góc mà sợi dây nối vào m tạo với phương nằm ngang). Giả sử rằng m bằng một cách nào đó không va vào sợi dây đang giữ cốc cà phê.



Hình 6.28:

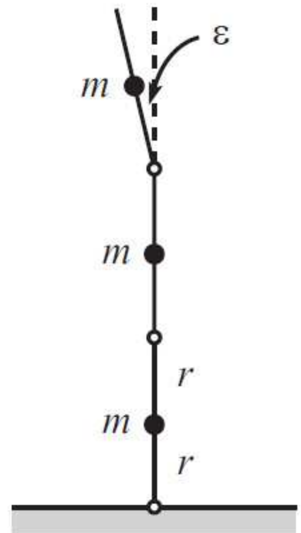
Cốc cà phê cuối cùng sẽ rơi xuống, nhưng hóa ra nó sẽ đạt tới một điểm thấp nhất và rồi sau đó lại đi lên. Viết một chương trình (xem Mục 1.4) thực hiện tính toán số để xác định tỷ số giữa r tại điểm thấp nhất và giá trị ban đầu của r, đối với một m/M cho trước. (Để kiểm tra chương trình của bạn, một giá trị của $m/M = 1/10$ thì nhận được giá trị tỷ số vào khoảng 0.208.)

6.28. Ba thanh rơi ***

Ba thanh không khối lượng chiều dài $2r$, mỗi thanh có một khối lượng m gắn cố định tại trung điểm của thanh, được gắn bản lề tại các đầu của chúng, như được chỉ ra trên Hình 6.29. Đầu dưới của thanh nằm dưới cùng được gắn khớp bản lề với mặt đất. Chúng được giữ sao cho hai thanh ở dưới thẳng đứng, và thanh trên cùng bị nghiêng đi một góc nhỏ ϵ so với phương thẳng đứng. Sau đó hệ được thả ra. Tại thời điểm đó, hãy tìm các gia tốc góc của ba thanh? Giải bài toán trong trường hợp xấp xỉ khi ϵ là rất nhỏ. (Bạn có thể muốn xem Bài tập 6.2 trước.)

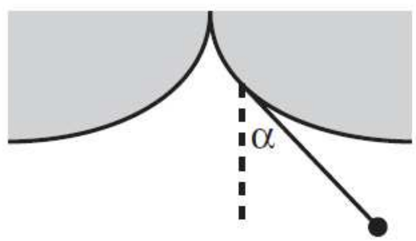
6.29. Con lắc đơn cycloidal ****

Tần số dao động của con lắc đơn chuẩn là $\sqrt{g/\ell}$ chỉ đúng đối với các dao động nhỏ. Tần số này sẽ nhỏ đi khi biên độ tăng lên. Hóa ra rằng nếu bạn muốn tạo ra một con lắc đơn có tần số độc lập với biên độ dao động, thì bạn phải treo nó vào đỉnh của một hình cycloid có một kích thước như thế nào đó, như chỉ ra trên Hình 6.30. Khi sợi dây cuốn một phần xung quanh hình cycloide, thì điều này sẽ làm cho chiều dài của sợi dây ở trong



Hình 6.29:

không khí bị giảm đi, và điều này sẽ làm cho tần số dao động tăng lên quay lại bằng một giá trị hằng số nào đó. Một cách chi tiết hơn đó là:



Hình 6.30:

Một đường cycloid là đường quỹ đạo của một điểm trên vành một bánh xe đang lăn. Đường cycloid dựng ngược trong Hình 6.30 có thể được tham số hóa bởi $(x, y) = R(\theta - \sin\theta, -1 + \cos\theta)$, với $\theta = 0$ tương ứng với điểm ở đỉnh. Xét một con lắc đơn có chiều dài $4R$ treo vào đỉnh của hình cycloid, và gọi α là góc mà sợi dây tạo với phương thẳng đứng, như chỉ ra trong hình vẽ.

(a) Biểu diễn theo α, hãy tìm giá trị của tham số θ tương ứng với điểm mà tại đó sợi dây tách ra khỏi đường cycloid.

(b) Biểu diễn theo α, hãy tìm phần chiều dài của sợi dây tiếp xúc với đường cycloid.

(c) Biểu diễn theo α, hãy tìm hàm Lagrange.

(d) Hãy chỉ ra rằng đại lượng $\sin\alpha$ biến đổi theo dạng của chuyển động điều hòa đơn giản với tần số $\sqrt{g/4R}$, độc lập với biên độ.

(e) Trong các phần (c) và (d), hãy giải lại bài toán trên bằng cách sử dụng phương pháp $F = ma$. Phương pháp này thực ra cho một lời giải nhanh hơn rất nhiều.

Mục 6.2: Nguyên lý tác dụng dừng

6.30. Quả bóng bị rơi *

Xét hàm tác dụng, từ $t = 0$ đến $t = 1$, của một quả bóng bị thả rơi từ trạng thái nằm yên. Từ phương trình $E - L$ (hay từ $F = ma$), chúng ta biết rằng $y(t) = -gt^2/2$ là một giá trị dừng của hàm tác dụng. Hãy chỉ ra một cách tường minh rằng hàm cụ thể $y(t) = -gt^2/2 + \epsilon t(t-1)$ cho ta một hàm tác dụng mà không phụ thuộc vào số hạng bậc nhất của ϵ.

6.31. Sự cực tiểu hóa tường minh *

Đối với một quả bóng được ném thẳng đứng lên trên, chúng ta dự đoán một nghiệm của y có dạng $y(t) = a_2t^2 + a_1t + a_0$. Giả sử rằng $y(0) = y(T) = 0$, nghiệm này nhanh chóng trở thành $y(t) = a_2(t^2 - Tt)$. Hãy tính toán hàm tác dụng giữa $t = 0$ và $t = T$, và hãy chỉ ra rằng nó đạt cực tiểu khi $a_2 = -g/2$.

6.32. Luôn luôn là một cực tiểu *

Đối với một quả bóng được ném vào trong không khí, hãy chỉ ra rằng giá trị dừng của hàm tác dụng luôn luôn là một cực tiểu toàn cục.

6.33. Biến đổi bậc hai *

Gọi $x_a(t) \equiv x_0(t) + a\beta(t)$. Phương trình (6.19) cho ta đạo hàm bậc nhất đối với a của hàm tác dụng. Hãy chỉ ra rằng đạo hàm bậc hai là

$$\frac{d^2}{da^2}S[x_a(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}\beta^2 + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \dot{x}}\beta\dot{\beta} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2}\dot{\beta}^2 \right) dt. \tag{6.96}$$

6.34. Sự phụ thuộc vào $\ddot{x}$ *

Giả sử rằng hàm Lagrange trong Định lý 6.1 phụ thuộc cả vào $\ddot{x}$ (trong khi nó vẫn phụ thuộc vào $x, \dot{x}, t$). Khi đó sẽ có thêm số hạng $(\partial L/\partial \ddot{x}_a)\ddot{\beta}$ trong phương trình (6.19). Rất có khả năng là chúng ta sẽ tích phân số hạng này hai lần bằng phương pháp tích phân từng phần, và rồi dẫn đến một dạng biến đổi của phương trình (6.22):

$$\frac{\partial L}{\partial x_0} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_0}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_0}\right) = 0. \tag{6.97}$$

Đây có phải là một kết quả đúng hay không? Nếu không, thì đâu là lỗi trong lập luận?

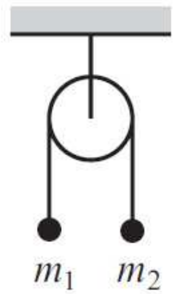
Mục 6.3: Các lực liên kết

6.35. Liên kết trên một đường tròn *

Một hạt vòng khối lượng m trượt với vận tốc v xung quanh một vòng tròn nằm ngang bán kính R. Hỏi lực tác dụng mà vòng tròn tác dụng lên hạt vòng bằng bao nhiêu? (Bỏ qua trọng lực.)

6.36. Máy Atwood *

Xét một máy Atwood chuẩn như trong Hình 6.31, với hai khối lượng m_1 và m_2. Hãy tìm lực căng trong sợi dây.



Hình 6.31:

6.37. Các tọa độ Đề Các **

Trong phương trình (6.35), lấy đạo hàm hai lần của phương trình $\sqrt{x^2+y^2}-R=0$ để nhận được

$$R^2(x\ddot{x}+y\ddot{y})+(x\dot{y}-y\dot{x})^2=0, \tag{6.98}$$

và sau đó kết hợp phương trình này với hai phương trình nữa để giải ra F phụ thuộc vào $x, y, \dot{x}, \dot{y}$. Hãy chuyển kết quả nhận được này sang hệ tọa độ cực (với θ là góc được đo từ phương thẳng đứng) và hãy chỉ ra rằng kết quả nhận được sẽ trùng với kết quả trong phương trình (6.32)

6.38. Liên kết trên một đường cong ***

Gọi mặt phẳng nằm ngang là mặt phẳng $x-y$. Một hạt vòng có khối lượng m trượt với vận tốc v dọc theo một đường cong được miêu tả bởi hàm $y=f(x)$. Hỏi lực do đường cong tác dụng lên hạt vòng bằng bao nhiêu? (Bỏ qua trọng lực.)

Mục 6.5: Các định luật bảo toàn

6.39. Hạt vòng trên một thanh, sử dụng $F=ma$ *

Sau khi làm Bài tập (6.8), một lần nữa hãy chỉ ra rằng đại lượng E là bảo toàn, nhưng bây giờ sử dụng phương pháp $F=ma$. Làm điều này theo hai cách:

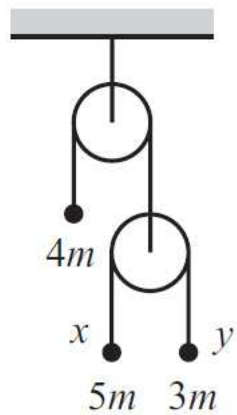
(a) Sử dụng phương trình đầu tiên trong (3.51). *Gợi ý*: nhân hai vế với $\dot{r}$.

(b) Sử dụng phương trình thứ hai trong (3.51) để tính công tác dụng lên hạt vòng, và sử dụng định lý công-năng lượng.

Mục 6.6: Định lý Noether

6.40. Máy Atwood **

Xét một máy Atwood được chỉ ra trong Hình 6.32. Các khối lượng là $4m, 5m$, và $3m$. Gọi x và y là độ cao của hai khối lượng bên phải so với vị trí ban đầu của chúng. Hãy sử dụng định lý Noether để tìm đại lượng động lượng bảo toàn. (Lời giải của Bài tập 6.9 cũng cho ta một vài phương pháp giải khác.)

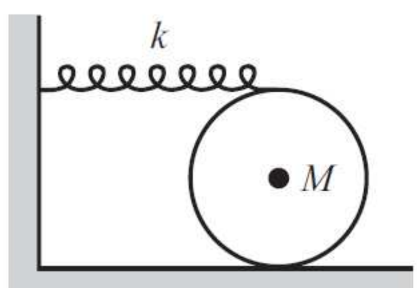


Hình 6.32:

Mục 6.7: Dao động nhỏ

6.41. Lò xo và một bánh xe *

Đỉnh của một bánh xe khối lượng M và bán kính R được gắn với một lò xo (tại trạng thái có độ dài tự nhiên) có độ cứng k, như được chỉ ra như trong Hình 6.33. Giả sử rằng toàn bộ khối lượng của bánh xe tập trung ở tâm. Nếu bánh xe lăn không trượt, hỏi tần số của các dao động (nhỏ) bằng bao nhiêu?



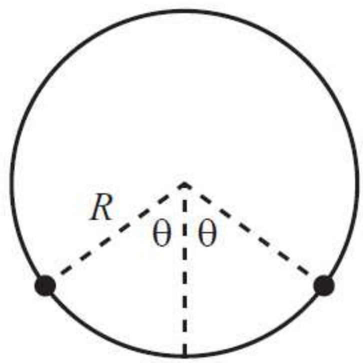
Hình 6.33:

6.42. Lò xo trên một nan hoa **

Một lò xo có độ cứng k và độ dài tự nhiên bằng không nằm dọc theo một nan hoa của một bánh xe không khối lượng có bán kính R. Một đầu của lò xo được gắn với tâm của bánh xe, và đầu còn lại được gắn với một khối lượng m mà nó có thể trượt tự do dọc theo nan hoa. Khi hệ ở vị trí cân bằng mà ở đó lò xo đang được treo thẳng đứng, hỏi khối lượng m lúc đó cần phải đang được treo ở khoảng cách (biểu diễn qua R) bằng bao nhiêu (bạn được quyền thay đổi độ cứng k) sao cho đối với các dao động nhỏ, tần số của dao động của lò xo bằng tần số của chuyển động đung đưa của bánh xe? Giả thiết rằng bánh xe lăn không trượt.

6.43. Vòng tròn dao động **

Hai khối lượng bằng nhau được dính chặt vào một vòng tròn không khối lượng bán kính R mà tự do quay quanh khối tâm của nó trong mặt phẳng thẳng đứng. Góc giữa hai khối lượng là 2θ, như được chỉ ra trong Hình 6.34. Hãy tìm tần số của các dao động nhỏ.



Hình 6.34:

6.44. Vòng tròn dao động cùng với một con lắc đơn ***

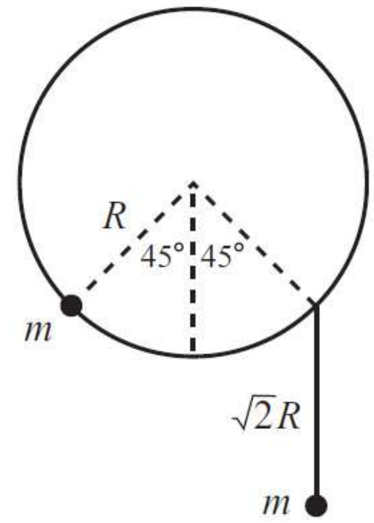
Một vòng tròn không khối lượng bán kính R có thể quay tự do xung quanh tâm của nó trong một mặt phẳng thẳng đứng. Một khối lượng m được gắn vào một điểm, và một con lắc đơn có chiều dài $\sqrt{2}R$ (và cũng có khối lượng m) được gắn vào một điểm khác cách điểm ban đầu một góc 90^o, như được chỉ ra trong Hình 6.35. Gọi θ là góc quay của vòng tròn so với vị trí của nó đã được chỉ ra trong hình vẽ, và gọi α là góc của con lắc so với phương thẳng đứng. Hãy tìm các mode trực giao của các dao động nhỏ?

6.45. Khối lượng trượt trên một vành bánh xe **

Một khối lượng m trượt tự do không ma sát dọc theo vành của một bánh xe có bán kính R lăn không trượt trên mặt nằm ngang. Bánh xe là không khối lượng, ngoại trừ có một khối lượng M đặt tại tâm của nó. Hãy tìm các mode trực giao của các dao động nhỏ?

6.46. Khối lượng trượt trên một vành bánh xe, với một lò xo ***

Xét cơ cấu trong bài tập trên, nhưng bây giờ cho khối lượng m được gắn với một lò xo có độ cứng k và độ dài tự nhiên bằng không, đầu còn lại của lò xo được gắn với một điểm trên vành bánh xe. Giả sử rằng lò xo bị hạn chế chỉ trượt dọc theo vành, và giả sử rằng khối lượng có thể tự do vượt qua điểm mà tại đó lò xo gắn với vành tròn. Để giảm bớt cồng kềnh trong tính toán ở đây, bạn có thể cho $M = m$.



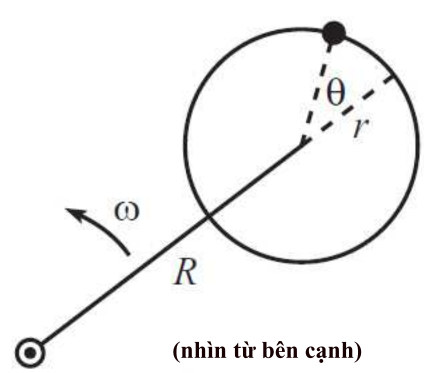
Hình 6.35:

(a) Hãy tìm các tần số của các mode trực giao đối với các dao động nhỏ. Kiểm tra trong trường hợp giới hạn $g = 0$, và (nếu bạn đã làm bài toán ở trên) trong trường hợp giới hạn $k = 0$.

(b) Đối với trường hợp đặc biệt khi $g/R = k/m$, hãy chỉ ra rằng các tần số có thể được viết dưới dạng $\sqrt{k/m}(\sqrt{5} \pm 1)/2$. Hệ số này là tỷ số vàng (và nghịch đảo của nó). Hãy mô tả xem các mode trực giao sẽ có dạng như thế nào?

6.47. Vòng tròn quay thẳng đứng ***

Một hạt vòng trượt tự do dọc theo một vòng tròn không ma sát bán kính r. Mặt phẳng của vòng tròn là mặt phẳng thẳng đứng, và tâm của vòng tròn di chuyển theo một đường tròn thẳng đứng có bán kính R với vận tốc góc ω không đổi xung quanh một điểm đã cho (xem Hình 6.36). Hãy tìm phương trình chuyển động đối với góc θ được chỉ ra trên hình vẽ. Đối với ω lớn (mà điều này ám chỉ rằng θ nhỏ), hãy tìm biên độ của nghiệm "riêng" có tần số là ω. Điều gì sẽ xảy ra nếu $r = R$?



Hình 6.36:

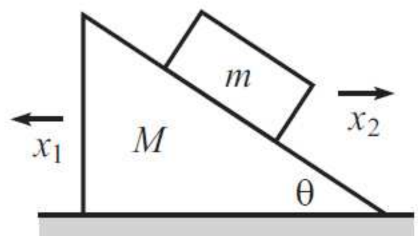
6.11 Lời giải

6.1. Mặt phẳng nghiêng chuyển động

Gọi x_1 là tọa độ theo phương ngang của mặt phẳng nghiêng (với chiều dương của x_1 hướng sang trái), và gọi x_2 là tọa độ theo phương ngang của vật m (với chiều dương của x_2 hướng sang phải); xem Hình 6.37. Khoảng cách tương đối theo phương ngang giữa mặt phẳng nghiêng và vật là $x_1 + x_2$, vì vậy độ dài mà vật rơi xuống sẽ là $(x_1 + x_2)\tan\theta$. Hàm Lagrange do đó bằng

$$L = \frac{1}{2}M\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\Big(\dot{x}_2^2 + (\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2\tan^2\theta\Big) + mg(x_1 + x_2)\tan\theta. \tag{6.99}$$

Các phương trình chuyển động nhận được đối với x_1 và x_2 là



Hình 6.37:

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_1 + m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2)\tan^2\theta &= mg\tan\theta, \\ m\ddot{x}_2 + m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2)\tan^2\theta &= mg\tan\theta. \end{aligned} \tag{6.100}$$

Chú ý rằng hiệu của hai phương trình này ngay lập tức sẽ cho ta định luật bảo toàn động lượng, $M\ddot{x}_1 - m\ddot{x}_2 = 0 \Longrightarrow (d/dt)(M\dot{x}_1 - m\dot{x}_2) = 0$. Các phương trình trong (6.100) là hai phương trình tuyến tính của hai biến, $\ddot{x}_1$ và $\ddot{x}_2$, vì vậy chúng ta có thể giải ra $\ddot{x}_1$. Sau một vài rút gọn, ta nhận được

$$\ddot{x}_1 = \frac{mg\sin\theta\cos\theta}{M + m\sin^2\theta}. \tag{6.101}$$

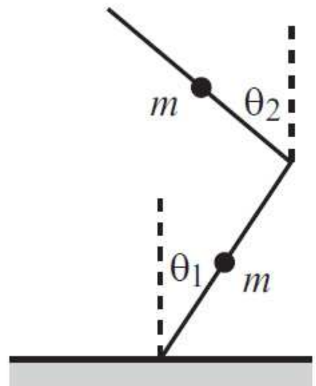
Đối với một vài trường hợp giới hạn, xem các nhận xét trong lời giải Bài tập 3.8.

6.2. Hai thanh rơi

Cho $\theta_1(t)$ và $\theta_2(t)$ được xác định như trong Hình 6.38. Khi đó vị trí của khối lượng bên dưới trong hệ tọa độ Đề Các là $(r\sin\theta_1 + r\cos\theta_1)$, và vị trí của khối lượng bên trên là $(2r\sin\theta_1 - r\sin\theta_2, 2r\cos\theta_1 + r\cos\theta_2)$. Vì vậy thế năng của hệ là

$$V(\theta_1, \theta_2) = mgr(3\cos\theta_1 + \cos\theta_2). \tag{6.102}$$

Việc tính động năng thì ở mức độ nào đó sẽ phức tạp hơn. Động năng của khối lượng bên dưới



Hình 6.38:

đơn giản là $mr^2\dot\theta_1^2/2$. Lấy đạo hàm của hàm vị trí của khối lượng bên trên, chúng ta tìm được động năng của khối lượng bên trên là

$$\frac{1}{2}mr^2\Big((2\cos\theta_1\dot\theta_1 - \cos\theta_2\dot\theta_2)^2 + (-2\sin\theta_1\dot\theta_1 - \sin\theta_2\dot\theta_2)^2\Big). \tag{6.103}$$

Chúng ta có thể đơn giản hoá biểu thức này bằng cách sử dụng các xấp xỉ cho góc nhỏ. Các số hạng liên quan đến $\sin\theta$ là vô cùng bé bậc 4 đối với θ, vì vậy chúng ta có thể bỏ qua chúng. Hơn nữa, chúng ta có thể xấp xỉ $\cos\theta$ bởi 1, bởi vì việc này chỉ liên quan đến việc bỏ đi các số hạng vô cùng bé có bậc ít nhất là 4. Vì vậy động năng của vật nằm bên trên trở thành $(1/2)mr^2(2\dot\theta_1 - \dot\theta_2)^2$. Nhìn lại các việc chúng ta đã làm, thì nó có lẽ sẽ đơn giản hơn để nhận được các biểu thức động năng của các khối lượng bằng việc đầu tiên áp dụng các xấp xỉ cho góc nhỏ cho hàm vị trí, và sau đó lấy các đạo hàm để nhận được các vận tốc. Chiến thuật này chỉ ra rằng cả hai khối lượng hầu như là chuyển động theo phương ngang (tại thời điểm ban đầu). Bạn có thể cũng muốn sử dụng chiến thuật này khi giải Bài tập luyện tập 6.28.

Sử dụng xấp xỉ cho góc nhỏ $\cos\theta \approx 1 - \theta^2/2$ để viết lại hàm thế năng trong phương trình (6.102), chúng ta có

$$L \approx \frac{1}{2}mr^2\Big(5\dot\theta_1^2 - 4\dot\theta_1\dot\theta_2 + \dot\theta_2^2\Big) - mgr\Big(4 - \frac{3}{2}\theta_1^2 - \frac{1}{2}\theta_2^2\Big). \tag{6.104}$$

Các phương trình chuyển động nhận được từ việc đạo hàm theo θ_1 và θ_2 tương ứng là

$$\begin{aligned} 5\ddot\theta_1 - 2\ddot\theta_2 &= \frac{3g}{r}\theta_1 \\ -2\ddot\theta_1 + \ddot\theta_2 &= \frac{g}{r}\theta_2. \end{aligned} \tag{6.105}$$

Tại thời điểm hai thanh được thả ra, chúng ta có $\theta_1 = 0$ và $\theta_2 = \epsilon$. Giải phương trình (6.105) đối với $\ddot\theta_1$ và $\ddot\theta_2$ ta có

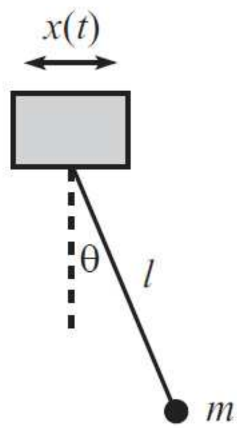
$$\ddot\theta_1 = \frac{2g\epsilon}{r}, \quad \text{và} \quad \ddot\theta_2 = \frac{5g\epsilon}{r}. \tag{6.106}$$

6.3. Con lắc có điểm treo dao động

Gọi θ được định nghĩa như trong Hình 6.39. Với $x(t) = A\cos(\omega t)$, vị trí của khối lượng m được cho bởi

$$(X, Y)_m = (x + \ell \sin\theta, -\ell\cos\theta). \tag{6.107}$$

Lấy đạo hàm để nhận được vận tốc, chúng ta thấy rằng bình phương vận tốc là



Hình 6.39:

$$V_m^2 = \dot{X}^2 + \dot{Y}^2 = \ell^2\dot{\theta}^2 + \dot{x}^2 + 2\ell\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta, \tag{6.108}$$

và biểu thức này cũng có thể nhận được từ việc áp dụng công thức hàm cosine đối với thành phần $\dot{x}$ theo phương ngang và thành phần tiếp tuyến $\ell\dot{\theta}$ của vector vận tốc. Hàm Lagrange do đó là

$$L = \frac{1}{2}m(\ell^2\dot{\theta}^2 + \dot{x}^2 + 2\ell\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta) + mg\ell\cos\theta. \tag{6.109}$$

Phương trình chuyển động đối với θ là

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(m\ell^2\dot{\theta} + m\ell\dot{x}\cos\theta) &= -m\ell\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta - mg\ell\sin\theta \\ \Longrightarrow \quad \ell\ddot{\theta} + \ddot{x}\cos\theta &= -\mathrm{g}\sin\theta. \end{aligned} \tag{6.110}$$

Thay dạng tường minh của $x(t)$ vào, chúng ta nhận được

$$\ell\ddot{\theta} - A\omega^2\cos(\omega t)\cos\theta + \mathrm{g}\sin\theta = 0. \tag{6.111}$$

Xem xét lại các bước chúng ta vừa làm, thì điều này là có ý nghĩa. Một ai đó đang ở trong hệ tọa độ của điểm treo, mà có gia tốc theo phương ngang là $\ddot{x} = -A\omega^2\cos(\omega t)$, cũng có thể giống như là đang sống trong một thế giới có gia tốc gây ra bởi trọng lực có một thành phần thẳng đứng hướng xuống là g và thành phần hướng sang phải là $A\omega\cos(\omega t)$. Phương trình (6.111) thực chất là phương trình $F = ma$ theo phương tiếp tuyến trong thế giới có gia tốc dạng này.

Dùng một xấp xỉ của góc nhỏ trong phương trình (6.111) ta có

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = a\omega^2 \cos(\omega t), \tag{6.112}$$

trong đó $\omega_0 \equiv \sqrt{g/\ell}$ và $a \equiv A/\ell$. Phương trình này đơn giản là phương trình của một dao động cưỡng bức, mà chúng ta đã giải quyết ở trong Chương 4. Nghiệm của nó là

$$\theta(t) = \frac{a\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega t) + C \cos(\omega_0 t + \phi), \tag{6.113}$$

trong đó C và θ được xác định từ các điều kiện đầu.

Nếu ω vô tình bằng ω_0, thì có vẻ như biên độ sẽ tiến dần ra vô hạn. Tuy nhiên, ngay khi biên độ dao động tăng lên, xấp xỉ đối với góc nhỏ của chúng ta cũng không còn đúng nữa, và các phương trình (6.112) và (6.113) sẽ không còn đúng nữa.

6.4. Hai khối lượng, một đang đung đưa

Hàm Lagrange là

$$L = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - mgr + mgr\cos\theta. \tag{6.114}$$

Hai số hạng cuối là (giá trị âm) của thế năng của mỗi khối lượng, được tính đối với vị trí của chúng khi khối lượng bên phải được đặt tại vị trí của ròng rọc bên phải. Các phương trình chuyển động nhận được từ việc biến đổi r và θ là

$$\begin{aligned} 2\ddot{r} &= r\dot{\theta}^2 - \mathrm{g}(1 - \cos\theta), \\ \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) &= -\mathrm{g}r\sin\theta. \end{aligned} \tag{6.115}$$

Phương trình thứ nhất liên quan đến các lực và các gia tốc dọc theo hướng của sợi dây. Phương trình thứ hai là phương trình của moment gây ra do trọng lực bằng với sự thay đổi của moment động lượng của khối lượng bên phải. Nếu chúng ta thực hiện một xấp xỉ (thô) đối với góc nhỏ và chỉ giữ lại các số hạng tới bậc nhất của θ, chúng ta sẽ thấy rằng tại $t = 0$ (sử dụng điều kiện đầu, $\dot{r} = 0$), phương trình (6.115) trở thành

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= 0, \\ \ddot{\theta} + \frac{\mathrm{g}}{r}\theta &= 0. \end{aligned} \tag{6.116}$$

Các phương trình này nói rằng khối lượng bên trái đứng yên, và khối lượng bên phải ứng xử giống như một con lắc đơn.

Nếu chúng ta muốn tìm số hạng chủ đạo của gia tốc ban đầu của khối lượng bên trái (nghĩa là, số hạng chứa $\ddot{r}$), chúng ta cần xấp xỉ tốt hơn một chút. Vì vậy hãy giữ lại các số hạng trong phương trình (6.115) tới bậc hai của θ. Sau đó chúng ta có tại $t = 0$ (sử dụng điều kiện đầu

$\dot{r} = 0$)

$$
\begin{aligned}
2\ddot{r} &= r\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}\mathrm{g}\theta^2, \\
\ddot{\theta} + \frac{\mathrm{g}}{r}\theta &= 0.
\end{aligned}
\tag{6.117}
$$

Phương trình thứ hai vẫn nói rằng khối lượng bên phải thực hiện dao động điều hòa. Chúng ta biết rằng biên độ dao động của nó là ϵ, vì vậy chúng ta có

$$
\theta(t) = \epsilon \cos(\omega t + \phi), \tag{6.118}
$$

trong đó $\omega = \sqrt{g/r}$. Thay biểu thức này vào phương trình thứ nhất ta nhận được

$$
2\ddot{r} = \epsilon^2 \mathrm{g}\left(\sin^2(\omega t + \phi) - \frac{1}{2}\cos^2(\omega t + \phi)\right). \tag{6.119}
$$

Nếu chúng ta lấy trung bình giá trị này trên một vài chu kì, cả $\sin^2\alpha$ và $\cos^2\alpha$ đều có giá trị trung bình bằng 1/2, vì vậy ta tìm được

$$
\ddot{r}_{\text{trung bình}} = \frac{\epsilon^2 \mathrm{g}}{8}. \tag{6.120}
$$

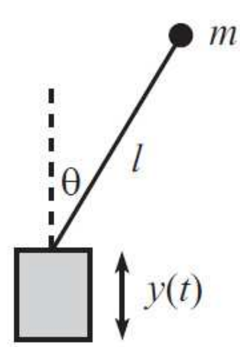
Đây là một hiệu ứng nhỏ bậc hai. Nó có giá trị dương, vì vậy khối lượng bên trái từ từ bắt đầu chuyển động đi lên.

6.5. Con lắc ngược

Gọi θ được định nghĩa như trong Hình 6.40. Với $y(t) = A\cos(\omega t)$, vị trí của khối lượng m được cho bởi

$$
(X, Y) = (\ell \sin\theta, y + \ell\cos\theta). \tag{6.121}
$$

Sau khi lấy đạo hàm để nhận được vận tốc, chúng ta thấy rằng bình phương của vận tốc là



Hình 6.40:

$$
V^2 = \dot{X}^2 + \dot{Y}^2 = \ell^2\dot{\theta}^2 + \dot{y}^2 - 2\ell\dot{y}\dot{\theta}\sin\theta, \tag{6.122}
$$

mà phương trình này cũng nhận được từ việc áp dụng công thức hàm cosine cho thành phần thẳng đứng $\dot{y}$ và thành phần tiếp tuyến $\ell\dot{\theta}$ của vector vận tốc. Hàm Lagrange khi đó là

$$L = \frac{1}{2}m(\ell^2\dot{\theta}^2 + \dot{y}^2 - 2\ell\dot{y}\dot{\theta}\sin\theta) - mg(y + \ell\cos\theta). \tag{6.123}$$

Phương trình chuyển động đối với θ là

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) = \frac{\partial L}{\partial\theta} \quad\Longrightarrow\quad \ell\ddot{\theta} - \ddot{y}\sin\theta = \mathrm{g}\sin\theta. \tag{6.124}$$

Thay dạng tường minh của $y(t)$ vào, ta có

$$\ell\ddot{\theta} + \sin\theta\Big(A\omega^2\cos(\omega t) - \mathrm{g}\Big) = 0. \tag{6.125}$$

Nhìn lại các việc chúng ta làm, thì phương trình này là hợp lý. Nếu một ai đó ở trong hệ tọa độ của điểm treo, mà có gia tốc theo phương thẳng đứng $\ddot{y} = -A\omega^2\cos(\omega t)$, hoặc cũng có thể đang sống trong một thế giới mà tại đó có gia tốc trọng trường là $g - A\omega^2\cos(\omega t)$ hướng xuống dưới. Phương trình (6.125) chỉ là phương trình $F = ma$ theo phương tiếp tuyến trong thế giới có gia tốc như thế này.

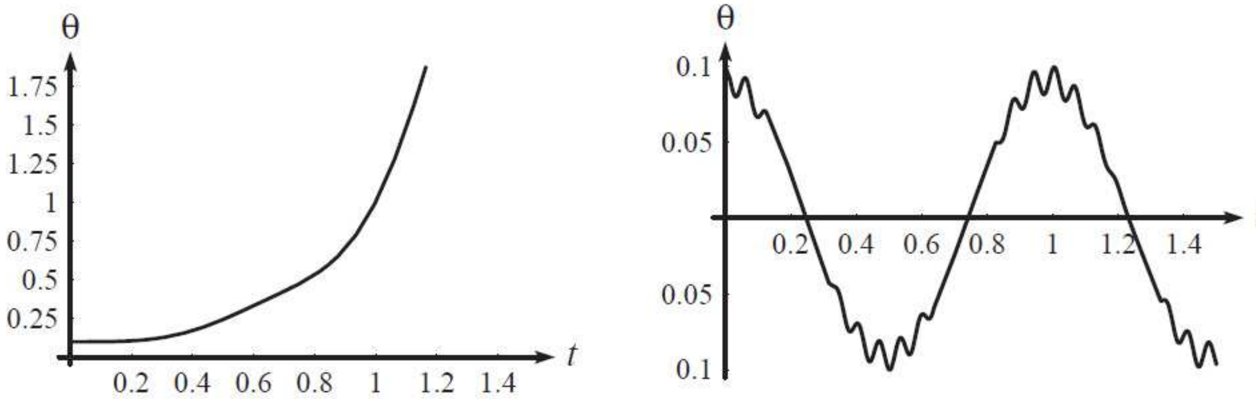
Giả sử rằng θ là nhỏ, chúng ta có thể cho $\sin\theta \approx \theta$, từ đó ta có

$$\ddot{\theta} + \theta\Big(a\omega^2\cos(\omega t) - \omega_0^2\Big) = 0. \tag{6.126}$$

trong đó $\omega_0 \equiv \sqrt{g/\ell}$ và $a \equiv A/\ell$. Phương trình (6.126) không thể được giải ra một cách chính xác, nhưng chúng ta vẫn có thể có được một ý tưởng tốt về việc θ phụ thuộc như nào vào thời gian. Chúng ta có thể giải phương trình này bằng cả phương pháp số và phương pháp giải tích (xấp xỉ).

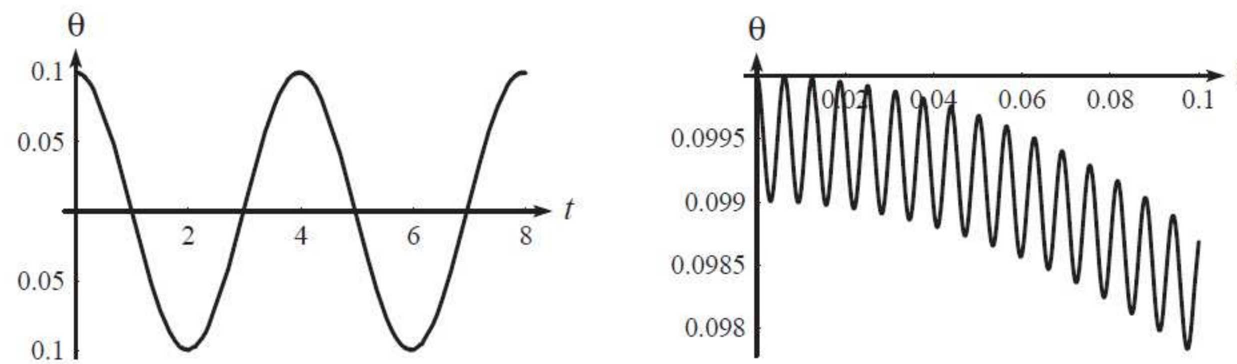
Hình 6.41 chỉ ra θ phụ thuộc vào thời gian như nào đối với các tham số có giá trị $\ell = 1$ m, $A = 0.1$ m và $g = 10$ m/s^2. Vì vậy $a = 0.1$, và $\omega_0^2 = 10$ s^{-2}. Bằng việc tính toán số từ kết quả nhận được trong phương trình (6.126), chúng ta đã vẽ được các đồ thị này, với các điều kiện đầu là $\theta(0) = 0.1$ và $\dot{\theta}(0) = 0$. Trong đồ thị thứ nhất, $\omega = 10$ s^{-1}. Và trong đồ thị thứ hai $\omega = 100$ s^{-1}. Thanh sẽ rơi trong trường hợp thứ nhất, nhưng nó sẽ thực hiện các dao động điều hòa trong trường hợp thứ hai. Rõ ràng là, nếu ω là đủ lớn thì thanh sẽ không bị rơi.

Bây giờ hãy giải thích hiện tượng này một cách giải tích. Ban đầu, khá là ngạc nhiên khi thanh vẫn có thể đứng được. Nó có vẻ như giá trị trung bình (tính trên một vài chu kỳ của dao động của ω) của gia tốc tiếp tuyến trong phương trình (6.126), là $-\theta(a\omega^2\cos(\omega t) - \omega_0^2)$, bằng với đại lượng dương $\theta\omega_0^2$, bởi vì số hạng $\cos(\omega t)$ có giá trị trung bình tiến về không (nó có vẻ là như vậy). Vì vậy bạn có thể nghĩ rằng tồn tại một lực tổng hợp làm cho θ tăng lên, làm cho thanh rơi xuống.



Hình 6.41:

Sai lầm trong lập luận ở đây là giá trị trung bình của số hạng $-a\omega^2\theta\cos(\omega t)$ *không* bằng không, bởi vì θ thực hiện các dao động rất nhỏ với tần số ω, như chúng ta đã thấy trong đồ thị thứ hai trong Hình 6.42. Cả hai đồ thị này đều có $a = 0.005$, $\omega_0^2 = 10\ s^{-2}$, và $\omega = 1000\ s^{-1}$ (từ giờ chúng ta sẽ làm việc với giá trị a nhỏ và ω lớn; sẽ xuất hiện thêm ở bên dưới). Đồ thị thứ hai là một bản phóng đại của đồ thị thứ nhất xung quanh $t = 0$. Điểm quan trọng ở đây là các dao động rất nhỏ ứng của góc θ như được chỉ ra trong đồ thị thứ hai liên quan đến $\cos(\omega t)$. Hóa ra rằng giá trị của θ tại thời điểm t khi $\cos(\omega t) = 1$ là lớn hơn giá trị của θ tại thời điểm t khi $\cos(\omega t) = -1$. Vì vậy có một sự đóng góp có giá trị âm của phần $-a\omega^2\theta\cos(\omega t)$ tới gia tốc. Và thực ra nó có thể đủ lớn để giữ cho con lắc ngược vẫn đứng được hướng lên trên, như chúng ta sẽ không chỉ ra.



Hình 6.42:

Để xử lý số hạng $-a\omega^2\theta\cos(\omega t)$, hãy làm một xấp xỉ khi ω là lớn và $a \equiv A/\ell$ là nhỏ. Một cách chính xác hơn, chúng ta sẽ giả sử $a \ll 1$ và $a\omega^2 \gg \omega_0^2$, với những lý do chúng ta sẽ trình bày ở bên dưới. Hãy xem xét một trong các dao động nhỏ ở trong đồ thị thứ hai trong Hình 6.42. Những dao động này có tần số ω, bởi vì điểm treo chuyển động lên xuống với tần số đó. Khi điểm treo chuyển động lên trên, θ tăng; và khi điểm treo chuyển động xuống dưới, θ giảm.

Bởi vì vị trí trung bình của con lắc không thay đổi nhiều trên một trong những chu kỳ nhỏ này, chúng ta có thể tìm được một nghiệm xấp xỉ của phương trình (6.126) dưới dạng

$$\theta(t) \approx C + b\cos(\omega t), \tag{6.127}$$

trong đó $b \ll C$. C sẽ thay đổi theo thời gian, nhưng so với $1/\omega$ nó về cơ bản là hằng số, nếu $a \equiv A/\ell$ là đủ nhỏ. Thay giá trị của θ của dạng trên vào phương trình (6.126), và sử dụng $a \ll 1$ và $a\omega^2 \gg \omega_0^2$, chúng ta tìm được $-b\omega^2\cos(\omega t) + Ca\omega^2\cos(\omega t) = 0$ tính đến số hạng bậc chủ đạo.[13] Vì vậy chúng ta phải có $b = aC$. Do đó nghiệm xấp xỉ đối với θ của chúng ta sẽ là

$$\theta \approx C\big(1 + a\cos(\omega t)\big). \tag{6.128}$$

Bây giờ hãy xác định xem C dần dần biến đổi theo thời gian như thế nào. Từ phương trình (6.126), gia tốc trung bình của θ, trên một chu kỳ $T = 2\pi/\omega$, là

$$\begin{aligned}
\overline{\ddot{\theta}} &= \overline{-\theta\Big(a\omega^2\cos(\omega t) - \omega_0^2\Big)} \\
&\approx \overline{-C\Big(1 + a\cos(\omega t)\Big)\Big(a\omega^2\cos(\omega t) - \omega_0^2\Big)} \\
&= -C\Big(a^2\omega^2\overline{\cos^2(\omega t)} - \omega_0^2\Big) \\
&= -C\left(\frac{a^2\omega^2}{2} - \omega_0^2\right) \\
&= -C\Omega^2,
\end{aligned} \tag{6.129}$$

trong đó

$$\Omega = \sqrt{\frac{a^2\omega^2}{2} - \frac{g}{\ell}}. \tag{6.130}$$

Nhưng nếu chúng ta lấy đạo hàm hai lần phương trình (6.127), chúng ta thấy rằng $\overline{\ddot{\theta}}$ đơn giản sẽ bằng $\ddot{C}$. Cân bằng giá trị này của $\overline{\ddot{\theta}}$ với giá trị của nó trong phương trình (6.129) ta có

$$\ddot{C}(t) + \Omega^2 C(t) \approx 0. \tag{6.131}$$

Phương trình này mô tả một chuyển động điều hòa đơn giản đẹp đẽ. Do đó, C dao động dạng đường sine với tần số Ω được cho trong phương trình (6.130). Về tổng thể, đây là chuyển động

[13] Lý do đối với việc cho các đại lượng $a \ll 1$ và $a\omega^2 \gg \omega_0^2$ là như sau. Nếu $a\omega^2 \gg \omega_0^2$, thì số hạng $a\omega^2\cos(\omega t)$ sẽ lấn át số hạng ω_0^2 trong phương trình (6.126). Một ngoại lệ trong trường hợp này là khi $\cos(\omega t) \approx 0$, nhưng điều này chỉ xảy ra đối với một khoảng thời gian nhỏ không đáng kể nếu $a\omega^2 \gg \omega_0^2$. Nếu $a \ll 1$, thì chúng ta có thể được phép bỏ qua số hạng $\ddot{C}$ khi phương trình (6.127) được thay vào phương trình (6.126). Điều này là đúng bởi vì chúng ta sẽ tìm ra bên dưới trong phương trình (6.129) rằng các giả thiết của chúng ta sẽ dẫn đến $\ddot{C}$ nói chung là tỷ lệ với $Ca^2\omega^2$. Bởi vì các số hạng khác trong phương trình (6.126) tỷ lệ với $Ca\omega^2$, chúng ta cần $a \ll 1$ để cho số hạng $\ddot{C}$ là có thể bỏ qua được. Tóm lại, $a \ll 1$ là điều kiện để cho C thay đổi một cách từ từ trong thang thời gian $1/\omega$.

qua lại như được thấy trong đồ thị thứ nhất trong Hình 6.42. Chú ý rằng chúng ta phải có $a\omega > \sqrt{2}\omega_0$ để tần số này có giá trị thực sao cho cho con lắc vẫn đứng được.Bởi vì chúng ta đã giả thiết $a \ll 1$, chúng ta thấy rằng $a^2\omega^2 > 2\omega_0^2$ suy ra $a\omega^2 \gg \omega_0^2$, mà phù hợp với giả thiết ban đầu của chúng ta ở trên.

Nếu $a\omega \gg \omega_0$, thì phương trình (6.130) cho ta $\Omega \approx a\omega/\sqrt{2}$. Đây là trường hợp mà nếu chúng ta thay đổi cơ cầu và chỉ có con lắc nằm trên một mặt bàn nằm ngang ở nơi có gia tốc trọng trường bằng không. Trong giới hạn này trong đó g không có liên quan gì, thì phương pháp phân tích thứ nguyên chỉ ra rằng tần số của các dao động của C phải là một bội số của ω, bởi vì ω là đại lượng duy nhất trong bài toán mà có đơn vị của tần số. Ở đây tình cờ bội số đó bằng $a/\sqrt{2}$.

Để kiểm tra lại rằng chúng ta không làm sai ở đâu đó, thì giá trị của Ω được tính đối với các tham số đã cho trong Hình 6.42 (với $a = 0.005$, $\omega_0^2 = 10\ s^{-2}$ và $\omega = -1000\ s^{-1}$) là $\Omega = \sqrt{25/2 - 10} = 1.58\ s^{-1}$. Kết quả này tương ứng với chu kỳ $2\pi/\Omega \approx 3.97$ s. Và thực vậy, từ đồ thị thứ nhất trong hình vẽ, chu kỳ nhìn có vẻ vào khoảng 4 s (hoặc nhỏ hơn một chút xíu). Để biết thêm về con lắc ngược, xem Butikov (2001).

6.6. Điểm cực tiểu hay điểm yên ngựa

(a) Đối với $\xi(t)$ cho trước, hàm tích phân trong phương trình (6.26) là đối xứng xung quanh điểm giữa, vì vậy chúng ta nhận được

$$\Delta S = \int_0^{T/2} \left(m\left(\frac{\epsilon}{T}\right)^2 - k\left(\frac{\epsilon\, t}{T}\right)^2 \right) dt = \frac{m\epsilon^2}{2T} - \frac{k\,\epsilon^2 T}{24}. \tag{6.132}$$

Biểu thức này là âm nếu $T > \sqrt{12m/k} \equiv 2\sqrt{3}/\omega$. Bởi vì chu kỳ của dao động là $\tau \equiv 2\pi/\omega$, chúng ta thấy rằng T phải lớn hơn $(\sqrt{3}/\pi)\tau$ để cho ΔS là âm, với giả thiết rằng chúng ta đang sử dụng hàm tam giác đã cho đối với ξ.

(b) Với $\xi(t) = \epsilon\sin(\pi t/T)$, hàm tích phân trong phương trình (6.26) trở thành

$$\begin{aligned}\Delta S &= \frac{1}{2}\int_0^{T} \left(m\left(\frac{\epsilon\pi}{T}\cos(\pi t/T)\right)^2 - k\Big(\epsilon\sin(\pi t/T)\Big)^2 \right) dt.\\ &= \frac{m\epsilon^2\pi^2}{4T} - \frac{k\epsilon^2 T}{4},\end{aligned} \tag{6.133}$$

trong đó chúng ta đã sử dụng thực tế là giá trị trung bình của $\sin^2\theta$ và $\cos^2\theta$ trên một nửa chu kỳ là 1/2 (hoặc các bạn cũng có thể thực hiện lấy tích phân để có kết quả này). Kết quả này đối với ΔS là âm nếu $T > \pi\sqrt{m/k} \equiv \pi/\omega = \tau/2$, trong đó τ là chu kỳ.

NHẬN XÉT: Hóa ra rằng hàm $\xi(t) \propto \sin(\pi t/T)$ cho ta khả năng tốt nhất để làm cho ΔS âm. Các bạn có thể chỉ ra điều này bằng việc sử dụng một định lý từ phân tích Fourier mà nói rằng bất kì một hàm nào thỏa mãn $\xi(0) = \xi(T) = 0$ đều có thể viết được dưới dạng một tổng $\xi(t) = \sum_1^\infty c_n \sin(n\pi t/T)$, trong đó c_n là các hệ số. Khi tổng này được thay vào phương trình (6.26), bạn có thể chỉ ra rằng tất cả các số hạng chéo (các số hạng liên quan đến hai giá trị khác nhau của n) có tích phân đều bằng không. Sử dụng thực tế là giá trị trung bình của $\sin^2\theta$ và $\cos^2\theta$ bằng $1/2$, phần còn lại của tích phân sẽ bằng

$$\Delta S = \frac{1}{4}\sum_1^\infty c_n^2 \left(\frac{m\pi^2 n^2}{T} - kT\right). \tag{6.134}$$

Để nhận được giá trị nhỏ nhất của T mà có thể làm cho tổng này âm, chúng ta chỉ cần số hạng ứng với $n = 1$ tồn tại. Khi đó chúng ta có $\xi(t) = c_1 \sin(\pi t/T)$, và phương trình (6.134) trở về phương trình (6.133).

Như đã được đề cập đến ở Nhận xét 4 trong Mục 6.2, luôn luôn là có thể làm cho ΔS dương bằng cách chọn một hàm $\xi(t)$ có giá trị nhỏ nhưng thay đổi zich zắc một cách rất nhanh. Do đó, chúng ta thấy rằng với một dao động điều hòa, nếu $T > \tau/2$, thì giá trị dừng của S sẽ là điểm yên ngựa (một số hàm ξ sẽ làm cho ΔS dương, và một số hàm khác sẽ làm cho nó âm), nhưng nếu $T < \tau/2$, thì giá trị dừng của S sẽ là điểm cực tiểu (tất cả các hàm ξ đều làm cho ΔS dương). Trong trường hợp sau, điểm mấu chốt là T đủ nhỏ để sao cho không có cách nào cho hàm ξ có giá trị lớn, mà không làm cho $\dot{\xi}$ cũng có giá trị lớn. ♣

6.7. Phản lực từ một mặt phẳng nghiêng

LỜI GIẢI THỨ NHẤT : Hệ tọa độ thuận tiện nhất trong bài toán này là w và z, trong đó w là khoảng cách lên trên dọc theo mặt phẳng, và z là khoảng cách đối với mặt phẳng nghiêng theo phương vuông góc với nó. Khi đó hàm Lagrange là

$$\frac{1}{2}m(\dot{w}^2 + \dot{z}^2) - mg(w\sin\theta + z\cos\theta) - V(z), \tag{6.135}$$

trong đó $V(z)$ là hàm thế năng ràng buộc (có độ dốc rất lớn). Hai phương trình chuyển động là

$$\begin{aligned} m\ddot{w} &= -mg\sin\theta, \\ m\ddot{z} &= -mg\cos\theta - \frac{dV}{dz}. \end{aligned} \tag{6.136}$$

Tại thời điểm này chúng ta sử dụng điều kiện ràng buộc $z = 0$. Vì vậy $\ddot{z} = 0$, và phương trình thứ hai cho ta

$$F_c \equiv -V'(0) = mg\cos\theta, \tag{6.137}$$

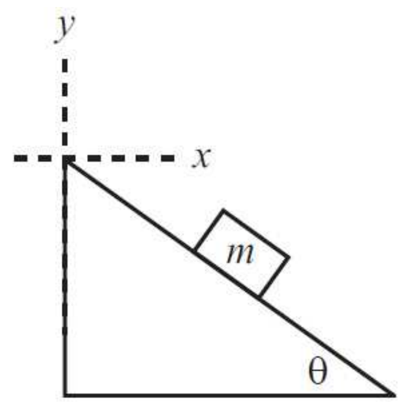
là kết quả chúng ta mong muốn. Chúng ta cũng nhận được kết quả quen thuộc, $\ddot{w} = -g\sin\theta$.

LỜI GIẢI THỨ HAI : Chúng ta cũng có thể giải bài toán này bằng cách sử dụng hai trục tọa độ nằm ngang và thẳng đứng, x và y. Ta sẽ chọn $(x, y) = (0, 0)$ tại đỉnh của mặt phẳng nghiêng, xem Hình 6.43. Hàm thế năng ràng buộc (có độ dốc rất lớn) là $V(z)$, trong đó $z \equiv x\sin\theta + y\cos\theta$

là khoảng cách từ khối lượng tới bề mặt mặt phẳng mặt phẳng nghiêng (như bạn có thể kiểm tra). Khi đó hàm Lagrange là

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy - V(z). \tag{6.138}$$

Hãy nhớ rằng $z \equiv x\sin\theta + y\cos\theta$, hai phương trình chuyển động sẽ là (có sử dụng quy tắc lấy



Hình 6.43:

đạo hàm hàm hợp)

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -\frac{dV}{dz}\frac{\partial z}{\partial x} = -V'(z)\sin\theta, \\ m\ddot{y} &= -mg - \frac{dV}{dz}\frac{\partial z}{\partial y} = -mg - V'(z)\cos\theta. \end{aligned} \tag{6.139}$$

Tại thời điểm này chúng ta sử dụng điều kiện ràng buộc $z = 0 \Longrightarrow x = -y\cot\theta$. Điều kiện này, cùng với hai phương trình E-L, cho phép chúng ta giải ra ba ẩn, $\ddot{x}, \ddot{y}$ và $V'(0)$. Sử dụng $\ddot{x} = -\ddot{y}\cot\theta$ trong phương trình (6.139), chúng ta tìm được

$$\ddot{x} = \mathrm{g}\cos\theta\sin\theta, \quad \ddot{y} = -\mathrm{g}\sin^2\theta, \quad F_{\mathrm{c}} \equiv -V'(0) = m\mathrm{g}\cos\theta. \tag{6.140}$$

Hai kết quả đầu tiên ở đây đơn giản là các thành phần của gia tốc theo phương nằm ngang và phương thẳng đứng dọc theo mặt phẳng nghiêng, có giá trị bằng $g\sin\theta$.

6.8. Hạt vòng trên một thanh

Không có thế năng ở đây, vì vậy hàm Lagrange chỉ có động năng, T, do các chuyển động theo phương bán kính và phương tiếp tuyến gây ra:

$$L = T = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\omega^2. \tag{6.141}$$

Phương trình (6.52) do đó cho ta

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{1}{2}mr^2\omega^2. \tag{6.142}$$

Khẳng định 6.3 nói rằng đại lượng này là bảo toàn, bởi vì $\partial L/\partial t = 0$. Nhưng nó *không phải* là năng lượng của hạt vòng, do nó chứa dấu âm trong số hạng thứ hai.

Điểm mấu chốt ở đây là để giữ cho thanh quay với vận tốc góc không đổi, thì phải có một lực ngoài tác dụng vào nó. Lực này khi đó sinh công tác động lên hạt vòng, do đó làm cho động năng của nó tăng lên. Hàm động năng T do đó sẽ *không* được bảo toàn. Từ phương trình (6.41) và (6.42), chúng ta thấy rằng $E = T - mr^2\omega^2$ là đại lượng mà được bảo toàn theo thời gian. Xem Bài tập luyện tập 6.39 giải bằng phương pháp $F = ma$ để chỉ ra rằng đại lượng E trong phương trình (6.142) là bảo toàn.

6.9. Máy Atwood

LỜI GIẢI THỨ NHẤT : Nếu khối lượng bên trái đi lên một đoạn x và khối lượng bên phải đi lên một đoạn bằng y, thì với việc chiều dài của dây được bảo toàn chúng ta có khối lượng nằm giữa sẽ phải đi xuống một đoạn bằng $x + y$. Vì vậy, hàm Lagrange của hệ sẽ là

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}(4m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}(3m)(-\dot{x} - \dot{y})^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - \Big((4m)\mathrm{g}x + (3m)\mathrm{g}(-x - y) + m\mathrm{g}y\Big) \\ &= \frac{7}{2}m\dot{x}^2 + 3m\dot{x}\dot{y} + 2m\dot{y}^2 - m\mathrm{g}(x - 2y). \end{aligned} \tag{6.143}$$

Đại lượng này sẽ là bất biến dưới phép biến đổi $x \to x + 2\epsilon$ và $y \to y + \epsilon$. Vì vậy, ta có thể sử dụng định lý Noether, với $K_x = 2$ và $K_y = 1$. Khi đó động lượng bảo toàn sẽ bằng

$$P = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}K_x + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}K_y = m(7\dot{x} + 3\dot{y})(2) + m(3\dot{x} + 4\dot{y})(1) = m(17\dot{x} + 10\dot{y}). \tag{6.144}$$

Đại lượng P này là hằng số. Một cách cụ thể, nếu hệ của chúng ta chuyển động từ trạng thái nằm yên, thì $\dot{x}$ luôn luôn bằng $-(10/17)\dot{y}$.

LỜI GIẢI THỨ HAI : Từ phương trình (6.143) ta có các phương trình chuyển động Euler-Lagrange là

$$\begin{aligned} 7m\ddot{x} + 3m\ddot{y} &= -m\mathrm{g}, \\ 3m\ddot{x} + 4m\ddot{y} &= 2m\mathrm{g}. \end{aligned} \tag{6.145}$$

Cộng phương trình thứ hai với hai lần phương trình thứ nhất cho ta

$$17m\ddot{x} + 10m\ddot{y} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{dt}\Big(17m\dot{x} + 10m\dot{y}\Big) = 0. \tag{6.146}$$

LỜI GIẢI THỨ BA : Chúng ta cũng có thể giải bài toán này bằng cách sử dụng phương pháp $F = ma$. Bởi vì lực căng T là như nhau dọc theo sợi dây, chúng ta thấy rằng ba phương trình $F = dP/dt$ là

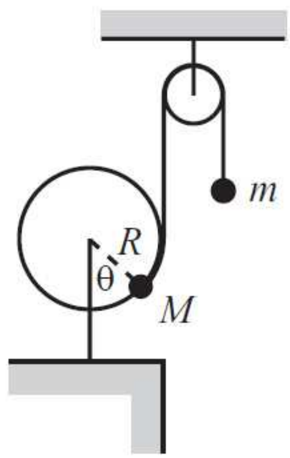
$$2T - 4m\mathrm{g} = \frac{dP_{4m}}{dt}, \quad 2T - 3m\mathrm{g} = \frac{dP_{3m}}{dt}, \quad 2T - m\mathrm{g} = \frac{dP_m}{dt}. \tag{6.147}$$

Ba lực trên chỉ phụ thuộc vào hai đại lượng (T và mg), vì vậy sẽ phải có tổ hợp nào đó giữa chúng chúng mà có tổng bằng không. Nếu chúng ta thiết lập một tổ hợp tuyến tính $a(2T-4mg)+b(2T-3mg)+c(2T-mg)=0$, thì chúng ta sẽ có $a+b+c=0$ và $4a+3b+c=0$, mà sẽ được thỏa mãn với $a=2, b=-3, c=1$. Vì vậy

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt}(2P_{4m} - 3P_{3m} + P_m) \\
&= \frac{d}{dt}\Big(2(4m)\dot{x} - 3(3m)(-\dot{x} - \dot{y}) + m\dot{y}\Big) \\
&= \frac{d}{dt}(17m\dot{x} + 10m\dot{y}). \qquad (6.148)
\end{aligned}$$

6.10. Vòng tròn và ròng rọc

Gọi bán kính tới khối lượng M tạo một góc θ so với phương thẳng đứng (xem Hình 6.44). Khi



Hình 6.44:

đó các tọa độ của M đối với tâm của vòng tròn là $R(\sin\theta, -\cos\theta)$. Chiều cao của khối lượng m, đối với vị trí của nó khi M nằm ở điểm thấp nhất của vòng tròn, là $y=-R\theta$. Hàm Lagrange khi đó là (và tất nhiên, chúng ta đã chọn một điểm gốc thế năng $y=0$ khác nhau đối với mỗi khối lượng, nhưng việc chọn này chỉ làm thay đổi hàm thế năng một đại lượng hằng số, mà không có liên quan gì ở đây)

$$L = \frac{1}{2}(M+m)R^2\dot{\theta}^2 + M\text{g}R\cos\theta + m\text{g}R\theta. \qquad (6.149)$$

Phương trình chuyển động khi đó là

$$(M+m)R\ddot{\theta} = \text{g}(m - M\sin\theta). \qquad (6.150)$$

Đây chính là phương trình $F=ma$ dọc theo phương của sợi dây (bởi vì $Mg\sin\theta$ là thành phần theo phương tiếp tuyến của trọng lực tác dụng vào khối lượng M).

Trạng thái cân bằng xuất hiện khi $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$. Từ phương trình (6.150), chúng ta thấy rằng trạng thái cân bằng xảy ra khi $\sin\theta_0 = m/M$. Cho $\theta \equiv \theta_0 + \delta$, và khai triển phương trình (6.150) đến số hạng bậc nhất của δ, ta có

$$\ddot{\delta} + \left(\frac{M\mathrm{g}\cos\theta_0}{(M+m)R}\right)\delta = 0. \tag{6.151}$$

Do đó tần số dao động nhỏ là

$$\omega\sqrt{\frac{M\cos\theta_0}{M+m}}\sqrt{\frac{\mathrm{g}}{R}} = \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^{1/4}\sqrt{\frac{\mathrm{g}}{R}}, \tag{6.152}$$

trong đó chúng ta đã sử dụng $\cos\theta_0 = \sqrt{1-\sin^2\theta_0}$.

NHẬN XÉT: Nếu $M \gg m$, thì $\theta_0 \approx 0$, và $\omega \approx \sqrt{g/R}$. Điều này là có nghĩa, bởi vì m có thể được bỏ qua, vì vậy M gần như là sẽ dao động xung quanh đáy của vòng tròn giống như một con lắc đơn có chiều dài dây là R.

Nếu M chỉ lớn hơn m một chút ít, thì $\theta_0 \approx \pi/2$, và $\omega \approx 0$. Điều này cũng có nghĩa, bởi vì nếu $\theta \approx \pi/2$, thì lực phục hồi $g(m - M\sin\theta)$ không thay đổi nhiều khi θ thay đổi (đạo hàm của $\sin\theta = 0$ là bằng không tại $\theta = \pi/2$), vì vậy nó như thể chúng ta có một con lắc đơn dao động trong một trường trọng lực rất yếu.

Thực ra chúng ta có thể nhận được tần số dao động trong phương trình (6.152) mà không cần phải thực hiện bất kỳ một phép tính toán nào. Xem xét M tại vị trí cân bằng. Các lực theo phương tiếp tuyến tác dụng lên nó bị triệt tiêu, và lực theo phương bán kính hướng vào trong do vòng tác dụng lên nó phải bằng $Mg\cos\theta_0$ để cân bằng với thành phần trọng lực hướng ra ngoài theo phương bán kính. Vì vậy, tất cả những gì mà khối lượng M biết là, nó đang nằm tại đáy của vòng tròn bán kính R trong một thế giới mà có gia tốc trọng trường có độ lớn bằng $g' = g\cos\theta_0$. Công thức tổng quát đối với tần số dao động của một con lắc đơn (như bạn có thể chỉ ra một cách nhanh chóng) là $\omega = \sqrt{F'/M'R}$, trong đó F' là trọng lực (mà có độ lớn bằng $M'g$ ở đây), và M' là tổng khối lượng bị gia tốc (mà ở đây bằng $M+m$). Điều này cho ta ω như trong phương trình (6.152). (Lập luận này khá là tinh tế; là thành quả của quá trình suy nghĩ.) ♣

6.11. Hạt vòng trên một vòng quay

Phân tích vận tốc theo hai phương, một thành phần theo phương tiếp tuyến với vòng tròn, một thành phần theo phương vuông góc với phương tiếp tuyến, ta tìm được

$$L = \frac{1}{2}m(\omega^2R^2\sin^2\theta + R^2\dot{\theta}^2) + mgR\cos\theta. \tag{6.153}$$

Phương trình chuyển động khi đó là

$$R\ddot{\theta} = \sin\theta(\omega^2R\cos\theta - \mathrm{g}). \tag{6.154}$$

Dạng $F = ma$ của phương trình này là thành phần kéo xuống của trọng lực gây ra gia tốc dọc theo vòng tròn cùng với thanh phần của gia tốc hướng tâm dọc theo vòng tròn.

Vị trí cân bằng xảy ra khi $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$. Vế phải của phương trình (6.154) bằng không khi hoặc là $\sin\theta = 0$ (nghĩa là, $\theta = 0$ hoặc $\theta = \pi$) hoặc là $\cos\theta = g/(\omega^2 R)$. Bởi vì $\cos\theta$ phải nhỏ hơn hoặc bằng 1, nên điều kiện thứ hai này chỉ có thể xảy ra khi $\omega^2 \geq g/R$. Vì vậy chúng ta có hai trường hợp:

- Nếu $\omega^2 < g/R$, thì $\theta = 0$ và $\theta = \pi$ là các vị trí cân bằng.

  Trường hợp $\theta = \pi$ là trường hợp cân bằng không ổn định. Về trực giác thì điều này khá dễ nhận ra, tuy nhiên về mặt toán học chúng ta cũng có thể nhận ra điều này bằng việc đặt $\theta \equiv \pi + \delta$, với δ nhỏ. Phương trình (6.154) khi đó trở thành

  $$\ddot{\delta} - \delta(\omega^2 + \mathrm{g}/R) = 0. \tag{6.155}$$

  Hệ số của δ là âm, vì vậy δ sẽ có dạng hàm mũ thay vì dạng dao động điều hòa.

  Trường hợp $\theta = 0$ là trường hợp ứng với vị trí cân bằng ổn định. Với θ nhỏ, phương trình (6.154) trở thành

  $$\ddot{\theta} + \theta(\mathrm{g}/R - \omega^2) = 0. \tag{6.156}$$

  Hệ số của θ là dương, vì vậy chúng ta có các nghiệm biểu diễn dưới dạng hàm sin. Tần số của dao động nhỏ là $\sqrt{g/R - \omega^2}$. Tần số này tiến dần đến 0 khi $\omega \to \sqrt{g/R}$.

- Nếu $\omega^2 \geq g/R$, thì $\theta = 0, \theta = \pi$, và $\cos\theta_0 \equiv g/(\omega^2 R)$ là các điểm vị trí cân bằng. Trường hợp $\theta = \pi$ một lần nữa là không ổn định, từ việc xét phương trình (6.155). Và trường hợp $\theta = 0$ cũng là vị trí cân bằng không ổn định, bởi vì các hệ số của θ trong phương trình (6.156) bây giờ là âm (hoặc bằng không, nếu $\omega^2 = g/R$).

  Do đó, $\cos\theta_0 \equiv g/(\omega^2 R)$ là vị trí cân bằng ổn định duy nhất. Để tìm tần số của dao động nhỏ, ta đặt $\theta = \theta_0 + \delta$ trong phương trình (6.154), và khai triển đến bậc nhất theo δ. Sử dụng $\cos\theta_0 \equiv g/(\omega^2 R)$, chúng ta tìm được

  $$\ddot{\delta} + (\omega^2 \sin^2\theta_0)\delta = 0. \tag{6.157}$$

  Tần số của các dao động nhỏ do đó là $\omega \sin\theta_0 = \sqrt{\omega^2 - g^2/\omega^2 R^2}$.

  Tần số góc $\omega = \sqrt{g/R}$ là tần số góc tới hạn mà với các giá trị tần số góc lớn hơn giá trị này thì sẽ có một vị trí cân bằng ổn định tại $\theta \neq 0$, nghĩa là, khối lượng sẽ di chuyển ra khỏi vị trí tại đáy của vòng tròn.

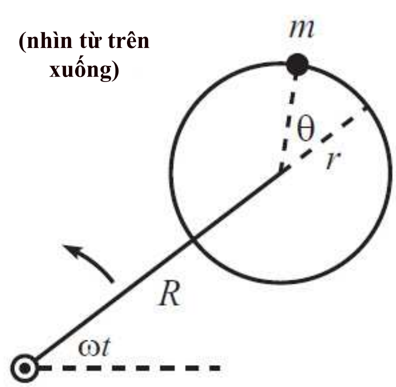
  NHẬN XÉT: Tần số của dao động nhỏ này tiến về không khi $\omega \to \sqrt{g/R}$. Và nó xấp xỉ bằng ω khi $\omega \to \infty$. Giới hạn thứ hai này có thể thấy được theo cách sau. Đối với ω rất lớn, lực trọng trường không còn quan trọng nữa, và hạt vòng sẽ chịu một lực hướng tâm (phản lực từ vòng tròn) có độ lớn về cơ bản là bằng với $m\omega^2 R$ khi nó chuyển động đến gần vị trí $\theta = \pi/2$. Vì vậy tất cả những gì hạt vòng biết là nó giống như một con lắc đơn có chiều dài R trong một thế giới có "trọng lực" kéo sang bên với cường độ lực là $m\omega^2 R \equiv mg'$ (hướng ra ngoài, sao cho nó có thể xấp xỉ bị triệt tiêu bởi phản lực hướng vào trong của vòng tròn, cũng giống như lực trọng trường hướng xuống dưới bị triệt tiêu một cách xấp xỉ bởi lực căng dây hướng lên trên trong con lắc đơn thông thường). Tần số dao động của con lắc đơn như thế này là $\sqrt{g'/R} = \sqrt{\omega^2 R/R} = \omega$. ♣

6.12. Bài toán khác về một hạt vòng chuyển động trên một vòng tròn đang quay

Với các góc ωt và θ được định nghĩa như trong Hình 6.45, các tọa độ Đề Các đối với hạt vòng là

$$(x, y) = \big(R\cos\omega t + r\cos(\omega t + \theta),\ R\sin\omega t + r\sin(\omega t + \theta)\big). \tag{6.158}$$

Vận tốc khi đó sẽ là



Hình 6.45:

$$\begin{aligned}(x, y) = \big(&-\omega R\sin\omega t - r(\omega + \dot\theta)\sin(\omega t + \theta),\\ &\omega R\cos\omega t + r(\omega + \dot\theta)\cos(\omega t + \theta)\big).\end{aligned} \tag{6.159}$$

Công thức của bình phương vận tốc do đó là

$$\begin{aligned}v^2 &= R^2\omega^2 + r^2(\omega + \dot\theta)^2\\ &\quad + 2Rr\omega(\omega + \dot\theta)\big(\sin\omega t\sin(\omega t + \theta) + \cos\omega t\cos(\omega t + \theta)\big)\\ &= R^2\omega^2 + r^2(\omega + \dot\theta)^2 + 2Rr\omega(\omega + \dot\theta)\cos\theta.\end{aligned} \tag{6.160}$$

Vận tốc này cũng có thể nhận được bằng cách sử dụng định lý hàm cosine để cộng vận tốc của tâm của vòng tròn với vận tốc của hạt vòng đối với tâm vòng tròn (như bạn có thể chỉ ra).

Không có thế năng trong trường hợp này, vì vậy hàm Lagrange đơn giản chỉ là $L = mv^2/2$. Phương trình chuyển động khi đó sẽ là, như bạn có thể chỉ ra,

$$r\ddot{\theta} + R\omega^2 \sin\theta = 0. \tag{6.161}$$

Vị trí cân bằng xảy ra khi $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$, vì vậy phương trình (6.161) cho ta biết rằng vị trí cân bằng đạt được tại $\theta = 0$, mà về mặt trực giác là khá là hợp lý. (Một nghiệm khác là $\theta = \pi$, nhưng vị trí này là vị trí cân bằng không ổn định.) Sử dụng một xấp xỉ đối với góc nhỏ trong phương trình (6.161) cho ta $\ddot{\theta} + (R/r)\omega^2\theta = 0$, vì vậy tần số của dao động nhỏ là $\Omega = \omega\sqrt{R/r}$.

NHẬN XÉT: Nếu $R \ll r$ thì $\Omega \approx 0$. Điều này là hợp lý, bởi vì vòng nhẫn không ma sát về cơ bản là không chuyển động. Nếu $R = r$, thì $\Omega = \omega$. Nếu $R \gg r$, thì Ω sẽ rất lớn. Trong trường hợp này, chúng ta có thể kiểm tra lại kết quả $\Omega = \omega\sqrt{R/r}$ theo cách sau đây. Trong hệ tọa độ có gia tốc của vòng tròn, hạt vòng chịu tác dụng bởi một lực hướng tâm (sẽ được thảo luận trong Chương 10) có độ lớn $m(R + r)\omega^2$. Đối với tất cả những gì mà hạt vòng biết, thì dường như nó được đặt trong một trường trọng lực có cường độ $g' \equiv (R + r)\omega^2$. Vì vậy hạt vòng (mà chuyển động giống như một con lắc đơn có chiều dài r), sẽ dao động với một tần số bằng

$$\sqrt{\frac{g'}{r}} = \sqrt{\frac{(R+r)\omega^2}{r}} \approx \omega\sqrt{\frac{R}{r}} \quad (\text{với } R \gg r). \tag{6.162}$$

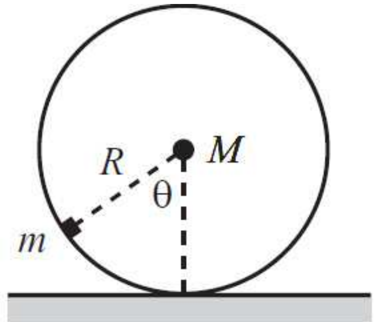
Chú ý rằng nếu chúng ta cố gắng sử dụng các lập luận về "trọng trường hiệu dụng" này để kiểm tra lại kết quả đối với trường hợp mà giá trị của R là nhỏ hơn, chúng ta sẽ nhận được kết quả sai. Ví dụ như, nếu $R = r$, chúng ta sẽ nhận được một tần số dao động có giá trị là $\omega\sqrt{2R/r}$, chứ không phải giá trị chính xác $\omega\sqrt{R/r}$. Điều này là do trong thực tế lực ly tâm hướng ra phía ngoài tại điểm gần điểm vị trí cân bằng, trong khi lập luận "trọng trường hiệu dụng" của chúng ta giả thiết rằng các đường sức của trường đó là song song với nhau (và do đó nó cho ta một tần số rất lớn).

6.13. Khối lượng trên một bánh xe

Gọi θ là góc được định nghĩa như trong Hình 6.46, với quy ước rằng θ là dương nếu M nằm bên phải m. Khi đó vị trí của m trong hệ tọa độ Đề Các, tương ứng với vị trí mà m tiếp xúc với mặt đất, là

$$(x, y)_m = R(\theta - \sin\theta, 1 - \cos\theta). \tag{6.163}$$

Ta đã sử dụng điều kiện lăn không trượt để nói rằng điểm tiếp xúc đã chuyển động được một khoảng là $R\theta$. Lấy đạo hàm phương trình (6.163), chúng ta tìm được bình phương vận tốc của m là $v_m^2 = 2R^2\dot{\theta}^2(1 - \cos\theta)$.



Hình 6.46:

Vị trí của M là $(x, y)_M = R(\theta, 1)$, vì vậy bình phương vận tốc của nó là $v_M^2 = R^2\dot{\theta}^2$. Hàm Lagrange do đó sẽ là

$$L = \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2 + mR^2\dot{\theta}^2(1 - \cos\theta) + mgR\cos\theta, \tag{6.164}$$

trong đó chúng ta đã tính cả hai thế năng so với độ cao của M. Phương trình chuyển động là

$$MR\ddot{\theta} + 2mR\ddot{\theta}(1 - \cos\theta) + mR\dot{\theta}^2\sin\theta + mg\sin\theta = 0. \tag{6.165}$$

Trong trường hợp dao động nhỏ, chúng ta có thể sử dụng xấp xỉ $\cos\theta \approx 1 - \theta^2/2$ và $\sin\theta \approx \theta$. Số hạng thứ hai và thứ ba trong phương trình (6.165) khi đó sẽ có dạng bậc ba đối với θ và có thể bỏ qua (về cơ bản, số hạng ở giữa trong phương trình (6.164), mà là động năng của m, là có thể bỏ qua), vì vậy ta tìm được

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{mg}{MR}\right)\theta = 0. \tag{6.166}$$

Tần số của dao động nhỏ do đó là

$$\omega = \sqrt{\frac{m}{M}}\sqrt{\frac{g}{R}}. \tag{6.167}$$

NHẬN XÉT: Nếu $M \gg m$ thì $\omega \to 0$. Điều này là hợp lý. Nếu $m \gg M$, thì $\omega \to \infty$. Điều này cũng hợp lý, bởi vì lực mg lớn tạo ra một tình huống tương tự với tình huống trong đó bánh xe bị vít chặt với mặt đất, và trong trường hợp đó thì bánh xe sẽ dao động với một tần số rất lớn.

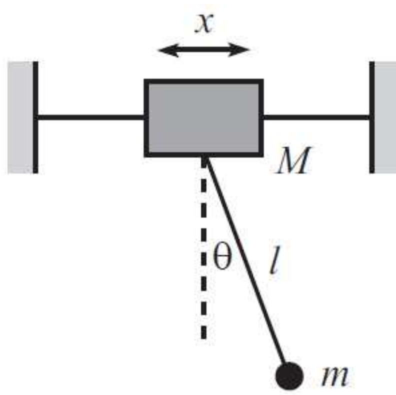
Phương trình (6.167) thực ra có thể nhận được theo một cách nhanh hơn rất nhiều, bằng việc sử dụng moment lực. Đối với các dao động nhỏ, trọng lực tác dụng lên m gây ra một moment lực $-mgR\theta$ đối với điểm tiếp xúc với mặt đất. Đối với góc θ nhỏ, thì m về cơ bản là không có moment quán tính đối với điểm tiếp xúc, vì vậy tổng moment quán tính đơn giản là MR^2. Do đó, phương trình $\tau = I\alpha$ cho ta $-mgR\theta = MR^2\ddot{\theta}$, mà từ đó có thể tìm được kết quả trên. ♣

6.14. Con lắc với điểm treo tự do

Gọi x là tọa độ của M, và gọi θ là góc hợp bởi con lắc và phương thẳng đứng (xem Hình 6.47). Khi đó vị trí của khối lượng m trong hệ tọa độ Đề Các là $(x+\ell\sin\theta, -\ell\cos\theta)$. Lấy đạo hàm để tìm vận tốc, và sau đó bình phương lên để tìm tốc độ, ta có $v_m^2 = \dot{x}^2 + \ell^2\dot{\theta}^2 + 2\ell\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta$. Hàm Lagrange do đó là

$$L = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \ell^2\dot{\theta}^2 + 2\ell\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta) + mg\ell\cos\theta. \tag{6.168}$$

Các phương trình chuyển động nhận được đối với x và θ là



Hình 6.47:

$$\begin{aligned} (M+m)\ddot{x} + m\ell\ddot{\theta}\cos\theta - m\ell\dot{\theta}^2\sin\theta &= 0, \\ \ell\ddot{\theta} + \ddot{x}\cos\theta + \mathrm{g}\sin\theta &= 0. \end{aligned} \tag{6.169}$$

Nếu θ là nhỏ, chúng ta có thể sử dụng các xấp xỉ cho góc nhỏ, $\cos\theta \approx 1-\theta^2/2$ và $\sin\theta \approx \theta$. Chỉ giữ lại các số hạng bậc nhất của θ, ta nhận được

$$\begin{aligned} (M+m)\ddot{x} + m\ell\ddot{\theta} &= 0, \\ \ddot{x} + \ell\ddot{\theta} + \mathrm{g}\theta &= 0. \end{aligned} \tag{6.170}$$

Phương trình thứ nhất mô tả định luật bảo toàn động lượng. Lấy tích phân phương trình này hai lần ta nhận được

$$x = -\left(\frac{m\ell}{M+m}\right)\theta + At + B. \tag{6.171}$$

Phương trình thứ hai là phương trình $F = ma$ theo phương tiếp tuyến. Khử $\ddot{x}$ từ phương trình (6.170) ta có

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{M+m}{M}\right)\frac{\mathrm{g}}{\ell}\,\theta = 0. \tag{6.172}$$

Do đó, $\theta(t) = C\cos(\omega t + \phi)$, trong đó

$$\omega = \sqrt{1+\frac{m}{M}}\sqrt{\frac{\mathrm{g}}{\ell}}\,. \tag{6.173}$$

Nghiệm tổng quát của θ và x do đó là

$$\theta(t) = C\cos(\omega t + \phi), \quad x(t) = -\frac{Cm\ell}{M+m}\cos(\omega t + \phi) + At + B. \tag{6.174}$$

Hằng số B là không có liên quan gì, vì vậy chúng ta sẽ bỏ qua nó. Hai mode trực giao của dao động là:

$A = 0$: Trong trường hợp này, $x = -\theta m\ell/(M+m)$. Cả hai khối lượng dao động với tần số ω được cho trong phương trình (6.173), và luôn luôn chuyển động ngược chiều nhau. Trọng tâm của cả hệ thì không chuyển động (như bạn có thể kiểm tra).

$C = 0$: Trong trường hợp này, $\theta = 0$ và $x = At$. Con lắc đơn treo thẳng đứng, với cả hai khối lượng chuyển động với cùng vận tốc theo phương ngang. Tần số của dao động bằng không ở trong mode trực giao này.

NHẬN XÉT: Nếu $M \gg m$, thì $\omega = \sqrt{g/\ell}$, như chúng ta mong đợi, bởi vì về cơ bản thì giá treo là đứng yên.

Nếu $m \gg M$, thì $\omega \to \sqrt{m/M}\sqrt{g/\ell} \to \infty$. Kết quả này là hợp lý, bởi vì lực căng trong thanh là rất lớn. Thực ra là chúng ta có thể tính toán định lượng của giới hạn này. Đối với các dao động nhỏ và đối với $m \gg M$, thì lực căng mg trong thanh sẽ sinh ra một lực hướng sang bên độ lớn $mg\theta$ tác dụng vào M. Vì vậy phương trình $F = ma$ cho M theo phương ngang là $mg\theta = M\ddot{x}$. Nhưng trong giới hạn này $x \approx -\ell\theta$, vì vậy ta có $mg\theta = -M\ell\ddot{\theta}$, mà cho chúng ta tần số như mong muốn ♣

6.15. Điểm treo con lắc trên một mặt phẳng nghiêng

Gọi z là tọa độ của M dọc theo mặt phẳng nghiêng, và gọi θ là góc nghiêng của con lắc đơn (xem hình (6.48)). Trong hệ tọa độ Đề Các, vị trí của M và m là

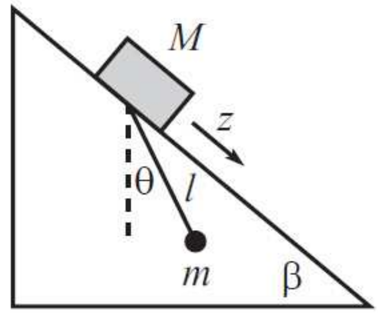
$$\begin{aligned} (x,y)_M &= (z\cos\beta, -z\sin\beta), \\ (x,y)_m &= (z\cos\beta + \ell\sin\theta, -z\sin\beta - \ell\cos\theta). \end{aligned} \tag{6.175}$$

Đạo hàm các tọa độ vị trí này, ta tìm được bình phương của các vận tốc là

$$\begin{aligned} v_M^2 &= \dot{z}^2, \\ v_m^2 &= \dot{z}^2 + \ell^2\dot{\theta}^2 + 2\ell\dot{z}\dot{\theta}(\cos\beta\cos\theta - \sin\beta\sin\theta). \end{aligned} \tag{6.176}$$

Hàm Lagrange do đó là

$$\frac{1}{2}M\dot{z}^2 + \frac{1}{2}m\Big(\dot{z}^2 + \ell^2\dot{\theta}^2 + 2\ell\dot{z}\dot{\theta}\cos(\theta+\beta)\Big) + Mgz\sin\beta + mg(z\sin\beta + \ell\cos\theta). \tag{6.177}$$



Hình 6.48:

Các phương trình chuyển động nhận được đối với z và θ là

$$\begin{aligned}(M+m)\ddot{z} + m\ell\Big(\ddot{\theta}\cos(\theta+\beta) - \dot{\theta}^2\sin(\theta+\beta)\Big) &= (M+m)\mathrm{g}\sin\beta,\\ \ell\ddot{\theta} + \ddot{z}\cos(\theta+\beta) &= -\mathrm{g}\sin\theta.\end{aligned} \tag{6.178}$$

Bây giờ chúng ta sẽ xem xét các dao động nhỏ xung quanh vị trí cân bằng (với $\ddot{\theta} = \dot{\theta} = 0$). Đầu tiên là chúng ta phải xác định được đâu là vị trí cân bằng. Phương trình thứ nhất ở trên cho ta $\ddot{z} = g\sin\beta$. Phương trình thứ hai sau đó cho ta $g\sin\beta\cos(\theta+\beta) = -g\sin\theta$. Bằng việc khai triển số hạng chứa cosine, chúng ta tìm được $\tan\theta = -\tan\beta$, vì vậy $\theta = -\beta$. ($\theta = \pi - \beta$ cũng là một nghiệm, nhưng đây là một vị trí cân bằng không ổn định.) Vị trí cân bằng của con lắc đơn do đó là điểm khi mà dây là vuông góc với mặt phẳng nghiêng.[14]

Để tìm các mode trực giao và các tần số đối với các dao động nhỏ, đặt $\theta \equiv -\beta + \delta$, và khai triển phương trình (6.178) đến số hạng bậc nhất chứa δ. Để thuận tiện chúng ta đặt $\ddot{\eta} \equiv \ddot{z} - g\sin\beta$, chúng ta nhận được

$$\begin{aligned}(M+m)\ddot{\eta} + m\ell\ddot{\delta} &= 0,\\ \ddot{\eta} + \ell\ddot{\delta} + (\mathrm{g}\cos\beta)\delta &= 0.\end{aligned} \tag{6.179}$$

Sử dụng phương pháp định thức (hoặc sử dụng phương pháp trong Bài tập 6.14; phương pháp nào cũng tốt cả), chúng ta tìm được các tần số của các mode trực giao là

$$\omega_1 = 0, \quad \text{và} \quad \omega_2 = \sqrt{1+\frac{m}{M}}\sqrt{\frac{\mathrm{g}\cos\beta}{\ell}}\,. \tag{6.180}$$

Các tần số này là giống như các tần số tìm được trong bài tập trước (trong đó M chuyển động theo phương ngang), nhưng với $g\cos\beta$ được thay cho g; so sánh phương trình (6.179) với phương

[14]Kết quả này là hợp lý. Lực căng trong sợi dây là vuông góc với mặt phẳng nghiêng, vì vậy tất cả những gì mà con lắc đơn biết là nó có thể trượt xuống một mặt phẳng nghiêng song song với mặt phẳng nghiêng đã cho, nằm cách một khoảng ℓ. Cho trước cùng vận tốc ban đầu, hai khối lượng sẽ trượt xuống theo hai "mặt phẳng" của chúng với cùng vận tốc tại mọi thời điểm.

trình (6.170).[15] Xem xét phương trình (6.174), và hãy nhớ lại định nghĩa của η, chúng ta thấy rằng nghiệm tổng quát đối với θ và z là

$$\theta(t) = -\beta + C\cos(\omega t + \phi), \quad z(t) = -\frac{Cm\ell}{M+m}\cos(\omega t + \phi) + \frac{g\sin\beta}{2}t^2 + At + B. \tag{6.181}$$

Hằng số B là không có liên quan gì, vì vậy chúng ta có thể bỏ qua nó. Sự khác nhau cơ bản giữa những mode trực giao này và những mode trực giao trong bài toán trước là gia tốc hướng xuống phía dưới mặt phẳng nghiêng. Nếu bạn đang ở trong một hệ tọa độ đang chuyển động xuống phía dưới theo phương của mặt phẳng nghiêng với gia tốc là $g\sin\beta$, và bạn nghiêng đầu của bạn một góc là β và chấp nhận thực tế là $g' = g\cos\beta$ trong thế giới của bạn, thì cơ cấu này là tương đương với cơ cấu ở trong bài tập trước.

6.16. Mặt phẳng bị nghiêng

So với điểm treo, các vị trí của các khối lượng là

$$\begin{aligned}(x,y)_M &= (\ell\sin\theta, -\ell\cos\theta),\\ (x,y)_m &= (\ell\sin\theta + x\cos\theta, -\ell\cos\theta + x\sin\theta).\end{aligned} \tag{6.182}$$

Đạo hàm các tọa độ vị trí này, chúng ta tìm được bình phương của các vận tốc là

$$v_M^2 = \ell^2\dot\theta^2, \quad v_m^2 = (\ell\dot\theta + \dot x)^2 + x^2\dot\theta^2. \tag{6.183}$$

Bạn cũng có thể nhận được v_m^2 bằng việc chú ý rằng $(\ell\dot\theta + \dot x)$ là thành phần vận tốc dọc theo thanh, và $x\dot\theta$ là thành phần vận tốc vuông góc với thanh. Hàm Lagrange là

$$L = \frac{1}{2}M\ell^2\dot\theta^2 + \frac{1}{2}m\Big((\ell\dot\theta + \dot x)^2 + x^2\dot\theta^2\Big) + Mg\ell\cos\theta + mg(\ell\cos\theta - x\sin\theta). \tag{6.184}$$

Các phương trình chuyển động đối với x và θ là

$$\begin{aligned}\ell\ddot\theta + \ddot x &= x\dot\theta^2 - g\sin\theta,\\ M\ell^2\ddot\theta + m\ell(\ell\ddot\theta + \ddot x) + mx^2\ddot\theta + 2mx\dot x\dot\theta &= -(M+m)g\ell\sin\theta - mgx\cos\theta.\end{aligned} \tag{6.185}$$

Bây giờ chúng ta sẽ xem xét trường hợp mà ở đó cả x và θ là nhỏ (hay nói một cách chính xác hơn, $\theta \ll 1$ và $x/\ell \ll 1$). Khai triển phương trình (6.185) đến số hạng bậc nhất đối với θ và x/ℓ ta có

$$\begin{aligned}(\ell\ddot\theta + \ddot x) + g\theta &= 0,\\ M\ell(\ell\ddot\theta + g\theta) + m\ell(\ell\ddot\theta + \ddot x) + mg\ell\theta + mgx &= 0.\end{aligned} \tag{6.186}$$

[15] Điều này là hợp lý, bởi vì trong một hệ tọa độ mà có gia tốc trượt xuống theo mặt phẳng nghiêng là $g\sin\beta$, thì ngoại lực duy nhất tác dụng lên các khối lượng là trọng lực $g\cos\beta$ vuông góc với mặt phẳng nghiêng. Tất cả những gì mà M và m quan tâm đến là chúng đang ở trong một thế giới trong đó lực trọng trường hướng "xuống dưới" với cường độ là $g' = g\cos\beta$.

Chúng ta có thể rút gọn các kết quả này một chút. Sử dụng phương trình thứ nhất để thay thế $-g\theta$ cho $(\ell\ddot{\theta}+\ddot{\theta})$, và cũng như thế ở phương trình thứ hai thay thế $-\ddot{x}$ cho $(\ell\ddot{x}+g\theta)$, ta có

$$\begin{aligned} \ell\ddot{\theta}+\ddot{x}+\mathrm{g}\theta &= 0, \\ -M\ell\ddot{x}+m\mathrm{g}x &= 0. \end{aligned} \tag{6.187}$$

Các mode trực giao có thể được tìm bằng cách sử dụng phương pháp định thức, hoặc chúng ta cũng có thể tìm được chúng chỉ với việc xem xét các phương trình. Phương trình thứ hai nói rằng hoặc $x(t)\equiv 0$, hoặc $x(t)=A\cosh(\alpha t+\beta)$, trong đó $\alpha=\sqrt{mg/Ml}$. Vì vậy chúng ta có hai trường hợp:

- Nếu $x(t)=0$, thì phương trình thứ nhất trong (6.187) cho ta thấy rằng mode trực giao là

$$\begin{pmatrix} \theta \\ x \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\cos(\omega t+\phi), \tag{6.188}$$

  trong đó $\omega\equiv\sqrt{g/\ell}$. Mode trực giao này khá là rõ ràng. Với những điều kiện ban đầu hợp lý, m sẽ nằm ngay tại vị trí của M. Phản lực từ thanh tác dụng lên m chính xác là lực cần thiết làm cho m thực hiện cùng một chuyển động dao động giống như M. Hai khối lượng khi đó giống như hai con lắc đơn có chiều dài là ℓ dao động cùng với nhau.

- Nếu $x(t)=A\cosh(\alpha t+\beta)$, thì phương trình thứ nhất trong (6.187) có thể được giải (bằng việc thử một nghiệm riêng đối với θ có cùng một dạng) để cho ta mode trực giao,

$$\begin{pmatrix} \theta \\ x \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} -m \\ \ell(M+m) \end{pmatrix}\cosh(\alpha t+\beta), \tag{6.189}$$

  trong đó $\alpha=\sqrt{mg/Ml}$. Mode trực giao này không rõ ràng như mode ở trên. Và thực vậy, miền giá trị xảy ra của nó khá là hạn chế. Nghiệm dạng hàm số mũ sẽ nhanh chóng làm cho x và θ có giá trị lớn, và do đó nó sẽ nằm ngoài miền giá trị để có thể sử dụng các xấp xỉ đối với giá trị nhỏ. Bạn có thể chỉ ra rằng ở mode trực giao này trọng tâm của hệ sẽ giữ ở vị trí nằm ngay dưới điểm treo. Điều này có thể xảy ra, ví dụ như, bằng cách cho m di chuyển xuống dưới về phía bên phải trong khi đó khi đó các thanh quay và đẩy M đi lên về phía bên trái. Không xảy ra dao động ở mode này; các vị trí sẽ luôn tăng. Trọng tâm của hệ sẽ rơi xuống dưới, và làm cho động năng của cả hệ tăng lên.

6.17. Đường cong quay

Vận tốc dọc theo đường cong là $\dot{x}\sqrt{1+y'^2}$, và thành phần vận tốc vuông góc với đường cong là ωx. Vì vậy hàm Lagrange là

$$L=\frac{1}{2}m\Big(\omega^2x^2+\dot{x}^2(1+y'^2)\Big)-mgy, \tag{6.190}$$

trong đó $y(x) = b(x/a)^\lambda$. Phương trình chuyển động khi đó là

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x} \quad \Longrightarrow \quad \ddot{x}(1+y'^2) + \dot{x}^2 y' y'' = \omega^2 x - \mathrm{g}y'. \tag{6.191}$$

Vị trí cân bằng xảy ra khi $\dot{x} = \ddot{x} = 0$, vì vậy phương trình (6.191) cho ta thấy rằng giá trị cân bằng của x thỏa mãn

$$x_0 = \frac{\mathrm{g}y'(x_0)}{\omega^2}. \tag{6.192}$$

Lý giải từ phương trình $F = ma$ cho điều này (viết $y'(x_0)$ dưới dạng $\tan\theta$, trong đó θ là góc nghiêng của đường cong, và rồi sau đó nhân cả hai vế với $\omega^2\cos\theta$) là thành phần của trọng lực dọc theo đường cong là lực gây ra thành phần gia tốc hướng tâm dọc theo đường cong. Sử dụng $y(x) = b(x/a)\ \lambda$, phương trình (6.192) nhận được

$$x_0 = a\left(\frac{a^2\omega^2}{\lambda \mathrm{g} b}\right)^{1/(\lambda-2)}. \tag{6.193}$$

Khi $\lambda \to \infty$, chúng ta thấy rằng x_0 dần tiến tới a. Điều này là hợp lý, bởi vì đường cong về cơ bản là bằng không cho tới a, và rồi sau đó nó tăng một cách rất nhanh. Bạn có thể kiểm tra đối với rất nhiều trường hợp giới hạn khác. Đặt $x \equiv x_0 + \delta$ trong phương trình (6.191), và khai triển đến số hạng bậc nhất của δ, ta nhận được

$$\ddot{\delta}\Big(1 + y'(x_0)^2\Big) = \delta\Big(\omega^2 - \mathrm{g}y''(x_0)\Big). \tag{6.194}$$

Tần số của các dao động nhỏ do đó được cho bởi

$$\Omega^2 = \frac{\mathrm{g}y''(x_0) - \omega^2}{1 + y'(x_0)^2}. \tag{6.195}$$

Sử dụng dạng hiển của y, cùng với phương trình (6.193), chúng ta tìm được

$$\Omega^2 = \frac{(\lambda-2)\omega^2}{1 + \frac{a^2\omega^4}{\mathrm{g}^2}\left(\frac{a^2\omega^2}{\lambda \mathrm{g} b}\right)^{2/(\lambda-2)}}. \tag{6.196}$$

Ta thấy rằng λ phải lớn hơn 2 để cho tồn tại chuyển động dao động xung quanh vị trí cân bằng. Với $\lambda < 2$, thì vị trí cân bằng là không ổn định, nghĩa là, về bên trái thì lực là hướng vào trong và về bên phải thì lực là hướng ra ngoài.

Đối với trường hợp $\lambda = 2$, chúng ta có $y(x) = b(x/a)^2$, vì vậy điều kiện cân bằng, phương trình (6.192), cho ta $x_0 = (2gb/a^2\omega^2)x_0$. Để cho điều này là đúng với một số giá trị của x_0, chúng ta phải có $\omega^2 = 2gb/a^2$. Nhưng nếu điều này được thỏa mãn, thì phương trình (6.192) đúng với mọi x. Vì vậy trường hợp đặc biệt ứng với $\lambda = 2$, hạt vòng sẽ vui mừng nằm yên tại bất kì điểm nào trên đường cong nếu $\omega^2 = 2gb/a^2$. (Trong hệ tọa độ quay của đường cong, các thành phần tiếp tuyến của lực hướng tâm và trọng lực chính xác bị triệt tiêu lẫn nhau ở mọi điểm.) Nếu $\lambda = 2$ và $\omega \neq 2bg/a^2$, thì chất điểm sẽ chịu tác dụng của lực hoặc là luôn hướng vào trong hoặc là luôn hướng ra ngoài.

NHẬN XÉT: Với $\omega \to 0$, phương trình (6.193) và (6.196) cho ta $x_0 \to 0$ và $\Omega \to 0$. Và với $\omega \to \infty$, chúng cho ta $x_0 \to \infty$ và $\Omega \to 0$. Trong cả hai trường hợp chúng ta đều có $\Omega \to 0$, bởi vì ở cả hai trường hợp vị trí cân bằng là điểm mà ở đó đường cong là rất phẳng (có phương nằm ngang hoặc là thẳng đứng, một cách tương ứng), và lực kéo về vị trí cân bằng cuối cùng là rất nhỏ.

Với $\lambda \to \infty$, chúng ta có $x_0 \to a$ và $\Omega \to \infty$. Tần số dao động ở đây là lớn bởi vì vị trí cân bằng tại a là điểm mà đường đường cong trở thành một góc nhọn, vì vậy lực lực kéo về vị trí cân bằng sẽ thay đổi một cách nhanh chóng vị trí của hạt. Hoặc, bạn có thể nghĩ về nó như là một con lắc đơn với độ dài rất nhỏ, nếu bạn xấp xỉ "góc nhọn" này bằng một hình tròn rất nhỏ. ♣

6.18. Chuyển động trong một hình nón

Nếu khoảng cách từ chất điểm đến trục là r, thì độ cao của nó là $r/\tan\alpha$, và khoảng cách của nó dọc lên phía trên theo mặt nón là $r/\sin\alpha$. Phân tích vận tốc thành các thành phần dọc lên trên theo mặt nón và thành phần vòng quanh mặt nón, chúng ta thấy rằng bình phương vận tốc là $v^2 = \dot{r}^2/\sin^2\alpha + r^2\dot{\theta}^2$. Do đó hàm Lagrange là

$$L = \frac{1}{2}m\left(\frac{\dot{r}^2}{\sin^2\alpha} + r^2\dot{\theta}^2\right) - \frac{mgr}{\tan\alpha}. \tag{6.197}$$

Các phương trình chuyển động đối với θ và r là

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) &= 0 \\ \ddot{r} &= r\dot{\theta}^2\sin^2\alpha - \mathrm{g}\cos\alpha\sin\alpha. \end{aligned} \tag{6.198}$$

Phương trình thứ nhất ở trên mô tả định luật bảo toàn moment động lượng. Phương trình thứ hai sẽ rõ ràng hơn nếu chúng ta chia cả hai vế cho $\sin\alpha$. Với $x \equiv r/\sin\alpha$ là khoảng cách dọc lên trên theo mặt nón, ta có $\ddot{x} = (r\dot{\theta}^2)\sin\alpha - g\cos\alpha$. Đây là phương trình dạng $F = ma$ theo phương của trục x.

Đặt $mr^2\dot{\theta} \equiv L$, chúng ta có thể khử $\dot{\theta}$ từ phương trình thứ hai để nhận được

$$\ddot{r} = \frac{L^2\sin^2\alpha}{m^2r^3} - \mathrm{g}\cos\alpha\sin\alpha. \tag{6.199}$$

Bây giờ chúng ta sẽ tính toán hai tần số cần tìm.

- Tần số của các dao động tròn, ω: Đối với chuyển động tròn bán kính $r = r_0$, chúng ta có $\dot{r} = \ddot{r} = 0$, vì vậy phương trình thứ hai của (6.198) cho ta

$$\omega \equiv \dot{\theta} = \sqrt{\frac{\mathrm{g}}{r_0\tan\alpha}}. \tag{6.200}$$

- Tần số của các dao động xung quanh một đường tròn, Ω: Nếu quỹ đạo thực sự là một đường tròn $r = r_0$, thì phương trình (6.199) sẽ cho ta (với $\ddot{r} = 0$)

$$\frac{L^2 \sin^2 \alpha}{m^2 r_0^3} = \mathrm{g} \cos \alpha \sin \alpha. \tag{6.201}$$

Phương trình này tương đương với phương trình (6.200), mà điều này có thể thấy được bằng cách viết L dưới dạng $mr_0^2\dot{\theta}$.

Bây giờ chúng ta sẽ sử dụng phương pháp của chúng ta bằng cách đặt $r(t) = r_0 + \delta(t)$, trong đó $\delta(t)$ là rất nhỏ, và sau đó thay giá trị này vào phương trình (6.199) và khai triển đến số hạng bậc nhất chứa δ. Sử dụng

$$\frac{1}{(r_0+\delta)^3} \approx \frac{1}{r_0^3 + 3r_0^2\delta} = \frac{1}{r_0^3(1+3\delta/r_0)} \approx \frac{1}{r_0^3}\left(1 - \frac{3\delta}{r_0}\right), \tag{6.202}$$

chúng ta có

$$\ddot{\delta} = \frac{L^2 \sin^2 \alpha}{m^2 r_0^3}\left(1 - \frac{3\delta}{r_0}\right) - \mathrm{g} \cos \alpha \sin \alpha. \tag{6.203}$$

Dùng phương trình (6.201), các số hạng không liên quan đến δ bị triệt tiêu, và chúng ta chỉ còn lại với

$$\ddot{\delta} = -\left(\frac{3L^2 \sin^2 \alpha}{m^2 r_0^4}\right)\delta. \tag{6.204}$$

Sử dụng phương trình (6.201) một lần nữa để khử L ta có

$$\ddot{\delta} + \left(\frac{3\mathrm{g}}{r_0} \sin \alpha \cos \alpha\right)\delta = 0. \tag{6.205}$$

Do đó,

$$\Omega = \sqrt{\frac{3\mathrm{g}}{r_0} \sin \alpha \cos \alpha}. \tag{6.206}$$

Sau khi đã tìm được hai tần số cần tìm trong các phương trình (6.200) và (6.206), chúng ta thấy rằng tỷ số giữa chúng là

$$\frac{\Omega}{\omega} = \sqrt{3} \sin \alpha. \tag{6.207}$$

Tỷ số Ω/ω này không phụ thuộc vào r_0. Hai tần số là bằng nhau nếu $\sin \alpha = 1/\sqrt{3}$, nghĩa là, nếu $\alpha \approx 35.3^o \equiv \tilde{\alpha}$. Nếu $\alpha = \tilde{\alpha}$, thì sau khi quay một vòng quanh nón, r sẽ quay trở lại giá trị mà nó có như lúc ban đầu. Vì vậy chất điểm thực hiện chuyển động tuần hoàn.

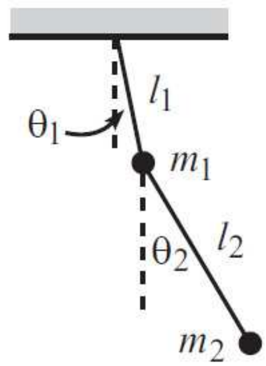
NHẬN XÉT: Trong giới hạn $\alpha \to 0$ (nghĩa là, hình nón rất mảnh), phương trình (6.207) nói rằng $\Omega/\omega \to 0$. Trên thực tế, các phương trình (6.200) và (6.206) cho ta thấy rằng $\omega \to \infty$ và $\Omega \to 0$. Vì vậy chất điểm chuyển động tròn theo đường xoắn ốc rất nhiều lần trong một chu trình của r. Điều này có vẻ khá là trực giác.

Trong giới hạn $\alpha \to \pi/2$ (nghĩa là, mặt nón gần như là một mặt phẳng), cả ω và Ω tiến đến 0, và phương trình (6.207) cho ta thấy rằng $\Omega/\omega \to \sqrt{3}$. Kết quả này không hiển nhiên một chút nào.

Nếu $\Omega/\omega = \sqrt{3}\sin\alpha$ là một số hữu tỷ, thì chất điểm có chuyển động tuần hoàn. Ví dụ như, nếu $\alpha = 60^o$, thì $\Omega/\omega = 3/2$, vì vậy chất điểm sẽ chuyển động trọn vẹn hai vòng tròn đối với bán kính r để thực hiện ba chu trình. Hoặc, nếu $\alpha = \arcsin(1/2\sqrt{3}) \approx 16.8^o$, thì $\Omega/\omega = 1/2$, vì vậy chất điểm sẽ chuyển động trọn vẹn hai vòng tròn đối với bán kính r để thực hiện một chu trình.

6.19. Con lắc kép

So với khớp treo, các tọa độ Đề Các của m_1 và m_2 lần lượt là (xem hình (6.49)),



Hình 6.49:

$$\begin{aligned}(x,y)_1 &= (\ell_1 \sin\theta_1, -\ell_1\cos\theta_1),\\ (x,y)_2 &= (\ell_1\sin\theta_1 + \ell_2\sin\theta_2, -\ell_1\cos\theta_1 - \ell_2\cos\theta_2).\end{aligned} \tag{6.208}$$

Lấy đạo hàm để tìm ra các vận tốc, và sau đó lấy bình phương chúng lên, ta nhận được

$$\begin{aligned}v_1^2 &= \ell_1^2\dot\theta_1^2,\\ v_2^2 &= \ell_1^2\dot\theta_1^2 + \ell_2^2\dot\theta_2^2 + 2\ell_1\ell_2\dot\theta_1\dot\theta_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2).\end{aligned} \tag{6.209}$$

Hàm Lagrange do đó là

$$\begin{aligned}L = \frac{1}{2}m_1\ell_1^2\dot\theta_1^2 &+ \frac{1}{2}m_2\Big(\ell_1^2\dot\theta_1^2 + \ell_2^2\dot\theta_2^2 + 2\ell_1\ell_2\dot\theta_1\dot\theta_2\cos(\theta_1-\theta_2)\Big)\\ &+ m_1 g\ell_1\cos\theta_1 + m_2 g(\ell_1\cos\theta_1 + \ell_2\cos\theta_2).\end{aligned} \tag{6.210}$$

Các phương trình chuyển động nhận được đối với θ_1 và θ_2 là

$$\begin{aligned}0 &= (m_1+m_2)\ell_1^2\ddot\theta_1 + m_2\ell_1\ell_2\ddot\theta_2\cos(\theta_1-\theta_2) + m_2\ell_1\ell_2\dot\theta_2^2\sin(\theta_1-\theta_2)\\ &\quad + (m_1+m_2)g\ell_1\sin\theta_1,\\ 0 &= m_2\ell_2^2\ddot\theta_2 + m_2\ell_1\ell_2\ddot\theta_1\cos(\theta_1-\theta_2) - m_2\ell_1\ell_2\dot\theta_1^2\sin(\theta_1-\theta_2)\\ &\quad + m_2 g\ell_2\sin\theta_2.\end{aligned} \tag{6.211}$$

Phương trình này là hơi cồng kềnh, nhưng chúng ta có thể đơn giản hóa được rất nhiều nếu chúng ta xét các dao động nhỏ. Sử dụng các xấp xỉ đối với góc nhỏ và chỉ giữ lại những số hạng chính, ta nhận được

$$
\begin{aligned}
0 &= (m_1 + m_2)\ell_1\ddot{\theta}_1 + m_2\ell_2\ddot{\theta}_2 + (m_1 + m_2)\mathrm{g}\theta_1, \\
0 &= \ell_2\ddot{\theta}_2 + \ell_1\ddot{\theta}_1 + \mathrm{g}\theta_2.
\end{aligned}
\tag{6.212}
$$

Bây giờ hãy xét trường hợp đặc biệt, $\ell_1 = \ell_2 \equiv l$. Chúng ta có thể tìm được các tần số của mode trực giao bằng phương pháp định thức, mà đã được thảo luận trong Mục 4.5. Bạn có thể chỉ ra rằng kết quả là

$$
\omega_\pm = \sqrt{\frac{m_1 + m_2 \pm \sqrt{m_1 m_2 + m_2^2}}{m_1}}\sqrt{\frac{\mathrm{g}}{\ell}}. \tag{6.213}
$$

Sau khi đơn giản hóa, các mode trực giao sẽ có dạng

$$
\begin{pmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{pmatrix}_\pm \propto \begin{pmatrix} \mp\sqrt{m_2} \\ \sqrt{m_1 + m_2} \end{pmatrix} \cos(\omega_\pm t + \phi_\pm). \tag{6.214}
$$

Một vài trường hợp đặc biệt là:

- $m_1 = m_2$: Các tần số là

  $$
  \omega_\pm = \sqrt{2 \pm \sqrt{2}}\sqrt{\frac{\mathrm{g}}{\ell}}. \tag{6.215}
  $$

  Các mode trực giao là

  $$
  \begin{pmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{pmatrix}_\pm \propto \begin{pmatrix} \mp 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \cos(\omega_\pm t + \phi_\pm). \tag{6.216}
  $$

- $m_1 \gg m_2$: Với $m_2/m_1 \equiv \epsilon$, các tần số dao động là (chỉ tính đến các số hạng chính không tầm thường của ϵ)

  $$
  \omega_\pm = (1 \pm \sqrt{\epsilon}/2)\sqrt{\frac{\mathrm{g}}{\ell}}. \tag{6.217}
  $$

  Các mode trực giao là

  $$
  \begin{pmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{pmatrix}_\pm \propto \begin{pmatrix} \mp\sqrt{\epsilon} \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_\pm t + \phi_\pm). \tag{6.218}
  $$

  Trong cả hai mode, khối lượng (nặng) ở phía trên về cơ bản là sẽ đứng yên, và khối lượng (nhẹ) ở phía dưới sẽ dao động giống như một con lắc đơn có chiều dài ℓ.

- $m_1 \ll m_2$: Với $m_1/m_2 \equiv \epsilon$ các tần số là (chỉ tính đến các số hạng chính của ϵ)

  $$
  \omega_+ = \sqrt{\frac{2\mathrm{g}}{\epsilon\ell}}, \quad \omega_- = \sqrt{\frac{\mathrm{g}}{2\ell}}. \tag{6.219}
  $$

Các mode trực giao là

$$\begin{pmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{pmatrix}_{\pm} \propto \begin{pmatrix} \mp 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_{\pm} t + \phi_{\pm}). \tag{6.220}$$

Trong mode đầu tiên, khối lượng (nặng) ở phía dưới về cơ bản là sẽ đứng yên (từ biểu thức của x_2 trong phương trình (6.208)), và khối lượng (nhẹ) ở phía trên sẽ dao động qua lại với tần số cao (bởi vì một lực căng trong các thanh sẽ rất lớn). Trong mode thứ hai, các thanh tạo thành một đường thẳng, và hệ về cơ bản là được xem như một con lắc đơn có chiều dài là $2l$.

Bây giờ chúng ta sẽ xét trường hợp đặc biệt, $m_1 = m_2$. Sử dụng phương pháp định thức, bạn có thể chỉ ra rằng các tần số của các mode trực giao là

$$\omega_{\pm} = \sqrt{g}\sqrt{\frac{\ell_1 + \ell_2 \pm \sqrt{\ell_1^2 + \ell_2^2}}{\ell_1 \ell_2}}. \tag{6.221}$$

Sau một vài phép biến đổi, các mode trực giao có dạng,

$$\begin{pmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{pmatrix}_{\pm} \propto \begin{pmatrix} \ell_2 \\ \ell_2 - \ell_1 \mp \sqrt{\ell_1^2 + \ell_2^2} \end{pmatrix} \cos(\omega_{\pm} t + \phi_{\pm}). \tag{6.222}$$

Một vài trường hợp đặc biệt là:

- $\ell_1 = \ell_2$: Chúng ta đã xem xét trường hợp này ở trên. Bạn có thể chỉ ra rằng các phương trình (6.221) và (6.222) lần lượt là giống với phương trình (6.215) và (6.216).

- $\ell_1 \gg \ell_2$: Với $\ell_2/\ell_1 \equiv \epsilon$, các tần số dao động là (chỉ tính đến các số hạng chính của ϵ)

$$\omega_+ = \sqrt{\frac{2g}{\ell_2}}, \quad \omega_- = \sqrt{\frac{g}{\ell_1}}. \tag{6.223}$$

Các mode trực giao là

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{pmatrix}_{+} &\propto \begin{pmatrix} -\epsilon \\ 2 \end{pmatrix} \cos(\omega_+ t + \phi_+), \\ \begin{pmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{pmatrix}_{-} &\propto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_- t + \phi_-). \end{aligned} \tag{6.224}$$

Ở mode đầu tiên, hai khối lượng về cơ bản là chuyển động ngược chiều nhau với khoảng cách bằng nhau, có tần số dao động cao (giả sử rằng ℓ_2 nhỏ). Hệ số 2 trong tần số dao động xuất hiện là bởi vì góc của ℓ_2 sẽ bằng hai lần so trường hợp khi m_1 bị hàn chặt vào một vị trí cố định; vì vậy lực theo phương tiếp tuyến tác dụng vào m_2 sẽ có độ lớn gấp hai lần. Ở mode thứ hai, hai thanh tạo thành một đường thẳng, và các khối lượng chuyển động giống như một khối lượng $2m$. Hệ về cơ bản là giống như một con lắc đơn có chiều dài ℓ_1.

- $\ell_1 \ll \ell_2$: Với $\ell_1/\ell_2 \equiv \epsilon$, các tần số dao động (tính đến các số hạng chính của ϵ) là

$$\omega_+ = \sqrt{\frac{2\mathrm{g}}{\ell_1}}, \quad \omega_- = \sqrt{\frac{\mathrm{g}}{\ell_2}}. \tag{6.225}$$

Các mode trực giao là

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{pmatrix}_+ &\propto \begin{pmatrix} 1 \\ -\epsilon \end{pmatrix} \cos(\omega_+ t + \phi_+), \\ \begin{pmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{pmatrix}_- &\propto \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cos(\omega_- t + \phi_-). \end{aligned} \tag{6.226}$$

Trong mode thứ nhất, khối lượng nằm ở phía dưới về cơ bản là đứng yên, và khối lượng nằm ở phía trên dao động với tần số cao (giả sử rằng ℓ_1 là nhỏ). Hệ số 2 trong tần số dao động xuất hiện là bởi vì khối lượng ở phía trên về cơ bản là giống như đang được đặt trong một thế giới có gia tốc trọng trường là $g' = 2g$ (bởi vì có thêm lực mg kéo xuống do khối lượng ở phía dưới tác dụng vào). Ở mode thứ hai, hệ về cơ bản là một con lắc đơn có chiều dài là ℓ_2. Hệ số 2 ở trong góc nghiêng là cần thiết để làm cho lực tiếp tuyến tác dụng lên khối lượng ở phía trên hầu như là bằng 0 (bởi vì nếu không nó sẽ dao động với tần số cao, do ℓ_1 là nhỏ).

6.20. Khoảng cách ngắn nhất trong một mặt phẳng

Gọi hai điểm đã cho là (x_1, y_1) và (x_2, y_2), và giả sử đường nối hai điểm được xác định bởi hàm $y(x)$. (Vâng, chúng ta sẽ giả thiết nó có thể được viết như là một hàm. Trong một lân cận nhỏ, chúng ta không phải lo ngại gì về bất kì vấn đề hàm có hai giá trị khác nhau nào.) Khi đó độ dài của đường cong là

$$\ell = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2}\, dx. \tag{6.227}$$

Hàm "Lagrange" là $L = \sqrt{1 + y'^2}$, vì vậy phương trình Euler- Lagrange là

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) = \frac{\partial L}{\partial y} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}\right) = 0. \tag{6.228}$$

Chúng ta thấy rằng $y'/\sqrt{1 + y'^2}$ là hằng số. Do đó, y' cũng là một hằng số, vì vậy chúng ta có một đường thẳng, $y(x) = Ax + B$, trong đó A, B được xác định bởi các điều kiện của hai điểm đầu mút.

6.21. Hệ số khúc xạ

Gọi đường chuyển động của ánh sáng được mô tả bởi hàm $y(x)$. Vận tốc ở độ cao y là $v \propto y$. Do đó, thời gian để đi từ (x_1, y_1) đến (x_2, y_2) là

$$T = \int_{x_1}^{x_2} \frac{ds}{v} \propto \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y} dx. \tag{6.229}$$

Hàm Lagrange do đó là

$$L \propto \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}. \tag{6.230}$$

Tại thời điểm này, chúng ta có thể áp dụng phương trình Euler-Lagrange đối với hàm L này, nhưng hãy chỉ sử dụng Khẳng định 6.5, với $f(y) = 1/y$. Phương trình (6.86) cho ta

$$1 + y'^2 = Bf(y)^2 \quad \Longrightarrow \quad 1 + y'^2 = \frac{B}{y^2}. \tag{6.231}$$

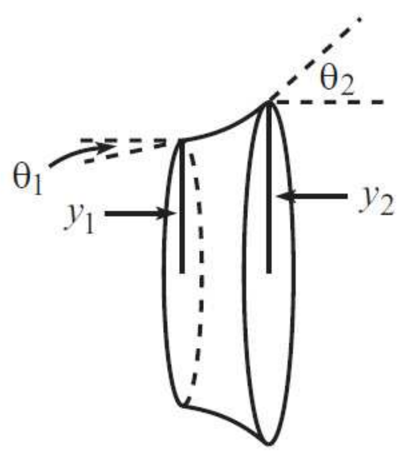
Bây giờ chúng ta phải tích phân phương trình này. Giải ra theo y', và sau đó tách biến và lấy tích phân, ta có

$$\int dx = \pm \int \frac{y dy}{\sqrt{B - y^2}} \quad \Longrightarrow \quad x + A = \mp\sqrt{B - y^2}. \tag{6.232}$$

Do đó, $(x + A)^2 + y^2 = B$, là phương trình của một đường tròn. Chú ý rằng đường tròn này có tâm tại một điểm với $y = 0$, nghĩa là, tại một điểm nằm tại đáy của tấm. Đây là điểm giao nhau giữa đường trung trực của đoạn thẳng nối hai điểm đã cho và đáy của tấm.

6.22. Mặt cực tiểu

Khi nói đến "lực căng" trong một bề mặt, chúng ta muốn nói đến lực trên một đơn vị độ dài trong mặt đó. Lực căng trên toàn bộ mặt phải là hằng số, bởi vì nó ở trạng thái cân bằng. Nếu lực căng tại một điểm mà lớn hơn tại một điểm khác, thì một mảnh nào đó trong mặt nằm giữa hai điểm này sẽ chuyển động.



Hình 6.50:

Tỷ số giữa các chu vi của hai đường tròn tại biên của vành là y_2/y_1. Do đó, điều kiện để cho các lực theo phương ngang trên vành triệt tiêu là $y_1 \cos\theta_1 = y_2 \cos\theta_2$, trong đó các góc θ là các góc hợp của mặt, như được chỉ ra trong Hình 6.50. Nói một cách khác, $y\cos\theta$ là hằng số trên toàn bộ bề mặt. Nhưng $\cos\theta = 1/\sqrt{1+y'^2}$, vì vậy ta có

$$\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = C. \tag{6.233}$$

Phương trình này tương đương với phương trình (6.77), và quá trình tìm nghiệm giống như trong Mục 6.8.

6.23. Sự tồn tại của một mặt cực tiểu

Nghiệm tổng quát của $y(x)$ được cho trong phương trình (6.78) có dạng $y(x) = (1/b)\cosh b(x+d)$. Nếu chúng ta chọn gốc tọa độ là điểm giữa hai vòng tròn, thì $d = 0$. Do đó cả hai điều kiện biên sẽ là

$$r = \frac{1}{b}\cosh b\ell. \tag{6.234}$$

Bây giờ chúng ta sẽ xác định giá trị lớn nhất của l/r sao cho mặt cực tiểu tồn tại. Nếu l/r là quá lớn, thì chúng ta sẽ thấy rằng sẽ không tồn tại nghiệm đối với b trong phương trình (6.234). Nếu bạn tiến hành một thí nghiệm với các bong bóng xà phòng (mà chúng sẽ có xu hướng làm cho diện tích bề mặt của chúng là cực tiểu), và nếu bạn kéo hai vòng ra cách xa nhau quá, thì bề mặt sẽ bị vỡ và biến mất bởi vì chúng sẽ cố gắng tạo ra hai đường tròn biên.

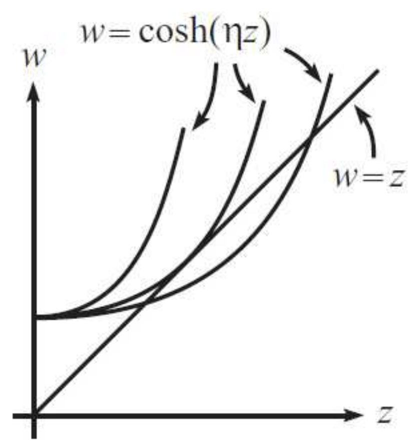
Định nghĩa các đại lượng không thứ nguyên như sau,

$$\eta \equiv \frac{\ell}{r}, \quad \text{và} \quad z \equiv br. \tag{6.235}$$

Khi đó phương trình (6.234) trở thành

$$z = \cosh \eta z. \tag{6.236}$$

Nếu chúng ta vẽ phác họa các đồ thị của $\omega = z$ và $\omega = \cosh \eta z$ đối với với vài giá trị của η



Hình 6.51:

(xem Hình 6.51), chúng ta sẽ thấy rằng sẽ không tồn tại nghiệm của phương trình (6.236) nếu η quá lớn. Giá trị giới hạn của η để tồn tại một nghiệm xảy ra khi các đường cong $\omega = z$ và $\omega = \cosh \eta z$ là tiếp xúc nhau; nghĩa là, khi các độ dốc là bằng nhau cùng với giá trị của các hàm cũng bằng nhau. Đặt η_0 là giá trị giới hạn của η, và đặt z_0 là điểm tại đó sự tiếp xúc xảy ra. Khi đó việc các giá trị và các độ dốc của hai hàm bằng nhau cho ta

$$z_0 = \cosh(\eta_0 z_0), \quad \text{và} \quad 1 = \eta_0 \sinh(\eta_0 z_0). \tag{6.237}$$

Chia phương trình thứ hai ở trên cho phương trình thứ nhất ta nhận được

$$1 = (\eta_0 z_0) \tanh(\eta_0 z_0). \tag{6.238}$$

Phương trình này phải giải bằng số. Nghiệm của nó là

$$\eta_0 z_0 \approx 1.200. \tag{6.239}$$

Thế giá trị này vào phương trình thứ hai của (6.237) ta có

$$\left(\frac{\ell}{r}\right)_{\max} \equiv \eta_0 \approx 0.663. \tag{6.240}$$

(Cũng chú ý rằng $z_0 = 1.200/\eta_0 = 1.810$.) Chúng ta thấy rằng nếu l/r lớn hơn 0.663, thì sẽ không tồn tại nghiệm đối với $y(x)$ mà thỏa mãn các điều kiện biên. Khi l/r lớn hơn giá trị này, các bong bóng xà phòng sẽ cực tiểu hóa bề mặt của chúng bằng cách biến đổi để tạo ra hai mặt đĩa tròn ở biên, nhưng nó sẽ nổ trước khi nó đạt được trạng thái cấu hình này.

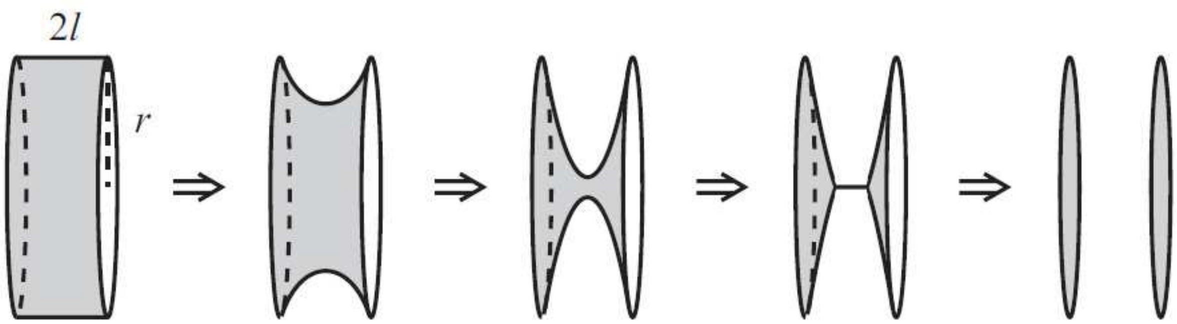
Để có được hình dung sơ qua về hình dạng của mặt cực tiểu giới hạn, chú ý rằng tỷ số giữa bán kính của đường tròn "nằm giữa" và bán kính của các đường tròn biên là

$$\frac{y(0)}{y(\ell)} = \frac{\cosh(0)}{\cosh(b\ell)} = \frac{1}{\cosh(\eta_0 z_0)} = \frac{1}{z_0} \approx 0.55. \tag{6.241}$$

NHẬN XÉT:

1. Chúng ta đã tránh nói đến một vấn đề ở trên, đó là có thể có nhiều hơn một nghiệm đối với hằng số b trong phương trình (6.234). Trên thực tế, Hình 6.51 chỉ ra rằng với bất cứ $\eta < 0.663$, có hai nghiệm đối với z trong phương trình (6.236), và vì vậy có hai nghiệm đối với b trong phương trình (6.234). Điều này có nghĩa là có hai mặt có thể thỏa mãn bài toán của chúng ta. Chúng ta muốn dạng mặt nào? Hóa ra rằng mặt mà tương ứng với giá trị nhỏ hơn của b là mặt có diện tích bề mặt cực tiểu, trong khi đó mặt tương ứng với giá trị lớn hơn của b là mặt mà (theo một nghĩa nào đó) có diện tích cực đại.

   Chúng ta nói "theo một nghĩa nào đó" là bởi vì mặt tương ứng với giá trị lớn hơn của b thực chất là điểm yên ngựa của hàm diện tích bề mặt. Rốt cuộc thì nó không thể là một cực đại bởi vì chúng ta luôn luôn có thể tạo ra một mặt có diện tích lớn hơn bằng việc làm cho các mặt đó có dạng lượn sóng. Nó là một điểm yên ngựa bởi vì thực ra có tồn tại một lớp biến đổi mà trong đó diện tích bề mặt có giá trị cực đại, đó là lớp các biến đổi khi "chỗ trũng" trong một đường cong liên tục được làm cho rộng ra (hãy tưởng tượng chúng ta hạ thấp điểm giữa của bề mặt một cách từ từ nhẹ nhàng). Một lớp các biến đổi như thế được chỉ ra trong Hình 6.52. Nếu chúng ta bắt đầu với một mặt trụ là bề mặt đang xét và rồi sau đó từ từ bóp nó lại tại điểm giữa, ban đầu diện tích mặt sẽ giảm đi (sự giảm của diện tích mặt cắt là nguyên nhân chủ đạo tại thời điểm bắt đầu này). Nhưng sau đó khi vùng trũng trở nên rất sâu, diện tích bề mặt tăng lên bởi vì bề mặt bắt đầu sẽ trông giống như hai đĩa tròn, và hai đĩa tròn này có diện tích lớn hơn diện tích của hình trụ hẹp ban đầu. Bề mặt cuối cùng sẽ trông giống như hai hình nón gần như là bẹt được nối với nhau bởi một đường thẳng. Vì các mặt nón này cuối cùng cũng sẽ bị bẹt ra để trở thành hai đĩa tròn, nên diện tích bề mặt sẽ giảm đi. Do đó, diện tích bề mặt phải đạt được một giá trị cực đại địa phương (ít nhất là đối với lớp các biến đổi này) tại một thời điểm nào đó ở giữa. Giá trị cực đại địa phương này (hay đúng hơn, điểm yên ngựa) nảy sinh là bởi vì phương pháp Euler-Lagrange đơn giản là cho "đạo hàm" bằng không và không phân biệt giữa các điểm cực tiểu, cực đại và điểm yên ngựa.



Hình 6.52:

Nếu $\eta \equiv l/r > 0.663$ (sao cho mặt trụ ban đầu bây giờ là dài chứ không phải hẹp nữa), sẽ tồn tại ít nhất một lớp các biến đổi trong đó diện tích bề mặt đơn điệu giảm từ diện tích bề mặt của hình trụ xuống diện tích của hai đĩa tròn. Nếu bạn vẽ ra một chuỗi các hình ảnh (đối với một hình trụ dài) tương tự như các hình ảnh trong Hình 6.52, thì hoàn toàn có thể tin rằng điều này là đúng.

2. Trong trường hợp giới hạn (với $\eta = 0.663$) thì diện tích của mặt giới hạn sẽ như nào so với diện tích của hai đĩa tròn? Diện tích của hai đĩa là $A_d = 2\pi r^2$. Và diện tích của mặt giới hạn là

$$A_s = \int_{-\ell}^{\ell} 2\pi y\sqrt{1+y'^2}dx. \tag{6.242}$$

Sử dụng phương trình (6.234), phương trình trên trở thành

$$\begin{aligned} A_s = \int_{-\ell}^{\ell} \frac{2\pi}{b}\cosh^2 bx dx &= \int_{-\ell}^{\ell} \frac{\pi}{b}(1+\cosh 2bx)dx \\ &= \frac{2\pi\ell}{b} + \frac{\pi \sinh 2b\ell}{b^2}. \end{aligned} \tag{6.243}$$

Nhưng từ định nghĩa của η và z, ta có $\ell = \eta_0 r$ và $b = z_0/r$ đối với mặt giới hạn. Do đó, A_s có thể được viết dưới dạng

$$A_\text{s} = \pi r^2 \left(\frac{2\eta_0}{z_0} + \frac{\sinh 2\eta_0 z_0}{z_0^2} \right) \tag{6.244}$$

Thay các giá trị số vào ($\eta_0 \approx 0.663$ và $z_0 \approx 1.810$) ta có

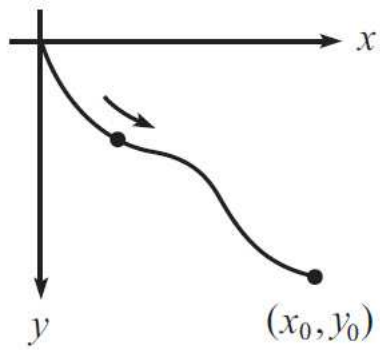
$$A_\text{d} \approx (6.28) r^2, \quad \text{và} \quad A_\text{s} \approx (7.54) r^2. \tag{6.245}$$

Tỷ số của A_s và A_d là xấp xỉ bằng 1.2 (thực ra nó bằng $\eta_0 z_0$, như bạn có thể chỉ ra). Do đó mặt giới hạn có diện tích lớn hơn. Đây là điều mà chúng ta mong đợi, bởi vì với $l/r > \eta_0$ thì bề mặt sẽ cố gắng trở về mặt có diện tích bé hơn, và không có trạng thái ổn định nào khác ngoài nghiệm cosh mà chúng ta đã tìm được.

♣

6.24. Đường brachistochrone

LỜI GIẢI THỨ NHẤT: Trong Hình 6.53, các điều kiện biên là $y(0) = 0$ và $y(x_0) = y_0$, với chiều



Hình 6.53:

dương của trục y hướng xuống dưới. Từ định luật bảo toàn năng lượng, vận tốc như là một hàm của y là $v = \sqrt{2gy}$. Tổng thời gian chuyển động do đó bằng

$$T = \int_0^{x_0} \frac{ds}{v} = \int_0^{x_0} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx. \tag{6.246}$$

Mục đích của chúng ta là đi tìm hàm $y(x)$ làm cho tích phân này đạt cực tiểu, với các điều kiện biên được đưa ra ở trên. Do đó chúng ta có thể áp dụng các kết quả của phương pháp biến phân, với một "hàm Lagrange" bằng

$$L \propto \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}}. \tag{6.247}$$

Tại thời điểm này, chúng ta có thể áp dụng phương trình $E - L$ cho hàm L này, nhưng hãy sử dụng Khẳng định 6.5, với $f(y) = 1/\sqrt{y}$. Phương trình (6.86) cho ta

$$1 + y'^2 = B f(y)^2 \quad \Longrightarrow \quad 1 + y'^2 = \frac{B}{y}, \tag{6.248}$$

là kết quả mà chúng ta mong muốn. Bây giờ chúng ta phải tích phân phương trình này. Giải ra theo y' và tách biến ta nhận được

$$\frac{\sqrt{y}dy}{\sqrt{B-y}} = \pm dx. \tag{6.249}$$

Một phép đổi biến giúp loại bỏ căn thức ở mẫu là $y \equiv B\sin^2\phi$. Khi đó $dy = 2B\sin\phi\cos\phi d\phi$, và phương trình (6.249) có thể rút gọn về

$$2B\sin^2\phi d\phi = \pm dx. \tag{6.250}$$

Bây giờ chúng ta có thể sử dụng $\sin^2\phi = (1-\cos 2\phi)/2$ để tích phân phương trình này. Sau khi nhân cả hai vế với 2, kết quả sẽ là $B(2\phi - \sin 2\phi) = \pm 2x - C$, trong đó C là một hằng số tích phân. Bây giờ chú ý rằng chúng ta có thể viết lại định nghĩa của chúng ta về ϕ (mà là $y \equiv B\sin^2\phi$) dưới dạng $2y = B(1-\cos 2\phi)$. Nếu sau đó chúng ta định nghĩa $\theta \equiv 2\phi$, chúng ta có

$$x = \pm a(\theta - \sin\theta) \pm d, \quad y = a(1-\cos\theta). \tag{6.251}$$

trong đó $a \equiv B/2$, và $d \equiv C/2$. Chất điểm bắt đầu chuyển động từ vị trí $(x, y) = (0, 0)$. Do đó, θ bắt đầu tại $\theta = 0$, bởi vì giá trị này tương ứng với $y = 0$. Điều kiện ban đầu $x = 0$ khi đó suy ra rằng $d = 0$. Hơn nữa, chúng ta đang giả thiết rằng sợi dây hướng xuống dưới sang bên phải, vì vậy chúng ta chọn dấu dương trong biểu thức đối với x. Do đó, cuối cùng ta có

$$x = a(\theta - \sin\theta), \quad y = a(1-\cos\theta). \tag{6.252}$$

là kết quả chúng ta mong muốn. Đây là phương trình tham số của một *cycloid*, là đường quỹ đạo của một điểm nằm trên vành một bánh xe khi bánh xe lăn trên đường. Bạn cũng có thể kiểm tra là độ dốc của đường cong $y(x)$ ban đầu bằng vô cùng.

NHẬN XÉT: Phương pháp trên nhận được dạng phương trình tham số trong phương trình (6.252) mà không sử dụng bất cứ kết quả trước nào. Nhưng bởi vì phương trình (6.252) đã được cho trong đề bài của bài toán, một cách làm khác là đơn giản kiểm tra lại rằng các phương trình tham số này thỏa mãn phương trình (6.248). Để làm điều này, giả sử rằng $x = a(\theta - \sin\theta)$ và $y = a(1 - cos\theta)$, mà cho ta

$$y' \equiv \frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}. \tag{6.253}$$

Do đó,

$$1 + y'^2 = 1 + \frac{\sin^2\theta}{(1-\cos\theta)^2} = \frac{2}{1-\cos\theta} = \frac{2a}{y}, \tag{6.254}$$

là đồng nhất với phương trình (6.248), với $B \equiv 2a$. ♣

LỜI GIẢI THỨ HAI : Hãy sử dụng các lập luận biến phân một lần nữa, nhưng bây giờ với y được coi như là một biến độc lập. Nghĩa là, cho sợi dây được mô tả bởi hàm $x(y)$. Độ dài cung bây giờ được cho bởi $ds = \sqrt{1+x'^2}dy$. Do đó, thay vì hàm Lagrange trong phương trình (6.247), ta có

$$L \propto \frac{\sqrt{1+x'^2}}{\sqrt{y}}. \tag{6.255}$$

Phương trình Euler- Lagrange là

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial L}{\partial x'}\right) = \frac{\partial L}{\partial x} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{x'}{\sqrt{1+x'^2}}\right) = 0. \tag{6.256}$$

Việc vế phải bằng không làm cho mọi thứ trở lên đơn giản và gọn gàng hơn bởi vì điều đó có nghĩa rằng đại lượng ở trong dấu ngoặc đơn là một hằng số. Nếu chúng ta định nghĩa hằng số này là $1/\sqrt{B}$, thì chúng ta có thể giải ra x' và sau đó tách biến để nhận được

$$\frac{\sqrt{y}dy}{\sqrt{B-y}} = \pm dx, \tag{6.257}$$

giống như phương trình (6.249). Quá trình tìm nghiệm của nó giống như ở phần trên.

LỜI GIẢI THỨ BA : Hàm "Lagrange" ở lời giải thứ nhất ở trên, mà được cho trong phương trình (6.247) có dạng

$$L \propto \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}, \tag{6.258}$$

là không phụ thuộc gì vào biến x. Do đó, tương tự với định luật bảo toàn năng lượng (mà có từ một hàm Lagrange mà không phụ thuộc vào t), đại lượng

$$E \equiv y'\frac{\partial L}{\partial y'} - L = \frac{y'^2}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}} - \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} = \frac{-1}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}} \tag{6.259}$$

là một hằng số (nghĩa là, độc lập với x). Phát biểu này là tương đương với phương trình (6.246), và quá trình giải ra nghiệm giống như ở phần trên.

Chương 7

Lực xuyên tâm

Một *lực xuyên tâm* được định nghĩa là một lực có phương chỉ theo hướng bán kính và có độ lớn chỉ phụ thuộc vào khoảng cách tới nguồn lực (nghĩa là, nó không phụ thuộc vào góc tương đối so với nguồn lực).[1] Một cách tương đương, chúng ta có thể nói rằng một lực xuyên tâm là một lực mà thế năng của nó chỉ phụ thuộc vào khoảng cách tới nguồn lực. Nghĩa là, nếu nguồn lực được tại gốc tọa độ, thì thế năng của nó sẽ có dạng $V(\mathbf{r}) = V(r)$. Một thế năng dưới dạng này thực sự là thế năng của một lực xuyên tâm, bởi vì

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\bigtriangledown V(r) = -\frac{dV}{dr}\widehat{\mathbf{r}}, \tag{7.1}$$

là lực có phương theo phương bán kính và chỉ phụ thuộc vào r. Các lực hấp dẫn và lực tĩnh điện là các lực xuyên tâm, với $V(r) \propto 1/r$. Lực lò xo cũng là lực xuyên tâm, với $V(r) \propto (r-\ell)^2$, trong đó ℓ là độ dài của lò xo tại vị trí cân bằng.

Có hai điều quan trọng liên quan đến lực xuyên tâm là: (1) chúng ở khắp nơi trong tự nhiên, vì vậy chúng ta tốt nhất là nên biết cách làm việc chúng, và (2) làm việc với chúng là dễ hơn nhiều so với bạn nghĩ, bởi vì chúng ta sẽ nhận được các dạng rất đơn giản của phương trình chuyển động khi V là một hàm chỉ của biến r. Những dạng đơn giản này sẽ trở nên hiển nhiên trong hai mục tiếp theo đây.

7.1 Bảo toàn moment động lượng

Moment động lượng đóng vai trò quan trọng trong khi làm việc với lực xuyên tâm, vì như chúng ta sẽ chỉ ra sau đây, nó là hằng số không phụ thuộc vào thời gian. Với một chất điểm có khối lượng, chúng ta định nghĩa moment động lượng $\mathbf{L}$ như sau

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \tag{7.2}$$

[1] Về mặt câu chữ, thuật ngữ "lực xuyên tâm" chỉ ngụ ý về bản chất của lực là có phương bán kính. Nhưng trong định nghĩa của vật lý nó còn có thêm điều kiện là độ lớn của lực chỉ phụ thuộc vào khoảng cách tới nguồn lực.

trong đó "tích có hướng" được định nghĩa ở Phụ lục B. $\mathbf{L}$ chỉ phụ thuộc vào $\mathbf{r}$, do đó nó phụ thuộc vào cách chọn gốc tọa độ. Chú ý rằng $\mathbf{L}$ là một vector, và chú ý rằng nó vuông góc với cả $\mathbf{r}$ và $\mathbf{p}$, do tính chất của tích có hướng. Bạn có thể hỏi tại sao chúng ta quan tâm tới $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$ nhiều đến mức mà còn đặt cho nó một cái tên. Tại sao không phải là $r^3p^5\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{p})$, hay là một đại lượng nào đó khác? Câu trả lời là $\mathbf{L}$ có một số tính chất rất đẹp, mà một trong số chúng là tính chất sau.

Định lý 7.1. *Nếu một hạt chỉ chịu tác động của một lực xuyên tâm, thì moment động lượng của nó được bảo toàn.*[2] *Nghĩa là,*

$$\text{Nếu } V(\mathbf{r}) = V(r), \text{ thì } \frac{d(\mathbf{L})}{dr} = 0. \tag{7.3}$$

Chứng minh. Ta có

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{v} \times (m\mathbf{v}) + \mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0, \tag{7.4}$$

bởi vì $\mathbf{F} \propto \mathbf{r}$, và tích có hướng của hai vector song song là bằng không. □

Chúng ta sẽ chứng minh lại định lý trên bằng phương pháp Lagrange ở mục sau. Bây giờ chúng ta sẽ đi chứng minh một định lý khác mà khá là hiển nhiên, nhưng dù sao cũng là tốt khi chứng minh nó.

Định lý 7.2. *Nếu một hạt chỉ chịu tác dụng bởi một lực xuyên tâm thì nó sẽ chuyển động trong một mặt phẳng.*

Chứng minh. Ở thời điểm đã cho t_0, xét mặt phẳng P chứa vector vị trí $\mathbf{r_0}$ (với gốc thế năng được chọn là gốc tọa độ) và vector vận tốc $\mathbf{v_0}$. Ta khẳng định rằng $\mathbf{r}$ luôn nằm trong P tại mọi thời điểm.[3] Điều này đúng vì P được định nghĩa là mặt phẳng vuông góc với vector $\mathbf{n_0} \equiv \mathbf{r_0} \times \mathbf{v_0}$. Nhưng trong chứng minh của định lý 7.1, chúng ta đã chỉ ra rằng vector $\mathbf{r} \times \mathbf{v} \equiv (\mathbf{r} \times \mathbf{p})/m$ không thay đổi theo thời gian. Do đó, $\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{n_0}$ với mọi t. Bởi vì $\mathbf{r}$ là hiển nhiên vuông góc với $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$, chúng ta thấy rằng $\mathbf{r}$ là vuông góc với $\mathbf{n_0}$ đối với mọi t. Do đó, $\mathbf{r}$ phải luôn nằm trong P. □

Một cách nhìn trực giác khác của định lý này là như sau. Bởi vì vector vị trí, vector vận tốc và vector gia tốc (chúng tỉ lệ với $\mathbf{F}$, nên do đó cũng tỉ lệ với $\mathbf{r}$) ban đầu tất cả nằm trong P, nên ở đây có sự đối xứng giữa hai bên của P. Do đó, không có lý do gì để

[2]Đây là trường hợp đặc biệt của một thực tế là moment lực bằng tốc độ biến thiên của moment động lượng. Ta sẽ nói chi tiết về vấn đề này ở Chương 8

[3]Mặt phẳng P không được xác định trong trường hợp nếu $\mathbf{v_0} = 0$, hoặc nếu $\mathbf{r_0} = 0$, hoặc nếu $\mathbf{v_0}$ song song với $\mathbf{r_0}$. Nhưng trong những trường hợp này, bạn có thể nhanh chóng chỉ ra rằng quỹ đạo chuyển động luôn là đường thẳng xuyên tâm, và điều này rõ ràng chặt chẽ hơn là chứng minh quỹ đạo chuyển động nằm trong một mặt phẳng

một hạt đi ra xa khỏi P theo bên này chứ không phải là bên kia. Vì vậy hạt sẽ duy trì nằm trong P. Chúng ta do đó có thể sử dụng lý luận này một lần nữa ở một khoảng thời gian ngắn sau đó, và cứ tiếp tục như vậy.

Định lý này chỉ ra rằng chúng ta chỉ cần hai tọa độ, thay vì ba tọa độ như bình thường, để mô tả chuyển động của vật. Nhưng, chúng ta còn có thể làm hơn thế. Ở phần sau, chúng ta sẽ chỉ ra rằng chúng ta chỉ cần dùng *một* tọa độ. Không tệ, ba tọa độ giảm xuống còn một.

7.2 Thế hiệu dụng

Thế hiệu dụng cung cấp cho chúng ta một phương pháp hữu hiệu để đơn giản hóa bài toán lực xuyên tâm ba chiều về bài toán một chiều. Sau đây là cách thực hiện. Xét một hạt khối lượng m chỉ chịu tác dụng của một lực xuyên tâm, được cho bởi thế năng $V(r)$. Gọi r và θ là các tọa độ cực trong mặt phẳng chuyển động. Trong các tọa độ cực này, phương trình Lagrange (mà chúng ta sẽ kí hiệu nó là "$\mathcal{L}$", vì kí hiệu "L" sẽ được dùng cho moment động lượng) là

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r). \tag{7.5}$$

Các phương trình chuyển động nhận được đối với r và θ là

$$\begin{aligned} m\ddot{r} &= mr\dot{\theta}^2 - V'(r), \\ \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) &= 0. \end{aligned} \tag{7.6}$$

Bởi vì $-V'(r)$ bằng với lực tác dụng $F(r)$, nên phương trình đầu tiên của những phương trình này là phương trình $F = ma$ theo phương xuyên tâm, được bổ xung thêm gia tốc hướng tâm, trùng với phương trình đầu tiên của các hệ phương trình (3.51). Phương trình thứ hai là phát biểu của định luật bảo toàn moment động lượng, bởi vì $mr^2\dot{\theta} = r(mr\dot{\theta}) = rp_\theta$ (trong đó p_θ là động lượng theo hướng của vector góc) là độ lớn của $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, từ phương trình (B.9). Do đó chúng ta thấy rằng độ lớn của $\mathbf{L}$ là hằng số. Và bởi vì hướng của $\mathbf{L}$ luôn luôn vuông góc với mặt phẳng chuyển động cố định, nên vector $\mathbf{L}$ là hằng số theo thời gian. Như vậy chúng ta vừa đưa ra một cách chứng minh khác của định lý 7.1. Theo ngôn ngữ của phương pháp Lagrange, sự bảo toàn của $\mathbf{L}$ là hệ quả của thực tế là θ là một tọa độ cyclic, như chúng ta đã thấy ở Ví dụ 2 trong Mục 6.5.1. Bởi vì $mr^2\dot{\theta}$ không thay đổi theo thời gian nên chúng ta có thể đặt giá trị không đổi của nó là

$$L \equiv mr^2\dot{\theta}. \tag{7.7}$$

L được xác định dựa trên những điều kiện đầu. Nó có thể được xác định, ví dụ như, bằng việc cho giá trị ban đầu của r và $\dot{\theta}$. Sử dụng $\dot{\theta} = L/(mr^2)$, chúng ta có thể khử $\dot{\theta}$ từ phương trình đầu tiên của (7.6). Kết quả là

$$m\ddot{r} = \frac{L^2}{mr^3} - V'(r). \tag{7.8}$$

Nhân cả hai vế với $\dot{\theta}$ và sau đó lấy tích phân theo thời gian ta nhận được

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \left(\frac{L^2}{2mr^2} + V(r)\right) = E, \tag{7.9}$$

trong đó E là hằng số tích phân. E đơn giản chỉ là năng lượng, mà có thể thấy rằng phương trình này cũng có thể nhận được bằng cách sử dụng phương trình (7.7) để khử $\dot{\theta}$ trong phương trình năng lượng, $(m/2)(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r) = E$.

Phương trình (7.9) khá là thú vị. Nó chỉ liên quan đến biến r. Và nó rất giống với phương trình chuyển động của một hạt trong trường hợp một chiều (ký hiệu bởi tọa độ r) dưới tác dụng của lực thế

$$V_{\text{eff}}(r) \equiv \frac{L^2}{2mr^2} + V(r), \tag{7.10}$$

Ở đây ”eff” là viết tắt của ”effective-hiệu dụng”. $V_{\text{eff}}(r)$ được gọi là *thế hiệu dụng*. "Lực hiệu dụng" dễ dàng được nhận từ phương trình ((7.8)) có dạng

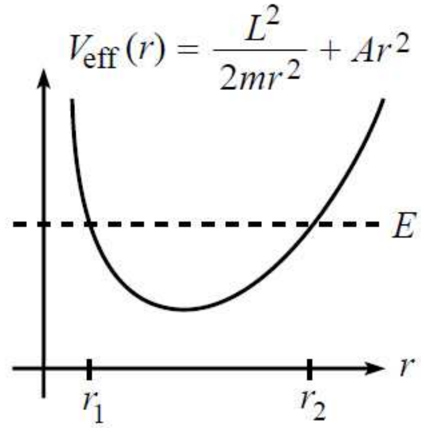
$$F_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{mr^3} - V'(r), \tag{7.11}$$

mà nó thỏa mãn $F_{\text{eff}} = -V'_{\text{eff}}(r)$. Nội dung của *thế hiệu dụng* này là một kết quả tuyệt vời và nên được trân trọng một cách đúng đắn. Nó nói rằng nếu chúng ta muốn giải một bài toán hai chiều (mà có thể được sinh ra từ một bài toán ba chiều) liên quan đến một lực xuyên tâm, thì chúng ta có thể đặt lại bài toán đã cho dưới dạng một bài toán một chiều đơn giản với một sự thay đổi nhỏ về thế năng. Chúng ta có thể quên đi biến θ, và chúng ta có thể giải bài toán một chiều đơn giản này (như chúng ta sẽ minh họa dưới đây) để nhận được giá trị của $r(t)$. Sau khi đã tìm ra $r(t)$, chúng ta có thể sử dụng công thức $\dot{\theta}(t) = L/mr^2$ để giải ra $\theta(t)$ (ít nhất là về lý thuyết có thể làm vậy). Toàn bộ quá trình này có thể thực hiện được chỉ là bởi vì có một đại lượng phụ thuộc vào r và θ (hoặc có thể là $\dot{\theta}$) mà không phụ thuộc vào thời gian. Các biến r và θ do đó là *không* độc lập với nhau, vì vậy bài toán thực sự trở thành bài toán một chiều thay vì là bài toán hai chiều.

Để hiểu được r biến đổi theo thời gian như thế nào, tất cả những gì chúng ta phải làm là vẽ đồ thị của $V_{\text{eff}}(r)$. Xét ví dụ trong đó $V(r) = Ar^2$. Đây là thế năng của lò xo với độ dài tự nhiên bằng không. Khi đó

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + Ar^2. \tag{7.12}$$

Để vẽ được đồ thị của $V_{\text{eff}}(r)$, L phải được cho trước (được xác định thông qua các điều kiện đầu), cùng với A và m (được xác định dựa trên hệ mà chúng ta đang xét). Nhưng



Hình 7.1:

hình dạng nói chung của đồ thị giống với đường cong trong Hình 7.1. Năng lượng E (được xác định qua các điều kiện đầu), mà cũng được cho trước, cũng được vẽ. Tọa độ r thay đổi qua lại xung quanh các điểm chuyển hướng, r_1 và r_2, là hai điểm thỏa mãn $V_{\text{eff}}(r_{1,2}) = E$.[4] Điều này đúng bởi vì sẽ là không thể để cho hạt ở một vị trí có giá trị r sao cho $E < V_{\text{eff}}$, bởi vì phương trình (7.9) sẽ cho một giá trị ảo của $\dot{r}$. Nếu E bằng giá trị nhỏ nhất của $V_{\text{eff}}(r)$ thì $r_1 = r_2$, nên r chỉ có một giá trị, điều này nghĩa là quỹ đạo của chuyển động là hình tròn.

NHẬN XÉT: Số hạng $L^2/2mr^2$ trong thế hiệu dụng đôi khi được gọi là *moment động lượng cản*. Nó có tác dụng là giữ hạt không tiến rất gần vào gốc tọa độ. Về cơ bản, do $L \equiv mr^2\dot{\theta}$ là hằng số, vì vậy khi r càng nhỏ thì θ càng lớn. Nhưng mức độ tăng của $\dot{\theta}$ lớn hơn mức độ giảm của r, bởi vì bình phương của r trong $L = mr^2\dot{\theta}$. Vì vậy cuối cùng chúng ta nhận được là một năng lượng động năng theo phương tiếp tuyến, $mr^2\dot{\theta}/2$, có giá trị lớn hơn độ lớn cho phép theo định luật bảo toàn năng lượng.[5] ♣

Chú ý rằng hoàn toàn không cần thiết phải giới thiệu về các nội dung của thế hiệu dụng. Bạn có thể đơn giản là giải các phương trình chuyển động trong phương trình (7.6). Nhưng việc đưa vào V_{eff} làm cho việc thấy được cái gì đang diễn ra trong bài toán về lực xuyên tâm một cách dễ dàng hơn rất nhiều.

[4]Hóa ra rằng với thế năng của lò xo của chúng ta Ar^2, chuyển động trong không gian là chuyển động theo quỹ đạo hình ellipse, với các độ dài bán trục là r_1 và r_2 (xem Bài tập 7.5). Nhưng đối với một hàm thế năng nói chung, chuyển động sẽ không được đẹp như vậy.

[5]Lập luận này không còn đúng nếu $V(r)$ tiến tới $-\infty$ nhanh hơn $-1/r^2$. Bạn có thể thấy điều này bằng việc vẽ đồ thị của $V_{\text{eff}}(r)$, mà sẽ tiến đến $-\infty$ thay vì $+\infty$ khi $r \to 0$. $V(r)$ giảm đủ nhanh để cho phép động năng tăng. Nhưng những hàm thế dạng này rất hiếm khi xảy ra.

7.3 Giải hệ phương trình chuyển động

Nếu chúng ta muốn có sự định lượng rõ ràng, chúng ta phải giải hệ các phương trình chuyển động trong hệ (7.6). Một cách tương đương, chúng ta phải giải dạng tích phân của chúng, các phương trình (7.7) và (7.9), mà là các phát biểu của định luật bảo toàn của L và E,

$$
\begin{aligned}
mr^2\dot{\theta} &= L, \\
\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) &= E
\end{aligned}
\tag{7.13}
$$

Từ "giải" ở đây có vẻ chưa được rõ ràng lắm, bởi vì chúng ta phải nói rõ các đại lượng nào mà chúng ta muốn giải ra phụ thuộc vào các đại lượng khác. Về cơ bản thì có hai việc chúng ta có thể làm. Chúng ta có thể giải tìm ra r và θ phụ thuộc vào t. Hoặc chúng ta cũng có thể giải tìm ra r phụ thuộc vào θ. Việc đầu tiên có lợi thế là có thể nhận được ngay lập tức các vận tốc, và dĩ nhiên, cả những thông tin về vị trí của hạt tại thời gian t. Việc thứ hai có lợi thế là biểu diễn dưới dạng hiển đường quỹ đạo chuyển động của vật trong không gian có dạng như thế nào, thậm chí ngay cả khi chúng ta không biết vật đang chuyển động nhanh tới mức nào. Chúng ta chủ yếu sẽ làm việc theo cách thứ hai, đặc biệt là khi chúng ta thảo luận về lực hấp dẫn và các định luật của Kepler dưới đây. Nhưng bây giờ, hãy tìm hiểu cả hai cách trước đã.

7.3.1 Tìm $r(t)$ và $\theta(t)$

Giá trị của $\dot{r}$ tại một vị trí bất kỳ được tìm bởi (7.13) là:

$$
\frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{E - \frac{L^2}{2mr^2} - V(r)}
\tag{7.14}
$$

Để tìm được $r(t)$ từ phương trình này, chúng ta cần biết E và L (xác định bởi giá trị đầu của r, $\dot{r}$ và $\dot{\theta}$), và cả giá trị của hàm $V(r)$. Để giải phương trình vi phân này, chúng ta "đơn giản" là tách biến và sau đó (về mặt lý thuyết) là lấy tích phân

$$
\int \frac{dr}{\sqrt{E - \frac{L^2}{2mr^2} - V(r)}} = \pm\int\sqrt{\frac{2}{m}}dt = \pm\sqrt{\frac{2}{m}}(t - t_0)
\tag{7.15}
$$

Chúng ta cần tính tích phân (khá là phiền phức) này ở vế trái, để tìm ra t như là một hàm số của r. Sau khi tìm được $t(r)$, chúng ta (về lý thuyết) cũng có thể lấy hàm ngược để tìm $r(t)$. Cuối cùng, thay kết quả $r(t)$ mới tìm được vào biểu thức $\dot{\theta} = L/mr^2$ từ phương trình (7.13) cho ta $\dot{\theta}$ như là một hàm của t, mà về lý thuyết là chúng ta có thể lấy tích phân hàm này để nhận được $\theta(t)$.

Như là bạn có thể đã dự đoán được, quá trình này có khả năng là khó thực hiện. Với hầu hết $V(r)$, tích phân ở phương trình (7.15) thường không thể đưa về được các dạng biểu diễn hiển quen thuộc đã biết. Chỉ có một số hàm thế $V(r)$ "đẹp" là chúng ta có thể tính tích phân được. Và ngay cả trong các trường hợp này, phần tính toán còn lại cũng không dễ dàng gì.[6] Nhưng tin tốt lành là những phương trình thế năng "đẹp" này chính xác là những dạng mà chúng ta chủ yếu sẽ quan tâm tới. Cụ thể, đó là thế năng hấp dẫn, mà có dạng tỉ lệ với $1/r$ và là dạng thế năng mà chúng ta sẽ tập trung nghiên cứu trong suốt phần còn lại của chương này, sẽ dẫn đến một tích phân mà chúng ta có thể tính tích phân được (thế năng đàn hồi $\sim r^2$ cũng tương tự như vậy). Tuy nhiên, sau khi nói tất cả những điều này, chúng ta sẽ không sử dụng phương pháp này cho lực hấp dẫn. Bạn chỉ cần biết là nó tồn tại, nhưng chúng ta sẽ không làm bất cứ cái gì khác với nó. Thay vào đó, chúng ta sẽ sử dụng phương pháp sau để giải ra r như là một hàm của θ

7.3.2 Tìm $r(\theta)$

Chúng ta có thể khử dt từ phương trình (7.13) bằng cách cho số hạng $\dot{r}^2$ đứng riêng ra ở vế trái trong phương trình thứ hai, sau đó chia cho bình phương của phương trình thứ nhất. Số hạng dt^2 bị khử, và chúng ta nhận được

$$\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{2mE}{L^2} - \frac{1}{r^2} - \frac{2mV(r)}{L^2}. \tag{7.16}$$

Bây giờ, về mặt lý thuyết, chúng ta có thể lấy căn bậc hai, tách biến và tích phân để nhận được θ như là một hàm của r. Chúng ta sau đó (về lý thuyết) lấy hàm ngược để nhận được r như là một hàm của θ. Để làm được điều này, chúng ta phải được cho dạng hàm của $V(r)$. Vì vậy bây giờ chúng ta sẽ đưa ra cho chúng ta một hàm $V(r)$ và giải bài toán theo cách trên. Chúng ta sẽ nghiên cứu loại thế năng quan trọng nhất trong số các thế năng, hoặc cũng có thể là nó quan trọng thứ hai thôi, đó là thế năng hấp dẫn.[7]

7.4 Lực hấp dẫn, các định luật Kepler

7.4.1 Tính $r(\theta)$

Mục tiêu của chúng ta ở mục này là nhận được r như là một hàm của θ, với thế năng là thế năng hấp dẫn. Hãy giả thiết là chúng ta đang làm việc với Trái Đất và Mặt Trời, với khối lượng lần lượt là m và $M_\odot$. Thế năng hấp dẫn của hệ Trái Đất - Mặt Trời là

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r}, \quad \text{trong đó } \alpha \equiv GM_\odot m. \tag{7.17}$$

[6]Tất nhiên, nếu bạn không đủ kiên nhẫn hoặc bạn cảm thấy bế tắc, bạn vẫn luôn còn giải pháp là tính xấp xỉ bằng phương pháp số. Xem Mục 1.4 về thảo luận của vấn đề này.

[7]Hai loại thế năng quan trọng nhất trong vật lý có thể là thế năng hấp dẫn và thế năng của dao động điều hòa. Chúng đều đưa đến các phương trình tích phân được, và thú vị hơn nữa là, chúng đều dẫn đến các quỹ đạo hình ellipse.

Ở đây, chúng ta sẽ coi như Mặt Trời được gắn cố định ở gốc tọa độ. Bởi vì $M_\odot \gg m$, việc coi này là xấp xỉ gần đúng cho hệ Trái Đất - Mặt Trời. (Nếu muốn giải bài toán một cách chính xác, chúng ta cần sử dụng *khối lượng rút gọn*, là chủ đề được thảo luận ở Mục 7.4.5) Phương trình (7.16) trở thành

$$\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{2mE}{L^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{2m\alpha}{rL^2}. \tag{7.18}$$

Như đã nói ở trên, chúng ta có thể lấy căn bậc hai, tách biến và lấy tích phân để tìm $\theta(r)$, và sau đó lấy nghịch đảo để tìm ra $r(\theta)$. Phương pháp này, mặc dù không phức tạp, có vẻ khá rắc rối. Vì vậy hãy tìm $r(\theta)$ theo một cách tài tình sau đây.

Với việc các số hạng $1/r$ có mặt khắp nơi thì sẽ dễ dàng hơn khi giải bài toán đối với $1/r$ thay vì giải đối với r. Sử dụng $d(1/r)/d\theta = -(dr/d\theta)/r^2$, và để thuận tiện, đặt $y \equiv 1/r$, phương trình (7.18) trở thành

$$\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = -y^2 + \frac{2m\alpha}{L^2}y + \frac{2mE}{L^2}. \tag{7.19}$$

Đến đây, chúng ta cũng có thể tiếp tục bằng cách dùng phương pháp tách biến, nhưng chúng ta hãy tiếp tục theo một cách khác tinh tế hơn. Nhóm bình phương vế bên phải cho ta

$$\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = -\left(y - \frac{m\alpha}{L^2}\right)^2 + \frac{2mE}{L^2} + \left(\frac{m\alpha}{L^2}\right)^2. \tag{7.20}$$

Để thuận tiện, ký hiệu $z \equiv y - m\alpha/L^2$, chúng ta nhận được

$$\left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2 = -z^2 + \left(\frac{m\alpha}{L^2}\right)^2\left(1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}\right) \equiv -z^2 + B^2, \tag{7.21}$$

trong đó

$$B \equiv \left(\frac{m\alpha}{L^2}\right)\sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}}. \tag{7.22}$$

Tại thời điểm này, theo tinh thần là giải bài toán một cách tinh tế, chúng ta chỉ cần nhìn phương trình (7.21) và quan sát thấy rằng

$$z = B\cos(\theta - \theta_0) \tag{7.23}$$

là nghiệm, bởi vì $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Nhưng trong trường hợp chúng ta cảm thấy áy náy về việc đã không làm theo phương pháp tách biến ít nhất một lần trong bài toán này, hãy giải lại phương trình (7.21) theo cách này. Tích phân trong bài toán này có dạng đẹp đẽ và có thể tích phân được, và chúng ta có

$$\int \frac{dz}{\sqrt{B^2 - z^2}} = \int d\theta \quad \Rightarrow \quad \cos^{-1}\left(\frac{z}{B}\right) = \theta - \theta_0, \tag{7.24}$$

mà cho ta $z = B\cos(\theta - \theta_0)$. Thông thường chúng ta chọn hệ tọa độ sao cho $\theta_0 = 0$, vì vậy từ đây về sau chúng ta có thể bỏ θ_0. Nhắc lại là chúng ta định nghĩa $z \equiv 1/r - m\alpha/L^2$ và chúng ta cũng định nghĩa B ở phương trình (7.22), phương trình (7.23) trở thành

$$\frac{1}{r} = \frac{m\alpha}{L^2}(1 + \epsilon\cos\theta), \tag{7.25}$$

trong đó

$$\epsilon \equiv \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}} \tag{7.26}$$

là *tính tâm sai* của chuyển động của hạt. Chúng ta sẽ tìm hiểu một cách ngắn gọn xem ϵ có ý nghĩa gì.

Đến đây chúng ta đã hoàn tất quá trình tìm $r(\theta)$ đối với thế năng là thế năng hấp dẫn, $V(r) \propto 1/r$. Quá trình này hơi rắc rối, nhưng cũng không đến mức quá khó. Dù gì đi chăng nữa, chúng ta vừa phát hiện ra chuyển động cơ bản của vật thể dưới tác dụng của lực hấp dẫn, là lực tác động tới một lượng vô cùng lớn vật chất trong vũ trụ. Điều này là không tệ cho những tính toán chỉ trong một trang giấy.

Giới hạn của r trong phương trình (7.25) là bao nhiêu? Giá trị nhỏ nhất của r đạt được khi vế phải đạt giá trị lớn nhất, tức là vế phải bằng $(ma/L^2)(1 + \epsilon)$. Do đó

$$r_{\min} = \frac{L^2}{m\alpha(1+\epsilon)}. \tag{7.27}$$

Giá trị lớn nhất của r là bao nhiêu? Câu trả lời phụ thuộc vào việc ϵ lớn hơn hay nhỏ hơn 1. Nếu $\epsilon < 1$ (ứng với các quỹ đạo hình ellipse hay hình tròn, như chúng ta sẽ thấy bên dưới), thì giá trị nhỏ nhất của vế phải của phương trình (7.25) là $(m\alpha/L^2)(1 - \epsilon)$. Do đó,

$$r_{\max} = \frac{L^2}{m\alpha(1-\epsilon)} \quad (\text{nếu } \epsilon < 1). \tag{7.28}$$

Nếu $\epsilon \geq 1$ (ứng với các quỹ đạo hình hypebol hay parabol, như chúng ta thấy bên dưới), thì vế phải của phương trình (7.25) có thể bằng không (khi $\cos\theta = -1/\epsilon$). Do đó,

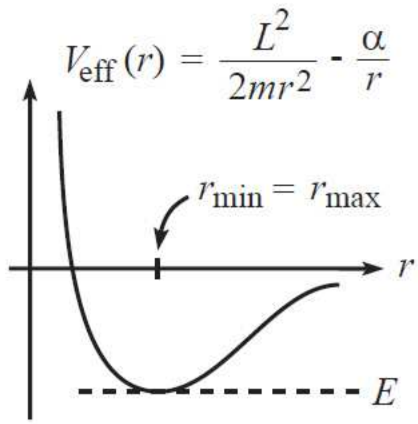
$$r_{\max} = \infty \quad (\text{nếu } \epsilon \geq 1). \tag{7.29}$$

7.4.2 Các dạng quỹ đạo

Hãy kiểm tra một cách chi tiết các trường hợp khác nhau của ϵ.

- **Quỹ đạo tròn** ($\epsilon = 0$).

  Nếu $\epsilon = 0$, thì phương trình (7.26) cho thấy rằng $E = -m\alpha^2/2L^2$. Giá trị E âm nghĩa là phần âm của năng lượng thế năng là lớn hơn phần dương của năng lượng động năng, vì vậy mà hạt bị mắc ở trong giếng thế năng. Phương trình (7.27) và phương trình (7.28) cho ta $r_{\min} = r_{\max} = L^2/m\alpha$. Do đó, hạt chuyển động theo một

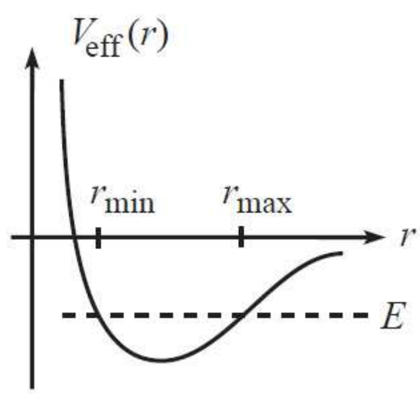


Hình 7.2:

quỹ đạo hình tròn với bán kính $L^2/m\alpha$. Nói một cách tương đương, phương trình (7.25) chỉ ra rằng r là độc lập với θ.

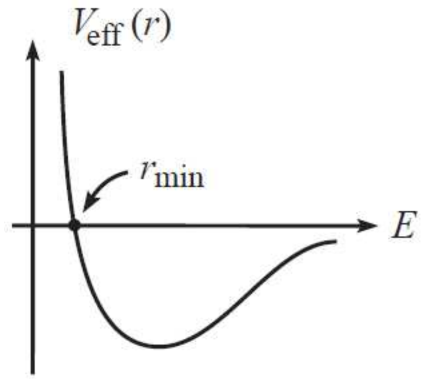
Chú ý rằng chúng ta không cần thiết phải làm tất cả các bước ở Mục 7.4.1 nếu chúng ta chỉ muốn xét chuyển động tròn. Với một L cho trước, năng lượng $-m\alpha^2/2L^2$ là giá trị nhỏ nhất mà E được cho bởi phương trình ((7.13) có thể đạt được. Điều này đúng bởi vì để đạt tới giá trị nhỏ nhất thì $\dot{r} = 0$. Và bạn có thể chỉ ra rằng việc cực tiểu hóa giá trị của thế hiệu dụng, $L^2/2mr^2 - \alpha/r$, nhận được giá trị nhỏ nhất này của E. Nếu chúng ta vẽ đồ thị của $V_{\text{eff}}(r)$, chúng ta sẽ thấy tình huống như ở hình 7.2. Hạt bị mắc ở đáy của giếng thế năng, vì vậy nó không có chuyển động theo hướng của r.

- **Quỹ đạo ellipse** $(0 < \epsilon < 1)$.



Hình 7.3:

Nếu $0 < \epsilon < 1$, thì phương trình (7.26) cho chúng ta biết rằng $-m\alpha^2/2L^2 < E < 0$. Các phương trình (7.27) và (7.28) cho r_{min} và r_{max}. Điều không hiển nhiên là quỹ đạo của chuyển động là hình ellipse. Chúng ta sẽ minh họa điều này ở dưới. Nếu



Hình 7.4:

chúng ta vẽ đồ thị của $V_{\text{eff}}(r)$, chúng ta sẽ thấy tình huống như ở hình 7.3. Hạt dao động giữa r_{min} và r_{max}. Năng lượng là âm, vì vậy hạt bị mắc ở trong giếng thế năng.

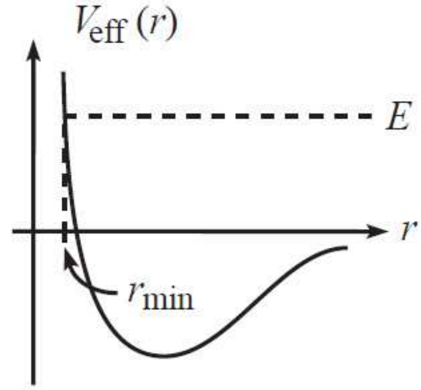
- **Quỹ đạo parabol** ($\epsilon = 1$).

  Nếu $\epsilon = 1$, thì phương trình (7.26) cho ta biết rằng $E = 0$. Giá trị này của E cho thấy rằng hạt chỉ vừa đủ năng lượng để tiến ra vô cùng (vận tốc dần tới không khi $r \to \infty$). Phương trình (7.27) cho ta $r_{\text{min}} = L^2/2m\alpha$, và phương trình (7.29) cho ta $r_{\text{max}} = \infty$. Lại một lần nữa, điều không hiển nhiên ở đây là quỹ đạo chuyển động là hình parabol. Chúng ta sẽ minh họa điều này ở bên dưới.

  Nếu chúng ta vẽ đồ thị của $V_{\text{eff}}(r)$, chúng ta sẽ gặp tình huống như được chỉ ra trong hình 7.4. Hạt không dao động qua lại theo hướng của r. Hạt di chuyển hướng vào trong (mà cũng có thể là không, nếu ban đầu nó di chuyển hướng ra ngoài), đổi hướng ở tại $r_{\text{min}} = L^2/2m\alpha$, và sau đó tiến ra ngoài tới vô cùng mãi mãi.

- **Quỹ đạo hypebol** ($\epsilon > 1$).

  Nếu $\epsilon > 1$, thì phương trình (7.26) cho ta biết rằng $E > 0$. Giá trị này của E cho thấy hạt tiến tới vô cùng mà vẫn còn năng lượng dự trữ. Thế năng tiến tới không khi $r \to \infty$, vì vậy vận tốc của hạt đạt tới giá trị khác không $\sqrt{2E/m}$ khi $r \to \infty$. Phương trình (7.27) cho ta r_{min}, và phương trình (7.29) cho ta $r_{\text{max}} = \infty$. Lại một lần nữa, điều không hiển nhiên ở đây là quỹ đạo chuyển động là một đường hypebol. Chúng ta sẽ minh họa điều này ở dưới. Nếu chúng ta vẽ đồ thị của $V_{\text{eff}}(r)$, chúng ta sẽ gặp tình huống như ở trong hình 7.5. Như ở trong trường hợp quỹ đạo hình parabol, hạt không dao động qua lại theo hướng của r. Nó chuyển động hướng vào trong (mà cũng có thể là không, nếu ban đầu nó di chuyển hướng ra ngoài), đổi hướng ở tại r_{min}, và sau đó tiến ra ngoài tới vô cùng mãi mãi.



Hình 7.5:

7.4.3 Chứng minh quỹ đạo chuyển động là các đường conic

Bây giờ chúng ta sẽ đi chứng minh phương trình (7.25) mô tả những quỹ đạo chuyển động là các đường conic nêu ở mục trên. Ta cũng sẽ chỉ ra rằng gốc thế năng là một tiêu điểm của đường conic. Ta sẽ chứng minh trực tiếp, mặc dù với trường hợp ellip và hypebol thì hơi khó hơn chút. Ở phần dưới, bạn sẽ thấy dễ dàng hơn khi chúng ta làm việc với hệ tọa độ Đề-các. Để thuận tiện, đặt

$$k \equiv \frac{L^2}{m\alpha}. \tag{7.30}$$

Nhân cả hai vế của (7.25) với kr, và sử dụng $\cos\theta = x/r$, ta được

$$k = r + \epsilon x. \tag{7.31}$$

Rút r rồi bình phương lên, ta được

$$x^2 + y^2 = k^2 - 2k\epsilon x + \epsilon^2 x^2. \tag{7.32}$$

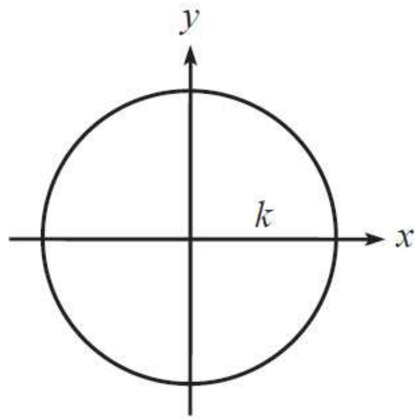
Ta hãy xét các trường hợp khác nhau của ϵ. Ở đây chúng ta cũng sẽ nêu ra một số sự kiện về tính chất của các đường conic (ví dụ như tiêu cự,...) mà không chứng minh.

- **Quỹ đạo tròn** ($\epsilon = 0$).
  Trong trường hợp này, phương trình (7.32) trở thành $x^2 + y^2 = k^2$. Như vậy chúng ta có đường tròn bán kính $k = L^2/m\alpha$ với tâm ở gốc (xem Hình 7.6).

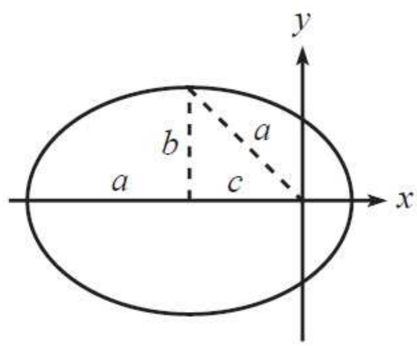
- **Quỹ đạo ellip** ($0 < \epsilon < 1$).

  Trong trường hợp này, phương trình (7.32) có thể được viết dưới dạng (sau một số biến đổi)

$$\frac{\left(x + \frac{k\epsilon}{1-\epsilon^2}\right)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ trong đó } a = \frac{k}{1-\epsilon^2}, \text{ và } b = \frac{k}{\sqrt{1-\epsilon^2}}. \tag{7.33}$$



Hình 7.6:



Hình 7.7:

Đây là phương trình của một ellip với tâm ở $(-k\epsilon/(1-\epsilon^2), 0)$. Độ dài bán trục lớn và bán trục nhỏ lần lượt là a và b. Tiêu cự $c = \sqrt{a^2 - b^2} = k\epsilon/(1-\epsilon^2)$. Do đó, một tiêu điểm nằm ở gốc tọa độ (xem Hình 7.7).Chú ý rằng c/a bằng tính tâm sai của chuyển động, ϵ

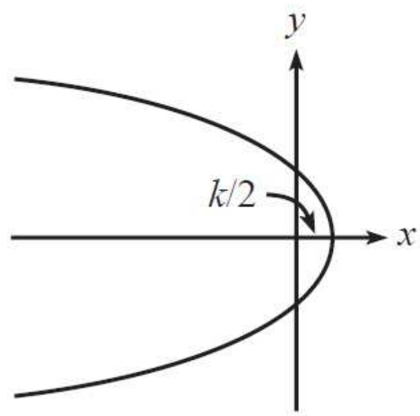
- **Quỹ đạo parabol** ($\epsilon = 1$).
  Trong trường hợp này, (7.32) trở thành $y^2 = k^2 - 2kx$, hay chúng ta có thể viết dưới dạng $y^2 = -2k(x - \frac{k}{2})$. Đây là phương trình của một parabol với đỉnh ở $(k/2, 0)$ và tiêu cự là $k/2$. (Tiêu cự của một parabol có phương trình dạng $y^2 = 4ax$ là a). Như vậy chúng ta có một parabol với tiêu điểm nằm ở gốc tọa độ (xem Hình 7.8).

- **Quỹ đạo hypebol** ($\epsilon > 1$).

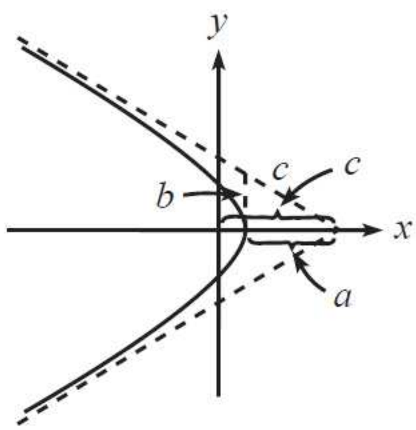
Trong trường hợp này, (7.32) có thể viết thành (sau một số biến đổi)

$$\frac{\left(x - \frac{k\epsilon}{\epsilon^2-1}\right)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ trong đó } a = \frac{k}{\epsilon^2 - 1}, \text{ và } b = \frac{k}{\sqrt{\epsilon^2 - 1}}. \tag{7.34}$$

Đây là phương trình của một hypebol với tâm (được định nghĩa là giao của các



Hình 7.8:



Hình 7.9:

đường tiệm cận) ở $(k\epsilon/(\epsilon^2-1), 0)$. Tiêu cự là $c = \sqrt{a^2+b^2} = k\epsilon/(\epsilon^2-1)$. Do đó tiêu điểm nằm ở gốc tọa độ. Chú ý rằng c/a bằng tâm sai của chuyển động, ϵ.

Tham số ảnh hưởng (impact parameter) của một đường quỹ đạo chuyển động (thường ký hiệu là b) được định nghĩa là khoảng cách gần nhất tới gốc tọa độ mà hạt có thể đạt được nếu nó di chuyển trên một đường thẳng được xác định bởi vận tốc ban đầu của nó khi nó ở xa gốc tọa độ (nghĩa là, di chuyển dọc trên đường chấm chấm trong Hình 7.9). Bạn có thể nghĩ là chọn ký hiệu b ở đây hình như là có vấn đề, vì chúng ta vừa định nghĩa b ở phương trình (7.34). Tuy nhiên, điều ngạc nhiên là hai định nghĩa này thực chất là giống nhau hoàn toàn (Xem bài tập 7.14), do đó mọi thứ đều ổn.

Phương trình (7.34) thực chất là mô tả toàn bộ hypebol, nghĩa là nó mô tả cả nhánh mở về phía bên phải, với tiêu cự là $(2k\epsilon/(\epsilon^2-1), 0)$. Tuy nhiên, nhánh bên phải này thực chất đã được giới thiệu khi chúng ta sử dụng phép lấy bình phương trong quá trình xây dựng phương trình (7.32). Nó không phải là một nghiệm của phương trình ban đầu mà chúng ta muốn giải, phương trình (7.31). Hóa ra rằng nhánh ở phía bên phải (hoặc là hình ảnh đối xứng gương của nó lấy theo trục y, tùy vào quy ước dấu của bạn đối với B

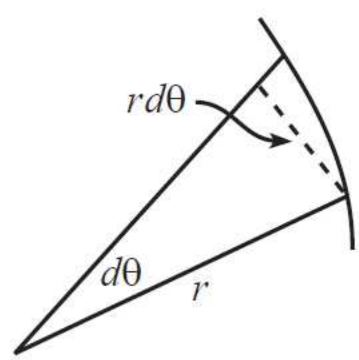
và ϵ), là liên quan tới một lực thế đẩy, thay vì một lực thế hấp dẫn, $1/r$; xem Bài tập 7.21.

7.4.4 Các định luật Kepler

Bây giờ, chúng ta có thể viết các định luật của Kepler với các công việc cần phải tiến hành thêm là ít nhất. Kepler(1571-1630) sống trước thời của Newton(1642-1727), do đó ông không biết về các định luật của Newton. Kepler khám phá ra các định luật của ông thông qua một khối lượng cực kỳ ấn tượng các dữ liệu quan sát. Từ thời Copernicus(1473-1543), người ta đã biết rằng các hành tinh di chuyển xung quanh mặt trời. Nhưng Kepler là người đầu tiên đưa ra những mô tả về quỹ đạo chuyển động. Các định luật Kepler giả thiết là khối lượng của mặt trời đủ lớn để vị trí của nó gần như là cố định trong không gian. Đây là một cách xấp xỉ tốt, nhưng ở mục sau nói về *khối lượng hiệu dụng*, chúng ta sẽ chỉ ra làm sao để hiệu chỉnh các định luật này và giải các bài toán một cách chính xác.

- **Định luật thứ nhất:** *Các hành tinh chuyển động theo quỹ đạo ellip với mặt trời là một tiêu điểm.*
  Ta đã chứng minh điều này ở phương trình (7.33).[8] Không nghi ngờ là có những vật thể chuyển động quanh mặt trời với quỹ đạo hypebol, nhưng chúng ta không gọi đó là những hành tinh, vì chúng ta không bao giờ nhìn thấy chúng xuất hiện lần thứ hai.

- **Định luật thứ hai:** *Vector bán kính của một hành tinh chuyển động quét thành những phần diện tích với vận tốc không phụ thuộc vào vị trí của chúng trong quỹ đạo.*



Hình 7.10:

Định luật này là một cách diễn đạt khác của định luật bảo toàn động lượng. Diện

[8]Bạn có thể xem thêm chứng minh hình học của Fyenman (và cả Maxwell) trong Goodstein và Goodstein (1996).

tích mà bán kính quỹ đạo quét nên trong khoảng thời gian ngắn là $dA = r(rd\theta)/2$, bởi vì $rd\theta$ là đáy của tam giác mảnh ở trong Hình 7.10.Do đó, ta có (dùng $L = mr^2\dot{\theta}$)

$$\frac{dA}{dt} = \frac{r^2\dot{\theta}}{2} = \frac{L}{2m}, \tag{7.35}$$

là hằng số, bởi vì L là hằng số đối với một lực xuyên tâm. Chứng minh ngắn này hoàn toàn độc lập với những gì chúng ta đã làm trong các Mục 7.4.1-7.4.3.

- **Định luật thứ ba:** *Bình phương của chu kỳ chuyển động, T, tỷ lệ với lập phương của bán trục lớn a. Chính xác hơn thì,*

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM_\odot}, \tag{7.36}$$

trong đó $M_\odot$ là khối lượng của mặt trời. Chú ý rằng khối lượng của hành tinh không xuất hiện trong phương trình.

Chứng minh. Tích phân phương trình (7.35) theo thời gian trên cả quỹ đạo, ta có

$$A = \frac{LT}{2m}. \tag{7.37}$$

Nhưng diện tích của một ellipse là $A = \pi ab$, trong đó a và b lần lượt là độ dài bán trục lớn và bán trục nhỏ. Bình phương hai vế của (7.37) và dùng (7.33) để viết $b = a\sqrt{1-\epsilon^2}$, ta được

$$\pi^2 a^4 = \left(\frac{L^2}{m(1-\epsilon^2)}\right)\frac{T^2}{4m}. \tag{7.38}$$

Bây giờ chúng ta có thể sử dụng liên hệ $L^2 \equiv m\alpha k$ thu được từ (7.30) để chuyển số hạng trong ngoặc ở vế phải thành $\alpha k/(1-\epsilon^2) \equiv \alpha a$, trong đó a được cho bởi (7.33). Nhưng $\alpha a \equiv (GM_\odot m)a$ nên ta nhận được

$$\pi^2 a^4 = \frac{(GM_\odot m a)T^2}{4m}, \tag{7.39}$$

mà suy ra (7.36) như ta mong muốn. □

Ba định luật này mô tả chuyển động của tất cả các hành tinh (và các tiểu hành tinh, các sao chổi và các loại tương tự) trong hệ mặt trời. Nhưng hệ mặt trời của chúng ta chỉ là phần trên của tảng băng trôi khổng lồ. Có rất nhiều thứ khác ngoài kia, và chúng đều chịu tác động của lực hấp dẫn (mặc dù luật bình phương nghịch đảo của Newton phải được thay thế bằng thuyết tương đối rộng của Einstein về lực hấp dẫn). Có cả một vũ trụ xung quanh ta, và ngày qua ngày, chúng ta thấy và hiểu ngày càng nhiều hơn về chúng, cả về mặt quan sát và lý thuyết. Trong những năm gần đây, chúng ta thậm chí còn bắt đầu tìm kiếm những người bạn mà chúng ta có thể có ngoài kia. Tại sao? Bởi vì chúng ta có thể. Chẳng có gì là sai khi chúng ta đi tìm kiếm những thứ mà chúng ta nghĩ là có và dễ tìm nhưng thực ra là không thể tìm được. Việc này chính là một trường hợp điển hình.

7.4.5 Khối lượng hiệu dụng

Chúng ta giả thiết ở Mục 7.4.1 là mặt trời đủ lớn để sự ảnh hưởng của các hành tinh đối với nó là không đáng kể. Tức là, nó gần như cố định ở gốc tọa độ. Nhưng làm thế nào chúng ta giải quyết vấn đề khi khối lượng của hai vật thể tương tác là có thể so sánh được? Nói một cách tương đương, làm sao chúng ta giải quyết bài toán trái đất - mặt trời một cách chính xác? Ta cần điều chỉnh một chút bằng cách thay thế khối lượng trái đất với khối lượng hiệu dụng như được định nghĩa ở dưới. Những thảo luận sau đây đúng với tất cả các lực xuyên tâm chứ không chỉ riêng lực hấp dẫn.

Phương trình Lagrange tổng quát của một hệ lực xuyên tâm gồm hai vật có khối lượng m_1 và m_2 là

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2 - V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|). \tag{7.40}$$

Ở đây chúng ta viết thế năng chỉ phụ thuộc vào khoảng cách $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$, bởi vì chúng ta giả thiết lực tác dụng là một lực xuyên tâm. Ta định nghĩa

$$\mathbf{R} \equiv \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad \text{và} \quad \mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2. \tag{7.41}$$

Hai vector $\mathbf{R}$ và $\mathbf{r}$ lần lượt là vector vị trí của khối tâm và vector nối giữa hai vật. Giải ngược hai phương trình này ta nhận được

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{m_2}{M}\mathbf{r}, \quad \text{và} \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{m_1}{M}\mathbf{r}, \tag{7.42}$$

trong đó $M \equiv m_1 + m_2$ là tổng khối lượng của hệ. Phương trình Lagrange viết dưới dạng hàm của $\mathbf{R}$ và $\mathbf{r}$ sẽ là

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{2}m_1\left(\dot{\mathbf{R}} + \frac{m_2}{M}\dot{\mathbf{r}}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{\mathbf{R}} - \frac{m_1}{M}\dot{\mathbf{r}}\right)^2 - V(|\mathbf{r}|) \\
&= \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right)\dot{\mathbf{r}}^2 - V(r) \\
&= \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 - V(r),
\end{aligned} \tag{7.43}$$

trong đó *khối lượng hiệu dụng*, μ, được định nghĩa là

$$\frac{1}{\mu} \equiv \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}. \tag{7.44}$$

Ta chú ý rằng phương trình Lagrange (7.43) chỉ phụ thuộc vào $\dot{\mathbf{R}}$ mà không phụ thuộc vào $\mathbf{R}$. Do đó, phương trình Euler-Lagrange nói rằng $\dot{\mathbf{R}}$ là hằng số. Nghĩa là khối tâm của hệ di chuyển với tốc độ không đổi (đây chỉ là trạng thái mà không có ngoại lực tác dụng). Chuyển động của khối tâm do đó là không quan trọng, nên chúng ta bỏ qua nó. Phương trình Lagrange của chúng ta do đó trở thành

$$\mathcal{L} \to \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 - V(r). \tag{7.45}$$

Nhưng đây đơn giản chính là phương trình Lagrange của một vật có khối lượng μ di chuyển xung quanh một gốc tọa độ cố định, dưới tác dụng của hàm thế $V(r)$. Đối với lực hấp dẫn, ta có

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{\alpha}{r} \quad \text{(trong đó } \alpha = GM_{\odot}m\text{)}. \tag{7.46}$$

Để giải bài toán hệ trái đất - mặt trời một cách chính xác, chúng ta do đó chỉ cần thay thế (trong các tính toán ở trong Mục 7.4.1) khối lượng của trái đất, m, với khối lượng hiệu dụng μ, được cho bởi

$$\frac{1}{\mu} \equiv \frac{1}{m} + \frac{1}{M_{\odot}}. \tag{7.47}$$

Giá trị kết quả của r trong phương trình (7.25) là khoảng cách giữa mặt trời và trái đất. Do đó theo (7.42) thì khoảng cách từ khối tâm của hệ tới trái đất và mặt trời lần lượt là $(M_{\odot}/M)r$ và $(m/M)r$. Những khoảng cách này chỉ là các giá trị sai kém r khi giảm đi bởi các hệ số khác nhau, nên chúng biểu diễn một ellipse, vì vậy chúng ta thấy rằng trái đất và mặt trời di chuyển theo các quỹ đạo hình ellipse (có kích cỡ theo tỷ lệ $M_{\odot}/m$) với khối tâm của hệ là một tiêu điểm. Chú ý rằng các giá trị của m trong L và ϵ ở trong phương trình (7.25) phải được đổi thành của μ. Nhưng α vẫn được định nghĩa là $GM_{\odot}m$, do đó m trong định nghĩa này *không* được thay bởi μ.

Đối với hệ trái đất-mặt trời, giá trị μ trong phương trình (7.47) về cơ bản là bằng m, bởi vì $M_{\odot}$ là rất lớn. Sử dụng $m = 5.97.10^{24}$kg và $M_{\odot} = 1.99.10^{30}$kg chúng ta thấy rằng μ nhỏ hơn m khoảng một phần 3.10^5. Do đó giả thiết xấp xỉ mặt trời đứng yên của chúng ta là một giả thiết xấp xỉ tốt. Bạn có thể chỉ ra rằng khối tâm của hệ ở vào khoảng 5.10^5m tính từ tâm của mặt trời, hoàn toàn nằm bên trong mặt trời (có khoảng cách là khoảng một phần ngàn bán kính).

Định luật Kepler được điều chỉnh như thế nào khi chúng ta tiến hành giải tìm các quỹ đạo chuyển động một cách chính xác khi sử dụng khối lượng hiệu dụng?

- **Định luật thứ nhất:** Phát biểu quỹ đạo ellipse ở định luật thứ nhất vẫn đúng, nhưng với khối tâm của hệ (chứ không phải mặt trời) là một tiêu điểm. Mặt trời cũng di chuyển với quỹ đạo ellipse với khối tâm của hệ là một tiêu điểm.[9] Những gì đúng cho trái đất cũng đều đúng cho mặt trời, bởi vì chúng chúng có vai trò như nhau ở trong phương trình (7.43). Điều khác biệt duy nhất là sự khác nhau về độ lớn của các đại lượng.

- **Định luật thứ hai:** Trong định luật thứ hai, chúng ta cần phải xét đến vector vị trí từ khối tâm của hệ (chứ không phải từ mặt trời) tới trái đất. Vector này quét những diện tích bằng nhau trong những khoảng thời gian bằng nhau, bởi vì moment động lượng của trái đất (và cả mặt trời) đối với khối tâm hệ là hằng số. Điều này đúng bởi vì lực hấp dẫn luôn có hướng qua khối tâm của hệ, vì vậy lực tác động là lực xuyên tâm với khối tâm hệ được chọn là gốc tọa độ.

- **Định luật thứ ba:** Chu kỳ của quỹ đạo trái đất (và của cả mặt trời) bằng với chu kỳ của hạt có khối lượng μ trong giả thiết của chúng ta chuyển động theo quỹ đạo xung quanh một gốc tọa độ cố định dưới tác dụng của lực thế $-\alpha/r \equiv -GM_\odot m/r$. Điều này là đúng vì các vector bán kính trong cả ba hệ này đều có cùng tỷ lệ. Để tìm chu kỳ của quỹ đạo hạt, chúng ta có thể tiến hành lại các bước dẫn tới phương trình (7.39). Nhưng trong phương trình đó, đại lượng m ở dưới mẫu số được thay bởi μ, trong khi m ở tử số vẫn được giữ nguyên là m, bởi vì m này xuất hiện trong α. Do đó, chúng ta thu được[10]

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a_\mu^3 \mu}{GM_\odot m} = \frac{4\pi^2 a_\mu^3}{GM}, \tag{7.48}$$

trong đó chúng ta đã sử dụng $\mu \equiv M_\odot m/(M_\odot + m) \equiv M_\odot m/M$. Kết quả này đối xứng với $M_\odot$ và m, như nó phải là như thế vì nếu chúng ta thay đổi các ký hiệu của $M_\odot$ và m, chúng ta vẫn thu được cùng một hệ. Và nó cũng sẽ đưa về (7.36) một cách chính xác khi $M_\odot \gg m$.

Nếu bạn muốn viết (7.48) theo bán trục lớn của quỹ đạo ellipse của trái đất $a_E = (M_\odot/M)a_\mu$, thì bạn chỉ cần thay $a_\mu = (M/M_\odot)a_E$ để nhận được

$$T^2 = \frac{4\pi^2 (M/M_\odot)^3 a_E^3}{GM} = \left(\frac{M^2}{M_\odot^2}\right)\frac{4\pi^2 a_E^3}{GM_\odot}. \tag{7.49}$$

[9]Điều này chỉ đúng khi chỉ có một hành tinh. Với trường hợp nhiều hành tinh thì chuyển động rất nhỏ của mặt trời là rất phức tạp. Đây có lẽ là lý do tốt nhất để làm việc với các giả thiết xấp xỉ trong đó mặt trời về cơ bản là cố định.

[10]Ta đặt chỉ số dưới μ vào độ dài a để nhắc nhở chúng ta rằng đó là bán trục lớn của quỹ đạo của hạt trong giả thiết của chúng ta, chứ không phải là bán trục lớn của quỹ đạo trái đất.

Hãy kiểm tra công thức này bằng cách xét trường hợp đặc biệt khi các vật có cùng khối lượng m, chuyển động theo cùng quỹ đạo là đường tròn bán kính r (ở những điểm đầu mút của đường kính) với khối tâm của chúng nằm ở tâm đường tròn. Với hệ đơn giản này, chúng ta có thể tìm chu kỳ bằng cách sử dụng $F = ma$:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{Gm^2}{(2r)^2} \Rightarrow \frac{m(2\pi r/T)^2}{r} = \frac{Gm^2}{(2r)^2} \Rightarrow T^2 = \frac{16\pi^2 r^3}{Gm}, \tag{7.50}$$

có kết quả phù hợp với phương trình (7.49), với ký hiệu khác nhau, ở đây $M = 2M_\odot$.

Thực ra có một cách khá là nhanh để xem hệ số $M^2/M_\odot^2$ trong phương trình (7.49) đến từ đâu. Tưởng tượng một hệ mới trong đó quỹ đạo trái đất có các chiều không đổi nhưng trong đó mặt trời đang (hơi) chuyển động một chút được thay thế bằng một khối lượng đứng im gắn chặt tại khối tâm của hệ trái đất - mặt trời. Khối lượng mới này có khoảng cách tới trái đất có tỷ lệ $M_\odot/M$ so với khoảng cách từ mặt trời tới trái đất. Do đó, bởi vì lực hấp dẫn là tỷ lệ với $1/r^2$, nếu chúng ta chọn khối lượng mới có khối lượng là $(M_\odot/M)^2 M_\odot$, thì nó sẽ tác động một lực vào trái đất giống như là lực mặt trời tác động vào. Do vậy nếu như mẹ trái đất của chúng ta nhắm mắt lại, bà ấy sẽ không bao giờ nhận ra sự khác biệt. Các chu kỳ của hai hệ này do đó phải giống nhau. Nhưng từ phương trình (7.36), chu kỳ của hệ thứ hai, với một vật thể được cố định, là

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a_E^3}{G \cdot (M_\odot/M)^2 M_\odot}, \tag{7.51}$$

phù hợp với phương trình (7.49).

7.5 Bài tập

Mục 7.2: Thế hiệu dụng

7.1. Đường xoắn ốc dạng mũ *

Cho L, tìm $V(r)$ mà dẫn đến đường quỹ đạo xoắn ốc có dạng $r = r_0 e^{a\theta}$. Chọn E bằng không. *Gợi ý*: Nhận một biểu thức đối với $\dot{r}$ mà không chứa θ, và sau đó sử dụng phương trình (7.9).

7.2. Mặt cắt ngang **

Một chất điểm chuyển động trong một trường thế $V(r) = -C/(3r^3)$.

(a) Cho L, tìm giá trị lớn nhất của thế hiệu dụng.

(b) Giả sử chất điểm đến từ khoảng cách xa vô cùng với vận tốc v_0 và với tham số ảnh hưởng là b. Biểu diễn theo C, m và v_0, hãy tìm giá trị lớn nhất của b (gọi là $b_{\max}$) sao cho chất điểm rơi vào và bị giữ bởi trường thế trên? Nói cách khác, "mặt cắt" $\pi b_{\max}^2$ của việc giữ trên đối với trường thế này bằng bao nhiêu?

7.3. Giá trị lớn nhất của L ***

Một chất điểm di chuyển trong trường thế $V(r) = -V_0 e^{-\lambda^2 r^2}$.

(a) Cho L, tìm bán kính của quỹ đạo chuyển động tròn ổn định. Một phương trình dạng ẩn cũng được chấp nhận.

(b) Hóa ra rằng nếu L quá lớn, thì sẽ không tồn tại quỹ đạo chuyển động tròn. Hỏi giá trị lớn nhất của L bằng bao nhiêu để cho quỹ đạo tròn trong thực tế tồn tại? Nếu gọi r_0 là bán kính của quỹ đạo tròn trong trường hợp tới hạn này, hãy tính giá trị của $V_{\text{eff}}(r_0)$?

Mục 7.4: Trọng lực, các định luật Kepler

7.4. Thế r^k ***

Một chất điểm có khối lượng m chuyển động trong một trường thế cho bởi $V(r) = \beta r^k$. Gọi moment động lượng là L.

(a) Tìm bán kính r_0 của quỹ đạo tròn.

(b) Nếu chất điểm được chuyển cho một tác động rất nhỏ sao cho bán kính quỹ đạo biến đổi dao động xung quanh giá trị r_0, hãy tìm tần số, ω_r, của các dao động nhỏ nhỏ này của r.

(c) Tìm tỉ số của tần số ω_r đối với tần số của chuyển động (gần) tròn, $\omega_\theta \equiv \dot{\theta}$? Hãy chỉ ra một vài giá trị của k sao cho tỉ số này là số hữu tỷ, nghĩa là, sao cho các đường quỹ đạo gần tròn bản thân chúng là các đường cong đóng.

7.5. Lò xo ellipse ***

Một chất điểm chuyển động trong một trường thế $V(r) = \beta r^2$. Hãy theo các bước làm như ở trong Mục 7.4.1 và 7.4.3, chỉ ra rằng đường đi của chất điểm là hình ellipse.

7.6. Trường thế dạng β/r^2 ***

Một chất điểm chuyển động trong trường thế có dạng $V(r) = \beta/r^2$. Hãy theo các bước đã làm trong Mục 7.4.1, tìm hình dạng đường đi của chất điểm. Bạn sẽ cần phải xét các trường hợp khác nhau của β.

7.7. Tán xạ Rutherford ***

Một chất điểm có khối lượng m chuyển động theo một quỹ đạo hình hyperbolic qua một khối lượng M có vị trí được giả thiết là không đổi. Tốc độ ở vô cùng là v_0 và tham số ảnh hưởng là b (xem Bài tập luyện tập 7.14.

(a) Chỉ ra rằng góc mà chất điểm bị chệch đi là

$$\phi = \pi - 2\tan^{-1}(\gamma b) \Longrightarrow b = \frac{1}{\gamma}\cot\left(\frac{\phi}{2}\right), \tag{7.52}$$

trong đó $\gamma \equiv v_0^2/GM$.

(b) Gọi $d\sigma$ là diện tích mặt cắt ngang (được tính khi chất điểm ban đầu ở vô cùng) mà bị chệch vào một góc khối có độ lớn $d\Omega$ tại góc ϕ.[11] Hãy chỉ ra rằng

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4\gamma^2\sin^4(\phi/2)}. \tag{7.53}$$

Đại lượng này được gọi là *mặt cách ngang vi phân. Chú ý*: tên của bài toán này, *tán xạ Rutherford*, thực ra là đề cập đến sự tán xạ của các phần tử tích điện. Nhưng bởi vì các lực tĩnh điện và lực hấp dẫn đều tuân theo quy luật bình phương nghịch đảo, nên công thức tán xạ trông sẽ giống nhau, ngoại trừ một vài hằng số.

7.6 Bài tập luyện tập

Mục 7.1: Bảo toàn moment động lượng

7.8. Quấn quanh một cột *

Một quả bóng khúc côn cầu có khối lượng m đang trượt không ma sát trên mặt băng bị gắn bởi một sợi dây nằm ngang có chiều dài ℓ với một cột thẳng đứng có bán kính R. Ban đầu quả bóng di chuyển trong một quỹ đạo (về cơ bản được coi là hình) tròn xung quanh cột với tốc độ v_0. Sợi dây sẽ quấn vào xung quanh cột, và quả bóng bị kéo vào và cuối cùng sẽ đập vào cột. Đại lượng nào được bảo toàn trong quá trình chuyển động này? Tính vận tốc của quả bóng ngay trước khi nó đập vào cột?

[11] *Góc khối* của một mảnh trên một mặt cầu là diện tích của mảnh đó chia cho bình phương của bán kính mặt cầu. Vì vậy toàn bộ mặt cầu sẽ chắn một góc khối là 4π*steradians* (tên của một đơn vị góc khối).

7.9. Sợi dây xuyên qua một lỗ *

Một vật nặng có khối lượng m trượt trên một mặt bàn không ma sát bị gắn vào một sợi dây nằm ngang đang chuyển động xuyên qua một cái lỗ nhỏ trên bàn. Vật nặng đó ban đầu chuyển động trong một hình tròn bán kính ℓ xung quanh lỗ với tốc độ v_0. Nếu bạn từ từ kéo sợi dây xuống qua cái lỗ, hỏi đại lượng nào được bảo toàn trong suốt quá trình chuyển động này? Hỏi vận tốc của vật nặng bằng bao nhiêu khi nó cách cái lỗ một khoảng cách bằng r?

Mục 7.2: Thế hiệu dụng

7.10. Đường xoắn ốc dạng hàm mũ **

Cho L, hãy tìm $V(r)$ gây ra đường quỹ đạo xoắn ốc có dạng $r = r_0\theta^k$. Chọn E bằng không. *Gợi ý*: Nhận một biểu thức đối với $\dot{r}$ mà không chứa θ, và sau đó sử dụng phương trình (7.9).

Phần 7.4: Trọng lực, các định luật Kepler

7.11. Quỹ đạo tròn *

Đối với một quỹ đạo tròn, hãy chứng minh lại từ đầu định luật thứ ba của Kepler, sử dụng $F = ma$.

7.12. Rơi vào Mặt trời *

Hãy tưởng tượng rằng Trái đất bất ngờ (và rất là bi kịch) bị dừng lại trong quỹ đạo chuyển động của nó, và sau đó rơi vào Mặt trời theo phương hướng tâm. Việc này sẽ mất khoảng thời gian bao lâu? Sử dụng các dữ liệu từ Phụ lục J, và giả sử rằng quỹ đạo ban đầu về cơ bản là hình tròn. *Gợi ý:* Coi quỹ đạo thẳng hướng tâm là một phần của một ellipse rất mỏng.

7.13. Các quỹ đạo giao nhau **

Hai vật nặng khối lượng m và $2m$, chuyển động theo hai quỹ đạo xung quanh khối tâm của chúng. Nếu các quỹ đạo này là hình tròn thì chúng sẽ không giao nhau. Nhưng nếu quỹ đạo của chúng là các hình ellipse thì chúng sẽ giao nhau. Hỏi giá trị bé nhất của tính tâm sai bằng bao nhiêu thì chúng sẽ giao nhau?

7.14. Tham số ảnh hưởng **

Hãy chỉ ra rằng khoảng cách b dượcđịnh nghĩa trong phương trình (7.34) và Hình 7.9 là bằng với tham số ảnh hưởng. Làm bài này:

(a) Bằng hình học, băng cách chỉ ra rằng b là khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường đứt đoạn trong Hình 7.9.

(b) Bằng tính toán, bằng cách cho vật đến từ vô cùng với tốc độ v_0 và tham số ảnh hưởng b', và sau đó chỉ ra rằng b trong phương trình (7.34) bằng với b'.

7.15. Tiếp cận gần nhất **

Một chất điểm với tốc độ v_0 và tham số ảnh hưởng b bắt đầu chuyển động từ rất xa một hành tinh có khối lượng M.

(a) Bắt đầu tính toán từ đầu (nghĩa là, không sử dụng bất cứ kết quả nào của Mục 7.4), hãy tìm khoảng cách tiếp cận gần nhất của chất điểm đến hành tinh đó.

(b) Sử dụng kết quả của thảo luận về hyperbola ở Mục 7.4.3 để chỉ ra rằng khoảng cách tiếp cận gần nhất của chất điểm đến hành tinh là $k/(\epsilon+1)$, và sau đó chỉ ra rằng kết quả này trùng với kết quả của bạn ở phần (a).

7.16. Lướt qua một hành tinh **

Một chất điểm chuyển động với quỹ đạo hình parabola trong trường trọng lực của một hành tinh và bay lướt qua bề mặt của hành tinh đó ở độ cao tiếp cận gần nhất. Hành tinh có khối lượng riêng là ρ. So với tâm của hành tinh, hỏi vận tốc góc của chất điểm khi nó lướt qua bề mặt của hành tinh bằng bao nhiêu?

7.17. Parabola L **

Một khối lượng m chuyển động xung quanh một hành tinh có khối lượng M theo một quỹ đạo hình parabola có dạng $y = x^2/(4l)$, có chiều dài tiêu cự là ℓ. Hãy tìm moment động lượng theo ba cách khác nhau:

(a) Tình vận tốc tại điểm tiếp cận gần nhất.

(b) Sử dụng phương trình (7.30).

(c) Xét điểm $(x, x^2/4l)$, trong đó x rất lớn. Tìm biểu diễn xấp xỉ của vận tốc và tham số ảnh hưởng tại điểm này.

7.18. Từ đường tròn đến parabola **

Một con tàu vũ trụ chuyển động theo một quỹ đạo hình tròn xung quanh một hành tinh. Nó được tăng tốc bất ngờ và tốc độ của nó được tăng lên f lần. Nếu với mục đích là thay đổi quỹ đạo từ hình tròn thành hình parabola thì giá trị của f phải bằng bao nhiêu nếu lực đẩy tăng tốc hướng theo phương tiếp tuyến? Kết quả của bạn có thay đổi gì không nếu lực đẩy hướng theo một phương khác? Hỏi khoảng cách tiếp cận gần nhất là bao nhiêu nếu lực đẩy hướng theo phương xuyên tâm?

7.19. Thế năng không **

Một chất điểm chịu tác động của một trường thế hằng số, mà chúng ta sẽ cho nó bằng không (một cách tương đương, xét giới hạn $\alpha \equiv GMm = 0$). Hãy làm theo các bước đã làm ở Mục 7.4, chỉ ra rằng đường quỹ đạo của chất điểm là một đường thẳng.

7.20. Các trục của ellipse **

Phương trình (7.25) miêu tả một ellipse với $0 < \epsilon < 1$, hãy tính các độ dài của các bán trục chính và bán trục phụ, và chỉ ra rằng các kết quả phù hợp với phương trình (7.33).

7.21. Thế đẩy **

Xét một trường thế "chống lại trường hấp dẫn" (hoặc một cách cụ thể hơn, thế giữa hai điện tích cùng dấu), $V(r) = \alpha/r$, trong đó $\alpha > 0$. Hỏi sự thay đổi cơ bản trong tính toán của Mục 7.4 là gì? Chỉ ra rằng các quỹ đạo hình tròn, hình ellipse và hình parabola không tồn tại. Hãy vẽ hình vẽ tương tự như Hình 7.9 cho quỹ đạo hyperbola.

7.7 Lời giải bài tập

7.1. Đường xoắn ốc dạng mũ

Từ thông tin đã cho trong đề bài $r = r_0 e^{a\theta}$ nhận được (sử dụng $\dot{\theta} = L/mr^2$)

$$\dot{r} = a(a_0 e^{a\theta})\dot{\theta} = ar\left(\frac{L}{mr^2}\right) = \frac{aL}{mr}. \tag{7.54}$$

Thay giá trị này vào phương trình (7.9) ta có

$$\frac{m}{2}\left(\frac{aL}{mr}\right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) = E = 0. \tag{7.55}$$

Do đó,

$$V(r) = -\frac{(1+a^2)L^2}{2mr^2}. \tag{7.56}$$

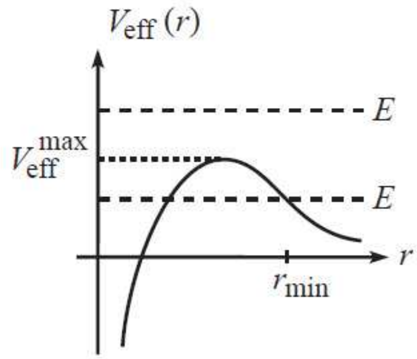
7.2. Mặt cắt ngang

(a) Thế hiệu dụng là

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{C}{3r^3}. \tag{7.57}$$

Cho đạo hàm bằng 0 ta có $r = mC/L^2$. Thay giá trị này vào $V_{\text{eff}}(r)$ cho ta

$$V_{\text{eff}}^{\max}(r) = \frac{L^6}{6m^3C^2}. \tag{7.58}$$



Hình 7.11:

(b) Nếu năng lượng E của chất điểm nhỏ hơn $V_{\text{eff}}^{\max}(r)$, thì chất điểm sẽ đạt giá trị nhỏ nhất của r, và sau đó quay lại chuyển động ra vô cùng (xem Hình 7.11). Nếu E lớn hơn $V_{\text{eff}}^{\max}(r)$, thì chất điểm sẽ tiến tới $r = 0$, và không bao giờ quay lại. Do đó điều kiện để bị giữ là $V_{\text{eff}}^{\max}(r) < E$. Sử dụng $L = mv_0 b$ và $E = E_\infty = mv_0^2/2$, điều kiện này trở thành

$$\frac{(mv_0 b)^6}{6m^3C^2} < \frac{mv_0^2}{2} \Longrightarrow b < \left(\frac{3C^2}{m^2v_0^4}\right)^{1/6} \equiv b_{\max}. \tag{7.59}$$

Do đó mặt cắt của việc bị giữ trên là

$$\phi = \pi b_{\max}^2 = \pi \left(\frac{3C^2}{m^2v_0^4}\right)^{1/3}. \tag{7.60}$$

Giá trị này hợp lý là nó tăng theo C và giảm theo m và v_0.

7.3. Giá trị lớn nhất của L

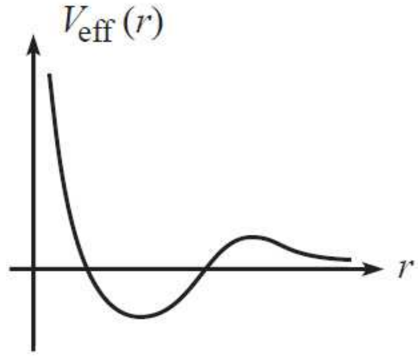
(a) Thế hiệu dụng là

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - V_0 e^{-\lambda^2 r^2}. \tag{7.61}$$

Một quỹ đạo tròn sẽ tồn tại tại (các) giá trị của r mà $V'_{\text{eff}}(r) = 0$. Cho đạo hàm bằng 0 và giải đối với L^2 cho ta

$$L^2 = (2mV_0\lambda^2)r^4 e^{-\lambda^2 r^2}. \tag{7.62}$$

Biểu thức dạng ẩn này sẽ giúp xác định r. Miễn là L không quá lớn, $V_{\text{eff}}(r)$ sẽ trông giống như trong Hình 7.12, mặc dù nó không nhất thiết phải tiến xuống dưới giá trị âm; xem



Hình 7.12:

nhận xét bên dưới. Bạn cũng có thể đạt được đồ thị này bằng việc chú ý rằng với bất cứ giá trị nào của $L, thV_{\text{eff}}(r)$ sẽ thay đổi giống như $1/r^2$ đối với cả $r \to 0$ và $r \to \infty$; và với L đủ nhỏ, $V_{\text{eff}}(r)$ đạt đến giá trị âm tại giá trị nào đó ở giữa, lý do là bởi số hạng $-V_0$. Đường cong do đó phải trông giống như đường cong trong hình vẽ, mà có hai điểm tại đó $V'_{\text{eff}}(r) = 0$. Nghiệm bé hơn là nghiệm tương ứng với khi quỹ đạo ổn định. Tuy nhiên, nếu L quá lớn, thì $V'_{\text{eff}}(r) = 0$ sẽ không có nghiệm, bởi vì $V_{\text{eff}}(r)$ đơn điệu giảm về không (bởi vì $L^2/2mr^2$ cũng như vậy). Chúng ta sẽ khảo sát một cách định lượng điều này ở phần (b).

(b) Hàm $r^4 e^{-\lambda^2 r^2}$ trong vế phải của phương trình (7.62) có một giá trị lớn nhất, bởi vì nó tiến tới không cả khi $r \to 0$ và $r \to \infty$. Do đó, tồn tại giá trị của r sao cho L đạt giá trị lớn nhất tại đó. Giá trị lớn nhất của $r^4 e^{-\lambda^2 r^2}$ xảy ra tại

$$0 = \frac{d(r^4 e^{-\lambda^2 r^2})}{dr} = e^{-\lambda^2 r^2}(4r^3 + r^4(-2\lambda^2 r)) \quad \Longrightarrow \quad r^2 = \frac{2}{\lambda^2} \equiv r_0^2. \tag{7.63}$$

Thay r_0 vào trong phương trình (7.62) cho ta

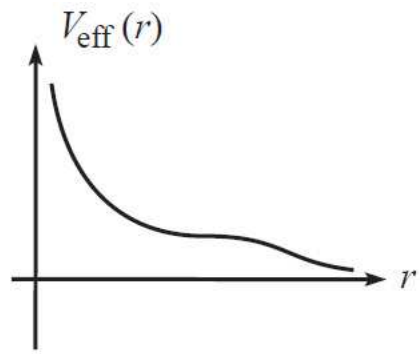
$$L^2_{\max} = \frac{8mV_0}{\lambda^2 e^2}. \tag{7.64}$$

Thay r_0 và $L^2_{\max}$ vào trong phương trình (7.61) cho ta

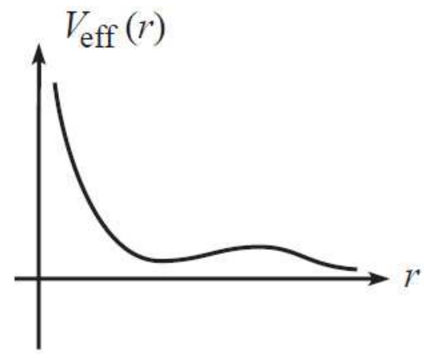
$$V_{\text{eff}}(r_0) = \frac{V_0}{e^2} \quad (\text{với } L = L_{\max}). \tag{7.65}$$

Chú ý rằng giá trị này lớn hơn không. Đối với trường hợp $L = L_{\max}$, đồ thị của V_{eff} được biểu diễn như trong Hình 7.13. Đây là trường hợp tới hạn giữa việc có một chỗ trũng trong đồ thị, và việc đơn điệu giảm về không.

NHẬN XÉT: Một lỗi hay mắc phải trong bài toán này là nói rằng điều kiện để quỹ đạo tròn tồn tại là $V_{\text{eff}}(r) < 0$ tại điểm khi $V_{\text{eff}}(r)$ đạt giá trị nhỏ nhất. Lập luận logic ở đây là bởi vì



Hình 7.13:



Hình 7.14:

mục đích của chúng ta là để có một giếng thế năng mà phần tử bị giữ ở trong đó, nên nó dường như là chúng ta chỉ cần V_{eff} đạt một giá trị nhỏ hơn giá trị tại $r = \infty$, mà nó bằng 0. Tuy nhiên, điều này lại dẫn đến một kết quả sai ($L^2_{\text{max}} = 2mV_0/\lambda^2 e$, như bạn có thể chỉ ra), bởi vì $V_{\text{eff}}(r)$ có thể trông giống như đồ thị trong Hình 7.14. Đồ thị này có giá trị nhỏ nhất địa phương với $V_{\text{eff}}(r) > 0$. ♣

7.4. Thế r^k

(a) Một quỹ đạo tròn tồn tại tại giá trị của r sao cho đạo hàm của thế hiệu dụng (bằng giá trị âm của lực hiệu dụng) bằng không. Đây đơn giản là tương ứng với vế phải của của phương trình (7.8) bằng không, do đó $\ddot{r} = 0$. Bởi vì $V'(r) = \beta k r^{k-1}$, phương trình (7.8)(7.8) cho ta

$$\frac{L^2}{mr^3} - \beta k r^{k-1} = 0 \quad \Longrightarrow \quad r_0 = \left(\frac{L^2}{m\beta k}\right)^{1/(k+2)}. \tag{7.66}$$

Nếu k âm, thì β cũng phải âm nếu muốn có một nghiệm thực của r_0.

(b) Phương pháp dài dòng để tìm tần số là đặt $r(t) \equiv r_0 + \epsilon(t)$, trong đó ϵ biểu diễn độ lệch nhỏ từ quỹ đạo tròn, và sau đó thay biểu thức này của r vào trong phương trình (7.8). Kết quả (sau khi đã làm một số xấp xỉ) là một phương trình dao động điều hòa có dạng $\ddot{\epsilon} = -\omega_r^2 \epsilon$.

Cách làm nói chung này, mà đã được miêu tả một cách chi tiết trong Mục 6.7, sẽ thực hiện được một cách tốt đẹp ở đây (và bạn được khuyến khích làm thử cách này), nhưng hãy sử dụng một phương pháp đơn giản hơn.

Bằng việc sử dụng thế hiệu dụng, chúng ta đã đưa bài toán về bài toán một chiều theo biến r. Do đó, chúng ta có thể sử dụng kết quả trong Mục 5.2, chỗ mà chúng ta đã tìm thấy trong phương trình (5.20) là để tìm tần số của các dao động nhỏ, chúng ta chỉ cần tính toán đạo hàm bậc hai của hàm thế. Đối với bài toán này, chúng ta phải sử dụng thế hiệu dụng, bởi vì nó là đại lượng xác định chuyển động của biến r. Do đó chúng ta có

$$\omega_r = \sqrt{\frac{V''_{\text{eff}}(r_0)}{m}}. \tag{7.67}$$

Nếu bạn giải bài toán với phương pháp đặt $r \equiv r_0 + \epsilon$ như ở trên, bạn sẽ thấy rằng về cơ bản là bạn đang tính đạo hàm bậc hai của V_{eff}, nhưng theo một cách cồng kềnh hơn rất nhiều.

Sử dụng dạng của thế hiệu dụng, chúng ta có

$$V''_{\text{eff}}(r_0) = \frac{3L^2}{mr_0^4} + \beta k(k-1)r_0^{k-2} = \frac{1}{r_0^4}\left(\frac{3L^2}{m} + \beta k(k-1)r_0^{k+2}\right). \tag{7.68}$$

Sử dụng r_0 từ phương trình (7.66), biểu thức này được đưa về dạng đơn giản

$$V''_{\text{eff}}(r_0) = \frac{L^2(k+2)}{mr_0^4} \quad \Longrightarrow \quad \omega_r = \sqrt{\frac{V''_{\text{eff}}(r_0)}{m}} = \frac{L\sqrt{k+2}}{mr_0^2}. \tag{7.69}$$

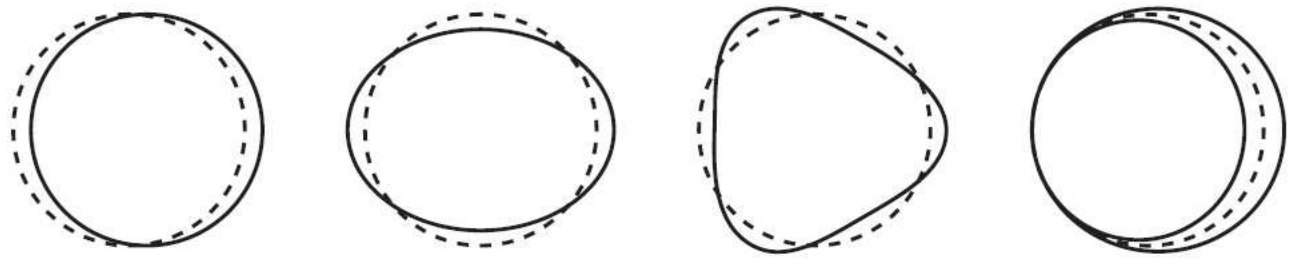
Chúng ta có thể triệt tiêu r_0 ở đây bằng việc sử dụng phương trình (7.66), nhưng dạng này của ω_r sẽ hữu ích hơn trong phần (c).

Chú ý rằng ta phải có $k > -2$ để cho ω_r là số thực. Nếu $k < -2$, thì $V''_{\text{eff}}(r_0) < 0$, điều này có nghĩa là chúng ta có giá trị cực đại địa phương của V_{eff}, thay vì giá trị cực tiểu địa phương. Nói cách khác, quỹ đạo tròn sẽ là không ổn định. Các nhiễu nhỏ sẽ tăng lên, thay vì biến thiên dao động xung quanh giá trị không.

(c) Bởi vì $L = mr_0^2\dot{\theta}$ đối với quỹ đạo tròn, chúng ta có $\omega_\theta \equiv \dot{\theta} = L/(mr_0^2)$. Kết hợp điều này với phương trình (7.69), ta tìm được

$$\frac{\omega_r}{\omega_\theta} = \sqrt{k+2}. \tag{7.70}$$

Một vài giá trị của k mà nhận các giá trị hữu tỷ cho tỷ số này là (các quỹ đạo được vẽ như trong Hình 7.15):



Hình 7.15:

- $k = -1 \Longrightarrow \omega_r/\omega_\theta = 1$: Đây là thế năng hấp dẫn. Biến r dao động một lần đối với mỗi vòng quay của quỹ đạo (gần) tròn.
- $k = 2 \Longrightarrow \omega_r/\omega_\theta = 2$: Đây là thế năng của lò xo. Biến r dao động hai lần đối với mỗi vòng quay.
- $k = 7 \Longrightarrow \omega_r/\omega_\theta = 3$: Biến r dao động ba lần đối với mỗi vòng quay.
- $k = -7/4 \Longrightarrow \omega_r/\omega_\theta = 1/2$: Biến r dao động nửa chu kỳ đối với mỗi vòng quay. Vì vậy chúng ta cần phải có hai vòng quay để trở lại cùng giá trị của r.

Có vô số giá trị của k để nhận được quỹ đạo chuyển động kín. Nhưng chú ý rằng phát biểu này chỉ áp dụng cho những quỹ đạo gần tròn. Hơn nữa, bản chất "đóng" của các quỹ đạo cũng chỉ là xấp xỉ, bởi vì nó dựa trên phương trình (7.67) là một kết quả xấp xỉ dựa trên giả thiết dao động nhỏ. Các giá trị duy nhất của k mà dẫn đến một quỹ đạo đóng chính xác với bất cứ điều kiện ban đầu nào là $k = -1$ (trọng lực) và $k = 2$ (lò xo), và trong cả hai trường hợp này quỹ đạo đều là hình ellipse. Kết quả này được biết đến như là định lý Bertrand; xem Brown (1978).

7.5. Lò xo ellipse

Với $V(r) = \beta r^2$, phương trình (7.16) trở thành

$$\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{2mE}{L^2} - \frac{1}{r^2} - \frac{2m\beta r^2}{L^2}. \tag{7.71}$$

Như đã phát biểu trong Mục 7.4.1, chúng ta có thể lấy căn bậc hai, tách biến, lấy tích phân để tìm $\theta(r)$, và sau đó giải ngược để tìm $r(\theta)$. Nhưng hãy giải $r(\theta)$ theo một cách nhanh hơn, như chúng ta đã làm đối với trường hợp thế trọng trường, ở đó chúng ta đã đổi biến $y \equiv 1/r$. Bởi vì có rất nhiều số hạng r^2 xuất hiện trong phương trình (7.71), nên rất là hợp lý để thử phép đổi biến, $y \equiv r^2$ hoặc $y \equiv 1/r^2$. Cách thứ hai hóa ra là lựa chọn tốt hơn. Vì vậy, sử dụng $y \equiv 1/r^2$

và $dy/d\theta = -2(dr/d\theta)/r^3$, và nhân phương trình (7.71) với $1/r^2$, chúng ta nhận được

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}\frac{dy}{d\theta}\right)^2 &= \frac{2mEy}{L^2} - y^2 - \frac{2m\beta}{L^2} \\ &= -\left(y - \frac{mE}{L^2}\right)^2 - \frac{2m\beta}{L^2} + \left(\frac{mE}{L^2}\right)^2. \end{aligned} \tag{7.72}$$

Đặt $z \equiv y - mE/L^2$ để cho thuận tiện, ta có

$$\begin{aligned}\left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2 &= -4z^2 + 4\left(\frac{mE}{L^2}\right)^2\left(1 - \frac{2\beta L^2}{mE^2}\right) \\ &\equiv -4z^2 + 4B^2. \end{aligned} \tag{7.73}$$

Giống như trong Mục 7.4.1, chúng ta chỉ cần nhìn phương trình và thấy rằng

$$z = B\cos 2(\theta - \theta_0) \tag{7.74}$$

là nghiệm của phương trình. Chúng ta có thể xoay trục sao cho $\theta_0 = 0$, vì vậy chúng ta sẽ bỏ qua số hạng θ từ đây. Nhớ rằng chúng ta đã đặt $z \equiv 1/r^2 - mE/L^2$ và cũng đã định nghĩa B từ phương trình (7.73), phương trình (7.74) trở thành

$$\frac{1}{r^2} = \frac{mE}{L^2}(1 + \epsilon\,\cos 2\theta), \tag{7.75}$$

trong đó

$$\epsilon \equiv \sqrt{1 - \frac{2\beta L^2}{mE^2}}. \tag{7.76}$$

Hóa ra rằng, như chúng ta sẽ thấy ở bên dưới, ϵ *không* phải là tính tâm sai của ellipse, không giống như trường hợp thế trọng trường.

Chúng ta bây giờ sẽ sử dụng các bước đã làm trong Mục 7.4.3 để chỉ ra rằng phương trình (7.76) biểu diễn một ellipse. Để thuận tiện, đặt

$$k \equiv \frac{L^2}{mE}. \tag{7.77}$$

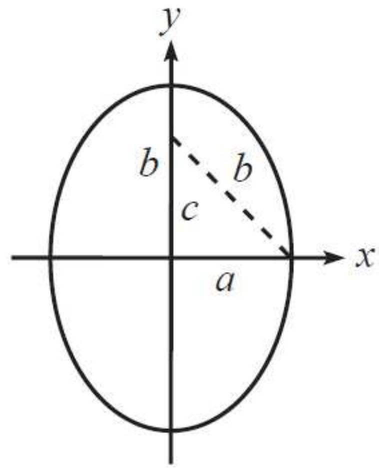
Nhân hai vế phương trình (7.75) với kr^2, và sử dụng

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = \frac{x^2}{r^2} - \frac{y^2}{r^2}, \tag{7.78}$$

và cũng sử dụng $r^2 = x^2 + y^2$, chúng ta nhận được $k = (x^2 + y^2) + \epsilon(x^2 - y^2)$. Nó có thể viết dưới dạng

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{trong đó} \quad a = \sqrt{\frac{k}{1+\epsilon}}, \quad \text{và} \quad b = \sqrt{\frac{k}{1-\epsilon}}. \tag{7.79}$$

Đây là phương trình của một ellipse có tâm là gốc tọa độ (trái ngược với trường hợp trọng trường khi tiêu điểm ở gốc tọa độ). Trong Hình 7.16, bán trục chính và bán trục phụ tương ứng là b và a, và độ dài tiêu cự là $c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{2k\epsilon/(1-\epsilon^2)}$. Tính tâm sai là $c/b = \sqrt{2\epsilon/(1+\epsilon)}$.



Hình 7.16:

NHẬN XÉT: Nếu $\epsilon = 0$, thì $a = b$, điều này nghĩa là ellipse thực ra là một đường tròn. Hãy xem điều này có nghĩa hay không. Nhìn vào phương trình (7.76), chúng ta thấy rằng chúng ta muốn chỉ ra rằng chuyển động tròn dẫn tới $2\beta L^2 = mE^2$. Đối với chuyển động tròn, phương trình $F = ma$ theo phương xuyên tâm là $mv^2/r = 2\beta r \Longrightarrow v^2 = 2\beta r^2/m$. Năng lượng do đó là $E = mv^2/2 + \beta r^2 = 2\beta r^2$. Hơn nữa, bình phương của moment động lượng là $L^2 = m^2v^2r^2 = 2m\beta r^4$. Do đó, $2\beta L^2 = 2\beta(2m\beta r^4) = m(2\beta r^2)^2 = mE^2$, là điều mà chúng ta muốn chứng minh. ♣

7.6. Trường thế dạng β/r^2

Với $V(r) = \beta/r^2$, phương trình (7.16) trở thành

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right)^2 &= \frac{2mE}{L^2} - \frac{1}{r^2} - \frac{2m\beta}{r^2L^2} \\ &= \frac{2mE}{L^2} - \frac{1}{r^2}\left(1 + \frac{2m\beta}{L^2}\right).\end{aligned} \tag{7.80}$$

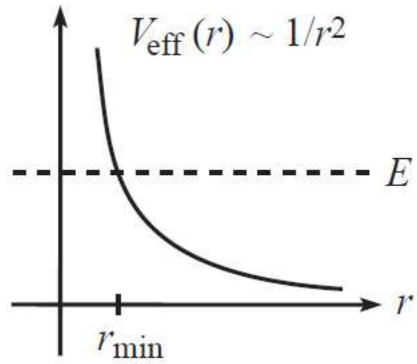
Đặt $y \equiv 1/r$, và sử dụng $dy/d\theta = -(1/r^2)(dr/d\theta)$, phương trình này trở thành

$$\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 + a^2y^2 = \frac{2mE}{L^2}, \quad \text{với} \quad a^2 \equiv 1 + \frac{2m\beta}{L^2}. \tag{7.81}$$

Chúng ta bây giờ phải xét các khả năng khác nhau của a^2. Các khả năng này phụ thuộc vào việc β so với L^2 như thế nào, điều này phụ thuộc vào điều kiện ban đầu của chuyển động. Đối với các trường hợp sau, chú ý rằng thế hiệu dụng bằng

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{\beta}{r^2} = \frac{a^2L^2}{2mr^2}. \tag{7.82}$$

TRƯỜNG HỢP 1: $a^2 > 0$, hoặc tương đương với $\beta > -L^2/2m$. Trong trường hợp này, thế hiệu dụng giống như đồ thị trong Hình 7.17. Nghiệm y của phương trình (7.81) là một hàm lượng



Hình 7.17:

giác, mà chúng ta sẽ chọn là một hàm "sin" bằng việc quay các trục một cách phù hợp. Sử dụng $y \equiv 1/r$, chúng ta nhận được

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{2mE}{L^2}}\sin a\theta. \tag{7.83}$$

$\theta = 0$ và $\theta = \pi/a$ làm cho vế phải bằng không, vì vậy chúng tương ứng với $r = \infty$. Và $\theta = \pi/2a$ làm cho vế phải đạt được giá trị cực đại nên nó tương ứng với giá trị cực tiểu của r, mà nó là $r_{\text{min}} = a\sqrt{L^2/2mE}$. Giá trị cực tiểu của r này cũng có thể nhận được theo một cách nhanh hơn bằng việc tìm vị trí để $V_{\text{eff}}(r) = E$.

Nếu chất điểm đến từ vô cùng tại $\theta = 0$, nó cuối cùng sẽ quay trở lại vô cùng tại $\theta = \pi/a$. Góc hợp bởi đường đi vào và đường đi ra xa do đó bằng π/a. Vì vậy nếu a lớn (nghĩa là, nếu β lớn và dương, hoặc nếu L nhỏ), thì chất điểm sẽ bật ngược lại gần như là theo một đường thẳng. Nếu a nhỏ (nghĩa là, nếu β âm và nếu L^2 chỉ lớn hơn $-2m\beta$ một chút), thì chất điểm di chuyển theo đường xoắn ốc rất nhiều lần trước khi quay lại vô cùng.

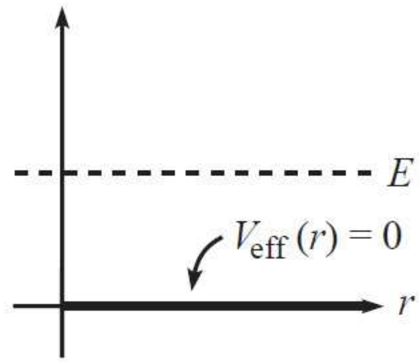
Một vài trường hợp đặc biệt là: (1) $\beta = 0 \Longrightarrow a = 1$, mà có nghĩa là góc tổng bằng π, nghĩa là, không có độ lệch thực. Thực ra, đường đi của chất điểm là một đường thẳng, bởi vì thế năng bằng không; xem Bài tập luyện tập 7.19. (2) $L^2 = -8m\beta/3 \Longrightarrow a = 1/2$, điều này có nghĩa là góc tổng bằng 2π, nghĩa là, đường cuối cùng của chuyển động của chất điểm là song song (ngược chiều) với đường ban đầu. Các đường này bị dịch ra hai bên với nhau, với sự chia cắt phụ thuộc vào các điều kiện ban đầu.

TRƯỜNG HỢP 2: $a = 0$, hoặc tương đương với $\beta = -L^2/2m$. Trong trường hợp này, thế hiệu dụng là đồng nhất bằng không, như chỉ ra trong Hình 7.18. Phương trình (7.81) trở thành

$$\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = \frac{2mE}{L^2}. \tag{7.84}$$

Nghiệm của nó là $y = \theta\sqrt{2mE/L^2} + C$, mà cho ta

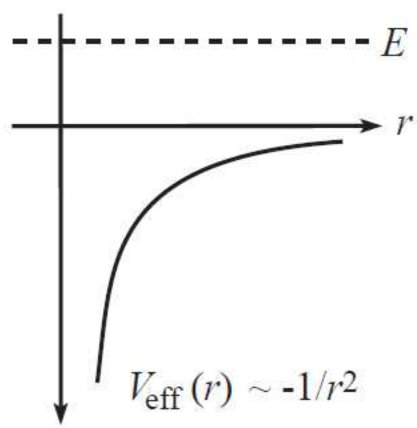
$$r = \frac{1}{\theta}\sqrt{\frac{L^2}{2mE}}, \tag{7.85}$$



Hình 7.18:

trong đó chúng ta đã cho hằng số tích phân C bằng không bằng cách chọn $\theta = 0$ là góc tương ứng với $r = \infty$. Chú ý rằng chúng ta có thể sử dụng $\beta = -L^2/2m$ để viết r dưới dạng $r = (1/\theta)\sqrt{-\beta/E}$.

Bởi vì thế hiệu dụng là không đổi, nên tốc độ thay đổi của r là hằng số. Do đó, nếu chất điểm có $\dot{r} < 0$, nó sẽ đạt đến gốc tọa độ sau một khoảng thời gian hữu hạn, mặc dù phương trình (7.85) nói rằng nó sẽ chuyển động theo đường xoắc ốc xung quanh gốc tọa độ vô số lần (bởi vì $\theta \to \infty$ khi $r \to 0$).

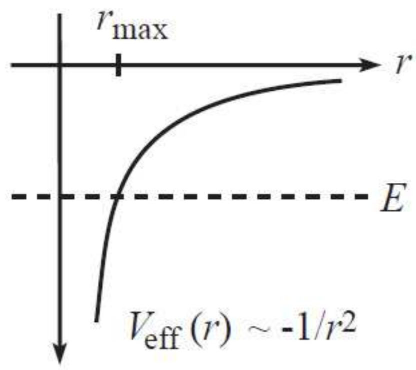


Hình 7.19:

TRƯỜNG HỢP 3: $a^2 < 0$, hoặc tương đương với $\beta < -L^2/2m$. Trong trường hợp này, chúng ta có tình huống được chỉ ra như trong Hình 7.19 hoặc Hình 7.20, phụ thuộc vào dấu của E. Để thuận tiện, đặt b là một số thực dương sao cho $b^2 = -a^2$. Khi đó phương trình (7.81) trở thành

$$\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 - b^2y^2 = \frac{2mE}{L^2}. \tag{7.86}$$

Nghiệm của phương trình là một hàm lượng giác hyperbolic. Nhưng chúng ta phải xét hai trường hợp:



Hình 7.20:

- $E > 0$: Sử dụng đồng nhất thức $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$ và nhớ rằng $y \equiv 1/r$, chúng ta thấy rằng nghiệm của phương trình (7.86) là[12]

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{2mE}{L^2}}\sinh b\theta. \tag{7.87}$$

Không giống như trong trường hợp $a^2 > 0$ ở trên, hàm sinh này không có giá trị cực đại. Do đó, vế phải có thể tiến ra vô cùng, có nghĩa là r có thể tiến về không, nếu giá trị ban đầu của $\dot{r}$ là âm. Điều này xảy ra trong một khoảng thời gian hữu hạn, bởi vì $\dot{r}$ chỉ trở nên càng âm theo thời gian, xem Hình 7.19. Với z lớn, chúng ta có $\sinh z \approx e^z/2$, vì vậy r tiến về không giống như $e^{-b\theta}$. Chất điểm do đó sẽ chuyển động theo đường xoắn ốc xung quanh gốc tọa độ một số vô hạn lần (bởi vì $\theta \to \infty$ khi $r \to 0$).

- $E < 0$: Trong trường hợp này, phương trình (7.86) có thể được viết lại dưới dạng

$$b^2y^2 - \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = \frac{2m|E|}{L^2}. \tag{7.88}$$

Nghiệm của phương trình là[13]

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{2m|E|}{L^2}}\cosh b\theta. \tag{7.89}$$

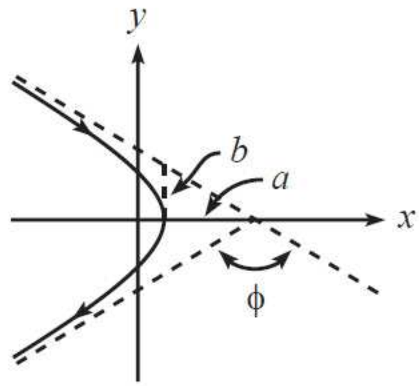
Như trong trường hợp hàm sinh, hàm cosh không có giá trị cực đại. Do đó, vế phải có thể tiến tới vô cùng, điều đó có nghĩa là r có thể tiến về không. Nhưng trong trường hợp hàm cosh này, vế phải có giá trị cực tiểu khác không, khi $\theta = 0$. Vì vậy r đạt giá trị lớn nhất (nếu giá trị $\dot{r}$ ban đầu là dương) bằng $r_{\max} = b\sqrt{L^2/2m|E|}$. Chúng ta có thể thấy rõ điều này từ Hình 7.20. Giá trị lớn nhất này của r cũng có thể nhận bằng việc đơn giản là tìm

[12]Một cách tổng quát hơn, chúng ta viết $\sinh(\theta - \theta_0)$ ở đây. Nhưng chúng ta có thể bỏ đi θ_0 bằng cách chọn $\theta = 0$ là góc tương ứng với $r = \infty$.

[13]Một lần nữa, chúng ta phải viết $\cosh(\theta - \theta_0)$ ở đây. Nhưng ta có bỏ qua θ_0 bằng việc chọn $\theta = 0$ là góc tương ứng với giá trị lớn nhất của r.

vị trí để $V_{\text{eff}}(r) = E$. Sau khi đạt được giá trị giá trị $r_{\max}$, chất điểm sẽ quay trở lại gốc tọa độ với tính chất như trong trường hợp hàm sinh (với θ lớn).

7.7. Tán xạ Rutherford



Hình 7.21:

(a) Từ bài tập luyện tập 7.14, chúng ta biết rằng tham số ảnh hưởng b bằng với khoảng cách b biểu diễn trong Hình 7.9. Do đó, Hình 7.21 cho chúng ta biết rằng góc chệch (góc giữa vector vận tốc ban đầu và vector vận tốc sau cùng) là

$$\phi = \pi - 2\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right). \tag{7.90}$$

Nhưng từ các phương trình (7.34) và (7.26), ta có

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\epsilon^2 - 1} = \sqrt{\frac{2EL^2}{m\alpha^2}} = \sqrt{\frac{2(mv_0^2/2)(mv_0 b)^2}{m(GMm)^2}} = \frac{v_0^2 b}{GM}. \tag{7.91}$$

Thay giá trị này vào phương trình (7.90), với $\gamma \equiv v_0^2/(GM)$, cho chúng ta biểu thức đầu tiên trong phương trình (7.52). Chia cho 2 và lấy cotangent cả hai vế thì sẽ cho ta có biểu thức thứ hai,

$$b = \frac{1}{\gamma}\cot\left(\frac{\phi}{2}\right). \tag{7.92}$$

Thực ra thì không cần thiết phải làm tất cả các bước trong Mục 7.4.3 để nhận được kết quả này thông qua a và b. Chúng ta có thể chỉ cần sử dụng phương trình (7.25), mà nó nói rằng $r \to \infty$ khi $\cos\theta \to -1/\epsilon$. Điều này khi đó dẫn tới đường chấm chấm trong Hình 7.21 có độ dốc $\tan\theta = \sqrt{\sec\theta^2 - 1} = \sqrt{\epsilon^2 - 1}$, điều này cho ta nhận lại được phương trình (7.91).

(b) Tưởng tượng chùm rộng các hạt chuyển động theo chiều dương của x hướng đến khối lượng M. Xét một vành mặt cắt mỏng của chùm này, với bán kính b và độ dày db. Bây giờ xét một mặt cầu rất lớn có tâm tại M. Bất cứ hạt nào mà đi qua vành mặt cắt bán kính b sẽ đâm vào mặt cầu này trong một rành được đặt tại một góc ϕ so với trục x, với vận tốc góc phân tán là $d\phi$. Mối quan hệ giữa db và $d\phi$ được thấy trong phương trình (7.92). Sử dụng $d(\cot\beta)/d\beta = -1/\sin\beta^2$, ta có

$$\left|\frac{db}{d\theta}\right| = \frac{1}{2\gamma\sin^2(\phi/2)}. \tag{7.93}$$

Diện tích của vành mặt cắt tới là $d\sigma = 2\pi b|db|$. Góc khối được chắn bởi một vành tại ϕ và độ dày là $d\phi$ bằng bao nhiêu? Cho bán kính của mặt cầu lớn là R (mà sẽ bị triệt tiêu), bán kính của vành là $R\sin\phi$, và độ dày là $R|d\phi|$. Diện tích của vành do đó là $2\pi(R\sin\phi)(R|d\phi|)$, và vì vậy góc khối chắn bởi vành là $d\Omega = 2\pi\sin\phi|d\phi|$ steradians. Do đó, mặt cắt ngang vi phân là

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{2\pi b|db|}{2\pi\sin\phi|d\phi|} &= \left(\frac{b}{\sin\phi}\right)\left|\frac{db}{d\phi}\right| \\ &= \left(\frac{(1/\gamma)\cot(\phi/2)}{2\sin(\phi/2)\cos(\phi/2)}\right)\left(\frac{1}{2\gamma\sin^2(\phi/2)}\right) \\ &= \frac{1}{4\gamma\sin^4(\phi/2)}.\end{aligned} \tag{7.94}$$

NHẬN XÉT: Kết quả này của "mặt cắt ngang vi phân" nói nên điều gì? Nó nói cho chúng ta rằng nếu chúng ta muốn tìm ra diện tích mặt cắt ngang sẽ cho góc khối $d\Omega$ tại góc ϕ là bao nhiêu, thì chúng ta có thể sử dụng phương trình (7.94) để biết (nhớ rằng $\gamma \equiv v_0^2/GM$),

$$d\sigma = \frac{G^2M^2}{4v_0^4\sin^4(\phi/2)}d\Omega \quad\Longrightarrow\quad d\sigma = \frac{G^2M^2m^2}{16E^2\sin^4(\phi/2)}d\Omega, \tag{7.95}$$

trong đó chúng ta đã sử dụng $E = mv_0^2/2$ để nhận được biểu thức thứ hai. Hãy xét một vài trường hợp đặc biệt. Nếu $\phi \approx 180°$ (nghĩa là, tán xạ ngược lại), thì phần diện tích mà bị tán xạ thành một góc khối gần như là hướng ngược lại có độ lớn $d\Omega$ sẽ bằng $d\sigma = (G^2M^2/4v_0^4)d\Omega$. Nếu v_0 là nhỏ, thì chúng ta thấy rằng $d\sigma$ là lớn, nghĩa là, một phần diện tích lớn bị chệch gần như là thẳng ngược lại. Điều này có lý, bởi vì với $v_0 \approx 0$, quỹ đạo về cơ bản là đường parabola, mà có nghĩa là các vận tốc ban đầu và vận tốc sau cùng khi ở vô cùng là song song (ngược chiều nhau). (Nếu bạn thả một hạt từ trạng thái đứng yên ở cách xa một nguồn trọng trường, nó sẽ quay trở lại với bạn, đương nhiên là phải giả sử nó không va chạm với nguồn.) Nếu v_0 lớn, thì chúng ta thấy rằng $d\sigma$ là nhỏ, nghĩa là, chỉ một phần diện tích nhỏ bị chệch hướng trở lại. Điều này hợp lý, bởi vì hạt có vẻ như bay qua M mà không bị chệch hướng nhiều nếu nó đang chuyển động nhanh, bởi vì lực tác dụng hầu như không có thời gian để tác động vào hạt. Hạt cần xuất phát với một giá trị b rất nhỏ (mà tương ứng với một diện tích rất nhỏ) để tiến đủ gần đến M để cho phép có một lực đủ lớn để quay nó xung quanh.

Một trường hợp đặc biệt khác là $\phi \approx 0$, nghĩa là độ lệch không đáng kể. Trong trường hợp này, phương trình (7.95) cho chúng ta biết rằng vùng diện tích bị tán xạ thành một góc khối gần như là cùng hướng có độ lớn bằng $d\Omega$ sẽ là $d\sigma \approx \infty$. Điều này hợp lý, bởi vì nếu tham số ảnh hưởng b là lớn (và có vô hạn cá diện tích mặt cắt sao cho điều này là đúng), thì hạt sẽ hầu như không cảm nhận được khối lượng M, vì vậy nó sẽ tiếp tục chuyển động về cơ bản là theo một đường thẳng.[14]

Điều gì sẽ xảy ra nếu chúng ta xét lực tĩnh điện, thay vì lực hấp dẫn? Mặt cắt ngang vi phân sẽ là như thế nào trong trường hợp này? Để trả lời các câu hỏi này, chú ý rằng chúng ta có thể viết lại γ dưới dạng

$$\gamma = \frac{v_0^2}{GM} = \frac{2(mv_0^2/2)}{GMm} \equiv \frac{2E}{\alpha}. \tag{7.96}$$

Trong trường hợp lực tĩnh điện, lực sẽ có dạng $F_e = kq_1q_2/r^2$. Lực này nhìn trông giống lực trọng trường, $F_g = Gm_1m_2/r^2$, ngoại trừ hằng số α bây giờ là kq_1q_2, thay vì là Gm_1m_2. Do đó, γ trong phương trình (7.96) trở thành $\gamma_e = 2E/(kq_1q_2)$. Thay giá trị này vào phương trình (7.94), hoặc một cách tương đương thay GMm bởi kq_1q_2 ở trong phương trình (7.95), cho ta mặt cắt ngang vi phân đối với tán xạ tĩnh điện,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{k^2q_1^2q_2^2}{16E^2\sin^4(\phi/2)}. \tag{7.97}$$

Đây là công thức mặt cắt ngang vi phân theo tán xạ Rutherford. Khoảng năm 1910, Rutherford và các sinh viên của ông đã bắn phá các lá kim loại bằng các hạt alpha. Kết quả của họ cho sự phân bố các góc tán xạ là phù hợp với công thức ở trên. Đặc biệt, họ quan sát thấy sự tán xạ ngược của các hạt alpha. Bởi vì công thức trên là dựa trên giả thiết của một nguồn điểm cho thế năng, điều này đã dẫn Rutherford đến lý thuyết của ông rằng các nguyên tử chứa một hạt nhân rất nặng tích điện dương, trái ngược với việc được cấu tạo từ một sự phân bố điện tích theo kiểu dàn trải "plum pudding", cái mà (như là một trường hợp đặc biệt của việc không nhận được sự phân bố chính xác của các góc tán xạ nói chung) không nhận được sự tán xạ ngược. ♣

[14] Nhớ rằng, tất cả thứ mà chúng ta quan tâm ở đây là góc. Vì vậy khi bạn đang tưởng tượng mặt cầu lớn có bán kính R có tâm đặt tại M, thì đừng nói rằng, "Nếu b là lớn (ví dụ như, $R/2$), thì một đường quỹ đạo thẳng sẽ đâm vào mặt cầu theo một góc lớn phía trên trục x (ví dụ như, $30°$)." Điều này là không đúng. Nếu bạn muốn suy nghĩ theo một mặt cầu thật bán kính R, thì nó được hiểu là R vô cùng lớn. Hoặc chính xác hơn là, $R \gg b$, đối với bất cứ tham số ảnh hưởng b nào mà bạn có thể chọn. Vì vậy thậm chí nếu b là "lớn," nó vẫn là nhỏ so với R, cho nên một đường quỹ đạo thẳng sẽ đâm vào mặt cầu bán kính R với góc gần như bằng không. Nói cách khác, bạn có thể chỉ cần tưởng tượng dựa vào các góc, và đừng mường tượng về một mặt cầu có thật nào có tâm đặt tại M.

Chương 8

Moment động lượng, Phần I ($\hat{L}$ không đổi)

Moment động lượng của một khối lượng chất điểm, đối với một gốc tọa độ cho trước, được định nghĩa bởi

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}. \tag{8.1}$$

Đối với một hệ các chất điểm, đại lượng tổng $\mathbf{L}$ đơn giản là tổng các moment động lượng của tất cả chất điểm. Vector $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$ là một đối tượng nghiên cứu hữu ích bởi vì nó có nhiều tính chất rất đẹp. Một trong số các tính chất đó là định luật bảo toàn sẽ được trình bày trong Định lý 7.1, mà đã giúp chúng ta giới thiệu về "thế hiệu dụng" trong Mục 7.2. Và ở phần tiếp theo trong chương này, chúng ta sẽ giới thiệu khái niệm *moment lực*, τ, mà sẽ xuất hiện trong mệnh đề, $\tau = d\mathbf{L}/dt$ (tương tự như định luật $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ của Newton).

Trên thế giới có hai loại bài toán cơ bản về moment động lượng. Bởi vì lời giải cho bất cứ bài toán liên quan đến sự quay nào cuối cùng đều trở lại với việc sử dụng $\tau = d\mathbf{L}/dt$, như chúng ta sẽ thấy, chúng ta phải xác định được $\mathbf{L}$ thay đổi theo thời gian như thế nào. Và bởi vì $\mathbf{L}$ là một vector, nó có thể thay đổi do (1) độ dài của nó thay đổi, hoặc (2) hướng của nó thay đổi (hoặc thay đổi bởi sự kết hợp của hai yếu tố này). Nói cách khác, nếu chúng ta viết $\mathbf{L} = L\hat{\mathbf{L}}$, trong đó $\hat{\mathbf{L}}$ là vector đơn vị chỉ theo hướng của $\mathbf{L}$, thì $\mathbf{L}$ có thể thay đổi do sự thay đổi của L hoặc, do sự thay đổi của $\hat{\mathbf{L}}$, hoặc do cả hai.

Trường hợp thứ nhất của các trường hợp này, đó là khi $\hat{\mathbf{L}}$ là hằng số, là một trường hợp dễ hiểu. Xét một cái đĩa hát đang quay, chọn gốc tọa độ là khối tâm của đĩa. Vector $\mathbf{L} = \sum \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ sẽ vuông góc với mặt đĩa, bởi vì mọi số hạng của tổng moment động lượng đều có tính chất này. Nếu chúng ta tác dụng vào đĩa hát một lực theo phương tiếp tuyến theo hướng phù hợp, nó sẽ quay nhanh hơn (theo một cách chính xác mà chúng ta sẽ xác định ngay sau đây). Không có gì là bí ẩn xảy ra ở đây. Nếu chúng ta tác dụng lực đẩy vào đĩa hát, nó sẽ quay nhanh hơn. $\mathbf{L}$ vẫn chỉ theo hướng như trước đó, chỉ có điều là bây độ lớn của nó tăng lên. Thực ra, trong loại bài toán như thế này, chúng ta có thể hoàn toàn quên đi việc $\mathbf{L}$ là một vector. Chúng ta có thể chỉ làm việc với độ lớn L của nó, và mọi việc sẽ diễn ra tốt đẹp. Trường hợp thứ nhất này là nội dung của chương này.

Tuy nhiên, với trường hợp thứ hai, khi $\mathbf{L}$ thay đổi hướng, chúng ta có thể bị bối rối. Đó là nội dung của chương tiếp theo, khi chúng ta sẽ nói về con quay có đỉnh của nó cũng quay tròn và các loại vật thể quay khác mà chúng có xu hướng làm cho người khác nhìn vào phải chóng mặt. Trong những tình huống này, toàn bộ vấn đề là $\mathbf{L}$ thực sự là một vector. Và không giống như trường hợp $\hat{\mathbf{L}}$ là hằng số, chúng ta thực sự cần phải nhìn mọi thứ ở trong không gian ba chiều để có thể nhận biết việc gì đang xảy ra.[1]

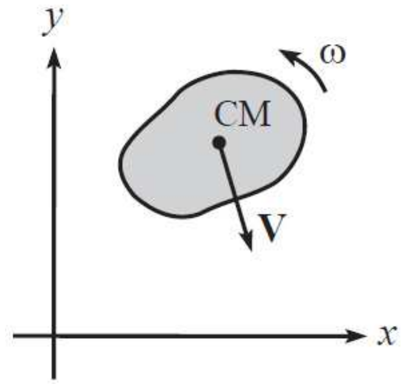
Moment động lượng của một khối lượng chất điểm được cho bởi biểu thức đơn giản trong phương trình (8.1). Nhưng để có thể giải quyết các bài toán trong thực tế, mà thông thường bao gồm rất nhiều chất điểm, chúng ta phải học cách tính toán moment động lượng cho một đối tượng lớn hơn. Đây là nhiệm vụ của Mục 8.1. Trong chương này, chúng ta sẽ chỉ giải quyết các bài toán chuyển động quay quanh trục z, hoặc quay quanh một trục song song với trục z. Chúng ta sẽ để lại phần chuyển động tổng quát trong không gian ba chiều trong Chương 9.

8.1 Vật phẳng trong mặt phẳng tọa độ $x - y$

Xét một vật rắn hình phẳng đang chuyển động tùy ý (cả chuyển động quay và tịnh tiến) trong mặt phẳng $x - y$; xem Hình 8.1. Moment động lượng của vật thể này bằng bao nhiêu đối với gốc của hệ tọa độ?[2] Nếu chúng ta tưởng tượng vật thể của chúng ta bao gồm các chất điểm có khối lượng m_i, thì moment động lượng của toàn bộ vật thể là tổng của moment động lượng của từng chất điểm m_i, nghĩa là bằng $\mathbf{L}_i = \mathbf{r_i} \times \mathbf{p_i}$. Vì vậy moment

[1]Sự khác nhau giữa hai trường hợp này về cơ bản thì cũng giống như sự khác nhau giữa hai trường hợp cơ bản của phương trình $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$. Vector $\mathbf{p}$ có thể thay đổi bởi độ dài của nó, mà trường hợp này chúng ta có $F = ma$ (giả sử rằng m là hằng số). Hoặc, $\mathbf{p}$ có thể thay đổi bởi hướng của nó, mà trong trường hợp này chúng ta có phát biểu về gia tốc hướng tâm, $F = mv^2/r$. (Hoặc cũng có thể thay đổi do sự kết hợp của các yếu tố này.) Ta thấy trường hợp đầu có vẻ hợp với trực giác hơn là trường hợp sau.

[2]Hãy nhớ rằng, $\mathbf{L}$ được định nghĩa đối với một gốc tọa độ đã chọn, bởi vì nó chứa vector $\mathbf{r}$ trong nó. Vì vậy nếu chỉ hỏi $\mathbf{L}$ bằng bao nhiêu mà không xác định điểm gốc đã chọn thì sẽ là vô nghĩa.



Hình 8.1:

động lượng tổng sẽ là

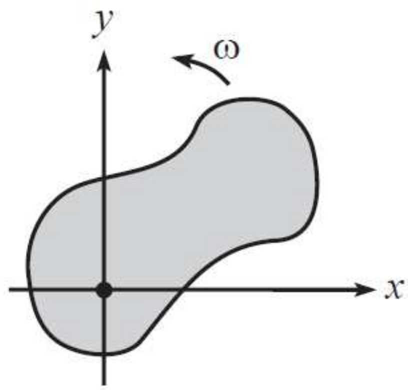
$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i. \tag{8.2}$$

Đối với sự phân bố khối lượng liên tục, chúng ta sẽ có một tích phân thay vì một tổng. **L** phụ thuộc vào vị trí và moment động lượng của các khối lượng. Moment động lượng thì lại phụ thuộc vào việc vật thể tịnh tiến và quay nhanh như thế nào. Mục đích của chúng ta ở đây là đi tìm sự phụ thuộc của **L** vào sự phân bố và chuyển động của các chất điểm thành phần. Như chúng ta sẽ chỉ ra, kết quả thu được sẽ liên quan tới dạng hình học của vật thể theo một cách đặc biệt nào đó.

Trong mục này, chúng ta sẽ chỉ giải quyết các bài toán liên quan tới vật thể phẳng chuyển động trong mặt phẳng $x-y$. Chúng ta sẽ tính toán **L** đối với gốc tọa độ, và chúng ta cũng sẽ nhận được một biểu thức cho động năng. Chúng ta sẽ giải quyết các bài toán với vật thể không có dạng phẳng trong Mục 8.2. Chú ý rằng bởi vì cả **r** và **p** của tất cả các chất điểm trong vật thể phẳng của chúng ta luôn nằm trong mặt phẳng $x-y$, vector $\mathbf{L} = \sum \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ sẽ luôn chỉ theo hướng của $\hat{\mathbf{z}}$. Như đã đề cập ở trên, thực tế này là điều làm cho trường hợp vật phẳng dễ được giải quyết. **L** thay đổi chỉ là do độ lớn của nó thay đổi, chứ không phải là do chiều của nó. Vì vậy khi cuối cùng chúng ta có phương trình $\tau = d\mathbf{L}/dt$, thì nó sẽ có dạng đơn giản. Đầu tiên hãy xét một trường hợp đặc biệt, và sau đó chúng ta sẽ xem xét tới chuyển động tổng quát trong mặt phẳng $x-y$.

8.1.1 Chuyển động quay quanh trục z

Vật phẳng ở trong Hình 8.2 được gắn vào khớp quay ở gốc tọa độ và quay với vận tốc góc ω xung quanh trục z, theo chiều ngược chiều kim đồng hồ (như được quan sát từ



Hình 8.2:

bên trên). Xét một mảnh nhỏ của vật thể, có khối lượng dm và vị trí (x, y). Mảnh nhỏ này di chuyển trong một đường tròn xung quanh gốc tọa độ với vận tốc $v = \omega r$, trong đó $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Do đó, moment động lượng của mảnh này (so với gốc tọa độ) bằng $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = r(vdm)\hat{\mathbf{z}} = dmr^2\omega\hat{\mathbf{z}}$. Hướng $\hat{\mathbf{z}}$ bắt nguồn từ tích có hướng của hai vector (trực giao) $\mathbf{r}$ và $\mathbf{p}$. Moment động lượng của toàn bộ vật thể do đó là

$$\mathbf{L} = \int r^2\omega\hat{\mathbf{z}}dm = \int (x^2 + y^2)\omega\hat{\mathbf{z}}dm, \tag{8.3}$$

trong đó tích phân được lấy trên toàn bộ diện tích của vật thể. Nếu mật độ khối lượng của vật thể là hằng số, mà đa số trường hợp là như vậy, thì chúng ta có $dm = \rho dxdy$. Nếu chúng ta định nghĩa *moment quán tính* quanh trục z là

$$I_z \equiv \int r^2 dm = \int (x^2 + y^2)dm, \tag{8.4}$$

thì thành phần theo phương z của $\mathbf{L}$ là

$$\text{Ł}_z = I_z\omega, \tag{8.5}$$

và cả L_x và L_y đều bằng không. Trong trường hợp vật thể rắn đó cấu tạo bởi một hệ các chất điểm m_i trong mặt phẳng $x - y$, thì moment quán tính trong phương trình (8.4) sẽ có dạng rời rạc,

$$I_z \equiv \sum_i m_i r_i^2. \tag{8.6}$$

Cho bất kỳ vật thể rắn nào trong mặt phẳng $x - y$, chúng ta đều có thể tính I_z. Và với ω cho trước, chúng ta có thể nhân nó với I_z để tìm L_z. Trong Mục 8.3.1, chúng ta sẽ thực hành một vài tính toán đối với một số moment quán tính khác nhau.

Động năng của vật thể chúng ta đang xét bằng bao nhiêu? Chúng ta cần phải cộng tất cả các năng lượng của tất cả các mảnh nhỏ. Mỗi mảnh nhỏ có năng lượng bằng $dmv^2/2 = dm(r\omega)^2/2$. Vì vậy tổng động năng sẽ là

$$T = \int \frac{r^2\omega^2}{2} dm. \tag{8.7}$$

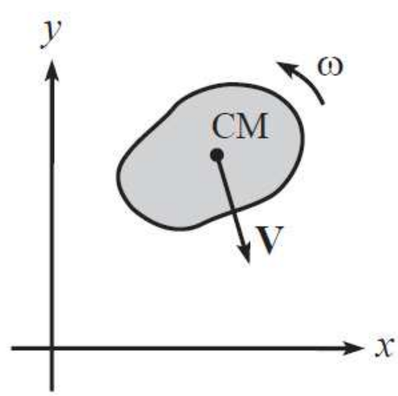
Với định nghĩa của chúng ta về I_z trong phương trình (8.4), đại lượng này trở thành

$$T = \frac{I_z\omega^2}{2} \tag{8.8}$$

Công thức này rất dễ nhớ, bởi vì nó trông rất giống công thức động năng của một khối lượng chất điểm, $mv^2/2$.

8.1.2 Chuyển động tổng quát trong mặt phẳng $x - y$

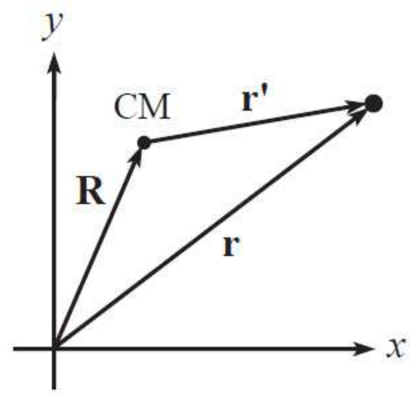
Chúng ta giải bài toán trường hợp chuyển động tổng quát trong mặt phẳng $x - y$ như thế nào? Với chuyển động trong Hình 8.3, trong đó vật thể vừa tịnh tiến vừa quay, rất



Hình 8.3:

nhiều các mảnh nhỏ khối lượng không chuyển động theo đường tròn quanh gốc tọa độ, vì vậy chúng ta không thể viết $v = \omega r$ như chúng ta đã làm ở phần trên. Hóa ra mọi việc bỗng trở nên rất dễ dàng khi viết moment động lượng, $\mathbf{L}$, và động năng, T, theo hệ tọa độ khối tâm (mà sẽ được viết tắt là **CM**-Center of Mass) và các hệ tọa độ liên quan đến khối tâm. Các biểu thức của $\mathbf{L}$ và T có dạng rất đẹp khi được viết trong hệ tọa độ này, như chúng ta sẽ chỉ ra bây giờ.

Gọi vị trí của điểm khối tâm đối với một gốc tọa độ cố định là $\mathbf{R} = (X, Y)$. Và gọi vị trí của một điểm đã cho đối với khối tâm là $\mathbf{r}' = (x', y')$. Khi đó vị trí của điểm đã cho đối với gốc tọa độ cố định là $\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}'$ (xem Hình 8.4). Gọi vận tốc của điểm khối tâm



Hình 8.4:

là $\mathbf{V}$, và gọi vận tốc của điểm đã cho đối với khối tâm là $\mathbf{v}'$. Khi đó $\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{v}'$. Giả sử vật thể quay với vận tốc góc là ω' xung quanh khối tâm (xung quanh một trục tức thời song song với trục z, sao cho vật phẳng vẫn luôn nằm trong mặt phẳng $x - y$).[3] Khi đó $v' = \omega' r'$.

Trước tiên hãy nhìn vào $\mathbf{L}$. Gọi M là tổng khối lượng của vật phẳng. Moment động lượng đối với gốc tọa độ là

$$\begin{aligned}
\mathbf{L} &= \int \mathbf{r} \times \mathbf{v} dm \\
&= \int (\mathbf{R} + \mathbf{r}') \times (\mathbf{V} + \mathbf{v}') dm \\
&= \int \mathbf{R} \times \mathbf{V} dm + \int \mathbf{r}' \times \mathbf{v}' dm \quad \text{(các số hạng chéo bị biến mất; xem bên dưới)} \\
&= M\mathbf{R} \times \mathbf{V} + \left(\int r'^2 \omega' dm \right) \hat{\mathbf{z}} \\
&\equiv \mathbf{R} \times \mathbf{P} + \left(I_z^{\text{CM}} \omega' \right) \hat{\mathbf{z}}.
\end{aligned} \tag{8.9}$$

Khi đi từ dòng thứ hai đến dòng thứ ba ở trên, số hạng chéo, $\int \mathbf{r}' \times \mathbf{V} dm$ và $\int \mathbf{R} \times \mathbf{v}' dm$, đã biến mất do định nghĩa của khối tâm, mà đã nói là $\int \mathbf{r}' dm = 0$. (Xem phương trình (5.58)); cơ bản mà nói thì vị trí của điểm khối tâm trong hệ khối tâm là điểm không). Điều này có nghĩa là $\int \mathbf{v}' dm = d(\int \mathbf{r}' dm)/dt$ cũng bằng không. Và bởi vì chúng ta có thể đặt các vector hằng số V và R ra khỏi các tích phân ở trên, chúng ta do đó nhận được số hạng bằng không. Đại lượng I_z^{CM} trong kết quả cuối cùng là moment quán tính xung quanh một trục đi qua điểm khối tâm, và song song với trục z. Phương trình (8.9) là một kết quả rất đẹp, và nó quan trọng tới mức có thể được gọi là một định lý. Định lý được

[3] Ý của chúng ta ở đây là như sau. Xét một hệ tọa độ có gốc đặt tại điểm khối tâm và có các trục của nó song song với trục x và y cố định. Khi đó vật phẳng sẽ quay với vận tốc góc ω' đối với hệ tọa độ này.

phát biểu như sau:

Định lý 8.1. *Moment động lượng (đối với gốc tọa độ) của một vật thể có thể được tìm bằng cách coi vật thể như một khối lượng chất điểm nằm tại điểm khối tâm và tìm moment động lượng của chất điểm này đối với gốc tọa độ, và sau đó cộng với moment động lượng của vật thể đối với khối tâm.*[4]

Chú ý rằng nếu chúng ta có trường hợp đặc biệt khi điểm khối tâm chuyển động xung quanh gốc tọa độ theo một đường tròn với vận tốc góc Ω (do đó $V = \Omega R$), thì phương trình (8.9) trở thành $\mathbf{L} = (MR^2\Omega + I_z^{\text{CM}}\omega')\hat{\mathbf{z}}$.

Bây giờ hãy xét T. Động năng là

$$\begin{aligned} T &= \int \frac{1}{2}v^2 dm \\ &= \int \frac{1}{2}|\mathbf{V} + \mathbf{v}'|^2 dm \\ &= \frac{1}{2}\int V^2 dm + \frac{1}{2}\int v'^2 dm \quad \text{(các số hạng chéo bị biến mất; xem bên dưới)} \\ &= \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}\int r'^2\omega'^2 dm \\ &\equiv \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I_z^{\text{CM}}\omega'^2. \end{aligned} \tag{8.10}$$

Khi đi từ hàng thứ hai sang hàng thứ ba ở trên, số hạng chéo $\int \mathbf{V}\cdot\mathbf{v}' dm = \mathbf{V}\cdot\int \mathbf{v}' dm$ biến mất theo định nghĩa của khối tâm, như trong tính toán ở trên của $\mathbf{L}$. Một lần nữa, phương trình (8.10) là một kết quả rất đẹp. Khi miêu tả bằng lời, nó phát biểu rằng:

Định lý 8.2. *Động năng của một vật thể có thể được tìm bằng cách coi vật thể đó như là một khối lượng chất điểm đặt tại vị trí của điểm khối tâm, và sau đó cộng với động năng của vật thể do sự chuyển động tương đối với khối tâm.*[5]

Ví dụ (Khối trụ lăn trên một đường dốc): Một khối hình trụ có khối lượng m, bán kính r, và moment quán tính $I = (1/2)mr^2$ (đây là moment quán tính I của

[4]Định lý này chỉ đúng khi chúng ta sử dụng điểm khối tâm là vị trí của khối lượng chất điểm tưởng tượng. Việc làm trên cũng đúng nếu trong phân tích ở trên chúng ta chọn một điểm P chứ không phải là điểm khối tâm, và sau đó viết mọi thứ theo các tọa độ của P và các tọa độ đối với P (mà cũng có thể được miêu tả bởi một sự quay). Nhưng khi đó các số hạng chéo trong phương trình (8.9) sẽ không biến mất, và chúng ta cuối cùng sẽ nhận được một mớ lộn xộn vô nghĩa.

[5]Chúng ta đã biết điều này từ Mục 5.6.2. Chỉ có điều là bây giờ chúng ta mới biết động năng trong hệ quy chiếu khối tâm có dạng $I_z^{\text{CM}}\omega'^2/2$.

một khối trụ đặc xung quanh tâm của nó, như chúng ta sẽ thấy trong Mục 8.3.1) lăn xuống không trượt trên một mặt phẳng nghiêng nghiêng một góc θ. Hỏi gia tốc của tâm khối trụ là bao nhiêu?

Lời giải: Chúng ta sẽ sử dụng định luật bảo toàn năng lượng để xác định tốc độ chuyển động v của tâm khối trụ sau khi nó đã di chuyển xuống được một khoảng d trên mặt phẳng nghiêng, và sau đó chúng ta sẽ tìm được a từ mối quan hệ động học trong chuyển động có gia tốc là hằng số quen thuộc, $v = \sqrt{2ad}$.

Phần thế năng bị mất đi của khối trụ là $mgd\sin\theta$. Phần này sẽ xuất hiện dưới dạng động năng, mà bằng $mv^2/2 + I\omega^2/2$ theo Định lý 8.2. Nhưng điều kiện không trượt cho ta $v = \omega r$. Do đó, $\omega = v/r$, và định luật bảo toàn năng lượng cho ta

$$\begin{aligned} mgd\sin\theta &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \\ &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2\right)\left(\frac{v}{r}\right)^2 \\ &= \frac{3}{4}mv^2. \end{aligned} \tag{8.11}$$

Vì vậy tốc độ chuyển động dưới dạng một hàm của khoảng cách là $v = \sqrt{(4/3)gd\sin\theta}$. Do đó, $v = \sqrt{2ad}$ dẫn đến $a = (2/3)g\sin\theta$, là một đại lượng độc lập với r.

NHẬN XÉT: Kết quả của chúng ta là 2/3 của $g\sin\theta$ là gia tốc chuyển động xuống dưới của một khối lượng trên một mặt phẳng nghiêng không ma sát. Giá trị này nhỏ hơn bởi vì có một phần động năng bị "lãng phí" trong chuyển động quay. Hay nói cách khác, giá trị này nhỏ hơn bởi vì có một lực ma sát hướng lên phía trên mặt phẳng nghiêng (để cung cấp moment lực cần thiết cho sự quay của khối trụ, nhưng chúng ta sẽ đề cập tới moment lực trong Mục 8.4), do đó lực ma sát này làm giảm tổng lực tác dụng theo phương xuống dưới lên khối trụ.

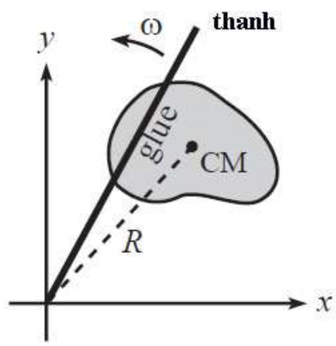
Nếu chúng ta cho I có dạng tổng quát $I = \beta mr^2$, trong đó β là một thừa số, thì bạn có thể chỉ ra rằng gia tốc sẽ trở thành $a = \sqrt{g\sin\theta/(1+\beta)}$. Vì vậy nếu $\beta = 0$ (tất cả khối lượng chỉ tập trung ở khối tâm), thì chúng ta đơn giản là có $a = g\sin\theta$, khi đó khối trụ sẽ chuyển động giống như một vật nặng đang trượt xuống. Nếu $\beta = 1$ (tất cả khối lượng nằm ở trên rìa trụ), thì $a = (1/2)g\sin\beta$. Nếu $\beta \to \infty$[6] thì $a \to 0$. Sau khi đọc Mục 8.4, bạn có thể nghĩ về những trường hợp đặc biệt này theo một cách khác bằng việc sử dụng các lực và moment lực liên quan.

[6]Điều này có thể làm được bằng cách gắn thêm các nan hoa trồi ra khỏi khối trụ và để cho chúng đi qua một rãnh sâu ở trên mặt phẳng nghiêng, hoặc bằng cách là dùng một cuộn chỉ có bán kính trong rất nhỏ lăn xuống một mặt phẳng nghiêng mỏng và chỉ có "trục" trong của nó lăn trên mặt phẳng nghiêng.

Mặc dù bài toán này có thể giải được bằng việc sử dụng lực và moment lực (là nhiệm vụ của Bài tập luyện tập 8.37), nhưng phương pháp bảo toàn năng lượng nói chung thường nhanh hơn khi giải quyết những bài toán phức tạp dạng này, như bạn có thể thấy bằng cách thử làm các Bài tập luyện tập, ví dụ như, 8.28 và 8.46. ♣

8.1.3 Định lý trục song song

Xét trường hợp đặc biệt khi khối tâm quay xung quanh gốc tọa độ cùng vận tốc góc mà vật thể quay xung quanh khối tâm. Điều này có thể nhận được, ví dụ như, bằng cách gắn một thanh xuyên qua vật phẳng và gắn chốt xoay tại một đầu của thanh vào gốc tọa độ; xem Hình 8.5. Trong trường hợp đặc biệt này, chúng ta có trường hợp đã được đơn giản



Hình 8.5:

hóa trong đó mọi điểm trong vật phẳng đều di chuyển theo một đường tròn xung quanh gốc tọa độ. Gọi vận tốc góc của chúng là ω. Khi đó vận tốc của khối tâm là $V = \omega R$, vì vậy phương trình (8.9) cho ta moment động lượng xung quanh gốc tọa độ có dạng

$$L_z = (MR^2 + I_z^{\mathrm{CM}})\omega. \tag{8.12}$$

Nói cách khác, moment quán tính quanh gốc tọa độ là

$$I_z = MR^2 + I_z^{\mathrm{CM}}. \tag{8.13}$$

Đây là *định lý trục song song*. Nó được phát biểu rằng một khi bạn đã tính được moment quán tính của một vật xung quanh một trục đi qua khối tâm (tức là I_z^{CM}), thì nếu bạn muốn tính moment quán tính xung quanh một trục song song, bạn đơn giản là chỉ cần cộng thêm MR^2, trong đó R là khoảng cách giữa hai trục, và M là khối lượng của vật phẳng. Chú ý rằng bởi vì định lý trục song song là một trường hợp đặc biệt của kết quả trong phương trình (8.9), nên nó *chỉ* đúng với điểm khối tâm, và không đúng với bất kỳ điểm nào khác. Định lý trục song song thực ra cũng đúng đối với các vật thể không phẳng tùy ý, như chúng ta sẽ thấy trong Mục 8.2. Và chúng ta cũng sẽ nhận được một dạng tổng quát hơn của định lý này trong Chương 9.

Chúng ta cũng có thể xem xét động năng trong trường hợp đặc biệt này khi điểm khối tâm quay xung quanh gốc tọa độ với cùng vận tốc góc như vật thể quay quanh khối tâm. Sử dụng $V = \omega R$ trong phương trình (8.9), chúng ta tìm được

$$T = \frac{1}{2}\left(MR^2 + I_z^{\text{CM}}\right)\omega^2 = \frac{1}{2}I_z\omega^2. \tag{8.14}$$

Ví dụ (Một thanh): Hãy cùng kiểm chứng định lý trục song song đối với trường hợp một thanh có khối lượng m và chiều dài ℓ, trong trường hợp mà chúng ta muốn so sánh moment quán tính xung quanh một trục đi qua một đầu của thanh (vuông góc với thanh) với moment quán tính xung quanh một trục đi qua khối tâm (vuông góc với thanh).

Để cho thuận tiện, gọi mật độ khối lượng của thanh là $\rho = m/\ell$. Moment quán tính xung quanh trục đi qua một đầu là

$$I^{\text{đầu thanh}} = \int_0^l x^2 dm = \int_0^l x^2 \rho dx = \frac{1}{3}\rho\ell^3 = \frac{1}{3}(\rho l)\ell^2 = \frac{1}{3}m\ell^2. \tag{8.15}$$

Moment quán tính xung quanh một trục qua khối tâm là

$$I^{\text{CM}} = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} x^2 dm = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} x^2 \rho dx = \frac{1}{12}\rho\ell^3 = \frac{1}{12}(\rho l)\ell^2 = \frac{1}{12}m\ell^2. \tag{8.16}$$

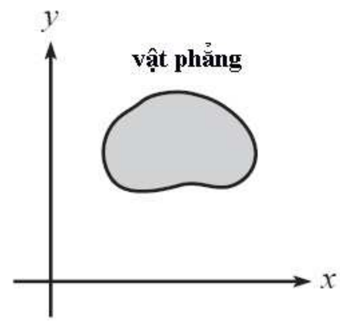
Điều này phù hợp với định lý trục song song, phương trình (8.13), bởi vì

$$I^{\text{đầu thanh}} = m\left(\frac{l}{2}\right)^2 + I^{\text{CM}}. \tag{8.17}$$

Hãy nhớ rằng định lý này đúng đối với điểm khối tâm. Nếu chúng ta thay vì muốn so sánh $I^{\text{đầu thanh}}$ với I xung quanh một điểm, giả dụ như, cách $l/6$ từ đầu đó, thì chúng ta không thể nói rằng là chúng khác nhau một đại lượng $m(l/6)^2$. Nhưng chúng ta *có thể* so sánh từng giá trị của chúng với I^{CM} và nói rằng chúng khác nhau một đại lượng $(\ell/2)^2 - (\ell/3)^2 = 5\ell^2/36$.

8.1.4 Định lý trục vuông góc

Định lý này *chỉ* đúng với các vật phẳng. Xét một vật phẳng trong mặt phẳng $x - y$ (xem Hình 8.6). Khi đó *định lý trục vuông góc* nói rằng



Hình 8.6:

$$I_z = I_x + I_y, \tag{8.18}$$

trong đó I_x và I_y được định nghĩa tương tự như I_z trong phương trình (8.4). Nghĩa là, để tìm I_x, hãy tưởng tượng quay vật quanh trục x với vận tốc góc ω, và sau đó định nghĩa $I_x = L_x/\omega$. (Chỉ có khoảng cách từ trục x mới ảnh hưởng đến việc tính toán vận tốc của một điểm cho trước. Vì vậy thực tế là vật có kích thước kéo dài dọc theo hướng trục x và do đó việc không còn là vật phẳng trong mặt phẳng $y - z$ là không ảnh hưởng gì. Mục tiếp theo sau đây sẽ thảo luận thêm về vấn đề này.) Tương tự như vậy đối với I_y. Nói cách khác,

$$I_x \equiv \int (y^2 + z^2) dm, \quad I_y \equiv \int (z^2 + x^2) dm, \quad I_z \equiv \int (x^2 + y^2) dm. \tag{8.19}$$

Để chứng minh định lý trục vuông góc, chúng ta đơn giản chỉ cần sử dụng một thực tế là $z = 0$ đối với vật phẳng. Phương trình (8.19) khi đó cho ta $I_z = I_x + I_y$. Trong một số giới hạn các tình huống ở đó định lý này có thể áp dụng được, nó có thể giúp bạn tránh khỏi một số khó khăn. Một vài ví dụ minh họa được đưa ra trong Mục 8.3.1.

8.2 Các vật thể không phẳng

Ở Mục 8.1, chúng ta mới chỉ giới hạn tới các thảo luận về vật phẳng trong mặt phẳng $x - y$. Tuy nhiên, gần như tất cả các kết quả chúng ta nhận được đều có thể áp dụng được với vật không phẳng, miễn là trục quay của chúng song song với trục z, và miễn là chúng ta chỉ quan tâm tới L_z, chứ không phải L_x hay L_y. Vì vậy hãy bỏ qua giả thiết vật phẳng và xem xét lại các kết quả đã nhận được ở trên.

Đầu tiên, xét một vật thể quay xung quanh trục z. Cho vật thể có kích thước theo chiều z. Nếu chúng ta tưởng tượng cắt vật thể đó thành các vật phẳng song song với mặt phẳng $x-y$, khi đó các phương trình (8.4) và (8.5) chính xác là cho ta L_z cho mỗi vật phẳng. Và bởi vì L_z của toàn bộ vật thể là tổng của các L_z của các vật phẳng, chúng ta thấy rằng I_z của toàn bộ vật thể là tổng I_z của tất cả các vật phẳng. Sự khác nhau theo các giá trị z của các vật phẳng là không có liên quan gì. Do đó, đối với *bất kỳ* vật thể nào quay xung quanh trục z, chúng ta có

$$I_z = \int (x^2 + y^2) dm, \quad \text{và} \quad L_z = I_z \omega, \tag{8.20}$$

trong đó tích phân được lấy trên toàn bộ thể tích của vật thể. Chúng ta sẽ tính toán I_z cho rất nhiều các vật thể không phẳng khác nữa trong Mục 8.3.1. Chú ý rằng mặc dù phương trình (8.20) cho ta L_z đối với bất kỳ vật thể nào, thì sự phân tích trong chương này vẫn chưa hoàn toàn là tổng quát bởi vì (1) chúng ta đang giới hạn trục quay là trục z (cố định) và (2) thậm chí với sự giới hạn này, một vật thể nằm ngoài mặt phẳng $x-y$ có thể có các thành phần theo phương x và y khác không của $\mathbf{L}$, nhưng chúng ta chỉ tìm ra thành phần theo phương z trong phương trình (8.20). Sự thật thứ hai này có vẻ lạ lùng nhưng đúng là như vậy. Chúng ta quan tâm đến vấn đề này một cách kỹ càng trong Mục 9.2.

Đối với động năng, động năng T của một vật thể không phẳng quay xung quanh trục z vẫn được cho bởi phương trình (8.8), bởi vì chúng ta có thể nhận được tổng động năng T bằng cách cộng tất cả động năng T của các lát vật phẳng.

Hơn nữa, các phương trình (8.9) và (8.10) vẫn đúng đối với một vật thể không phẳng trong trường hợp khi điểm khối tâm chuyển động tịnh tiến trong khi vật thể đang quay xung quanh nó (hoặc chính xác hơn là đang quay xung quanh một trục song song với trục z và đi qua điểm khối tâm). Vận tốc $\mathbf{V}$ của khối tâm thực ra có thể hướng theo bất cứ hướng nào, và hai phương trình này vẫn còn đúng. Nhưng trong chương này chúng ta sẽ giả sử rằng mọi vận tốc đều nằm trong mặt phẳng $x-y$.

Cuối cùng, định lý trục song song vẫn đúng đối với một vật thể không phẳng (các kết quả nhận được khi sử dụng phương trình (8.9) là không đổi). Nhưng như đã đề cập trong Mục 8.1.4, định lý trục vuông góc *không* còn đúng nữa. Đây chính là một trường hợp cá biệt trong đó chúng ta cần đến giả thuyết vật phẳng.

Tìm điểm khối tâm

Khối tâm của vật thể đã được nhắc đi nhắc lại nhiều lần trong chương này. Ví dụ như, khi chúng ta sử dụng định lý trục song song, chúng ta cần phải biết khối tâm nằm ở đâu.

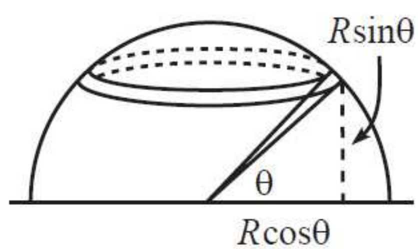
Trong một vài trường hợp, ví dụ như trường hợp với một thanh hoặc một đĩa tròn, vị trí của khối tâm là rõ ràng. Nhưng trong những trường hợp khác, nó lại không được rõ ràng như thế. Vì vậy hãy thực hành tính toán tìm vị trí của điểm khối tâm một chút. Tùy thuộc vào việc phân bố khối lượng là rời rạc hay liên tục, vị trí của khối tâm được định nghĩa bởi (xem phương trình (5.58))

$$\mathbf{R}_{\mathrm{CM}} = \frac{\sum \mathbf{r}_i m_i}{M}, \quad \text{hoặc} \quad \mathbf{R}_{\mathrm{CM}} = \frac{\int \mathbf{r} dm}{M}, \tag{8.21}$$

trong đó M là tổng khối lượng. Chúng ta sẽ làm một ví dụ với khối lượng phân bố liên tục ở đây. Bởi vì thông thường đây là trường hợp đối với các bài toán liên quan đến một tích phân, phần chủ yếu trong lời giải là việc bạn quyết định việc thực hiện cắt lát vật thể như thế nào để tính tích phân.

Ví dụ (Vỏ hình bán cầu): Tìm vị trí của khối tâm của một vỏ hình bán cầu rỗng, có khối lượng phân bố đều và có bán kính R.

Lời giải: Do tính đối xứng, khối tâm nằm trên đường thẳng phía trên tâm của đáy. Vì vậy nhiệm vụ của chúng ta bây giờ là đi tìm độ cao, y_{CM}. Gọi khối lượng riêng là σ. Chúng ta sẽ cắt hình bán cầu thành các vành nằm ngang, được xác định bởi góc θ so với phương ngang, như được chỉ ra trong Hình 8.7. Nếu độ dày góc của



Hình 8.7:

mỗi vành là $d\theta$, thì khối lượng của nó là

$$dm = \sigma dA = \sigma(\text{độ dài})(\text{chiều rộng}) = \sigma(2\pi R\cos\theta)(Rd\theta). \tag{8.22}$$

Mọi điểm trên vành đều có giá trị y là $R\sin\theta$. Do đó,

$$\begin{aligned} y_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{M}\int y dm &= \frac{1}{(2\pi R^2)\sigma}\int_0^{\pi/2}(R\sin\theta)(2\pi R^2\sigma\cos\theta d\theta) \\ &= R\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta d\theta \\ &= \frac{R\sin^2\theta}{2}\Big|_0^{\pi/2} \\ &= \frac{R}{2}. \end{aligned} \tag{8.23}$$

Hệ số rất đơn giản $\frac{1}{2}$ ở đây thật đẹp, nhưng nó không phải hiển nhiên như thế. Nó bắt nguồn từ thực tế rằng mỗi giá trị của y là bằng nhau. Nếu bạn giải bài toán bằng cách lấy tích phân theo dy thay vì lấy tích phân theo $d\theta$, bạn sẽ thấy rằng các vành có độ cao dy sẽ có diện tích như nhau (và có nghĩa là khối lượng là như nhau). Tóm lại, khi y tăng lên, độ nghiêng của mặt cầu tăng lên sẽ bù trừ cho việc bán kính bị nhỏ đi của các vành, việc này nhận được diện tích của các vành là bằng nhau. Bạn nên thử làm sáng tỏ việc này.

Việc tính toán một điểm khối tâm là rất giống với việc tính toán một moment quán tính. Cả hai đều liên quan đến một tích phân lấy trên toàn bộ khối lượng của vật thể, nhưng việc tính toán khối tâm liên quan đến hàm mũ bậc một của độ dài trong hàm tích phân, trong khi đó việc tính toán moment quán tính thì liên quan đến hàm mũ bậc hai.

8.3 Tính các moment quán tính

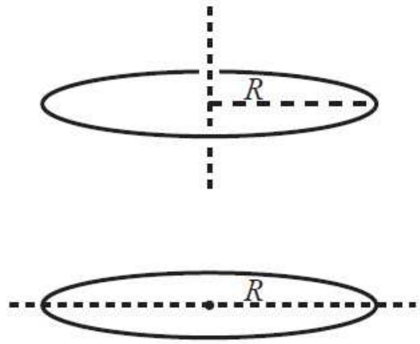
8.3.1 Các ví dụ

Bây giờ chúng ta hãy tính các moment quán tính của các vật thể khác nhau xung quanh các trục xác định. Chúng ta sẽ sử dụng ρ để ký hiệu khối lượng riêng (theo đơn vị độ dài, diện tích hay thể tích tùy từng trường hợp), và chúng ta sẽ giả sử rằng khối lượng riêng này là đồng nhất trên toàn bộ vật thể. Đối với các vật thể phức tạp hơn trong danh sách dưới đây, nói chung sẽ là một ý tưởng tốt đó là cắt chúng ra thành các mảnh mà chúng ta đã biết I. Bài toán khi đó sẽ trở thành thành việc tính tích phân đối với các I đã biết này. Thường thì có nhiều hơn một cách để thực hiện việc cắt này. Ví dụ như, một hình cầu có thể được xem như là một chuỗi các vỏ mỏng đồng tâm hay là một chồng đĩa mỏng xếp chồng lên nhau. Trong những ví dụ dưới đây, bạn có thể sẽ muốn thử các cách cắt khác nhau ngoài các cách đã được đưa ra. Hãy xem xét ít nhất một vài ví dụ này như là các bài tập và cố gắng tự giải chúng.

1. Một vòng có khối lượng M và bán kính R (trục đi qua tâm, vuông góc với mặt phẳng, xem Hình 8.8):

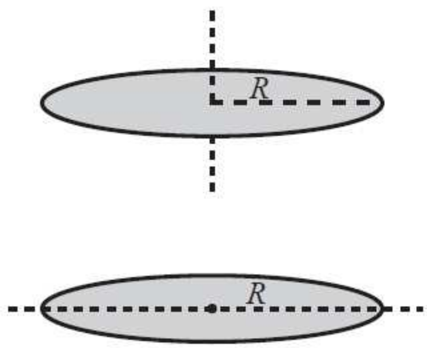
$$I = \int r^2 dm = \int_0^{2\pi} R^2 \rho R d\theta = (2\pi R\rho)R^2 = \boxed{MR^2}, \tag{8.24}$$

như chúng ta đã mong đợi, bởi vì mọi khối lượng của vòng đều cách trục một khoảng R.



Hình 8.8:

2. Một vòng có khối lượng M và bán kính R (trục đi qua tâm và nằm trong mặt phẳng; Hình 8.8): Khoảng cách tới trục là (giá trị tuyệt đối của) $R\sin\theta$. Do đó,



Hình 8.9:

$$I = \int r^2 dm = \int_0^{2\pi} (R\sin\theta)^2 \rho R d\theta = \frac{1}{2}(2\pi R\rho)R^2 = \boxed{\tfrac{1}{2}MR^2}, \qquad (8.25)$$

trong đó chúng ta đã sử dụng $\sin^2\theta = (1-\cos 2\theta)/2$. Bạn cũng có thể tìm I bằng cách sử dụng định lý trục vuông góc. Trong ký hiệu của Mục 8.1.4, chúng ta có $I_x = I_y$, do tính đối xứng. Do đó, $I_z = 2I_x$. Sử dụng $I_z = MR^2$ từ Ví dụ 1 khi đó cho ta $I_x = MR^2/2$.

3. Một đĩa có khối lượng M và bán kính R (trục đi qua tâm, vuông góc với mặt phẳng; Hình 8.9):

$$I = \int r^2 dm = \int_0^{2\pi}\int_0^R r^2 \rho r dr d\theta = (R^4/4)2\pi\rho = \frac{1}{2}(\rho\pi R^2)R^2 = \boxed{\tfrac{1}{2}MR^2}. \qquad (8.26)$$

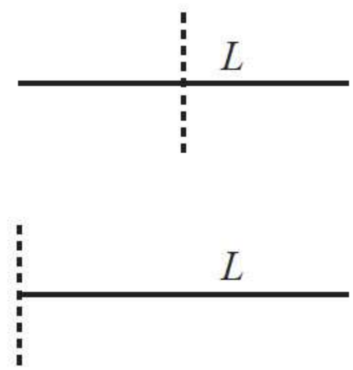
Bạn có thể bỏ qua bước (tầm thường) trong khi lấy tích phân theo θ bằng cách coi đĩa như là tạo bởi rất nhiều các vòng đồng tâm, và sử dụng Ví dụ 1. Khối lượng của mỗi vòng là $\rho 2\pi r dr$. Lấy tích phân trên toàn bộ vòng cho ta $I = \int_0^R (\rho 2\pi r dr) r^2 = \pi R^4 \rho/2 = MR^2/2$, giống như ở trên. Việc cắt đĩa là tương đối không hợp lý trong ví dụ này, nhưng nó sẽ giúp bạn tránh được một số rắc rối trong các trường hợp khác.

4. Một đĩa có khối lượng M và bán kính R (trục đi qua tâm, nằm trong mặt phẳng; Hình 8.9). Cắt đĩa thành các vòng tròn, và sử dụng Ví dụ 2.

$$I = \int_0^R (1/2)(\rho 2\pi r dr) r^2 = (R^2/4)\rho\pi = \frac{1}{4}(\rho\pi R^2)R^2 = \boxed{\tfrac{1}{4}MR^2}. \tag{8.27}$$

Hoặc chỉ đơn giản sử dụng Ví dụ 3 và định lý trục vuông góc.

5. Một thanh mảnh đồng chất có khối lượng M và chiều dài L (trục đi qua tâm, vuông góc với thanh; Hình 8.10): Chúng ta đã tìm được I này và I tiếp theo trong Mục



Hình 8.10:

8.1.3, nhưng chúng ta sẽ vẫn nói ở đây cho đầy đủ.

$$I = \int x^2 dm = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \rho dx = \frac{1}{12}(\rho L)L^2 = \boxed{\tfrac{1}{12}ML^2}. \tag{8.28}$$

6. Một thanh mảnh đồng chất có khối lượng M và chiều dài L (trục đi qua một đầu thanh, vuông góc với thanh; Hình 8.10):

$$I = \int x^2 dm = \int_0^L x^2 \rho dx = \frac{1}{3}(\rho L)L^2 = \boxed{\tfrac{1}{3}ML^2}. \tag{8.29}$$

7. Một vỏ cầu có khối lượng M và bán kính R (bất cứ trục nào đi qua tâm; Hình 8.11): Hãy cắt vỏ cầu này thành các dải có dạng vòng nằm ngang. Trong tọa độ cầu, bán kính của mỗi vòng được cho bởi $r = R\sin\theta$, trong đó θ là góc đối với trục tính từ trên xuống.

Khi đó diện tích của mỗi dải là $2\pi(R\sin\theta)Rd\theta$. Sử dụng $\int \sin^3\theta = \int \sin\theta(1-\cos^2\theta) = -\cos\theta + \cos^3\theta/3$, ta có

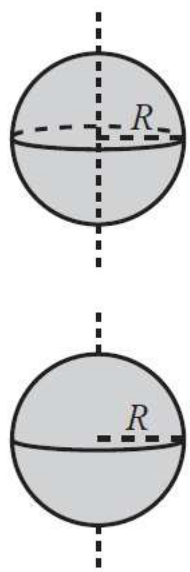
$$\begin{aligned} I = \int r^2 dm &= \int_0^\pi (R\sin\theta)^2 2\pi\rho(R\sin\theta)Rd\theta = 2\pi\rho R^4 \int_0^\pi \sin^3\theta \\ &= 2\pi\rho R^4(4/3) = \frac{2}{3}(4\pi R^2\rho)R^2 = \boxed{\tfrac{2}{3}MR^2}. \end{aligned} \tag{8.30}$$

Một cách khác khôn khéo hơn để nhận kết quả này là sử dụng kết quả sau đây, tương tự như tinh thần của định lý trục vuông góc: Lấy tổng ba moment quán tính trong phương trình (8.19) cho ta

$$I_x + I_y + I_z = 2\int (x^2+y^2+z^2)dm = 2\int r^2 dm. \tag{8.31}$$

Nếu chúng ta ứng dụng cách này đối với vỏ mỏng hình cầu, trong đó r luôn bằng bán kính R, thì vế phải sẽ là $2MR^2$. Và bởi vì các I tất cả là như nhau do đối xứng, tất cả chúng đều phải bằng $2MR^2/3$.

8. Một khối cầu đặc có khối lượng M và bán kính R (bất kỳ trục nào đi qua tâm; Hình 8.11): Một khối cầu được tạo bởi các vỏ cầu đồng tâm. Thể tích của mỗi vỏ



Hình 8.11:

cầu là $4\pi r^2 dr$. Sử dụng Ví dụ 7, ta có

$$I = \int_0^R (2/3)(4\pi\rho r^2 dr)r^2 = (R^5/5)(8\pi\rho/3) = \frac{2}{5}(4\pi R^3\rho/3)R^2 = \boxed{\tfrac{2}{5}MR^2}. \tag{8.32}$$

Nhiệm vụ của Bài tập luyện tập 8.33 là nhận được kết quả này bằng cách cắt khối cầu ra thành các đĩa mỏng nằm ngang.

9. Một hình tam giác vô cùng mảnh có khối lượng M và chiều dài L (trục đi qua đỉnh tam giác, vuông góc với mặt phẳng; Hình 8.12): Gọi cạnh đáy có chiều dài a, trong đó a là vô cùng nhỏ. Khi đó một lát cắt theo phương thẳng đứng rất nhỏ cách đỉnh tam giác một khoảng x có độ dài là $a(x/L)$. Nếu lát cắt có độ dày dx, thì nó về cơ bản sẽ là một khối lượng chất điểm có khối lượng $dm = \rho a x dx/L$. Do đó,

$$I = \int x^2 dm = \int_0^L x^2 \rho a x/L dx = \frac{1}{2}(\rho a L/2)L^2 = \boxed{\tfrac{1}{2}ML^2}, \qquad (8.33)$$

bởi vì $aL/2$ là diện tích của tam giác. Kết quả này có dạng giống hệt với trường hợp của đĩa trong Ví dụ 3, bởi vì đĩa được cấu tạo bởi rất nhiều hình tam giác như thế này.

10. Một tam giác cân có khối lượng M, góc ở đỉnh là 2β, và độ dài hai cạnh bằng nhau là L (trục đi qua đỉnh tam giác, vuông góc với mặt phẳng; Hình 8.12): Gọi h là chiều cao của tam giác (vì vậy $h = L\cos\beta$). Cắt hình tam giác ra thành các dải mỏng song song với cạnh đáy. Gọi x là khoảng cách từ một dải tới đỉnh. Khi đó chiều dài của một dải là $l = 2x\tan\beta$, và khối lượng của nó là $dm = \rho(2x\tan\beta dx)$. Sử dụng Ví dụ 5 ở trên, cùng với định lý trục song song, ta có

$$\begin{aligned} I &= \int dm\left(\frac{\ell^2}{12} + x^2\right) = \int_0^h (\rho 2x\tan\beta dx)\left(\frac{(2x\tan\beta)^2}{12} + x^2\right) \\ &= 2\rho\tan\beta\int_0^h\left(1 + \frac{\tan^2\beta}{3}\right)x^3dx = 2\rho\tan\beta\left(1 + \frac{\tan^2\beta}{3}\right)\frac{h^4}{4}. \end{aligned} \qquad (8.34)$$

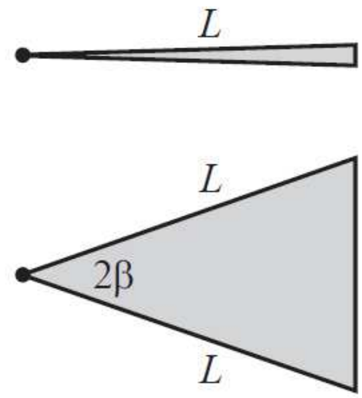
Nhưng diện tích của toàn bộ hình tam giác là $h^2\tan\beta$, vì vậy chúng ta có $I = (Mh^2/2)(1 + (1/3)\tan^2\beta)$. Biểu diễn qua $L = h/\cos\beta$, biểu thức này trở thành

$$I = (ML^2/2)(\cos^2\beta + \sin^2\beta/3) = \boxed{\tfrac{1}{2}ML^2\left(1 - \tfrac{2}{3}\sin^2\beta\right)}. \qquad (8.35)$$

11. Một hình đa giác đều N cạnh có khối lượng M và "bán kính" R (trục đi qua tâm, vuông góc với mặt phẳng; Hình 8.12): Đa giác đều N cạnh được tạo bởi N tam giác cân, vì vậy chúng ta có thể sử dụng Ví dụ 10, với $\beta = \pi/N$. Các khối lượng của các hình tam giác đơn giản là cộng lại với nhau, vì vậy nếu M là khối lượng của cả đa giác N cạnh, ta có

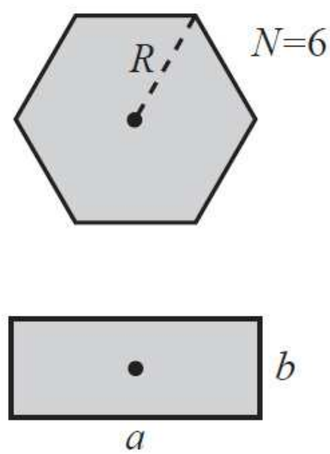
$$I = \boxed{\tfrac{1}{2}MR^2\left(1 - \tfrac{2}{3}\sin^2\tfrac{\pi}{N}\right)}. \qquad (8.36)$$

Chúng ta có thể liệt kê giá trị của I cho một vài giá trị của N. Với ký hiệu ngắn gọn $(N, I/MR^2)$, phương trình (8.36) cho ta (3, $\frac{1}{4}$), (4, 1/3), (6, 5/12), (∞, $\frac{1}{2}$). Những giá trị của I này tạo nên một cấp số cộng đẹp.



Hình 8.12:

12. Một hình chữ nhật có khối lượng M và chiều dài các cạnh là a và b (trục đi qua tâm, vuông góc với mặt phẳng; Hình 8.13): Gọi z là trục vuông góc với mặt phẳng.



Hình 8.13:

Chúng ta biết rằng $I_x = Mb^2/12$ và $I_y = Ma^2/12$ (bởi vì sự kéo dài một vật thể dọc theo một trục không làm ảnh hưởng tới moment xung quanh trục đó, khi được viết theo tổng khối lượng M). Vì vậy định lý trục vuông góc cho ta

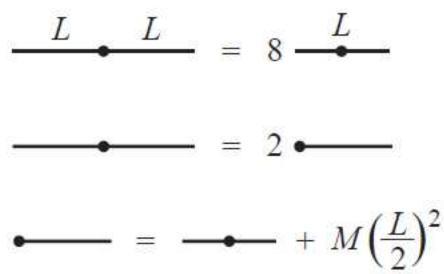
$$I_z = I_x + I_y = \boxed{\tfrac{1}{12}M(a^2 + b^2)}. \tag{8.37}$$

8.3.2 Một mẹo hay

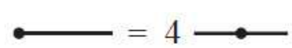
Đối với một số vật thể có một vài tính chất đối xứng nào đó, chúng ta có thể tính moment quán tính mà không cần phải lấy bất cứ một tích phân nào cả. Những thứ duy nhất chúng ta cần là một lý luận về biến đổi tỉ lệ và định lý trục song song. Chúng ta sẽ minh họa kỹ thuật này bằng việc tìm I của một thanh xung quanh tâm của nó (Ví dụ 5 ở trên). Bạn sẽ thấy những ứng dụng khác trong các bài tập của chương này.

Trong ví dụ này, mẹo cơ bản là so sánh I của một thanh có chiều dài L với I của một thanh có chiều dài $2L$ (và có cùng khối lượng riêng ρ). Một lập luận về tỉ lệ nhanh chỉ ra rằng moment quán tính của thanh dài bằng tám lần moment quán tính của thanh ngắn. Điều này là đúng bởi vì tích phân $\int x^2 dm = \int x^2 \rho dx$ có chứa hàm mũ bậc ba của x trong nó (đúng vậy, dx cũng được tính vào). Vì vậy một sự thay đổi của các biến, $x = 2y$, sẽ mang lại một hệ số $2^3 = 8$. Một cách tương tự, nếu chúng ta tưởng tượng kéo dài thanh ngắn thành thanh dài, thì mỗi mảnh tương ứng trong thanh dài sẽ cách trục một khoảng cách gấp đôi, và cũng có khối lượng gấp đôi. Tích phân $\int x^2 dm$ do đó cũng tăng lên một hệ số là $2^2.2 = 8$.

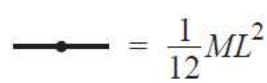
Kỹ thuật này được minh họa một cách dễ nhất thông qua các hình vẽ. Nếu chúng ta ký hiệu moment quán tính của một vật thể bằng một hình của vật thể đó, với dấu chấm biểu thị cho trục, thì chúng ta có: Dòng đầu tiên đến từ lập luận về tỉ lệ, dòng thứ hai



đến từ thực tế rằng moment quán tính đơn giản là cộng vào với nhau (vế trái là hai bản sao của vế phải, được gắn với nhau tại điểm quay), và dòng thứ ba đến từ định lý trục song song. Cân bằng các vế phải của hai phương trình đầu tiên ta có



Thay biểu thức này vào trong phương trình thứ ba cho ta kết quả mong đợi,



Chú ý rằng sớm hay muộn thì chúng ta cũng phải sử dụng các con số thực sự, mà xuất hiện bởi định lý trục song song. Việc chỉ sử dụng các lập luận về tỉ lệ là không đủ, bởi vì chúng chỉ cho ta hệ phương trình tuyến tính thuần nhất đối với các I, và do đó không có ý nghĩa gì để đi chọn các đơn vị phù hợp. (Để biết thêm một đánh giá thú vị về phát hiện của Galileo đối với các định luật tỉ lệ, xem Peterson (2002).)

Một khi bạn đã làm chủ được mẹo này và áp dụng nó đối với các vật thể Fractal trong Bài tập 8.8, bạn có thể gây ấn tượng với các bạn bè của bạn bằng cách nói rằng bạn biết cách làm thế nào để "sử dụng lập luận về tỉ lệ, cùng với định lý trục song song, để tính các moment quán tính của các vật thể có kích thước fractal." Và bạn sẽ không bao giờ biết khi nào điều này có thể trở nên vô cùng hữu ích với mình đâu.

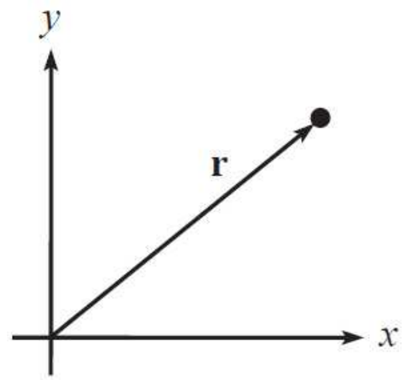
8.4 Moment lực

Bây giờ chúng ta sẽ chỉ ra rằng dưới một số điều kiện nào đó (sẽ được phát biểu bên dưới), tốc độ thay đổi của moment động lượng sẽ bằng một đại lượng nào đó, τ, mà chúng ta gọi nó là moment lực. Điều đó có nghĩa là, $\tau = d\mathbf{L}/dt$. Công thức về sự quay này tương tự với người bạn cũ của chúng ta $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ liên quan đến động lượng. Ý tưởng cơ bản ở đây rất rõ ràng, nhưng vẫn có hai vấn đề tinh tế. Một đại lượng thì liên quan đến các nội lực bên trong tập hợp các chất điểm. Còn đại lượng kia thì liên quan đến gia tốc có thể có của điểm gốc tọa độ (điểm mà moment lực và moment động lượng được tính toán so với nó). Để cho mọi thứ được rõ ràng, chúng ta sẽ chứng minh kết quả tổng quát bằng cách khảo sát ba tình huống có độ phức tạp tăng dần.

Kết quả nhận được của chúng ta $\tau = d\mathbf{L}/dt$ ở đây đúng cho chuyển động hoàn toàn tổng quát, vì vậy chúng ta có thể lấy kết quả này và sử dụng nó trong các chương sau. Nếu muốn, bạn có thể xây dựng một chứng minh cụ thể của $\tau = d\mathbf{L}/dt$ cho trường hợp đặc biệt mà ở đó trục quay song song với trục z. Nhưng bởi vì chứng minh tổng quát lại không khó hơn, chúng ta sẽ trình bày nó trong chương này và sẽ chỉ làm một lần và dùng nó cho mọi trường hợp.

8.4.1 Khối lượng chất điểm, gốc tọa độ cố định

Xét một khối lượng chất điểm ở tại vị trí $\mathbf{r}$ so với một gốc tọa độ cố định (xem Hình 8.14). Tốc độ biến thiên theo thời gian của moment động lượng, $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, là



Hình 8.14:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{L}}{dt} &= \frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times\mathbf{p})\\ &= \frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\mathbf{p}+\mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{p}}{dt}\\ &= \mathbf{v}\times(m\mathbf{v})+\mathbf{r}\times\mathbf{F}\\ &= 0+\mathbf{r}\times\mathbf{F},\end{aligned}\tag{8.38}$$

trong đó **F** là lực tác động lên chất điểm. Việc tính toán này giống như trong Định lý (7.1), ngoại trừ việc ở đây chúng ta đang xét một lực bất kỳ chứ không phải lực xuyên tâm. Nếu ta định nghĩa moment lực của chất điểm có dạng

$$\tau \equiv \mathbf{r}\times\mathbf{F},\tag{8.39}$$

thì phương trình (8.38) trở thành

$$\tau = \frac{d\mathbf{L}}{dt}.\tag{8.40}$$

Nó được hiểu rằng đại lượng **r** trong moment lực được đo so với cùng gốc tọa độ mà đại lượng **r** của moment động lượng được đo.

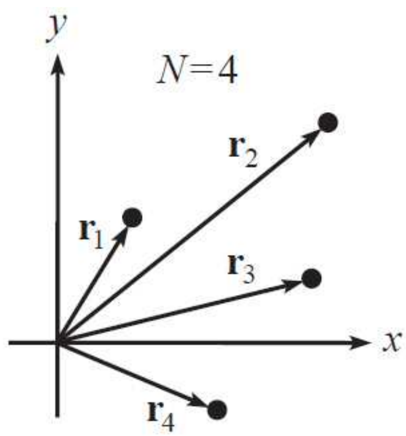
8.4.2 Khối lượng mở rộng, gốc tọa độ cố định

Với một vật thể mở rộng, có các nội lực tác động lên vô số các phần khác nhau của vật thể, ngoài các ngoại lực nếu có. Ví dụ như, ngoại lực tác động lên một phân tử trong một vật thể có thể là trọng lực, trong khi đó các nội lực có thể là do các phân tử xung quanh. Chúng ta làm thế nào để xử lý các loại lực khác nhau này?

Trong phần tiếp theo, chúng ta sẽ chỉ làm việc với các nội lực mà là các lực xuyên tâm, sao cho lực tác dụng giữa hai vật thể có hướng dọc theo đường thẳng nối chúng.

Giả thuyết này là đúng đối với các lực đẩy và lực hút giữa các phân tử trong một vật thể rắn. (Nó sẽ không còn đúng nữa, ví dụ như, đối với các lực từ. Nhưng chúng ta sẽ không quan tâm tới các lực loại này ở đây.) Chúng ta sẽ sử dụng định luật thứ ba của Newton, nói rằng lực mà phần tử 1 tác dụng lên phần tử 2 bằng và ngược chiều với lực mà phần tử 2 tác dụng lên phần tử 1.

Để cho cụ thể, hãy giả sử rằng chúng ta có một tập hợp N chất điểm rời rạc được đánh dấu bằng chỉ số i (xem Hình 8.15). Trong trường hợp liên tục, chúng ta cần phải



Hình 8.15:

thay các tổng bên dưới bằng các tích phân. Moment tổng động lượng của hệ là

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i. \tag{8.41}$$

Lực tác dụng lên mỗi chất điểm là $\mathbf{F}_i^{\text{ngoại lực}} + \mathbf{F}_i^{\text{nội lực}} = d\mathbf{p}_i/dt$. Do đó,

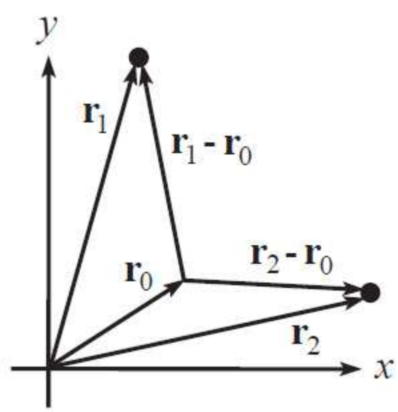
$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{L}}{dt} &= \frac{d}{dt}\sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i \\
&= \sum_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \times \mathbf{p}_i + \sum_i \mathbf{r}_i \times \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} \\
&= \sum_i \mathbf{v}_i \times (m\mathbf{v}_i) + \sum_i \mathbf{r}_i \times (\mathbf{F}_i^{\text{ngoại lực}} + \mathbf{F}_i^{\text{nội lực}}) \\
&= 0 + \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{\text{ngoại lực}} \\
&\equiv \sum_i \tau_i^{\text{ngoại lực}}.
\end{aligned} \tag{8.42}$$

Dòng thứ hai từ dưới lên có được là bởi vì $\mathbf{v}_i \times \mathbf{v}_i = 0$, và cũng bởi vì $\sum_i \mathbf{r_i} \times \mathbf{F}_i^{\text{nội lực}} = 0$, như bạn có thể chỉ ra trong Bài tập 8.9. Nói cách khác, các nội lực không sinh ra tổng moment lực. Điều này hoàn toàn là hợp lý. Nó cơ bản nói rằng một vật thể rắn không có ngoại lực tác dụng sẽ không thể tự mình bắt đầu quay.

Chú ý rằng vế phải liên quan đến *tổng* moment lực ngoài tác dụng lên vật thể, mà có thể đến từ các lực tác động lên rất nhiều các điểm khác nhau. Cũng cần chú ý rằng chưa ở chỗ nào chúng ta đã giả sử rằng các hạt là liên kết chặt với nhau. Phương trình (8.42) vẫn đúng ngay cả nếu như có chuyển động tương đối giữa các phần tử. Nhưng trong trường hợp đó, sẽ luôn luôn là khó khăn khi xử lý L, bởi vì nó sẽ không còn có dạng rất đẹp $I\omega$.

8.4.3 Khối lượng suy rộng, gốc tọa độ không cố định

Gọi vị trí của điểm gốc tọa độ là $\mathbf{r}_0$ (xem Hình 8.16), và gọi vị trí của các phần tử là $\mathbf{r}_i$.



Hình 8.16:

Các vector $\mathbf{r}_0$ và $\mathbf{r}_i$ được đo đối với một hệ tọa độ cố định cho trước. Tổng moment động lượng của hệ, đối với gốc tọa độ (có thể có gia tốc) $\mathbf{r}_0$, là[7]

$$\mathbf{L} = \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0) \times m_i(\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_0). \tag{8.43}$$

[7]Một cách chính xác hơn, là chúng ta đang tính moment động lượng đối với một hệ tọa độ có điểm gốc là r_0 và các trục luôn song song với các trục cố định. Nếu chúng ta cho phép một sự quay của trục, thì chúng ta sẽ phải giải quyết tất cả các vấn đề của các lực quán tính mà đó là nội dung của Chương 10. Với vấn đề hiện tại, chúng ta cuối cùng cũng sẽ phải làm việc với một lực quán tính (xem chú ý bên dưới).

Do đó,

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{L}}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0) \times m_i(\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_0)\right) \\ &= \sum_i (\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_0) \times m_i(\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_0) + \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0) \times m_i(\ddot{\mathbf{r}}_i - \ddot{\mathbf{r}}_0) \\ &= 0 + \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0) \times (\mathbf{F}_i^{\text{ngoại lực}} + \mathbf{F}_i^{\text{nội lực}} - m_i \ddot{r}_0),\end{aligned} \tag{8.44}$$

bởi vì $m_i\ddot{\mathbf{r}}_i$ là tổng lực tác dụng (tức là $\mathbf{F}_i^{\text{ngoại lực}} + \mathbf{F}_i^{\text{nội lực}}$) đang tác động lên phần tử thứ i. Nhưng một hệ quả nhanh của Bài tập 8.9 là số hạng liên quan tới $\mathbf{F}_i^{\text{nội lực}}$ sẽ bị triệt tiêu (bạn nên kiểm tra lại). Và bởi vì $\sum m_i\mathbf{r}_i = M\mathbf{R}$ (trong đó $M = \sum m_i$ là tổng khối lượng, và $\mathbf{R}$ là vị trí của khối tâm), ta có

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \left(\sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{F}_i^{\text{ngoại lực}}\right) - M(\mathbf{R} - \mathbf{r}_0) \times \ddot{\mathbf{r}}_0. \tag{8.45}$$

Số hạng đầu tiên ở đây là moment lực ngoài, được đo so với điểm gốc tọa độ $\mathbf{r}_0$. Số hạng thứ hai là số hạng mà chúng ta muốn nó biến mất. Và thực vậy, thông thường là nó sẽ bị mất đi. Nó sẽ bị triệt tiêu nếu bất kỳ một trong ba điều kiện sau được thỏa mãn.

1. $\mathbf{R} = \mathbf{r}_0$, nghĩa là, điểm gốc tọa độ chính là điểm khối tâm.

2. $\ddot{\mathbf{r}}_0 = 0$, nghĩa là, điểm gốc tọa độ chuyển động không có gia tốc.

3. $(\mathbf{R} - \mathbf{r}_0)$ song song với $\ddot{\mathbf{r}}_0$. Điều kiện này hiếm khi phải sử dụng tới.

Nếu bất kỳ một trong các điều kiện này được thỏa mãn, thì chúng ta có thể viết

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{F}_i^{\text{ngoại lực}} \equiv \sum_i \tau_i^{\text{ngoại lực}}. \tag{8.46}$$

Nói cách khác, chúng ta có thể cân bằng moment lực ngoài với tốc độ thay đổi của tổng moment động lượng. Một hệ quả trực tiếp của kết quả này là:

Hệ quả 8.3: *Nếu tổng moment lực ngoài tác dụng lên một hệ bằng không, thì moment động lượng của nó được bảo toàn. Nói riêng, moment động lượng của một hệ kín (hệ mà không bị chịu ảnh hưởng của các ngoại lực) được bảo toàn.*

Mọi thứ cho đến bây giờ đều đúng cho chuyển động bất kỳ. Các phần tử có thể đang chuyển động tương đối với nhau, và các L_i có thể có các hướng khác nhau, v.v... Nhưng bây giờ hãy giới hạn chuyển động. Trong chương này, chúng ta sẽ chỉ giải quyết các trường hợp mà trong đó $\hat{\mathbf{L}}$ là hằng số (được chọn là có hướng theo trục z). Do đó,

$d\mathbf{L}/dt = d(L\hat{\mathbf{L}})/dt = (dL/dt)\hat{\mathbf{L}}$. Nếu thêm vào nữa chúng ta chỉ xét các vật thể rắn (trong đó khoảng cách tương đối giữa các phần tử là không đổi) mà chỉ quay quanh một điểm cho trước, thì $L = I\omega$, mà nó cho ta $dL/dt = I\dot{\omega} \equiv I\alpha$. Sau đó lấy độ lớn của cả hai vế trong phương trình (8.46) ta có

$$\tau_{\text{ngoại lực}} = I\alpha. \tag{8.47}$$

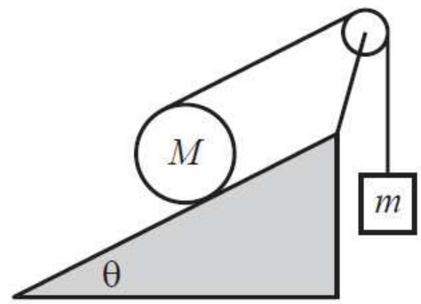
Lúc nào cũng vậy, chúng ta sẽ tính toán moment động lượng và moment lực xung quanh hoặc là điểm khối tâm hoặc là quanh một điểm cố định (hoặc một điểm chuyển động với vận tốc không đổi, nhưng điều này không thường xảy ra). Đây là các điểm gốc tọa độ "an toàn", theo nghĩa là phương trình (8.46) luôn đúng. Miễn là bạn luôn sử dụng một trong các điểm gốc tọa độ an toàn này, bạn có thể đơn giản là áp dụng phương trình (8.46) và không phải lo lắng nhiều về nguồn gốc của nó.

NHẬN XÉT: Bạn có thể sẽ không bao giờ phải sử dụng đến điều kiện thứ ba ở trên, nhưng cũng hay khi biết rằng có một cách đơn giản để hiểu nó thông qua các hệ quy chiếu chuyển động có gia tốc. Đây chính là nội dung của Chương 10, vì vậy chúng ta sẽ đi sớm một chút ở đây, nhưng với lập lập như sau. Giả sử $\mathbf{r}_0$ là điểm gốc của một hệ tọa độ mà nó đang chuyển động với gia tốc $\ddot{\mathbf{r}}_0$. Khi đó tất cả các vật thể ở trong hệ tọa độ có gia tốc này đều chịu tác dụng của một lực lực quán tính có dạng $-m\ddot{\mathbf{r}}_0$. Ví dụ như, trên một tàu hỏa đang tăng tốc về bên phải với gia tốc a, bạn cảm thấy có một lực kỳ lạ có độ lớn ma kéo bạn về bên trái. Nếu bạn không chống lại lực này bởi một lực khác (ví dụ như, bằng cách bám vào tay cầm), thì bạn sẽ bị ngã. Lực quán tính này tác dụng giống như trọng lực, bởi vì nó cũng tỉ lệ với khối lượng. Do đó, nó cũng tác động lên khối tâm, tạo ra một moment lực có độ lớn $(\mathbf{R} - \mathbf{r}_0) \times (-M\ddot{\mathbf{r}}_0)$. Đây chính là số hạng thứ hai trong phương trình (8.45). Số hạng này biết mất nếu như điểm khối tâm là ở vị trí thẳng ngay "bên trên" hoặc "bên dưới" (ở mức độ mà lực quán tính trọng lực được xét đến) điểm gốc tọa độ, hay nói cách khác là, nếu $(\mathbf{R} - \mathbf{r}_0)$ song song với $\ddot{\mathbf{r}}_0$. Xem Bài tập 10.8 để biết thêm phần thảo luận chi tiết hơn về điều này lập luận theo các lực quán tính.

Có một tình huống thường gặp ở đó điều kiện thứ ba có thể được sử dụng. Xét một bánh xe lăn không trượt trên mặt đất. Đánh dấu một điểm lên rìa ngoài của bánh xe. Tại thời điểm điểm đánh dấu này tiếp xúc với mặt đất, nó sẽ là một sự lựa chọn hợp lý cho điểm gốc tọa độ. Điều này là đúng bởi vì $(\mathbf{R} - \mathbf{r}_0)$ có hướng theo phương thẳng đứng. Và $\ddot{\mathbf{r}}_0$ cũng có hướng thẳng đứng, bởi vì một điểm trên một bánh xe đang quay sẽ vẽ ra một đường cycloid. Ngay trước khi điểm này chạm vào mặt đất, nó sẽ chuyện động thẳng xuống dưới. Và ngay sau khi nó chạm mặt đất, nó sẽ chuyển động thẳng lên trên. Nhưng như đã nói về điều này, thường thì việc lấy một điểm gốc như vậy không giúp ta nhận thêm được cái gì.

Vì vậy an toàn nhất là chúng ta luôn chọn điểm gốc tọa độ hoặc là điểm khối tâm hoặc là một điểm cố định, ngay cả khi điều kiện thứ ba đúng. ♣

Ví dụ: Một sợi dây quấn quanh một trụ đồng chất có khối lượng M, đang nằm yên trên một mặt phẳng nghiêng cố định. Sợi dây được luồn qua một ròng rọc có khối lượng không đáng kể và được nối với một vật khối lượng m, như chỉ ra trong Hình 8.17. Giả sử rằng trụ lăn không trượt trên mặt phẳng nghiêng, và giả sử rằng sợi



Hình 8.17:

dây song song với mặt phẳng nghiêng. Hỏi gia tốc chuyển động của vật khối lượng m bằng bao nhiêu? Điều kiện của tỷ số M/m là như thế nào để cho hình trụ chuyển động xuống dưới?

Lời giải thứ nhất : Các lực ma sát, lực căng và trọng lực được chỉ ra trong Hình 8.18. Định nghĩa các đại lượng dương a_1, a_2, và α như trong hình vẽ. Ba gia tốc này, cùng với T và F, là năm ẩn số. Do đó chúng ta cần xây dựng năm phương trình. Đó là:

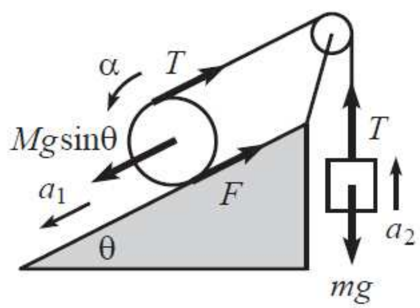
1. $F = ma$ đối với $m \quad \Longrightarrow \quad T - mg = ma_2$.
2. $F = ma$ đối với $M \quad \Longrightarrow \quad Mg\sin\theta - T - F = Ma_1$.
3. $\tau = I\alpha$ đối với M (quanh khối tâm) $\quad \Longrightarrow \quad FR - TR = (MR^2/2)\alpha$.
4. Điều kiện không trượt $\quad \Longrightarrow \quad \alpha = a_1/R$.
5. Bảo toàn độ dài của sợi dây $\quad \Longrightarrow \quad a_2 = 2a_1$.

Một số nhận xét đối với các phương trình này: Phản lực và phần trọng lực vuông góc với mặt phẳng là triệt tiêu lẫn nhau, vì vậy chúng ta có thể bỏ qua chúng. Chúng ta đã chọn F dương là hướng lên trên mặt phẳng nghiêng, nhưng nếu nó vô tình hướng xuống dưới mặt phẳng nghiêng và do đó trở thành âm, thì như thế cũng không sao (nhưng điều này sẽ không xảy ra); chúng ta không cần phải lo lắng về việc nó hướng theo chiều nào. Trong (3), chúng ta đang sử dụng khối tâm của hình trụ làm điểm gốc tọa độ, nhưng chúng ta cũng có thể sử dụng một điểm cố định; xem cách giải thứ hai bên dưới. Trong (5), chúng ta đã sử dụng thực tế rằng đỉnh của bánh xe đang quay chuyển động nhanh gấp đôi phần tâm của nó. Điều này là đúng bởi vì vận tốc tương đối giữa đỉnh và tâm bằng với vận tốc tương đối giữa tâm và mặt đất.

Chúng ta có thể giải năm phương trình này bằng nhiều cách khác nhau. Ba trong số các phương trình này chỉ phụ thuộc vào hai biến, vì vậy giải chúng cũng không khó lắm. Phương trình (3) và (4) cho ta $F - T = Ma_1/2$. Cộng phương trình này với phương trình (2) cho ta $Mg\sin\theta - 2T = 3Ma_1/2$. Sử dụng phương trình (1) để triệt tiêu T, và sử dụng phương trình (5) để viết a_1 theo a_2, khi đó ta có

$$Mg\sin\theta - 2(mg + ma_2) = \frac{3Ma_2}{4} \quad \Longrightarrow \quad a_2 = \frac{(M\sin\theta - 2m)g}{(3/4)M + 2m}. \tag{8.48}$$

Và $a_1 = a_2/2$. Chúng ta thấy rằng a_1 là dương (nghĩa là, trụ lăn xuống dưới mặt



Hình 8.18:

phẳng nghiêng) nếu $M/m > 2/\sin\theta$. Nếu $\theta \to 0$, thì điều này cho ta $M/m \to \infty$, là một điều hợp lý. Nếu $\theta \to \pi/2$, thì $M/m \to 2$. Nguyên nhân cốt lõi của kết quả này là lực ma sát F, cùng với sức căng T, đã giúp hình trụ đi lên trên (hệ số ma sát phải rất lớn trong trường hợp này nếu muốn điều kiện không trượt xảy ra).

Lời giải thứ hai : Trong việc sử dụng $\tau = dL/dt$, chúng ta cũng có thể chọn một điểm cố định làm gốc tọa độ, thay vì chọn khối tâm. Điểm hợp lý nhất là điểm nằm đâu đó dọc theo mặt phẳng nghiêng. Lực $Mg\sin\theta$ bây giờ sẽ sinh ra một moment lực, nhưng lực ma sát thì không. Và cánh tay đòn của lực căng bây giờ là $2R$. Moment động lượng của hình trụ đối với một điểm trên mặt phẳng nghiêng là $L = I\omega + Mv_1R$, trong đó số hạng thứ hai đến từ phần moment động lượng do vật đang bị coi giống như một khối lượng chất điểm đặt tại khối tâm. Vì vậy

$dL/dt = I\alpha + Ma_1R$, và $\tau = dL/dt$ cho ta

$$(Mg\sin\theta)R - T(2R) = (MR^2/2)\alpha + Ma_1R. \qquad (8.49)$$

Phương trình này hóa ra chính là tổng của phương trình thứ ba cộng với R lần phương trình thứ hai trong lời giải thứ nhất. Do đó chúng ta sẽ nhận được cùng một kết quả.

8.5 Va chạm

Trong Mục 5.7, chúng ta đã xem xét đến va chạm của các phần tử chất điểm hoặc nếu không thì của các vật thể không quay. Nội dung cơ bản ở đó mà giúp chúng ta giải các bài toán là định luật bảo toàn động lượng và định luật bảo toàn năng lượng (trong trường hợp va chạm là đàn hồi). Với định luật bảo toàn moment động lượng mà bây giờ chúng ta có thể sử dụng, chúng ta có thể mở rộng nghiên cứu của chúng ta về va chạm tới các vật thể có chuyển động quay. Việc có thêm định luật bảo toàn L sẽ bù cho bậc tự do mới của chuyển động quay. Do đó, miễn là bài toàn được thiết lập một cách hợp lý, chúng ta vẫn sẽ có số ẩn bằng số phương trình.

Định luật bảo toàn năng lượng có thể được sử dụng trong bài toán va chạm chỉ khi nếu va chạm đó là đàn hồi (theo định nghĩa). Nhưng định luật bảo toàn moment động lượng thì tương tự như định luật bảo toàn động lượng, theo nghĩa là nó có thể *luôn luôn* sử dụng được (xem nhận xét bên dưới), với giả thiết là hệ đang xét là hệ cô lập. Tuy nhiên, sự bảo toàn của L là hơi khác so với sự bảo toàn của p, bởi vì chúng ta phải chọn một điểm gốc tọa độ trước khi chúng ta có thể tiếp tục. Bởi vì ba điều kiện mà cần thiết để cho Hệ quả 8.3 là đúng, chúng ta phải chọn điểm gốc tọa độ hoặc là một điểm cố định hoặc là điểm khối tâm của hệ (chúng ta sẽ bỏ qua điều kiện thứ ba, bởi vì nó hiếm khi được sử dụng). Nếu chúng ta không tỉnh táo mà chọn một điểm đang chuyển động có gia tốc, thì $\tau = d\mathbf{L}/dt$ *không* còn đúng nữa, vì vậy chúng ta không được quyền để tuyên bố rằng $d\mathbf{L}/dt$ bằng không chỉ vì moment lực bằng không (bởi vì nó đúng đối với một hệ cô lập). Trong các bài toán va chạm, sẽ rất dễ bị rơi vào cái bẫy là chọn một điểm có gia tốc làm điểm gốc tọa độ. Ví dụ như, bạn có thể chọn điểm giữa của một thanh làm điểm gốc tọa độ. Nhưng nếu một vật thể khác va chạm với thanh, thì điểm giữa của nó sẽ có gia tốc, và điều đó làm nó sẽ không còn là một lựa chọn gốc tọa độ có giá trị nữa.

NHẬN XÉT: Đối với các định luật bảo toàn, thì năng lượng E khác với p và L ở chỗ là năng lượng có thể bị ẩn trong các chuyển động vi mô của các phân tử trong vật thể, ở dưới dạng nhiệt. Chuyển động này bao gồm các dao động nhỏ với các biên độ nhỏ nhưng với các tốc độ lớn. Năng lượng của các dao động này có thể là đủ lớn để có độ lớn cùng bậc với độ lớn của toàn bộ năng lượng của hệ. Nhưng bởi vì các dao động này là quá nhỏ để có thể thấy được, nên có vẻ như năng lượng bị mất đi. Tuy nhiên, chú ý là ngay cả khi chúng là quá nhỏ để thấy được, bạn vẫn có thể cảm nhận được chúng bởi tay của bạn, dưới dạng nhiệt.

Tuy nhiên, động lượng thì lại không thể bị ẩn đi được. Nếu một vật thể (không cần thiết là rắn) có động lượng khác không, thì nó phải chuyển động thành một khối, và không thể nào khác được. Nói tóm lại, bởi vì $P = MV_{\text{CM}}$, chúng ta thấy rằng nếu P khác không, thì V_{CM} cũng vậy. Vì vậy chuyển động phải xảy ra ở mức độ vĩ mô; không thể có cách nào để nó ẩn giấu dưới dạng vi mô.

Với moment động lượng, vấn đề phức tạp hơn một chút. Nếu vật thể là vật rắn, thì nó không thể giấu moment động lượng, với các lý do tương tự như trong trường hợp động lượng; bởi vì $L = I\omega$, chúng ta thấy rằng nếu L khác không, thì ω cũng vậy. Tuy nhiên, nếu vật thể không phải là vật rắn (ví dụ như xem một chất khí), thì về mặt lý thuyết hóa ra rằng nó *có thể* có một phần moment động lượng ẩn ở trong các chuyển động vi mô, mặc dù trong thực tế nó quá nhỏ để có thể thấy được. Phần moment động lượng ẩn này có thể bắt nguồn từ những vùng xoáy nhỏ trong khắp toàn hệ. Trái ngược với động lượng, trường hợp này hệ có thể có moment động lượng mà không có chuyển động tổng thể nào. Vì vậy ở phương diện này, chuyển động xoáy vi mô này là tương tự như chuyển động dao động vi mô có chứa năng lượng ẩn. Tuy nhiên, có ba sự khác biệt chính.

Thứ nhất, nếu chúng ta giả sử rằng chuyển động xoáy xảy ra ở cấp độ vi mô, thì r trong $L = mrv$ là rất nhỏ, và điều này dẫn đến một đại lượng L không đáng kể. Lập luận này không còn đúng với E, bởi vì năng lượng của dao động không liên quan đến r. Thay vào đó, nó chỉ lên quan đến v dưới dạng $mv^2/2$, vì vậy nó cuối cùng có thể lớn. Thứ hai, không có cách gì dễ dàng để khởi tạo chuyển động tròn của các chuyển động xoáy nhỏ thông qua một va chạm, trái ngược với việc dễ dàng gây ra chuyển động tuyến tính ngẫu nhiên mà tạo ra năng lượng nhiệt; bạn chỉ cần đập hai vật vào nhau. Và thứ ba, trong trường hợp khi vật thể là vật rắn, các phân tử có thể dễ dàng dao động, nhưng chúng không thể quay một cách vô hạn định bởi vì điều này sẽ gây ra việc phá vỡ các liên kết giữa các phân tử cạnh nhau. Vấn đề là trong chuyển động dao động tất cả các tọa độ đều giữ giá trị nhỏ, trong khi đó trong chuyển động quay tròn các tọa độ lại không như vậy, bởi vì cuối cùng thì góc θ sẽ trở lên rất lớn.

Tuy nhiên, có một hiện tượng rất hay gặp gọi là từ tính, rằng (theo nghĩa nào đó) là một trường hợp ngoại lệ của tất cả ba điểm lập luận ở trên. Mặc dù từ tính không phải là một moment động lượng, nó cũng bắt nguồn (nói một cách đại khái) từ chuyển động "tròn" của các electron xung quanh hạt nhân trong các nguyên tử. (Nói chung, nó thực ra có nguồn gốc từ "spin" của các electron hơn là từ chuyển động tròn xung quanh hạt nhân, nhưng đừng lo lắng về điều đó ở đây. Để mọi thứ được rõ ràng, chúng ta dù sao cũng sẽ phải nghĩ theo quan điểm cơ học lượng tử. Hãy chỉ làm việc theo một lý thuyết xấp xỉ thô cổ điển). Các electron trong toàn bộ một vật liệu từ chuyển động trong các vòng lặp siêu nhỏ có tương quan một ít với nhau. Chúng ta có thể thoát ra khỏi ba điểm lập luận ở trên bởi vì thứ nhất, từ trường liên quan tới điện tích e, và nó là đủ lớn (trên cấp độ của các vật) để triệt tiêu sự nhỏ bé của hệ số r. (Moment động lượng thực tế của các electron trong một vật liệu từ là có thể bỏ qua bởi vì khối lượng của chúng là quá nhỏ. Không có một đại lượng lớn giống như e để có thể có một kết quả như vậy.) Thứ hai, sẽ rất là dễ dàng để làm cho các eletron chuyển động trong các vòng tròn tương quan với nhau bởi các lực từ; mà sẽ không cần phải làm các vật va đập vào nhau. Và thứ ba, các eletron là tự do di chuyển xung quanh theo các đường tròn nhỏ (theo một quan điểm cổ điển) trong các nguyên tử mà không làm phá vỡ các liên kết. ♣

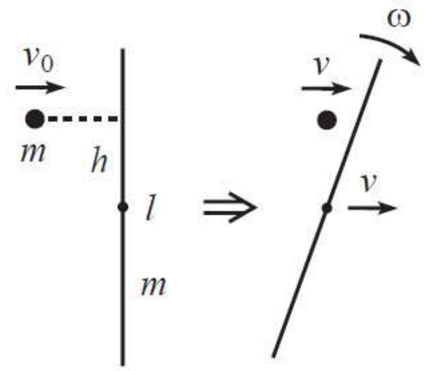
Điều quan trọng để nhớ là bạn tự do được lựa chọn điểm gốc tọa độ từ các khả năng cho phép là các điểm cố định hoặc là điểm khối tâm. Bởi vì thông thường thì một lựa chọn nào đó sẽ tốt hơn các lựa chọn khác (trong đó nó giúp việc tính toán dễ dàng hơn), bạn nên sử dụng quyền tự do lựa chọn này. Hãy làm hai ví dụ sau đây. Đầu tiên là một bài toán va chạm đàn hồi, và sau đó là một toán va chạm không đàn hồi.

Ví dụ (Va chạm đàn hồi): Một vật khối lượng m di chuyển vuông góc với một thanh có khối lượng m và chiều dài ℓ, mà ban đầu đứng yên. Vật nên va chạm đàn hồi với thanh tại vị trí nào sao cho vật và điểm giữa của thanh di chuyển với cùng tốc độ sau va chạm?

Lời giải: Gọi tốc độ ban đầu của khối lượng m là v_0. Chúng ta có ba ẩn số trong bài toán này (xem Hình 8.19), chúng là khoảng cách đang cần tìm tính từ điểm giữa của thanh, h; tốc độ (bằng nhau) sau va chạm của thanh và vật, v; và vận tốc góc sau va chạm của thanh, ω. Chúng ta có thể tìm ba ẩn này bằng cách sử dụng ba định luật bảo toàn đã có:

- Bảo toàn của p:

$$mv_0 = mv + mv \quad \Longrightarrow \quad v = \frac{v_0}{2}, \tag{8.50}$$



Hình 8.19:

- Bảo toàn của E: Hãy nhớ rằng năng lượng của thanh bằng năng lượng của chuyển động quay xung quanh điểm khối tâm, cộng với năng lượng của khối lượng chất điểm tương đương đặt tại điểm khối tâm, ta có

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{m}{2}\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 + \left[\frac{m}{2}\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{m\ell^2}{12}\right)\omega^2\right] \implies \omega = \frac{\sqrt{6}v_0}{l}. \quad (8.51)$$

- Bảo toàn của L: Hãy chọn điểm gốc tọa độ của chúng ta là điểm cố định trong không gian mà trùng với vị trí ban đầu của tâm của thanh. Khi đó bảo toàn của L cho ta

$$mv_0h = m\left(\frac{v_0}{2}\right)h + \left[\left(\frac{m\ell^2}{12}\right)\omega + 0\right]. \quad (8.52)$$

  Số không ở đây là do thực tế rằng khối tâm của thanh chuyển động thẳng ra khỏi gốc tọa độ, vì vậy không có sự đóng góp nào vào L từ phần đầu tiên trong hai phần trong Định lý 8.1. Thay ω từ phương trình (8.51) vào phương trình (8.52) cho ta

$$\frac{1}{2}mv_0h = \left(\frac{m\ell^2}{12}\right)\left(\frac{\sqrt{6}v_0}{l}\right) \implies h = \frac{l}{\sqrt{6}}, \quad (8.53)$$

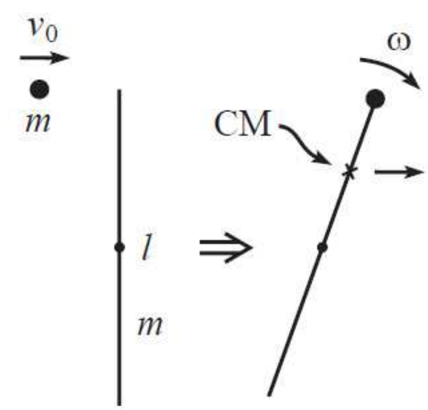
  Bạn hãy giải lại bài toán này bằng cách chọn một điểm gốc tọa độ khác, ví dụ như, điểm cố định mà trùng với vị trí tại đó vật m va chạm với thanh, hoặc là điểm khối tâm của toàn hệ.

NHẬN XÉT: Sau khi thanh quay được một nửa vòng, nó sẽ va chạm vào phần sau của m. Chuyển động nhận được sau đó sẽ là thanh đứng yên (kể cả tịnh tiến và quay) và vật m di chuyển với tốc độ ban đầu v_0. Bạn có thể chỉ ra điều này bằng cách làm việc đối với va chạm lần thứ hai, sử dụng các đại lượng mà chúng ta đã tìm được ở trên. Hoặc bạn có thể chỉ cần sử dụng thực tế là viễn cảnh này chắc chắn sẽ thỏa mãn sự bảo toàn của p, E và L với các điều kiện ban đầu, vì vậy nó phải là điều sẽ xảy ra (bởi vì các phát biểu của các định luật bảo toàn là các phương trình bậc hai chỉ có hai nghiệm, và nghiệm còn lại tương ứng với chuyển động trung gian). Chú ý rằng thời gian để thanh quay một nửa vòng là $\pi/w = \pi l/\sqrt{6}v_0$. Vì vậy thanh di chuyển một khoảng $(v_0/2)(\pi l/\sqrt{6}v_0) = (\pi l/2\sqrt{6})$ trước khi nó dừng lại. Khoảng cách này là độc lập với v_0 (mà có thể biết được từ việc phân tích thứ nguyên). ♣

Bây giờ hãy xem xét một va chạm không đàn hồi, trong đó một vật dính vào vật kia. Chúng ta sẽ không thể sử dụng bảo toàn của E ở đây được. Nhưng sự bảo toàn của p và của L sẽ là đủ bởi vì sẽ có ít hơn một bậc tự do trong chuyển động sau va chạm, bởi vì các vật sẽ không chuyển động độc lập với nhau.

Ví dụ (Va chạm không đàn hồi): Một khối lượng m di chuyển với tốc độ v_0 vuông góc với một thanh có khối lượng m và chiều dài ℓ, mà có trạng thái ban đầu đứng yên. Khối lượng va chạm hoàn toàn không đàn hồi với thanh tại một đầu của nó và dính vào đó. Hỏi vận tốc góc của hệ sau va chạm bằng bao nhiêu?

Lời giải: Điều đầu tiên cần chú ý là điểm khối tâm của hệ nằm cách một khoảng $l/4$ tính từ đầu thanh, như được chỉ trên Hình 8.20. Sau va chạm, cả hệ quay xung quanh khối tâm trong khi đó khối tâm di chuyển theo một đường thẳng. Định luật bảo toàn động lượng nhanh chóng cho ta biết được rằng vận tốc của khối tâm là $v_0/2$. Hơn nữa, sử dụng định lý trục song song, moment quán tính của hệ quanh khối tâm là



Hình 8.20:

$$I_{\text{CM}} = I_{\text{CM}}^{\text{thanh}} + I_{\text{CM}}^{\text{khối lượng}} = \left[\left(\frac{m\ell^2}{12}\right) + m\left(\frac{l}{4}\right)^2 \right] + m\left(\frac{l}{4}\right)^2 = \frac{5}{24}m\ell^2. \quad (8.54)$$

Có nhiều cách để tiếp tục giải quyết bài toán, phụ thuộc vào việc chúng ta chọn điểm gốc tọa độ như thế nào.

Phương pháp thứ nhất: Chọn điểm gốc tọa độ là điểm cố định trùng với vị trí của khối tâm ngay khi va chạm xảy ra (tức là, điểm cách $l/4$ từ đầu thanh). Sự bảo toàn của L nói rằng L trước khi va chạm của khối lượng phải bằng L sau va chạm của hệ. Điều này cho ta

$$mv_0\left(\frac{l}{4}\right) = \left(\frac{5}{24}m\ell^2\right)\omega + 0 \quad \Longrightarrow \quad \omega = \frac{6v_0}{5l}. \tag{8.55}$$

Số hạng bằng không ở đây là do thực tế rằng khối tâm của thanh di chuyển ra xa khỏi gốc tọa độ theo một đường thẳng, vì vậy không có đóng góp nào vào L từ phần đầu tiên trong hai phần trong Định lý 8.1. Chú ý rằng chúng ta đã không cần sử dụng tới định luật bảo toàn p ở trong cách này.

Phương pháp thứ hai: Chọn điểm gốc tọa độ là điểm cố định mà trùng với điểm giữa của thanh trước va chạm. Khi đó sự bảo toàn của L cho ta

$$mv_0\left(\frac{l}{2}\right) = \left(\frac{5}{24}m\ell^2\right)\omega + (2m)\left(\frac{v_0}{2}\right)\left(\frac{l}{4}\right) \quad \Longrightarrow \quad \omega = \frac{6v_0}{5l}. \tag{8.56}$$

Vế phải là moment động lượng của hệ đối với điểm khối tâm, cộng với moment động lượng (đối với điểm gốc tọa độ) của một khối lượng chất điểm có khối lượng $2m$ đặt tại khối tâm.

Phương pháp thứ ba: Chọn điểm gốc tọa độ là khối tâm của hệ. Điểm này di chuyển về bên phải với vận tốc $v_0/2$, dọc theo đường nằm dưới đỉnh của thanh một khoảng $l/4$. So với khối tâm, khối lượng m di chuyển về bên phải, và thanh di chuyển về bên trái, cả hai đều có tốc độ chuyển động là $v_0/2$. Sự bảo toàn của L cho ta

$$m\left(\frac{v_0}{2}\right)\left(\frac{l}{4}\right) + \left[0 + m\left(\frac{v_0}{2}\right)\left(\frac{l}{4}\right)\right] = \left(\frac{5}{24}m\ell^2\right)\omega \quad \Longrightarrow \quad \omega = \frac{6v_0}{5l}. \tag{8.57}$$

Số hạng không ở đây là do thực tế rằng ban đầu thanh không có L quanh tâm của nó. Một sự lựa chọn điểm gốc tọa độ hợp lý thứ tư là điểm cố định mà trùng với vị trí ban đầu của đỉnh thanh. Bạn có thể giải theo cách này để thực hành.

8.6 Xung lượng

Trong Mục 5.5.1, chúng ta đã định nghĩa *xung lực*, mà chúng ta sẽ ký hiệu là $\mathcal{J}$, là tích phân theo thời gian của lực tác dụng lên một vật. Từ định luật II của Newton, $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$, xung lực do đó là sự thay đổi thực của động lượng. Tức là,

$$\mathcal{I} \equiv \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t) = \Delta \mathbf{p}. \tag{8.58}$$

Bây giờ chúng ta định nghĩa *xung lượng*, $\mathcal{I}_\theta$, là tích phân thời gian của moment lực tác dụng vào một vật. Từ $\tau = d\mathbf{L}/dt$, xung lượng do đó là sự thay đổi thực của moment động lượng. Tức là

$$\mathcal{I}_\theta \equiv \int_{t_1}^{t_2} \tau(t) dt = \Delta \mathbf{L}. \tag{8.59}$$

Đây chỉ là các định nghĩa chứ không có nội dung gì. Phần mà trong đó có ý nghĩa vật lý là như sau. Xét một tình huống trong đó $\mathbf{F}(t)$ luôn tác dụng tại cùng một vị trí so với điểm gốc tọa độ mà $\tau(t)$ được tính xung quanh điểm đó (điểm gốc tọa độ này tất nhiên phải là một điểm được lựa chọn một cách đúng đắn). Gọi vị trí này là $\mathbf{R}$. Khi đó chúng ta có $\tau(t) = \mathbf{R} \times \mathbf{F}(t)$. Thay kết quả này vào trong phương trình (8.59), và đưa hằng số $\mathbf{R}$ ra ngoài dấu tích phân, cho ta $\mathcal{I}_\theta = \mathbf{R} \times \mathcal{I}$. Nói cách khác,

$$\Delta \mathbf{L} = \mathbf{R} \times (\Delta \mathbf{p}) \quad (\text{với } \mathbf{F}(t) \text{ tác dụng tại một điểm}). \tag{8.60}$$

Đây là một kết quả rất hữu ích. Nó cho ta biết mối liên hệ giữa sự thay đổi thực của $\mathbf{L}$ và $\mathbf{p}$, thay vì chỉ các giá trị riêng lẻ của chúng. Thậm chí nếu $\mathbf{F}(t)$ thay đổi theo một cách bất kỳ nào đó theo thời gian, làm cho chúng ta không có thông tin gì về việc $\Delta\mathbf{L}$ và deltap bản thân chúng thay đổi như thế nào, thì chúng ta vẫn biết rằng chúng liên quan với nhau theo phương trình (8.60). Trong nhiều trường hợp, chúng ta không cần phải lo lắng về tích có hướng trong phương trình (8.60), bởi vì cánh tay đòn $\mathbf{R}$ vuông góc với vector thay đổi của động lượng $\Delta\mathbf{p}$. Trong những trường hợp đó, ta có

$$|\Delta L| = R|\Delta p|. \tag{8.61}$$

Hơn nữa, trong nhiều trường hợp mà vật thể bắt đầu chuyển động từ trạng thái nghỉ, vì vậy chúng ta không cần quan tâm tới các Δ. Ví dụ sau đây là một ứng dụng cổ điển của xung lượng và phương trình (8.61).

Ví dụ (Đánh thanh): Một thanh có khối lượng m và chiều dài ℓ, ban đầu ở trạng thái nghỉ, bị đánh bởi một cây búa. Cú đánh được thực hiện vuông góc với thanh tại một đầu của nó. Giả sử cú đánh diễn ra rất nhanh, vì vậy thanh không có thời gian để di chuyển nhiều trong khi búa và thanh đang tiếp xúc với nhau. Nếu khối tâm của thanh sau đó di chuyển với tốc độ v, hãy tìm vận tốc của các đầu thanh ngay sau cú đánh.

Lời giải: Mặc dù chúng ta không có hy vọng biết rõ được $F(t)$ có dạng như thế nào, hoặc khoảng thời gian tác dụng của nó, chúng ta vẫn biết được từ phương trình (8.61) rằng $\Delta L = (\ell/2)\Delta p$, trong đó chúng ta chọn điểm gốc tọa độ là điểm khối tâm, mà cho cánh tay đòn có độ dài là $\ell/2$. Do đó, $(m\ell^2/12)w = (\ell/2)mv$, vì vậy v và w liên hệ với nhau bởi $w = 6v/\ell$.

Vận tốc của các đầu thanh ngay sau cú đánh sẽ được nhận được bằng cách cộng (hoặc trừ) chuyển động quay với chuyển động tịnh tiến của khối tâm. Vận tốc quay của các đầu thanh đối với khối tâm là $\pm\omega(\ell/2) = \pm(6v/\ell)(\ell/2) = \pm 3v$. Do đó, đầu thanh mà bị đánh sẽ chuyển động với vận tốc $v + 3v = 4v$, và đầu kia của thanh sẽ chuyển động với vận tốc $v - 3v = -2v$ (nghĩa là, chuyển động ngược lại).

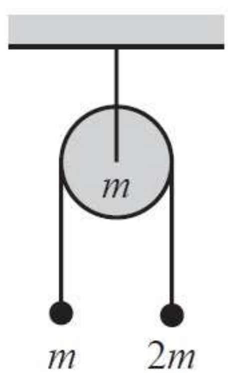
Xung lượng cũng hữu ích với các "va chạm" xảy ra trong thời gian dài. Xem, ví dụ như, Bài tập 8.24.

8.7 Bài tập

Mục 8.1: Vật phẳng trong mặt phẳng tọa độ $x - y$

8.1. Ròng rọc có khối lượng *

Xét máy Atwood được chỉ ra như trong Hình 8.21. Các khối lượng là m và $2m$, và ròng rọc là một đĩa đồng chất có khối lượng m và bán kính r. Dây không có khối lượng và không trượt đối với ròng rọc. Hãy tìm gia tốc của các khối lượng. Sử dụng định luật bảo toàn năng lượng.



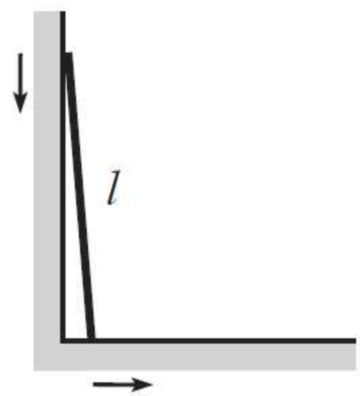
Hình 8.21:

8.2. Rời khỏi mặt cầu **

Một quả bóng có moment quán tính là βmr^2 đang nằm yên trên đỉnh của một mặt cầu cố định. Có ma sát giữa quả bóng và mặt cầu. Quả bóng được truyền một tác động rất nhỏ, và nó lăn xuống không trượt. Giả sử rằng r nhỏ hơn rất nhiều so với bán kính của mặt cầu, hỏi tại điểm nào quả bóng sẽ không còn tiếp xúc với mặt cầu? Kết quả của bạn sẽ thay đổi thế nào nếu kích thước của quả bóng là tương đương, hoặc lớn hơn, kích thước của mặt cầu? Bạn có thể nên giải Bài tập 5.3 trước, nếu như bạn chưa làm bài này.

8.3. Thang trượt ***

Một thang đồng chất có chiều dài ℓ được dựng trên một mặt sàn không ma sát và dựa vào một bức tường không ma sát. Ban đầu, nó được giữ đứng yên, với chân của nó cách bức tường một khoảng rất nhỏ. Sau đó nó được thả ra, và ngay sau đó chân thang sẽ trượt ra xa bức tường, và đỉnh thang sẽ trượt xuống dọc theo bức tường (xem Hình 8.22). Khi nó không còn tiếp xúc với tường, hỏi thành phần theo phương ngang của vận tốc của khối tâm là bao nhiêu?



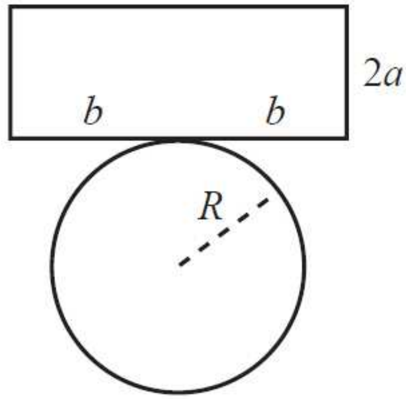
Hình 8.22:

8.4. Hình chữ nhật tựa trên hình trụ ***

Một hình chữ nhật có chiều cao $2a$ và chiều rộng $2b$ nằm yên trên đỉnh một hình trụ cố định có bán kính R (xem Hình 8.23). Moment quán tính của hình chữ nhật quanh khối tâm của nó là I. Hình chữ nhật được truyền cho một chuyển động rất bé và sau đó "lăn" không trượt trên mặt khối trụ. Hãy tìm phương trình chuyển động đối với góc nghiêng của hình chữ nhật. Với các điều kiện nào thì hình chữ nhật sẽ rơi khỏi hình trụ, và với các điều kiện nào thì nó sẽ dao động qua lại? Tìm tần số của những dao động nhỏ này.

8.5. Khối lượng bên trong một ống ***

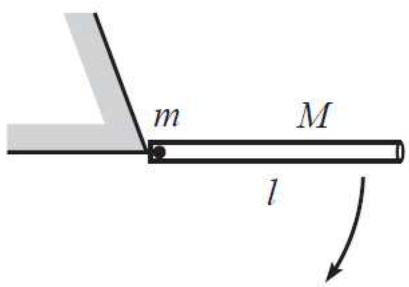
Một ống có khối lượng M và chiều dài L có thể quay tự do xung quanh một trục quay



Hình 8.23:

tại một đầu của nó. Một khối lượng m được đặt bên trong ống (không có ma sát) tại đầu này. Ống được giữ nằm ngang và sau đó thả ra (xem Hình 8.24). Gọi θ là góc của ống so với phương nằm ngang, và gọi x là khoảng cách mà khối lượng đã di chuyển dọc trong ống. Tìm các phương trình Euler-Lagrange đối với θ và x, và sau đó viết chúng theo θ và $\eta \equiv x/\ell$ (phân số của khoảng cách theo chiều dài ống).

Các phương trình này chỉ có thể được giải số, và bạn phải chọn một giá trị số cho tỉ lệ $r \equiv m/M$ để làm việc này. Hãy viết một chương trình (xem Mục 1.4) mà cho giá trị của η khi ống nằm theo phương thẳng đứng ($\theta = \pi/2$). Đưa ra giá trị của η này đối với một số giá trị của r.



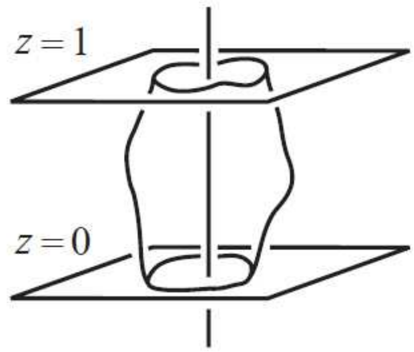
Hình 8.24:

Mục 8.3: Tính các moment quán tính

8.6. I cực tiểu *

Một khối vật có thể nặn được có khối lượng m được đặt giữa hai mặt phẳng $z = 0$ và

$z = 1$ (xem Hình 8.25) sao cho momen quán tính xung quanh trục z là nhỏ nhất có thể. Khối vật sẽ có hình dạng gì?



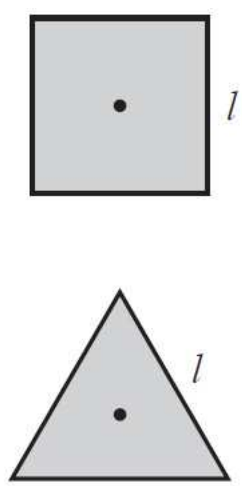
Hình 8.25:

8.7. Tính I một cách khéo léo **

Theo tinh thần của Mục 8.3.2, hãy tìm các moment quán tính của các vật thể sau (xem Hình 8.26).

(a) Một hình vuông đồng chất khối lượng m và độ dài cạnh ℓ (trục xuyên tâm, vuông góc với mặt phẳng).

(b) Một hình tam giác đều đồng chất có khối lượng m và độ dài cạnh ℓ (trục xuyên tâm, vuông góc với mặt phẳng).



Hình 8.26:

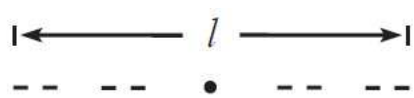
8.8. Tính I một cách khéo léo các vật thể fractal ***

Theo tinh thần của Mục 8.3.2, hãy tính moment quán tính của các vật thể fractal sau. Hãy cẩn thận với các tỉ lệ khối lượng.

(a) Lấy một thanh chiều dài ℓ, và bỏ đi một phần ba phần ở giữa. Sau đó lại bỏ đi một phần ba phần ở giữa của hai mảnh còn lại. Sau đó lại bỏ đi một phần ba phần ở giữa của mỗi phần của bốn mảnh còn lại, và cứ tiếp tục làm như vậy mãi mãi. Giả sử vật cuối cùng có khối lượng là m, và giả sử trục quay đi qua khối tâm, vuông góc với thanh; xem Hình 8.27.[8]

(b) Lấy một tam giác đều có cạnh dài ℓ, và bỏ đi tam giác "ở giữa" (1/4 diện tích). Sau đó lại bỏ đi các tam giác "ở giữa" của ba hình tam giác còn lại, và tiếp tục làm như vậy mãi mãi. Giả sử vật thể cuối cùng thu được có khối lượng là m, và giả sử trục đi qua khối tâm, vuông góc với mặt phẳng; xem Hình 8.28.

(c) Lấy một hình vuông có cạnh dài ℓ, và bỏ đi hình vuông "ở giữa" (1/9 diện tích). Sau đó bỏ đi hình vuông "ở giữa" của mỗi tám hình vuông còn lại, và tiếp tục làm như vậy mãi. Giả sử vật thể cuối cùng có khối lượng là m, và giả sử trục quay đi qua khối tâm, vuông góc với mặt phẳng; xem Hình 8.29.



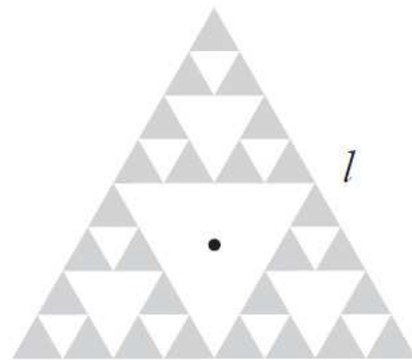
Hình 8.27:

Mục 8.4: Moment lực

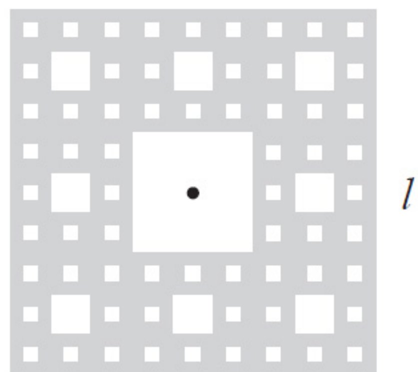
8.9. Moment lực bằng không từ các nội lực **

Cho một tập hợp các hạt có các vị trí $\mathbf{r}_i$, gọi lực do tất cả các hạt khác tác dụng lên hạt thứ i là $\mathbf{F}_i^{\text{nội lực}}$. Giả sử rằng lực giữa hai hạt bất kỳ là dọc theo đường thẳng nối chúng, hãy sử dụng định luật thứ ba của Newton để chứng minh rằng $\sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{\text{nội lực}} = 0$.

[8] Đối với những người thích các loại vật thể như thế này, thì vật thể này là được gọi là tập Cantor. Nó không có chiều dài, vì vậy khối lượng riêng của phần khối lượng còn lại là không xác định. Nếu bạn đột nhiên có ác cảm với các khối lượng chất điểm với khối lượng riêng không xác định, đơn giản hãy tưởng tượng việc làm lặp đị lặp lại trên khi nó được tiến hành, ví dụ như, một triệu lần.



Hình 8.28:



Hình 8.29:

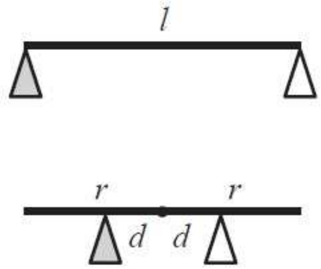
8.10. Bỏ một điểm tựa *

(a) Một thanh đồng chất có chiều dài ℓ và khối lượng m nằm trên các điểm tựa tại hai đầu của nó. Điểm tựa bên phải được bỏ đi một cách rất nhanh (xem Hình 8.30). Hỏi lực của điểm tựa trái tác động lên thanh tức thời ngay sau đó là bao nhiêu?

(b) Một thanh có chiều dài $2r$ và có moment quán tính là βmr^2 nằm trên hai điểm tựa, mỗi điểm tựa cách tâm của thanh một khoảng d. Điểm tựa bên phải được bỏ đi một cách rất nhanh (xem Hình 8.30). Hỏi lực của điểm tựa trái tác động lên thanh tức thời ngay sau đó là bao nhiêu?

8.11. Thanh đổ *

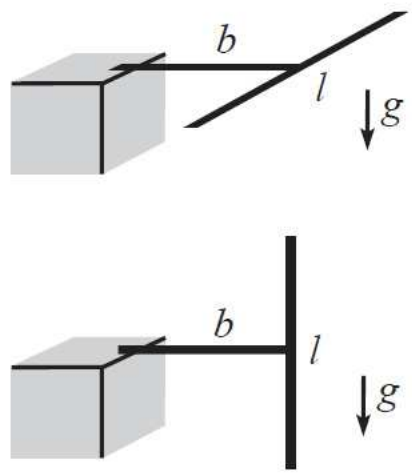
Một thanh không khối lượng chiều dài là b có một đầu được gắn khớp vào một giá đỡ và đầu kia được gắn cứng vuông góc với điểm giữa của một thanh có khối lượng m và chiều dài ℓ.



Hình 8.30:

(a) Nếu hai thanh được giữ trong một mặt phẳng nằm ngang (xem Hình 8.31) và sau đó được thả ra, hỏi gia tốc ban đầu của khối tâm là bao nhiêu?

(b) Nếu hai thanh được giữ trong một mặt phẳng thẳng đứng (xem Hình 8.31) và sau đó được thả ra, hỏi gia tốc ban đầu của khối tâm là bao nhiêu?



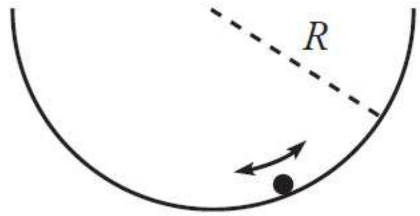
Hình 8.31:

8.12. Một khối trụ **

Trong Bài tập luyện tập 8.50 bên dưới, khối trụ chuyển động thẳng sang bên phải. Lý do nó không có bất kỳ chuyển động ngang nào là do hai phần của sợi dây chỉ kéo về bên phải và do đó không cung cấp một lực theo phương ngang nào. Minh họa lại kết quả này bằng cách lấy tích phân dạng hiển của lực do sợi dây tác dụng lên khối trụ trên miền nửa đường tròn tiếp xúc. (Kết quả $N = Td\theta$ từ ví dụ "Sợi dây quấn quanh một cột" trong Mục 2.1 sẽ rất có ích.)

8.13. Quả bóng dao động **

Một quả bóng nhỏ bán kính r có khối lượng phân bố đều lăn không trượt gần đáy một hình trụ cố định bán kính R (xem Hình 8.32). Hỏi tần số của các dao động nhỏ là bao nhiêu? Giả sử $r \ll R$.



Hình 8.32:

8.14. Các hình trụ dao động **

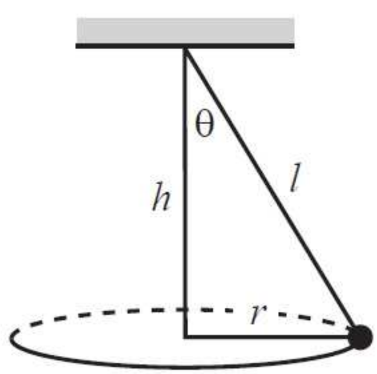
Một hình trụ rỗng có khối lượng M_1 và bán kính R_1 lăn không trượt bên trong bề mặt một hình trụ rỗng khác khối lượng M_2 và bán kính R_2. Giả sử $R_1 \ll R_2$. Cả hai trục đều có phương nằm ngang, và hình trụ lớn có thể quay tự do quanh trục của nó. Hỏi tần số của các dao động nhỏ là bao nhiêu?

8.15. Kéo dài sợi dây **

Một khối lượng treo vào một sợi dây không khối lượng và quay tròn theo một đường tròn nằm ngang, như chỉ ra trong Hình 8.33. Chiều dài của sợi dây sau đó được tăng lên (hoặc giảm đi) rất chậm. Gọi θ, l, r và h được định nghĩa như trong hình vẽ.

(a) Giả sử rằng θ là rất nhỏ, hỏi r phụ thuộc vào ℓ như thế nào?

(b) Giả sử rằng θ có giá trị rất gần $\pi/2$, hỏi h phụ thuộc vào ℓ như thế nào?



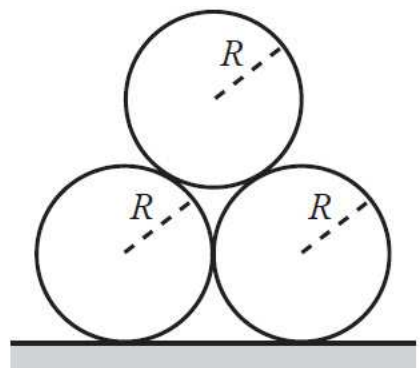
Hình 8.33:

8.16. Một tam giác từ ba hình trụ ***

Ba hình trụ giống hệt nhau có moment quán tính là $I = \beta mR^2$ được đặt theo một hình tam giác như được chỉ ra trong Hình 8.34. Hãy tìm gia tốc hướng xuống dưới ban đầu của hình trụ nằm trên cùng trong hai trường hợp sau. Trường hợp nào có gia tốc lớn hơn?

(a) Có ma sát giữa hai hình trụ bên dưới với nền (vì vậy chúng sẽ lăn không trượt), nhưng không có ma sát giữa các hình trụ với nhau.

(b) Không có ma sát giữa hai hình trụ nằm dưới với nền, nhưng có ma sát giữa các hình trụ với nhau (vì vậy chúng không trượt đối với nhau).



Hình 8.34:

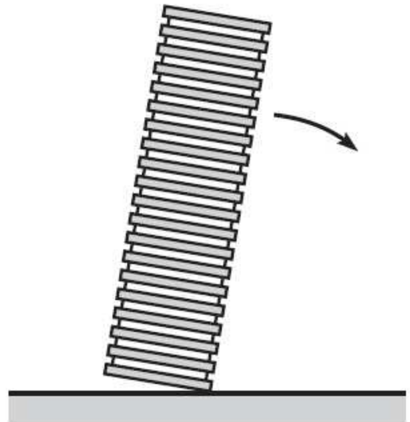
8.17. Ống khói đổ ****

Một ống khói ban đầu đứng thẳng. Nó bị truyền cho một lực rất nhỏ, và bị đổ xuống. Hỏi tại điểm nào trên trên chiều dài của nó mà ở đó ống khói dễ bị gẫy nhất? Để làm bài tập này, hãy làm việc với mô hình đơn giản hóa hai chiều của một ống khói. Giả sử rằng ống khói bao gồm các tấm ván chồng lên nhau, và mỗi tấm ván được gắn với hai tấm ván cạnh nó bằng các thanh rất nhỏ tại mỗi đầu (xem Hình 8.35). Mục đích là đi xác định thanh nào trong ống khói đó sẽ nhận được lực căng lớn nhất. Làm bài trong trường hợp xấp xỉ khi chiều rộng của ống khói là rất nhỏ so với chiều cao của nó.

Mục 8.5: Va chạm

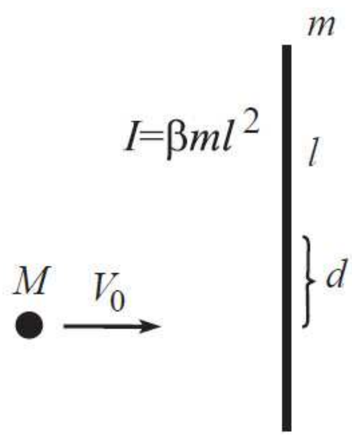
8.18. Bóng đập vào thanh **

Một quả bóng có khối lượng M va chạm với một thanh có moment quán tính $I = \beta m\ell^2$ (đối với tâm của nó, mà cũng là khối tâm của nó). Quả bóng ban đầu di chuyển với tốc



Hình 8.35:

độ V_0 vuông góc với thanh. Bóng đập vào thanh tại điểm cách tâm của nó một khoảng là d (xem Hình 8.36). Va chạm là đàn hồi. Hãy tìm các vận tốc tịnh tiến và vận tốc quay của thanh, và vận tốc của quả bóng sau va chạm.



Hình 8.36:

8.19. Định lý quả bóng và thanh **

Xét cơ cấu trong Bài tập 8.18. Hãy chỉ ra rằng vận tốc tương đối của quả bóng đối với điểm tiếp xúc trên thanh là như nhau trước khi và ngay sau khi va chạm. (Kết quả này tương tự với kết quả "vận tốc tương đối" trong va chạm 1-D, Định lý 5.3 trong Mục 5.7.1).

Mục 8.6: Xung lượng

8.20. Siêu bóng **

Một quả bóng có bán kính R và $I = (2/5)mR^2$ bị ném vào trong không khí. Nó tự quay xung quanh trục vuông góc với mặt phẳng (thẳng đứng) của chuyển động. Gọi mặt phẳng này là mặt phẳng $x - y$. Quả bóng nảy lên khỏi một nền nhà mà không trượt trong suốt thời gian tiếp xúc. Giả sử rằng va chạm là đàn hồi, và rằng độ lớn của vận tốc theo phương thẳng đứng v_y là như nhau trước và sau khi nảy. Hãy chỉ ra rằng v'_x và w' sau khi bóng nảy lên liên hệ với v_x và w trước khi nảy bởi

$$\begin{pmatrix} v'_x \\ R\omega' \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -10 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_x \\ R\omega \end{pmatrix}, \tag{8.62}$$

trong đó v_x có giá trị dương theo hướng bên phải, và w là dương theo chiều ngược chiều kim đồng hồ.

8.21. Nảy nhiều lần *

Sử dụng kết quả của Bài tập 8.20, hãy miêu tả điều gì sẽ xảy trong quá trình siêu bóng nảy nhiều lần.

8.22. Lăn qua vật cản **

Một quả bóng có bán kính R và moment quán tính $I = (2/5)mR^2$ lăn không trượt với vận tốc V_0 trên mặt đất. Nó gặp một bậc thềm có chiều cao h và lăn qua lên trên đó. Giả sử rằng quả bóng dính tạm thời vào cạnh của bậc thềm một lúc (cho đến khi tâm của quả bóng nằm ngay ở trên cạnh của bậc thềm). Hãy chỉ ra rằng nếu quả bóng muốn vượt qua bậc thềm, thì V_0 phải thỏa mãn

$$V_0 \geq \sqrt{\frac{10gh}{7}}\left(1 - \frac{5h}{7R}\right)^{-1}. \tag{8.63}$$

8.23. Bánh mì nướng rơi **

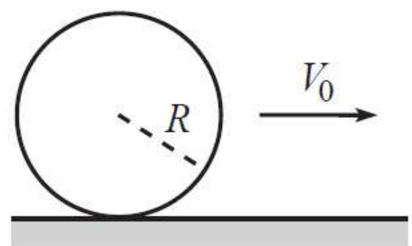
Một buổi sáng, sau khi phết bơ cho bánh mì nướng của bạn (giả sử là một miếng hình vuông rắn đồng chất có chiều dài ℓ, để cho bài toán có thể giải được) và giữ nó ở vị trí nằm ngang với mặt được phết bơ hướng lên trên, bạn vô tình làm rơi nó từ một độ cao H lên trên một mặt bàn, mà mặt bàn có độ cao h so với sàn nhà. Miếng bánh mì nướng ban đầu được định hướng "song song" với mặt bàn, và khi nó rơi, một cạnh của nó vừa đủ chạm vào mép bàn (một cách đàn hồi), khiến cho miếng bánh mì nướng quay. Với giá trị nào của H, biểu diễn qua h và ℓ, chúng ta sẽ nhận được tình huống không may mắn là miếng bánh mì quay một nửa vòng, rơi mặt có phết bơ xuống sàn nhà? Có một giá trị đặc biệt của ℓ biểu diễn theo h. Đó là giá trị nào, và tại sao nó lại đặc biệt?

8.24. Từ trượt đến lăn **

Một quả bóng ban đầu trượt không lăn trên một bề mặt nằm ngang có ma sát (xem Hình 8.37). Vận tốc ban đầu của nó là V_0, và moment quán tính quanh tâm là $I = \beta mR^2$.

(a) Trong trường hợp không biết gì về bản chất của lực ma sát, hãy tìm vận tốc của quả bóng khi nó bắt đầu lăn không trượt? Hơn nữa, hãy tìm động năng bị mất trong khi trượt.

(b) Bây giờ xét trường hợp đặc biệt khi hệ số ma sát là μ, không phụ thuộc vào vị trí. Tại thời điểm nào, và tại khoảng cách nào, thì quả bóng bắt đầu lăn không trượt? Kiểm tra lại rằng công của lực ma sát bằng phần năng lượng bị mất tính được trong phần (a). (Hãy cẩn thận khi làm việc này.)



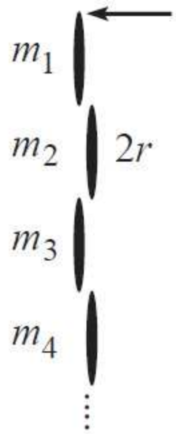
Hình 8.37:

8.25. Rất nhiều thanh ***

Xét một tập các thanh rắn có chiều dài $2r$, có các khối lượng là m_i, và các moment quán tính là $\beta m_i r^2$, với $m_1 \gg m_2 \gg m_3 \cdots$. Khối tâm của mỗi chiếc thanh nằm tại trung điểm của nó. Các thanh được đặt trên một mặt phẳng nằm ngang không ma sát, như chỉ ra trong Hình 8.38. Các đầu thanh gối lên nhau một khoảng rất nhỏ theo trục y và cách nhau một khoảng rất nhỏ theo trục x. Thanh đầu tiên (nặng nhất) được truyền cho một chuyển động tức thời (như chỉ ra trong hình vẽ) mà khiến nó vừa dịch chuyển vừa quay. Thanh đầu tiên này sẽ đập vào thanh thứ hai, rồi thanh thứ hai sẽ đập vào thanh thứ ba, và cứ tiếp tục như vậy. Giả sử rằng tất cả các va chạm đều là đàn hồi. Phụ thuộc vào độ lớn của β, vận tốc của thanh thứ n sẽ là hoặc (1) tiến về không, (2) tiến ra vô cùng, hoặc (3) độc lập với n, khi n tiến ra vô cùng. Hãy chỉ ra rằng giá trị đặc biệt của β tương ứng với trường hợp thứ ba là $\beta = 1/3$, mà vô tình tương ứng với trường hợp một thanh đồng chất.

8.8 Bài tập luyện tập

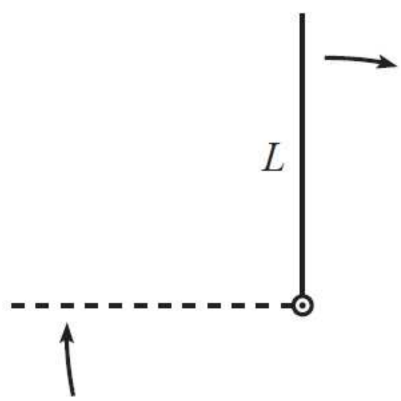
Mục 8.1: Vật phẳng trong mặt phẳng tọa độ $x - y$



Hình 8.38:

8.26. Thanh đung đưa **

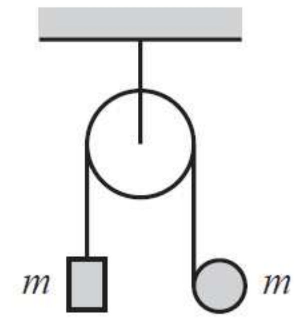
Một thanh đồng chất có chiều dài L được gắn chốt tại đầu dưới của nó và ban đầu được giữ thẳng đứng. Nó được truyền cho một lực rất nhỏ, và nó chuyển động quay xuống xung quanh chốt quay. Sau ba phần tư vòng (ở vị trí nằm ngang như được chỉ ra ở Hình 8.39), trục quay theo cách nào đó bị biến mất, và thanh sẽ bay tự do lên trên vào trong không khí. Hỏi độ cao cực đại của điểm giữa thanh trong chuyển động sau đó là bao nhiêu? Thanh sẽ nghiêng một góc bằng bao nhiêu khi điểm giữa này đạt độ cao cực đại?



Hình 8.39:

8.27. Máy Atwood với một hình trụ **

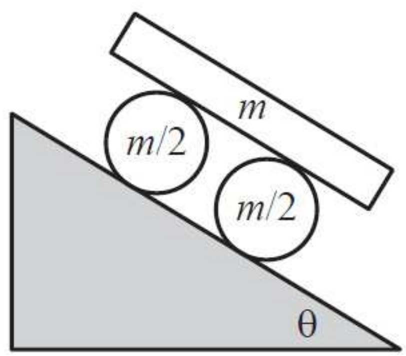
Một sợi dây không khối lượng có độ dày không đáng kể được quấn xung quanh một hình trụ đồng chất có khối lượng m và bán kính r. Sợi dây vắt qua một ròng rọc không khối lượng và được buộc vào một khối vật có khối lượng m ở đầu còn lại của nó, như được chỉ ra trong Hình 8.40. Hệ được thả ra từ trạng thái nghỉ. Hỏi các gia tốc của khối vật và hình trụ là bao nhiêu? Giả sử rằng sợi dây không trượt đối với hình trụ. Hãy sử dụng định luật bảo toàn năng lượng (sau khi áp dụng nhanh lập luận $F = ma$ để chỉ ra rằng hai vật chuyển động xuống với cùng gia tốc).



Hình 8.40:

8.28. Tấm ván và các hình trụ **

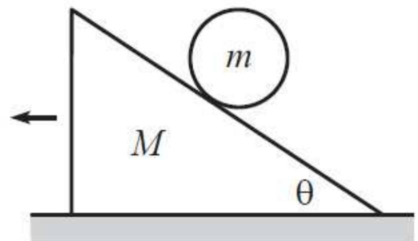
Một tấm ván nằm trên đỉnh hai hình trụ đồng chất. Hai hình trụ này nằm trên một mặt phẳng cố định nghiêng một góc θ, như được chỉ ra trong Hình 8.41. Tấm ván có khối lượng m, và mỗi hình trụ có khối lượng $m/2$. Hệ được thả ra từ trạng thái nghỉ. Nếu không có sự trượt giữa bất kỳ các mặt nào, hỏi gia tốc của tấm ván là bao nhiêu? Hãy sử dụng định luật bảo toàn năng lượng.



Hình 8.41:

8.29. Mặt phẳng nghiêng chuyển động ***

Một quả bóng có khối lượng m và moment quán tính $I = \beta m r^2$ được giữ đứng im trên một mặt phẳng nghiêng có khối lượng M và góc nghiêng θ (xem Hình 8.42). Mặt phẳng nằm yên trên một mặt phẳng nằm ngang không ma sát. Quả bóng được thả ra. Giả sử rằng nó lăn không trượt trên mặt phẳng nghiêng, hỏi gia tốc theo phương ngang của nó là bao nhiêu? *Gợi ý:* Bạn có thể nên làm Bài tập 3.8 trước. Nhưng cũng như các bài tập luyện tập khác trong phần này, hãy sử dụng định luật bảo toàn năng lượng thay vì dùng lực hay moment lực; bài toán này sẽ trở nên cực kỳ rắc rối khi dùng cách sau.



Hình 8.42:

Mục 8.2: Các vật thể không phẳng

8.30. Khối tâm của nửa đường tròn *

Một sợi dây được uốn thành nửa đường tròn bán kính R. Tìm khối tâm của nó.

8.31. Khối tâm của bán cầu *

Tìm khối tâm của một khối hình bán cầu đặc.

Mục 8.3: Tính các moment quán tính

8.32. Một hình nón *

Tìm moment quán tính của một hình nón đặc (khối lượng M, bán kính đáy R) xung quanh trục đối xứng của nó.

8.33. Một khối cầu *

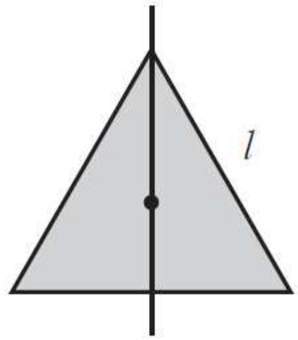
Tìm moment quán tính của một khối cầu đặc (khối lượng M, bán kính R) xung quanh một đường kính. Hãy làm bài tập này bằng cách cắt khối cầu ra thành các đĩa.

8.34. Một hình tam giác, làm theo mẹo hay **

Theo tinh thần của Mục 8.3.2, hãy tìm moment quán tính của một hình tam giác đều đồng chất có khối lượng m và chiều dài ℓ, xung quanh một đường thẳng nối một đỉnh với cạnh đối diện; xem Hình 8.43.

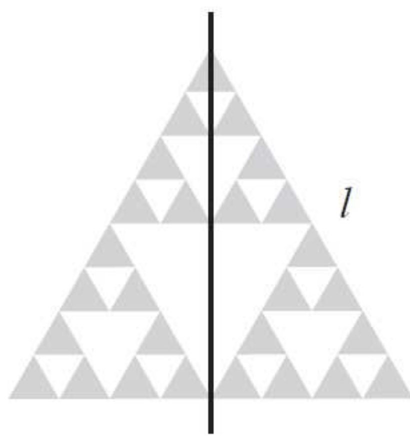
8.35. Tam giác fractal **

Lấy một hình tam giác đều có độ dài cạnh là ℓ, và bỏ đi phần tam giác "ở giữa" (1/4 diện tích). Sau đó bỏ đi phần tam giác "ở giữa" của ba tam giác còn lại, và tiếp tục làm



Hình 8.43:

như thế mãi. Gọi khối lượng của vật thể fractal nhận được là m. Theo tinh thần của Mục 8.3.2, hãy tìm moment quán tính xung quanh một đường thẳng nối một đỉnh với cạnh đối diện; xem Hình 8.44.



Hình 8.44:

Mục 8.4: Moment lực

8.36. Vung các cánh tay của bạn *

Bạn đang đứng trên mép của một bậc thang, mặt đối diện với cầu thang. Bạn tự cảm thấy là mình đang bị rơi ngược lại đằng sau, vì vậy bạn bắt đầu vung tay theo các đường tròn thẳng đứng, giống như một cối xay gió. Đây là điều mà mọi người hay làm trong một tình huống như thế này, nhưng liệu nó thực sự có giúp bạn không bị ngã hay không, hay nó đơn giản chỉ là hành động làm bạn trông ngốc nghếch? Hãy giải thích lập luận của bạn.

8.37. Lăn xuống mặt phẳng nghiêng *

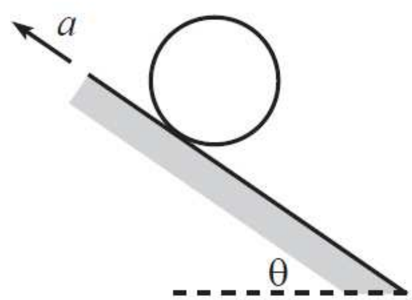
Một quả bóng có moment quán tính $\beta m r^2$ lăn không trượt xuống một mặt phẳng nghiêng một góc θ. Hỏi gia tốc chuyển động của nó bằng bao nhiêu?

8.38. Đồng xu trên một mặt phẳng nghiêng *

Một đồng xu đồng chất lăn xuống một mặt phẳng nghiêng một góc θ. Nếu hệ số ma sát tĩnh giữa đồng xu và mặt phẳng là μ, hỏi góc θ lớn nhất bằng bao nhiêu để cho đồng xu không bị trượt?

8.39. Mặt phẳng nghiêng có gia tốc *

Một quả bóng có $I = (2/5)MR^2$ được đặt trên một mặt phẳng nghiêng một góc θ. Mặt phẳng nghiêng được gia tốc hướng lên trên (dọc theo chiều của nó) với gia tốc a; xem Hình 8.45. Với giá trị của a bằng bao nhiêu để cho khối tâm của quả bóng không di chuyển? Giả sử rằng hệ số ma sát là đủ lớn để cho quả bóng lăn không trượt đối với mặt phẳng nghiêng.



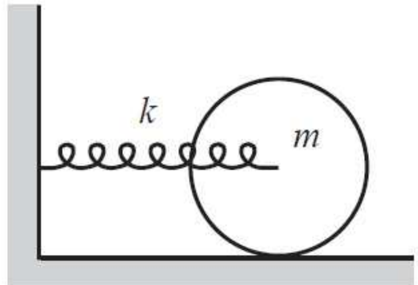
Hình 8.45:

8.40. Bóng gỗ trên tờ giấy *

Một quả bóng gỗ nằm trên một mảnh giấy trên một mặt sàn. Bạn cầm lấy tờ giấy và kéo nó theo phương nằm ngang dọc theo mặt sàn, với gia tốc là a_0. Hỏi gia tốc của tâm quả bóng bằng bao nhiêu? Giả sử rằng quả bóng không trượt đối với tờ giấy.

8.41. Lò xo và khối trụ *

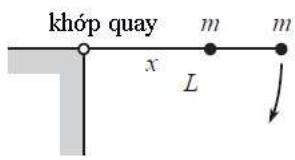
Trục của một khối trụ đặc có khối lượng m và bán kính r được nối với một lò xo có độ cứng là k, như chỉ ra trong Hình 8.46. Nếu trụ lăn không trượt, hỏi tần số dao động của nó bằng bao nhiêu?



Hình 8.46:

8.42. Rơi nhanh *

Một thanh không khối lượng có độ dài L được gắn khớp tại một đầu và có một khối lượng m gắn vào đầu còn lại. Nó được giữ theo phương nằm ngang, như chỉ ra trong Hình 8.47. Hỏi một khối lượng m thứ hai nên được gắn vào đâu trên thanh, sao cho thanh rơi nhanh nhất có thể khi nó bị thả rơi xuống?



Hình 8.47:

8.43. Tần số lớn nhất *

Một con lắc đơn được làm từ một thanh đồng chất có chiều dài L. Nó được phép dao động trong một mặt phẳng thẳng đứng. Hỏi nên đặt trục quay ở đâu trên thanh sao cho tần số của các dao động (nhỏ) là lớn nhất?

8.44. Ròng rọc có khối lượng *

Giải Bài tập 8.1 lại, nhưng bây giờ sử dụng lực và moment lực thay vì định luật bảo toàn năng lượng.

8.45. Máy Atwood với một khối trụ **

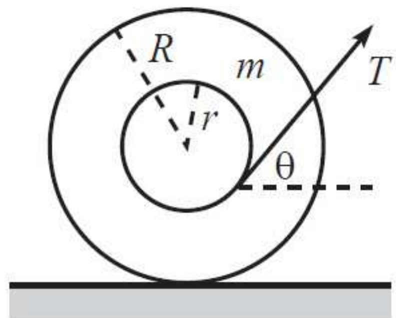
Giải Bài tập luyện tập 8.27 lại, nhưng bây giờ sử dụng lực và moment lực thay vì định luật bảo toàn năng lượng.

8.46. Tấm ván và các khối trụ **

Giải Bài tập luyện tập 8.28 lại, nhưng bây giờ sử dụng lực và moment lực thay vì định luật bảo toàn năng lượng.

8.47. Cuộn chỉ **

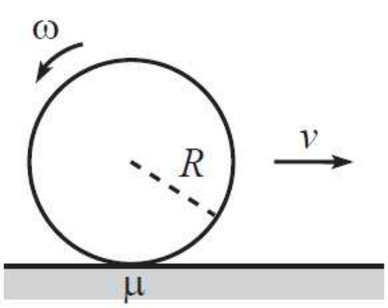
Một cuộn chỉ có khối lượng m và moment quán tính I tự do lăn không trượt trên một mặt bàn. Nó có bán kính trong là r, và bán kính ngoài là R. Nếu bạn kéo một sợi dây với lực kéo T theo góc nghiêng θ (xem Hình 8.48), hỏi gia tốc của cuộn chỉ bằng bao nhiêu? Nó sẽ chuyển động theo chiều nào?



Hình 8.48:

8.48. Dừng đồng xu **

Một đồng xu đứng thẳng đứng trên một mặt bàn. Nó bị đẩy về phía trước (trong mặt phẳng của nó) với tốc độ v và vận tốc góc là w, như chỉ ra trong Hình 8.49. Hệ số ma sát trượt giữa đồng xu và mặt bàn là μ. Hỏi v và w nên bằng bao nhiêu để cho đồng xu dừng lại (cả phần tịnh tiến và quay) tại một khoảng cách d so với vị trí nó bắt đầu chuyển động?



Hình 8.49:

8.49. Đo g **

(a) Xét một con lắc đơn mở rộng có khối tâm cách trục quay một khoảng ℓ, và có moment quán tính xung quanh trục quay là I. Hãy chỉ ra rằng tần số của các dao động nhỏ là $\omega = \sqrt{mg\ell/I}$, mà cho ta $T = 2\pi/w = 2\pi\sqrt{I/mg\ell}$, và do đó $g = 4\pi^2 I/(m\ell T^2)$. Do đó, bằng việc đo I, m, ℓ và T, bạn có thể xác định g. Tuy nhiên, nếu con lắc có một hình dạng kỳ cục, nó có thể sẽ khó khăn khi xác định I. Khi đó, xét phương pháp thay thế sau của việc đo g.

(b) Để cho đơn giản, giả sử rằng con lắc đơn có dạng phẳng. Chọn một điểm bất kỳ làm trục quay và đo chu kỳ dao động, T, của các dao động nhỏ. Sau đó khi con lắc đứng yên, kẻ một đường thẳng đứng đi qua trục quay này. Bằng phương pháp thử nhiều lần, tìm một điểm trục quay khác trên đường thẳng này mà nó nằm *cùng* một phía với điểm khối tâm[9] (bạn có thể phải mở rộng đường thẳng trên bằng cách gắn vào các vật không khối lượng) sao cho nhận được một giá trị của chu kỳ T giống như trên. Gọi L là tổng chiều dài từ hai tâm quay này đến khối tâm.[10] Hãy chỉ ra rằng g được cho bởi $g = 4\pi^2 L/T^2$, mà nó độc lập với m và I.

8.50. Kéo một khối trụ **

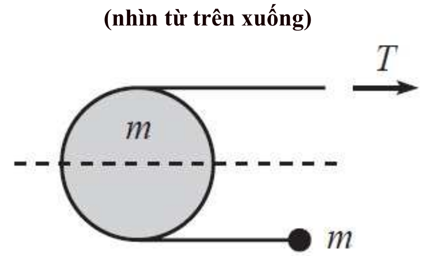
Một khối trụ đặc có khối lượng m và bán kính r nằm ngang trên một mặt bàn nằm ngang không ma sát, với một sợi dây không khối lượng quấn nửa vòng xung quanh nó, như chỉ ra trong Hình 8.50. Một khối lượng cũng có khối lượng m được gắn vào một đầu của sợi dây, và bạn kéo đầu còn lại với lực kéo T. Chu vi của hình trụ là đủ nhám để cho sợi dây là không trượt đối với nó. Hỏi gia tốc của khối lượng m gắn tại một đầu của sợi dây bằng bao nhiêu?

8.51. Đồng xu và tấm gỗ **

Một đồng xu có khối lượng M và bán kính R đứng thẳng đứng trên đầu bên phải của một tấm gỗ nằm ngang có khối lượng M và chiều dài L, như chỉ ra trong Hình 8.51. Hệ thống ban đầu đứng yên. Tấm gỗ sau đó bị kéo về phía bên phải bởi một lực không đổi

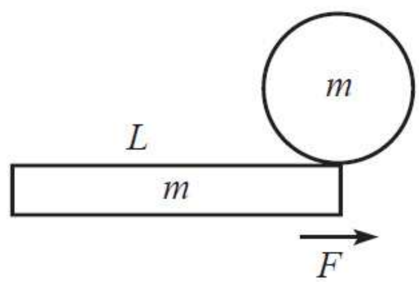
[9] Điểm khối tâm có thể được tìm bằng cách treo con lắc đơn vào một điểm không nằm trên đường thẳng đã vẽ này, và sau đó vẽ một đường thẳng thẳng đứng mới đi qua điểm này. Giao của hai đường thẳng chính là điểm khối tâm

[10] Cũng có hai điểm khác nữa nằm ở phía bên kia khối tâm mà sẽ nhận được cùng giá trị của chu kỳ (ngoại trừ trường hợp đặc biệt trong đó hai điểm trùng nhau và có chu kỳ là nhỏ nhất, như trong Bài tập luyện tập 8.43, nhưng đừng lo về điều này). Hai điểm khác này có cùng khoảng cách đến điểm khối tâm như hai điểm ban đầu của chúng ta, như bạn có thể chỉ ra điều này. Vì vậy nếu bạn vô tình tìm ra tất cả bốn điểm, bạn có thể nhận được L bằng cách đo khoảng cách từ điểm "bên trong" của một phía đến điểm "bên ngoài" của phía bên kia. Phương pháp này không yêu cầu phải biết vị trí của điểm khối tâm.



Hình 8.50:

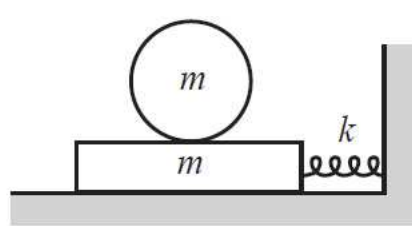
F. Giả sử rằng đồng xu lăn không trượt đối với tấm gỗ. Hỏi gia tốc của tấm gỗ và đồng xu bằng bao nhiêu? Hỏi đồng xu chuyển động về bên trái một khoảng bằng bao xa cho tới khi đầu bên trái của tấm gỗ chạm vào nó?



Hình 8.51:

8.52. Trụ, tấm gỗ, và lò xo **

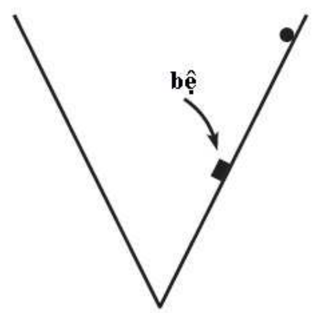
Một tấm gỗ có khối lượng m, tự do trượt trên một sàn không ma sát, được nối với tường bởi một lò xo (có độ cứng k). Một hình trụ, cũng có khối lượng là m (và $I = mR^2/2$), nằm trên tấm gỗ, như chỉ ra trong Hình 8.52, và tự do lăn không trượt trên tấm gỗ. Nếu tấm gỗ và hình trụ được kéo ra một khoảng về bên trái và sau đó được thả ra từ trạng thái đứng yên, hỏi tần số của chuyển động dao động sau đó là bao nhiêu?



Hình 8.52:

8.53. Xoay tròn bên trong một hình nón **

Một hình nón rỗng cố định được đặt sao cho đỉnh của nó hướng xuống dưới. Một hạt được thả ra từ trạng thái đứng yên lên mặt bên trong của hình nón. Sau khi nó trượt một nửa đường hướng xuống dưới đỉnh nón, nó va chạm đàn hồi và nảy ra khỏi một cái bệ. Bệ này được đặt nghiêng một góc 45^o dọc theo mặt của nón, vì vậy hạt sau va chạm sẽ bị lệch đi theo phương nằm ngang dọc theo mặt phẳng nón (nói cách khác, theo phương vào bên trong trang giấy theo Hình 8.53). Hạt sau đó chuyển động xoay tròn lên trên hình nón trước khi chuyển động xuống dưới. Khi đo từ đỉnh của nón, hãy chỉ ra rằng tỷ số của độ cao cực đại mà hạt có thể chuyển động xoay tròn lên trên với độ cao của bệ là $(\sqrt{5}+1)/2$, mà vô tình lại chính là tỷ số vàng.



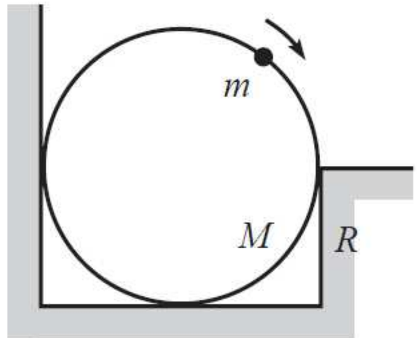
Hình 8.53:

8.54. Nhấc một vòng tròn **

Một hạt vòng có khối lượng m được đặt trên đỉnh một vòng không ma sát có khối lượng M và bán kính r, mà đang đứng thẳng đứng trên mặt đất. Một bức tường tiếp xúc với vòng ở bên trái của nó, và một bức tường ngắn có chiều cao R tiếp xúc với vòng ở phía bên phải, như chỉ ra trong Hình 8.54. Tất cả các mặt tiếp xúc đều là không có ma sát. Hạt vòng sau đó được truyền cho một chuyển động rất nhỏ, và nó trượt xuống vòng tròn, như trong hình vẽ. Hỏi giá trị lớn nhất của m/M bằng bao nhiêu sao cho vòng tròn không bao giờ bị nhấc lên khỏi mặt đất? *Chú ý:* Có thể giải quyết bài toán này bằng cách chỉ sử dụng lực, nhưng hãy giải nó bằng cách sử dụng moment lực ở đây.

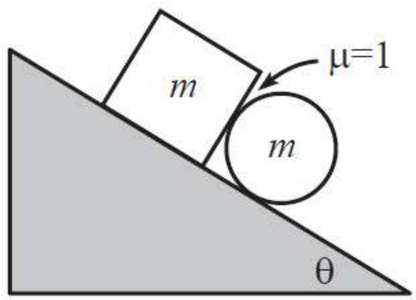
8.55. Khối vật và hình trụ **

Một khối vật và một hình trụ (với $I = \beta m R^2$), cả hai đều có khối lượng m, nằm trên một mặt phẳng (nghiêng một góc θ), tiếp xúc lẫn nhau như được chỉ ra trong Hình 8.55. Ma sát giữa hình trụ và mặt phẳng nghiêng là đủ lớn sao cho trụ lăn không trượt. Nhưng



Hình 8.54:

đáy của khối vật được phủ một lớp dầu, vì vậy sẽ không có ma sát giữa nó và mặt phẳng nghiêng. Tuy nhiên, có hệ số ma sát động $\mu = 1$ giữa mặt bên phải của khối vật và hình trụ. Hỏi gia tốc của khối vật là bao nhiêu? Kết quả nhận được của bạn so với kết quả khi trụ một mình lăn xuống mặt phẳng nghiêng sẽ là như thế nào? Giả sử rằng θ là đủ nhỏ sao cho đáy của khối vật luôn tiếp xúc với mặt phẳng nghiêng tại mọi thời điểm; hỏi θ phải thỏa mãn điều kiện nào sao cho điều này xảy ra?

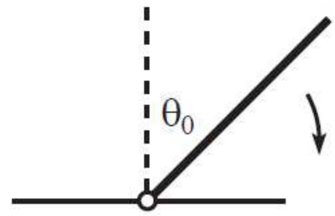


Hình 8.55:

8.56. Thanh rơi và trượt ***

Một đầu của một thanh đồng chất được gắn vào một chốt quay, và chốt quay tự do trượt dọc theo một đường ray nằm ngang không ma sát. Thanh ban đầu được giữ nghiêng một góc θ_0 đối với phương thẳng đứng (hướng lên trên) và sau đó được thả ra; xem Hình 8.56. Giả sử rằng thanh bằng cách nào đó có thể quay xuống bên dưới vị trí nằm ngang mà không va phải đường ray (có thể bằng cách dùng một khớp gắn vào cạnh của đường ray, sao cho thanh bị dịch sang ngang một khoảng cách nhỏ so với đường ray).

(a) Hãy chỉ ra rằng khi thanh có vị trí nằm ngang, phản lực N từ đường ray tác dụng vào nó bằng $mg/4$, không phụ thuộc vào θ_0.



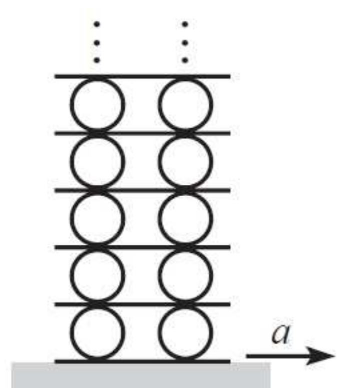
Hình 8.56:

(b) Nếu $\theta_0 = 0$ (một chuyển động rất nhỏ được phép truyền cho thanh), hãy chỉ ra rằng $N = 13mg$ khi thanh ở tại vị trí dưới cùng trong chuyển động của nó (tại $\theta = \pi$).

(c) Nếu $\theta_0 = 0$, hãy chỉ ra rằng giá trị nhỏ nhất của N xảy ra tại $\theta \approx 61.5^o$ và chỉ ra rằng giá trị đó là $N_{\min} \approx (0.165)mg$. Bạn sẽ nhận được một phương trình bậc ba; bạn có thể thoải mái giải phương trình này theo phương pháp số.

8.57. Tháp các hình trụ ****

Xét hệ cao vô hạn gồm các tấm ván không khối lượng và các hình trụ có khối lượng đồng nhất giống nhau như được chỉ ra trong Hình 8.57. Moment quán tính của các hình trụ là $I = MR^2/2$. Có hai hình trụ tại mỗi tầng, và số tầng là vô hạn. Các hình trụ không bị trượt đối với các tấm ván, nhưng tấm ván dưới cùng thì tự do trượt trên mặt bàn. Nếu bạn kéo tấm ván dưới cùng sao cho nó chuyển động có gia tốc theo phương nằm ngang với gia tốc a, hỏi gia tốc theo phương ngang của hàng hình trụ dưới cùng bằng bao nhiêu?

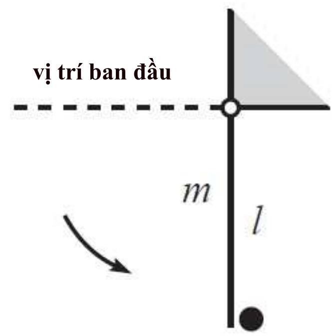


Hình 8.57:

Mục 8.5: Va chạm

8.58. Va chạm con lắc đơn *

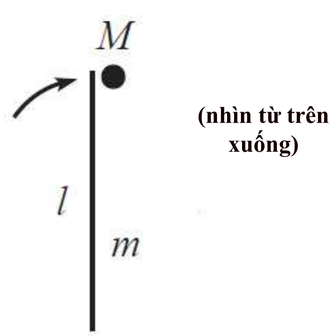
Một thanh có khối lượng m và độ dài ℓ được gắn khớp tại một đầu. Nó được giữ nằm ngang và sau đó được thả ra. Nó sẽ chuyển động quay xuống dưới, và khi nó có vị trí thẳng đứng thì đầu tự do va chạm đàn hồi với một quả bóng, như chỉ ra trong Hình 8.58. (Giả sử rằng quả bóng ban đầu được giữ đứng yên và sau đó được thả ra ngay trước khi thanh đập vào nó.) Nếu thanh bị mất đi một nửa vận tốc góc của nó trong quá trình va chạm, hỏi khối lượng của quả bóng bằng bao nhiêu? Hỏi vận tốc của quả bóng ngay sau va chạm bằng bao nhiêu?



Hình 8.58:

8.59. Không có chuyển động quay sau va chạm *

Một thanh có khối lượng m và chiều dài ℓ quay xung quanh trên một mặt bàn nằm ngang không ma sát, với khối tâm của nó nằm yên (nhưng không bị cố định bởi chốt quay). Một quả bóng có khối lượng M được đặt trên mặt bàn, và một đầu của thanh va chạm đàn hồi với nó, như được chỉ ra trong Hình 8.59. Hỏi M phải bằng bao nhiêu sao cho sau va chạm thanh có chuyển động tịnh tiến, nhưng không có chuyển động quay?



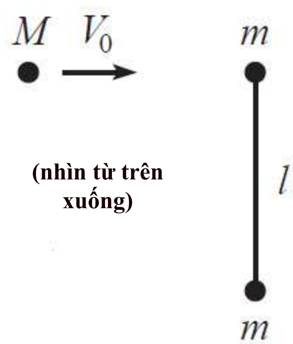
Hình 8.59:

8.60. Cùng vận tốc sau va chạm *

Một thanh trượt theo phương vuông góc với nó (không có sự quay) dọc trên một mặt bàn nằm ngang không ma sát và va chạm đàn hồi với một quả bóng đứng yên. Cả thanh và quả bóng đều có khối lượng m. Khối lượng của thanh được phân bổ theo một cách mà moment quán tính của nó xung quanh khối tâm (là điểm nằm tại tâm của thanh) là $I = Am\ell^2$, trong đó A là một số nào đó. Hỏi A phải bằng bao nhiêu sao cho sau va chạm quả bóng di chuyển với cùng tốc độ của tâm của thanh?

8.61. Chệch hướng vuông góc **

Một khối lượng M chuyển động với vận tốc V_0 vuông góc với một quả tạ đang nằm yên trên một mặt bàn nằm ngang không ma sát, như được chỉ ra trong Hình 8.60. Quả tạ gồm hai khối lượng m tại hai đầu của một thanh không khối lượng chiều dài ℓ. Khối lượng M va chạm đàn hồi với một trong hai khối lượng của quả tạ (không trực diện), và sau đó M di chuyển theo phương vuông góc với phương chuyển động ban đầu của nó, với tốc độ là u. Hỏi u có giá trị phụ thuộc vào V_0, m và M như thế nào? Hỏi giá trị nhỏ nhất của m (biểu diễn theo M) bằng bao nhiêu sao cho tình huống này có thể xảy ra?



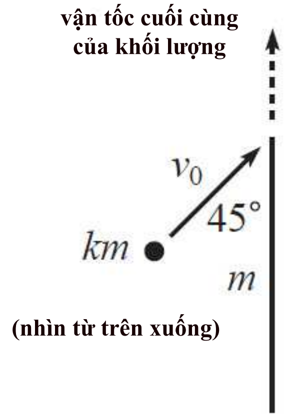
Hình 8.60:

8.62. Lướt qua một thanh **

Một thanh không ma sát có khối lượng m và chiều dài ℓ nằm yên trên một mặt bàn nằm ngang không ma sát. Một khối lượng km (trong đó k là một số nào đó) chuyển động với vận tốc v_0 theo phương hợp với thanh một góc 45^o và va chạm đàn hồi với thanh tại điểm rất gần một đầu của nó; xem Hình 8.61. Hỏi k phải bằng bao nhiêu sao cho khối lượng cuối cùng sẽ di chuyển theo phương y, như chỉ ra trong hình vẽ? *Gợi ý:* Nhớ rằng thanh là không ma sát.

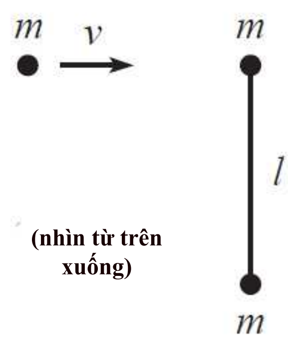
8.63. Dính vào một quả tạ *

Một khối lượng m chuyển động với vận tốc v theo phương vuông góc với một quả tạ đang nằm yên trên một mặt bàn nằm ngang không ma sát, như chỉ ra trong Hình 8.62. Quả tạ bao gồm hai khối lượng cũng đều có khối lượng m tại hai đầu một thanh không khối



Hình 8.61:

lượng chiều dài ℓ. Khối lượng đang di chuyển va chạm và dính vào một trong hai khối lượng của quả tạ. Hỏi w của hệ sau va chạm bằng bao nhiêu? Hỏi vận tốc của đầu thanh mà có hai khối lượng tại đó là bao nhiêu, sau khi thanh đã quay một nửa vòng?



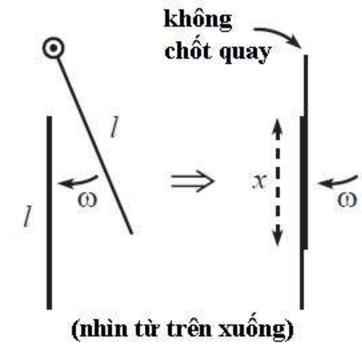
Hình 8.62:

8.64. Các thanh va chạm **

Trên một mặt bàn nằm ngang không ma sát, một thanh có khối lượng m và chiều dài ℓ quay xung quanh một chốt quay tại một đầu của nó với vận tốc góc w. Nó va chạm và dính vào một thanh giống hệt nó, với một chiều dài chồng lên nhau là x, như chỉ ra trong Hình 8.63. Ngay trước khi va chạm, chốt quay bị tháo ra. Hỏi x phải bằng bao nhiêu sao cho sau va chạm hệ hai thanh có chuyển động tịnh tiến nhưng không có chuyển động quay?

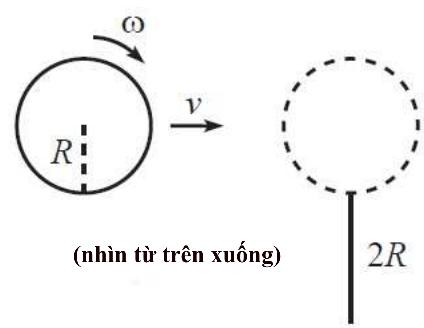
8.65. Kẹo thanh **

Một quả bóng khúc côn cầu có khối lượng m và bán kính R trượt dọc theo một mặt băng không ma sát, như được chỉ ra trong Hình 8.64 (được quan sát từ phía trên). Nó chuyển



Hình 8.63:

động với vận tốc tịnh tiến là v về bên phải và vận tốc góc w theo chiều kim đồng hồ. Nó lướt qua "đỉnh" của một thanh có khối lượng m và chiều dài $2R$ mà ban đầu đứng yên trên mặt băng. Quả bóng dính với thanh, tạo nên một vật thể rắn nhìn trông giống một thanh kẹo.



Hình 8.64:

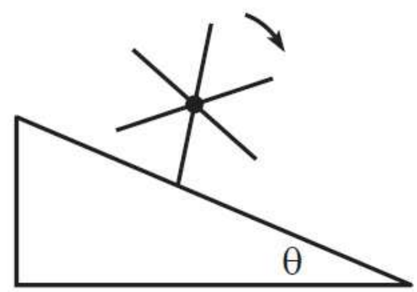
(a) Trong trường hợp đặc biệt $v = Rw$, hỏi vận tốc góc sau va chạm của thanh kẹo bằng bao nhiêu?

(b) Bao nhiêu phần năng lượng bị mất đi trong quá trình va chạm? Làm thế nào để bạn giải thích về thực tế là năng lượng bị mất, biết rằng điều kiện $v = Rw$ có nghĩa rằng điểm tiếp xúc trên quả bóng khúc côn cầu chạm vào thanh với vận tốc tương đối bằng không (và do đó không đâm sầm vào nó, như là trong trường hợp thường thấy với các va chạm không đàn hồi)?

(c) Cho w, hãy chỉ ra rằng v phải bằng $6Rw/5$ nếu bạn muốn năng lượng bị mất là nhỏ nhất.

8.66. Bút chì trên mặt phẳng nghiêng ****

Bài tập này liên quan đến vận tốc cuối của một "bút chì" lăn xuống một mặt phẳng nghiêng. Để cho đơn giản, chúng ta sẽ giả sử rằng khối lượng của bút chì tất cả nằm trên trục của nó. Và để tránh rắc rối trong tính toán, chúng ta sẽ giả sử rằng mặt cắt của bút chì trông giống như một bánh xe gồm sáu nan hoa không khối lượng được đặt cách đều nhau và bánh xe không có vành (xem Hình 8.65).[11] Gọi độ dài của các nan hoa là r, và giả sử mặt phẳng nghiêng một góc θ. Giả sử rằng ma sát là đủ để không làm cho các nan hoa trượt trên mặt phẳng nghiêng, và giả sử rằng bút chì không nảy lên khi nó đập vào mặt phẳng nghiêng.



Hình 8.65:

(a) Giải thích một cách định tính tại sao bút chì đạt tới vận tốc cuối (trung bình), giả sử rằng nó luôn tiếp xúc với mặt phẳng nghiêng.

(b) Giả sử rằng các điều kiện được thiết lập sao cho bút chì cuối cùng đạt tới một vận tốc cuối (trung bình) khác không, trong khi vẫn luôn tiếp xúc với mặt phẳng nghiêng. Hãy miêu tả vận tốc cuối này. Bạn có thể làm điều này bằng cách đưa ra vận tốc lớn nhất của trục của nó trong trạng thái tới hạn ổn định này.

(c) Hỏi giá trị nhỏ nhất của góc θ bằng bao nhiêu để cho một vận tốc cuối khác không tồn tại? Chúng ta được phép ban đầu truyền cho bút chì một chuyển động rất nhỏ.

(d) Hỏi giá trị lớn nhất của góc θ bằng bao nhiêu sao cho bút chì vẫn luôn tiếp xúc với mặt phẳng nghiêng tại mọi thời điểm? Như là một sự kiểm tra kết quả của bạn, thì sự khác nhau giữa các kết quả trong các phần (c) và (d) là vào khoảng 5.09^o.

[11] Nếu bút chì trông giống như một hình lục giác với các cạnh phẳng, thì khi đó không thể nói nó sẽ chuyển động như thế nào, bởi vì nếu các cạnh mà cong ra ngoài một lượng rất nhỏ thì hệ sẽ bảo toàn năng lượng, trong khi đó nếu chúng cong vào bên trong một lượng rất nhỏ thì nó sẽ không còn như thế nữa (với những lý do mà bạn sẽ biết).

Mục 8.6: Xung lượng

8.67. Đập một quả bóng *

Bạn nên đập một quả bóng theo phương nằm ngang tại độ cao nào của nó sao cho nó ngay lập túc lăn đi mà không bị trượt?

8.68. Tâm va chạm *

Bạn cầm một đầu của một thanh đồng chất có chiều dài L. Thanh bị đập với một cái búa. Hỏi vị trí mà búa đập thanh phải ở chỗ nào sao cho đầu thanh mà bạn đang cầm không chuyển động (ngay tức thì sau cú đập)? Nói cách khác, cú đập phải xảy ra tại vị trí nào sao cho bạn không cảm thấy "tê" tay? Điểm vị trí này được gọi là *tâm va chạm*.

8.69. Tâm va chạm khác *

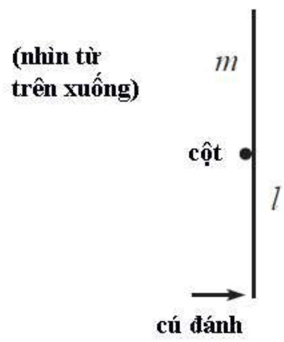
Bạn cầm đỉnh trên cùng của một miếng tam giác đều có độ dài cạnh là L. Mặt phẳng của tam giác nằm trong mặt phẳng thẳng đứng. Hỏi cú đập nên xảy ra ở đâu sao cho điểm mà tay bạn cầm không chuyển động (ngay tức thì sau cú đập)? Sử dụng thực tế rằng moment quán tính xung quanh bất kỳ trục nào đi qua khối tâm của một tam giác đều bằng $mL^2/24$.

8.70. Không va chạm với cột **

Một thanh có khối lượng m và chiều dài ℓ (có thể không phải là đồng chất) nằm trên một mặt băng không ma sát. Điểm giữa (mà cũng là điểm khối tâm) của nó tiếp xúc với một cột mọc lên từ mặt băng. Một đầu của thanh bị đập bởi một cú đánh vuông góc với thanh, như được chỉ ra trong Hình 8.66, sao cho điểm khối tâm chuyển động ra xa cột. Hỏi giá trị nhỏ nhất của moment quán tính của thanh bằng bao nhiêu sao cho thanh không va chạm với cột sau đó?

8.71. Kéo tờ giấy **

Một quả bóng nằm yên trên một mảnh giấy nằm trên một mặt bàn. Bạn kéo mảnh giấy theo một đường thẳng ra khỏi mặt dưới quả bóng. Bạn được tự do kéo tờ giấy ra (theo đường thẳng) theo một cách bất kỳ, kéo về đằng trước hoặc về đằng sau. Bạn thậm chí có thể kéo nó một cách đột ngột, giật giật, sao cho quả bóng trượt đối với nó. Sau khi quả bóng ra khỏi mặt giấy, nó cuối cùng sẽ lăn không trượt trên mặt bàn. Hãy chỉ ra (và bạn được khuyến khích là kiểm tra bằng thí nghiệm điều này) rằng quả bóng thực ra cuối cùng sẽ lại đứng yên. (Sự tổng quát hóa của điều này được đưa ra trong Bài tập 9.29.)



Hình 8.66:

Liệu có thể kéo tờ giấy theo một cách mà quả bóng cuối cùng sẽ trở về đúng vị trí ban đầu của nó được không?

8.72. Lên, xuống, và xoay **

Một thanh đồng chất được giữ theo phương ngang và sau đó được thả ra. Tại cùng một thời điểm, một đầu của nó bị đánh bởi một cú đập rất nhanh hướng lên trên. Nếu thanh cuối cùng lại nằm ngang khi nó quay lại độ cao ban đầu của nó, hỏi độ cao lớn nhất mà tâm của thanh chuyển động lên trên được có thể là bao nhiêu?

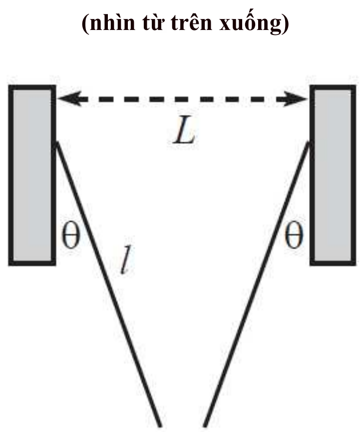
8.73. Công thực hiện **

(a) Một cái bút chì có khối lượng m và chiều dài ℓ nằm yên trên một mặt bàn không ma sát. Bạn đẩy nó tại điểm giữa của nó (theo phương vuông góc với nó), với lực F không đổi trong thời gian t. Hãy tìm vận tốc cuối cùng và khoảng cách mà nó đã di chuyển. Hãy kiểm tra rằng công mà bạn tác dụng bằng với động năng cuối của bút chì.

(b) Giả sử rằng bạn tác dụng một lực không đổi F trong thời gian t như ở trên, nhưng bây giờ bạn tác dụng vào một đầu của bút chì (theo phương vuông góc với bút chì). Giả sử rằng t là nhỏ, sao cho bút chì không có đủ thời gian để xoay (điều này có nghĩa là bạn có thể giả sử rằng lực bạn tác dụng về cơ bản là luôn luôn vuông góc với bút chì, ở mức độ mà moment lực được quan tâm). Hãy tìm vận tốc cuối của điểm khối tâm, vận tốc góc cuối, và khoảng cách mà tay bạn di chuyển. Kiểm tra rằng công mà bạn tác dụng bằng với động năng cuối cùng.

8.74. Nảy giữa các viên gạch ***

Một thanh có chiều dài ℓ trượt trên mặt băng không ma sát. Nó nảy đàn hồi giữa hai viên gạch cố định song song, cách nhau một khoảng L, theo một cách mà chỉ một đầu va chạm với cả hai viên gạch, và mỗi lần thanh va chạm với các viên gạch với góc θ. Xem Hình 8.67. Hỏi góc θ biểu diễn theo L và ℓ bằng bao nhiêu (một phương trình dưới dạng ẩn là được)? Hãy vẽ một bức tranh chính xác một cách hợp lý xem tình huống này sẽ như thế nào trong trường hợp tới hạn $L \ll l$.



Hình 8.67:

Hỏi góc θ biểu diễn theo L và ℓ bằng bao nhiêu (một lần nữa, một phương trình dưới dạng ẩn là được), nếu thanh thêm vào đó quay n nửa vòng giữa hai viên gạch? Hỏi giá trị nhỏ nhất của L/ℓ sao cho n nửa vòng quay là có thể thực hiện được.

8.75. Nảy đi nảy lại *

Sử dụng kết quả của Bài tập 8.20, hỏi mối liên hệ giữa v_x và Rw phải như thế nào sao cho một quả siêu bóng liên tục nảy đi nảy lại giữa hai điểm không đổi trên mặt đất?

8.76. Nảy bên dưới một cái bàn **

Bạn ném một quả siêu bóng sao cho nó nảy lên khỏi mặt sàn, sau đó nảy vào mặt dưới của một cái bàn, sau đó nảy lên khỏi mặt sàn lần nữa. Hỏi mối liên hệ ban đầu giữa v_x và Rw phải như thế nào sao cho quả bóng quay trở lại bàn tay của bạn, với đường đi của quả bóng rời khỏi tay và đường đi nó quay lại tay bạn là như nhau? Sử dụng kết quả của Bài tập 8.20, và từ đó thay đổi đi một chút.[12]

[12]Bạn rất được khuyến khích để ném một quả bóng theo cách như vậy và xem nó sẽ quay lại tay bạn một cách thần kỳ. Hóa ra rằng giá trị cần thiết đối với w là nhỏ, vì vậy một cách ném tự nhiên là với $w \approx 0$ về cơ bản là đủ để làm việc này.

8.77. Lại nảy bên dưới một cái bàn ****

Xét cơ cấu như trong bài tập luyện tập ở trên, trong đó chúng ta giả sử rằng đường đi của quả bóng ra khỏi tay và quay lại là như nhau. Liệu đường quỹ đạo này (trong đó đường quay lại là chính nó) có phải là đường quỹ đạo có thể có duy nhất để cho quả bóng quay lại về tay của bạn? Hãy chỉ ra[13] rằng câu trả lời là "đúng" trừ khi $t_1 = 7t_2$, trong đó t_1 là thời gian mà quả bóng đi từ tay bạn đến mặt sàn (mà cũng là thời gian nó quay lại, bởi vì độ lớn của v_y là không đổi khi nảy lên), và t_2 là thời gian mà quả bóng đi từ mặt sàn đến mặt dưới của bàn (một lần nữa, nó quay lại cũng với thời gian này). Đối với trường hợp đặc biệt khi $t_1 = 7t_2$, bạn sẽ tìm ra rằng quả bóng quay trở lại bàn tay bạn đối với *bất kỳ* mối liên hệ ban đầu nào giữa v_x và Rw.[14]

Đối với một quả bóng có moment quán tính bất kỳ $I = \beta mr^2$, hãy chỉ ra rằng câu trả lời luôn luôn là "đúng", mà không có ngoại lệ nào, nếu $\beta \leq 1/3$ (mà tương ứng với một bánh xe có các nan hoa mang khối lượng và vành không có khối lượng). Hơn nữa, hãy chỉ ra rằng nếu $\beta = 1$ (một cái vòng), thì điều kiện $t_1 = 7t_2$ sẽ trở thành $t_1 = t_2$. Nói cách khác, nếu bạn ném một "siêu vòng" từ độ cao bằng với chiều cao của bàn, thì dù bạn ném như thế nào đi chăng nữa (miễn là ném nó xuống trong mặt phẳng của vòng), thì nó sẽ quay lại tay của bạn. Điều này sẽ đáng tin hơn một chút nếu bạn đọc phần nhận xét của Bài tập 8.20.

8.9 Lời giải bài tập

8.1. Ròng rọc có khối lượng

Hai khối lượng có cùng vận tốc tại mọi thời điểm. Gọi v là vận tốc chung của chúng sau khi cả hai di chuyển một khoảng d. Nếu $2m$ rơi xuống một khoảng d (sao cho m đi lên một khoảng d), thì sự thay đổi của thế năng là $-2mgd + mgd = -mgd$. Tổng động năng là

$$\begin{aligned}
K &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}(2m)v^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \\
&= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}(2m)v^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2\right)\left(\frac{v}{r}\right)^2 \\
&= \frac{7}{4}mv^2, \qquad (8.64)
\end{aligned}$$

[13] Bạn sẽ muốn sử dụng Mathematica hoặc một sự trợ giúp khác để thực hiện các phép nhân ma trận, đặc biệt là với phần thứ hai của bài tập này, nếu không sẽ rất khó để thực hiện chúng.

[14] Tôi biết về sự thật cực kỳ ngạc nhiên này từ Howard Georgi.

trong đó chúng ta đã sử dụng điều kiện lăn không trượt, $v = rw$. Định luật bảo toàn năng lượng do đó cho ta

$$0 = \frac{7}{4}mv^2 - mgd \quad \Longrightarrow \quad v = \sqrt{\frac{4}{7}gd}. \tag{8.65}$$

Kết quả về vận tốc có dạng $v = \sqrt{2ad}$ vẫn đúng ở đây, vì vậy chúng ta nhận được $a = 2g/7$.

8.2. Rời khỏi mặt cầu

Trong cơ cấu này, như trong Bài tập 5.3, quả bóng rời khỏi mặt cầu khi phản lực trở nên bằng không, nghĩa là, khi

$$\frac{mv^2}{R} = mg\cos\theta. \tag{8.66}$$

Điều thay đổi duy nhất trong lời giải của Bài tập 5.3 đến từ việc tính toán v. Quả bóng bây giờ có năng lượng quay, vì vậy định luật bảo toàn năng lượng cho ta $mgR(1-\cos\theta) = mv^2/2 + Iw^2/2 = mv^2/2 + \beta mr^2w^2/2$. Nhưng điều kiện lăn không trượt là $v = rw$, vì vậy chúng ta có

$$\frac{1}{2}(1+\beta)mv^2 = mgR(1-\cos\theta) \quad \Longrightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2gR(1-\cos\theta)}{1+\beta}}. \tag{8.67}$$

Thay giá trị này vào trong phương trình (8.66), chúng ta thấy rằng quả bóng rời khỏi mặt cầu khi

$$\cos\theta = \frac{2}{3+\beta}. \tag{8.68}$$

NHẬN XÉT: Đối với $\beta = 0$, kết quả này bằng $2/3$, như trong bài tập 5.3. Đối với một quả bóng đồng chất với $\beta = 2/5$, chúng ta có $\cos\theta = 10/17$, vì vậy $\theta \approx 54^o$. Đối với $\beta \to \infty$ (ví dụ như, một cuộn chỉ có trục rất mảnh lăn xuống viền của một đường tròn), chúng ta có $\cos\theta \to 0$, vì vậy $\theta \approx 90^o$. Điều này là hợp lý bởi vì v luôn luôn là rất nhỏ, bởi vì hầu hết năng lượng sẽ ở dưới dạng năng lượng quay. Tất nhiên, hệ số ma sát trong trường hợp này sẽ phải rất lớn để giữ cho cuộn chỉ khỏi trượt ở vị trí gần $\theta \approx 90^o$. ♣

Nếu kích cỡ của quả bóng là tương đương với, hoặc lớn hơn, kích cỡ của mặt cầu, thì chúng ta phải tính đến việc điểm khối tâm của quả bóng sẽ không chuyển động theo một đường tròn có bán kính R. Thay vào đó, nó sẽ chuyển động theo một đường tròn có bán kính $R + r$, vì vậy phương trình (8.66) sẽ trở thành

$$\frac{mv^2}{R+r} = mg\cos\theta. \tag{8.69}$$

Hơn nữa, phương trình định luật bảo toàn năng lượng sẽ có dạng, $mg(R+r)(1-\cos\theta) = mv^2/2 + \beta mr^2w^2/2$. Nhưng v vẫn bằng rw (bởi vì quả bóng có thể được coi như là tức thời đang quay xung quanh điểm tiếp xúc với vận tốc góc w), vì vậy động năng vẫn sẽ bằng $(1+\beta)mv^2/2$. Do đó phát biểu của định lý bảo toàn năng lượng sẽ là

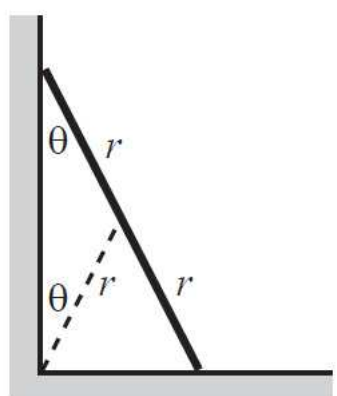
$$\frac{1}{2}(1+\beta)mv^2 = mg(R+r)(1-\cos\theta). \tag{8.70}$$

Chúng ta do đó sẽ có các phương trình giống như ở trên, ngoại trừ rằng R được thay bởi $R+r$ tại mọi chỗ. Nhưng R không xuất hiện ở trong kết quả đối với θ trong phương trình (8.68), vì vậy kết quả sẽ là không đổi.

> NHẬN XÉT: Phương pháp của cách giải thứ hai trong Bài tập 5.3 *không* dùng được trong bài toán này, bởi vì *có* một lực sẽ làm cho v_x giảm, đó là lực ma sát. Và thực vậy, v_x giảm trước khi quả bóng rời khỏi mặt cầu. Tại giá trị đã cho của θ, vận tốc v trong bài toán này đơn giản là $1/\sqrt{1+\beta}$ nhân với vận tốc v trong Bài tập 5.3, vì vậy giá trị lớn nhất của v_x được được ở đây là tại $\cos\theta = 2/3$, như là trong Bài tập 5.3. Nhưng góc trong phương trình (8.68) lại lớn hơn giá trị này, vì vậy v_x giảm trong khi quả bóng ở giữa hai giá trị này. (Tuy nhiên, xem bài toán sau đây đối với một cơ cấu liên quan đến sự quay trong đó giá trị lớn nhất của v_x là có liên quan.)

8.3. Thang trượt

Điểm quan trọng cần nhận ra trong bài toán này là thang sẽ không còn tiếp xúc với tường



Hình 8.68:

trước khi nó đập vào mặt đất. Vì vậy chúng ta cần tìm ra khi nào thì sự mất tiếp xúc này xảy ra. Gọi $r = \ell/2$, để cho đơn giản về sau. Trong khi thang còn tiếp xúc với bức tường, khối tâm của nó chuyển động theo một đường tròn bán kính r. Điều này đến từ thực tế là đường trung tuyến của cạnh huyền của tam giác vuông có độ dài bằng một nửa cạnh huyền. Gọi θ là góc giữa bức tường và đường nối góc của bức tường với khối tâm của thang (xem Hình 8.68). Đây cũng là góc giữa thang và bức tường.

Chúng ta sẽ giải bài toán này bằng cách giả sử rằng khối tâm luôn chuyển động trong một đường tròn, và sau đó sẽ tìm vị trí mà tại đó vận tốc theo phương ngang của khối tâm bắt đầu giảm, nghĩa là, điểm mà tại đó phản lực do bức tường tác dụng lên thang sẽ trở thành có giá trị âm. Bởi vì phản lực tất nhiên là không thể âm, đây sẽ là điểm tại đó thang mất đi sự tiếp xúc với bức tường.

Do định luật bảo toàn năng lượng, động năng của thang sẽ bằng với phần thế năng bị mất, mà có giá trị bằng $mgr(1-\cos\theta)$. Phần động năng này có thể được chia ra thành năng lượng chuyển động tịnh tiến của khối tâm cộng với năng lượng quay. Năng lượng chuyển động tính tiến của khối tâm là $mr^2\dot{\theta}^2/2$, bởi vì điểm khối tâm chuyển động theo một đường tròn có bán kính r. Năng lượng quay là $I\dot{\theta}^2/2$. Cùng một $\dot{\theta}$ được sử dụng ở đây như là trong chuyển động tịnh tiến của khối tâm, bởi vì θ là góc giữa thang và đường thẳng đứng, và do đó là góc quay của thang. Gọi $I \equiv \beta mr^2$ cho trường hợp tổng quát ($\beta = 1/3$ đối với thang này của chúng ta), phát biểu về định luật bảo toàn năng lượng là $(1+\beta)mr^2\dot{\theta}^2/2 = mgr(1-\cos\theta)$. Do đó, vận tốc của khối tâm, mà là $v = r\dot{\theta}$, sẽ bằng

$$v = \sqrt{\frac{2gr(1-\cos\theta)}{1+\beta}}. \tag{8.71}$$

Thành phần theo phương nằm ngang của nó là

$$v_x = \sqrt{\frac{2gr}{1+\beta}}\sqrt{(1-\cos\theta)}\cos\theta. \tag{8.72}$$

Lấy đạo hàm của $\sqrt{(1-\cos\theta)}\cos\theta$, chúng ta thấy rằng vận tốc theo phương ngang đạt giá trị lớn nhất khi $\cos\theta = 2/3$. Do đó thang mất tiếp xúc với bức tường khi

$$\cos\theta = \frac{2}{3} \quad\Longrightarrow\quad \theta \approx 48.2^o, \tag{8.73}$$

và giá trị này là độc lập với β. Điều này có nghĩa rằng, ví dụ như, một quả tạ (gồm hai khối lượng ở tại hai đầu một thanh không khối lượng, với $\beta = 1$) sẽ mất sự tiếp xúc với bức tường cũng ở góc như vậy. Thay giá trị của θ từ phương trình (8.73) vào trong phương trình (8.72), và sử dụng $\beta = 1/3$, chúng ta nhận được vận tốc theo phương ngang cuối cùng có giá trị là

$$v_x = \frac{\sqrt{2gr}}{3} \equiv \frac{\sqrt{gl}}{3}. \tag{8.74}$$

Chú ý rằng giá trị này bằng 1/3 phần giá trị của vận tốc theo phương ngang $\sqrt{2gr}$ mà thang sẽ có nếu nó được sắp xếp (có thể bằng cách cho đầu trên trượt theo một đường cong) để cuối cùng nó trượt ngang dọc theo mặt đất. Bạn được khuyến khích so sánh các khía cạnh khác nhau của bài toán này với các bài toán trong Bài tập 8.2 và Bài tập 5.3.

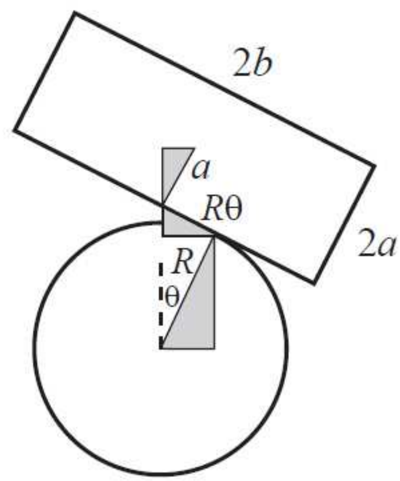
NHẬN XÉT: Phản lực từ bức tường tác dụng lên là bằng không tại thời điểm thang bắt đầu chuyển động và bằng không khi nó kết thúc, vì vậy nó phải đạt một giá trị lớn nhất tại một giá trị nào đó của θ nằm ở giữa. Hãy tìm giá trị θ này. Lấy đạo hàm của v_x trong phương trình (8.72) để tìm gia tốc theo phương ngang của điểm khối tâm, và sau đó sử dụng $\dot{\theta} \propto \sqrt{1-\cos\theta}$ từ phương trình (8.71), chúng ta thấy rằng lực do bức tường tác dụng lên là tỷ lệ với

$$a_x \quad \propto \quad \frac{\sin\theta(3\cos\theta-2)\dot{\theta}}{\sqrt{1-\cos\theta}} \quad \propto \quad \sin\theta(3\cos\theta-2). \tag{8.75}$$

Lấy đạo hàm biểu thức này, chúng ta thấy rằng lực do bức tường tác dụng sẽ đạt giá trị lớn nhất khi $\cos\theta = (1+\sqrt{19})/6 \quad \Longrightarrow \quad \theta \approx 26.7^o$. ♣

8.4. Hình chữ nhật tựa trên hình trụ

Chúng ta phải tìm vị trí của khối tâm hình chữ nhật khi nó quay một góc θ. Sử dụng Hình



Hình 8.69:

8.69, chúng ta có thể nhận được vị trí này (đối với tâm của hình trụ) bằng cách cộng các khoảng cách dọc theo ba hình tam giác bị tô đậm. Bởi vì không có sự trượt, điểm tiếp xúc di chuyển một khoảng $R\theta$ dọc theo hình chữ nhật. Chúng ta thấy rằng vị trí của khối tâm là

$$(x,y) = R(\sin\theta,\cos\theta) + R\theta(-\cos\theta,\sin\theta) + a(\sin\theta,\cos\theta). \tag{8.76}$$

Chúng ta bây giờ sẽ sử dụng phương pháp Lagrange để tìm phương trình chuyển động và tần số của các dao động nhỏ. Sử dụng phương trình (8.76), bạn có thể chỉ ra rằng bình phương vận tốc của khối tâm là

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = (a^2 + R^2\theta^2)\dot{\theta}^2. \tag{8.77}$$

Sự đơn giản của kết quả này gợi ý cho chúng ta rằng có một cách làm nhanh hơn để nhận được nó. Và thực vậy, khối tâm tức thời quay quanh điểm tiếp xúc với vận tốc góc là $\dot{\theta}$, và từ Hình 8.69, khoảng cách của nó tới điểm tiếp xúc là $\sqrt{a^2+R^2\theta^2}$. Do đó, vận tốc của khối tâm là $wr = \dot{\theta}\sqrt{a^2+R^2\theta^2}$.

Hàm Lagrange là

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m(a^2+R^2\theta^2)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - mg\left((R+a)\cos\theta + R\theta\sin\theta\right). \tag{8.78}$$

Phương trình chuyển động là, như bạn có thể kiểm tra lại,

$$(ma^2 + mR^2\theta^2 + I)\ddot{\theta} + mR^2\theta\dot{\theta}^2 = mga\sin\theta - mgR\theta\cos\theta. \tag{8.79}$$

Bây giờ chúng ta hãy xét dao động nhỏ. Sử dụng các xấp xỉ về góc bé, $\sin\theta \approx \theta$ và $\cos\theta \approx 1-\theta^2/2$, và giữ các số hạng đến bậc nhất của θ, chúng ta nhận được

$$(ma^2 + I)\ddot{\theta} + mg(R-a)\theta = 0. \tag{8.80}$$

Hệ số của θ là dương nếu $a < R$. Do đó, chuyển động dao động sẽ xảy ra nếu $a < R$. Chú ý rằng điều kiện này là độc lập với b. Tần số của các dao động nhỏ là

$$\omega = \sqrt{\frac{mg(R-a)}{ma^2 + I}}. \tag{8.81}$$

Nếu $a \geq R$, thì hình chữ nhật sẽ rơi ra khỏi hình trụ.

NHẬN XÉT: Hãy xem xét một vài trường hợp đặc biệt. Nếu $I = 0$ (nghĩa là, tất cả khối lượng của hình chữ nhật sẽ tập trung tại khối tâm), chúng ta có $w = \sqrt{g(R-a)/a^2}$. Thêm vào đó nếu $a \ll R$, thì $w \approx \sqrt{gR/a^2}$. Bạn cũng có thể nhận được những kết quả này bằng cách xem khối tâm như là một khối lượng chất điểm trượt trong một trường thế năng dạng parabola. Nếu hình chữ nhật thay vào đó lại là một thanh đồng chất ngang, sao cho $a \ll R$, $a \ll b$, và $I \approx mb^2/3$, thì chúng ta có $w \approx \sqrt{3gR/b^2}$. Nếu hình chữ nhật là một thanh thẳng đứng (thỏa mãn $a < R$), sao cho $b \ll a$ và $I \approx ma^2/3$, thì chúng ta có $w \approx \sqrt{3g(R-a)/4a^2}$. Nếu thêm vào đó $a \ll R$, thì $w \approx \sqrt{3gR/4a^2}$.

Không phải làm thêm gì nhiều, sẽ có hai cách khác mà chúng ta có thể xác định được điều kiện để có chuyển động dao động. Cách đầu tiên là xem xét chiều cao của điểm khối tâm (mặc dù điều này về cơ bản là cái mà chúng ta đã nhận được ở lời giải trên). Sử dụng các xấp xỉ về góc bé trong phương trình (8.76), chiều cao của khối tâm là $y \approx (R+a) + (R-a)\theta^2/2$. Do đó, nếu $a < R$, thế năng sẽ tăng theo θ, vì vậy hình chữ nhật sẽ muốn giảm thế năng của nó và rơi trở lại điểm giữa. Nhưng nếu $a > R$, thế năng sẽ giảm theo θ, vì vậy hình chữ nhật sẽ muốn tăng góc θ của nó và rơi ra khỏi hình trụ.

Cách thứ hai là xem xét các vị trí theo phương ngang của điểm khối tâm và điểm tiếp xúc. Các xấp xỉ của góc bé trong phương trình (8.76) chỉ ra rằng vị trí ngang của khối tâm bằng $a\theta$ và của điểm tiếp xúc bằng $R\theta$. Do đó, nếu $a < R$ thì điểm khối tâm sẽ nằm bên trái điểm tiếp xúc, vì vậy moment lực của trọng lực (đối với điểm tiếp xúc) sẽ làm góc θ tăng lên, và làm cho chuyển động ổn định. Nhưng nếu $a > R$ thì moment lực của trọng lực làm góc θ giảm, và làm cho chuyển động không ổn định. ♣

8.5. Khối lượng bên trong một ống

Hàm Lagrange là

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}M\ell^2\right)\dot{\theta}^2 + \left(\frac{1}{2}mx^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2\right) + mgx\sin\theta + Mg\left(\frac{l}{2}\right)\sin\theta. \tag{8.82}$$

Khi đó các phương trình Euler-Largrane là

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}\right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} \quad &\Longrightarrow \quad m\ddot{x} = mx\dot{\theta}^2 + mg\sin\theta, \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} \quad &\Longrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{3}M\ell^2\dot{\theta}^2 + mx^2\dot{\theta}\right) = \left(mgx + \frac{Mgl}{2}\right)\cos\theta \\
&\Longrightarrow \quad \left(\frac{1}{3}M\ell^2 + mx^2\right)\ddot{\theta} + 2mx\dot{x}\dot{\theta} = \left(mgx + \frac{Mgl}{2}\right)\cos\theta.
\end{aligned} \tag{8.83}$$

Viết theo $\eta \equiv x/\ell$, các phương trình này trở thành

$$\begin{aligned}
\ddot{\eta} &= \eta\dot{\theta}^2 + \tilde{g}\sin\theta, \\
(1 + 3r\eta^2)\ddot{\theta} &= \left(3r\tilde{g}\eta + \frac{3\tilde{g}}{2}\right)\cos\theta - 6r\eta\dot{\eta}\dot{\theta}.
\end{aligned} \tag{8.84}$$

trong đó $r \equiv m/M$ và $\tilde{g} \equiv g/\ell$. Bên dưới là một chương trình Maple để tìm các giá trị số của η khi θ bằng $\pi/2$, trong trường hợp khi $r = 1$. Như đã được đề cập trong Bài tập 1.2, giá trị này của η không phụ thuộc vào g hoặc ℓ, và do đó không phụ thuộc vào $\tilde{g}$. Trong chương trình, chúng ta sẽ ký hiệu $\tilde{g}$ bởi `g`, mà chúng ta sẽ cho giá trị bất kỳ là 10. Chúng ta sẽ sử dụng q cho θ, và n cho η. Hơn nữa, chúng ta sẽ ký hiệu $\dot{\theta}$ bởi `q1` và $\ddot{\theta}$ bởi `q2`, vân vân. Thậm chí nếu chúng ta không biết gì về Maple, chương trình này vẫn sẽ dễ dàng hiểu được. Xem Mục 1.4 để biết thêm các thảo luận về việc giải số các phương trình vi phân.

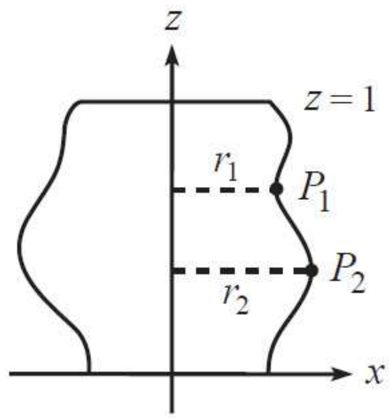
```
n:=0                                  # giá trị n ban đầu
n1:=0:                                # vận tốc n ban đầu
q:=0:                                 # góc ban đầu
q1:=0:                                # vận tốc góc ban đầu
e:=.0001:                             # khoảng thời gian nhỏ
g:=10:                                # giá trị g/l
r:=1:                                 # giá trị m/M
while q<1.57079 do                    # thực hiện quá trình này đến khi
                                      # góc bằng pi/2
n2:=n*q12+g*sin(q):                   # phương trình E-L thứ nhất
q2:=((3*r*g*n+3*g/2)*cos(q)
-6*r*n*n1*q1)/(1+3*r*n2):             # phương trình E-L thứ hai
n:=n+e*n1:                            # cách thay đổi n
n1=n1+e*n2:                           # cách thay đổi n1
q:=q+e*q1:                            # cách thay đổi q
q1:=q1+e*q2:                          # cách thay đổi q1
end do:                               # dừng quá trình
n;                                    # in ra giá trị n
```

Giá trị kết quả của η là 0.378. Nếu bạn thực sự chạy chương trình này trên Maple với các giá trị khác nhau của g, bạn sẽ thấy rằng kết quả của n không phụ thuộc vào g, như đã được phát biểu ở trên. Một vài kết quả của η đối với các giá trị khác nhau của r là, dưới dạng ký hiệu (r, η): $(0, 0.349)$, $(1, 0.378)$, $(2, 0.410)$, $(10, 0.872)$, $(20, 3.290)$. Hóa ra rằng $r \approx 11.25$ sẽ nhận được $\eta \approx 1$. Nghĩa là, khối lượng sẽ đi đến đầu cuối của ống ngay trước khi ống có vị trí thẳng đứng.

Đối với các giá trị η lớn hơn 1, chúng ta có thể tưởng tượng là gắn thêm một phần nối dài không khối lượng có dạng hình ống vào đầu của ống đã cho. Hóa ra rằng $\eta \to \infty$ khi $r \to \infty$. Trong trường hợp này, khối lượng m sẽ rơi xuống gần như thẳng đứng, làm cho ống quay xuống rất nhanh xuống một vị trí gần như thẳng đứng. Nhưng m cuối cùng sẽ nằm ở một phía của ống và sau đó mất một khoảng thời gian khá lâu để tới vị trị thẳng ngay bên dưới điểm quay của ống.

8.6. ***I*** **cực tiểu**

Hình dạng của khối vật phải là một hình trụ với trục z là trục đối xứng. Một chứng minh nhanh (bằng phương pháp phản chứng) là như sau. Giả sử rằng hình dạng tối ưu không phải là



Hình 8.70:

một hình trụ, và xét mặt của hình đó. Nếu hình đó không phải là một hình trụ, thì sẽ tồn tại hai điểm trên bề mặt của nó, P_1 và P_2, mà ở vị trí cách trục z hai khoảng khác nhau, r_1 và r_2. Giả sử rằng $r_1 < r_2$ (xem Hình 8.70). Nếu chúng ta di chuyển một mảnh nhỏ của khối vật từ P_2 đến P_1, thì chúng ta sẽ làm giảm moment quán tính, $\int r^2 dm$. Do đó, hình dạng giả thiết của khối vật không thể là hình dạng cho I nhỏ nhất. Để tránh sự mâu thuẫn này, tất cả các điểm trên bề mặt phải có cùng khoảng cách tới trục z. Hình dạng duy nhất của khối vật có tính chất này là một hình trụ.

8.7. ***I*** **một cách khéo léo**

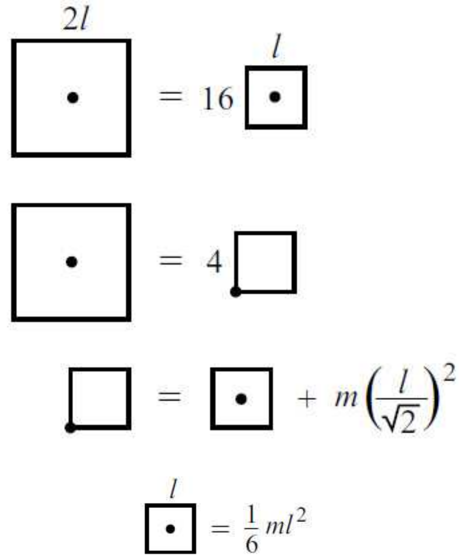
(a) Chúng ta biết rằng I của một hình vuông có cạnh dài $2l$ bằng 16 lần I của một hình vuông có cạnh dài ℓ, với giả thiết rằng các trục đi qua bất cứ hai điểm tương ứng nào. Điều này là đúng bởi vì dm là tỷ lệ với diện tích, mà diện tích thì tỷ lệ với bình phương độ dài, vì vậy các dm tương ứng sẽ khác nhau bởi một hệ số bằng 4. Và cũng bởi vì có r mũ hai ở trong hàm lấy tích phân. Do đó, khi chuyển các biến từ hình vuông này sang hình vuông kia, có 4 hệ số 2 trong hàm lấy tích phân $\int r^2 dm = \int r^2 \rho dx dy$.

Như ở trong Mục 8.3.2, chúng ta có thể biểu diễn các mối liên hệ liên quan bởi các hình vẽ:

Hàng đầu tiên đến từ lập luận tỷ lệ, hàng thứ hai đến từ thực tế là các moment quán tính đơn giản là được cộng lại với nhau, và hàng thứ ba đến từ định lý trục song song. Cân bằng các vế phải của hai hàng đầu tiên, và sau đó sử dụng hàng thứ ba ta có

Kết quả này là trùng với kết quả của Ví dụ 12 trong Mục 8.3.1, với $a = b = l$.

(b) Đây lại là một vật phẳng hai chiều nữa, vì vậy I của một tam giác có độ dài cạnh $2l$ bằng 16 lần I của một tam giác có độ dài cạnh là ℓ, với giả thiết rằng các trục của chúng đi qua hai điểm tương ứng bất kỳ. Với hình vẽ, chúng ta có:



Hàng thứ nhất đến từ lập luận tỷ lệ, hàng thứ hai đến từ thực tế là moment quán tính đơn giản là được cộng lại với nhau, và hàng thứ ba đến từ định lý trục song song. Cân bằng các vế phải của hai hàng đầu, và sau đó sử dụng hàng thứ ba ta có

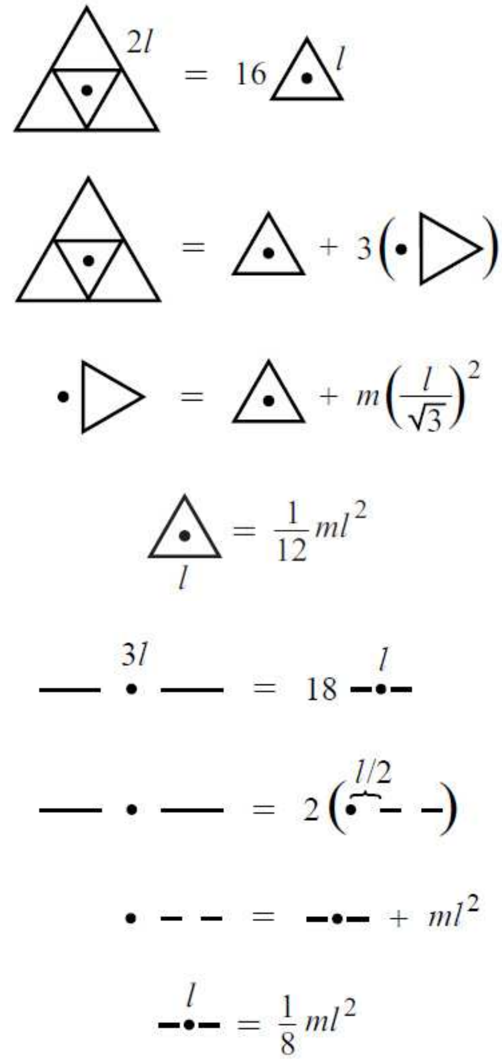
Kết quả này là trùng với kết quả của Ví dụ 11 trong Mục 8.3.1, với $N = 3$. "Bán kính" R được sử dụng trong ví dụ này bằng $l/\sqrt{3}$ theo ký hiệu ở đây.

8.8. Tính I một cách khéo léo các vật thể fractal

(a) Lập luận về tỷ lệ ở đây là hơi tinh tế hơn một chút so với lập luận trong Mục 8.3.2. Vật thể của chúng ta tự bản thân nó là tương tự với một vật thể lớn hơn nó 3 lần, vì vậy hãy tăng chiều dài lên 3 lần và xem điều gì xảy ra với I. Trong hàm lấy tích phân $\int x^2 dm$, số hạng x sẽ nhận một hệ số bằng 3, vì vậy điều này sẽ cho ta một hệ số bằng 9. Nhưng điều gì xảy ra với dm? Nói chung, việc tăng lên ba lần kích thước của vật thể của chúng ta sẽ làm tăng khối lượng của nó lên hai lần, bởi vì vật thể mới được tạo ra bởi hai vật thể nhỏ hơn, cộng với một phần không gian trống ở giữa. Vì vậy dm sẽ nhận một hệ số bằng 2. Do đó, I của một vật thể có chiều dài $3l$ bằng 18 lần I của vật thể có chiều dài ℓ, với giả thiết rằng các trục là đi qua hai điểm tương ứng bất kỳ. Bằng hình vẽ, chúng ta có (các biểu tượng hình vẽ sau là ký hiệu cho vật thể fractal của chúng ta):

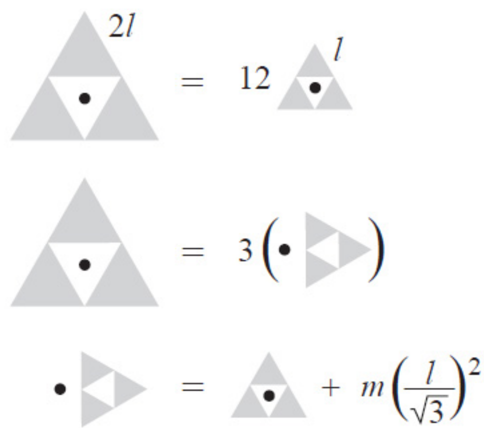
Hàng đầu tiên đến từ lập luận tỷ lệ, hàng thứ hai đến từ thực tế là moment quán tính đơn giản là được cộng lại, và hàng thứ ba đến từ định lý trục song song. Cân bằng các vế phải của hai hàng đầu tiên, và sau đó sử dụng hàng thứ ba ta có

Kết quả này lớn hơn I của một thanh đồng chất, bằng $m\ell^2/12$, bởi vì khối lượng ở đây nói chung là cách xa tâm hơn.

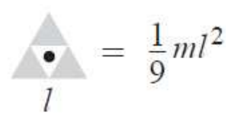


NHẬN XÉT: Khi chúng ta tăng chiều dài của vật thể của chúng ta lên 3 lần, hệ số 2 trong dm là lớn hơn hệ số 1 đối với một vật thể không chiều, nhưng nhỏ hơn hệ số 3 đối với một vật thể một chiều. Vì vậy theo một nghĩa nào đó vật thể của chúng ta có chiều nằm giữa 0 và 1. Sẽ là hợp lý để định nghĩa số chiều fractal, d, của một vật thể như là số mà r^d là sự tăng của "thể tích" khi các chiều được tăng lên một hệ số r. Trong bài toán này, chúng ta có $3^d = 2$, vì vậy $d = \log_3 2 \approx 0.63$. ♣

(b) Một lần nữa, tỷ lệ về khối lượng sẽ xảy ra theo một cách khác lạ. Hãy tăng các cạnh của vật thể của chúng ta lên hai lần và xem điều gì sẽ xảy ra với I. Trong tích phân $\int x^2 dm$, số hạng x sẽ tăng lên gấp đôi, vì vậy điều này sẽ cho chúng ta một hệ số bằng 4. Nhưng điều gì sẽ xảy ra đối với dm? Việc tăng gấp đôi về kích cỡ của vật thể của chúng ta sẽ làm cho khối lượng của nó tăng lên 3 lần, bởi vì vật thể mới được tạo bởi ba vật thể cũ, cùng với một khoảng trống ở giữa. Vì vậy dm sẽ tăng lên một hệ số bằng 3. Do đó, I của một vật thể có độ dài cạnh là $2l$ sẽ bằng 12 lần I của một vật thể có độ dài cạnh là ℓ, với giả thiết rằng các trục là đi qua hai điểm tương ứng bất kỳ. Bằng hình vẽ, chúng ta có:



Hàng đầu tiên đến từ lập luận về tỷ lệ, hàng thứ hai đến từ thực tế là moment quán tính đơn giản là được cộng lại, và hàng thứ ba đến từ định lý trục song song. Cân bằng các vế phải của hai hàng đầu, và sau đó sử dụng hàng thứ ba ta có

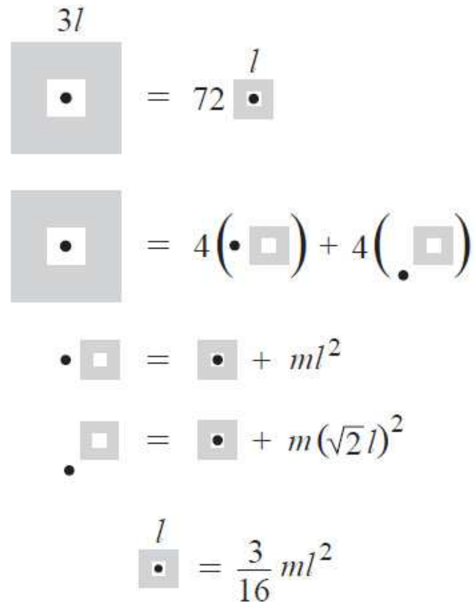


Giá trị này lớn hơn I của một tam giác đồng chất trong Bài tập 8.7, mà có giá trị bằng $m\ell^2/12$, bởi vì khối lượng ở đây nói chung là ở xa tâm hơn. Việc tăng kích cỡ của vật thể của chúng ta lên gấp 2 lần làm tăng "thể tích" lên gấp 3 lần, vì vậy số chiều fractal được cho bởi $2^d = 3 \quad \Longrightarrow \quad d = \log_2 3 \approx 1.58$.

(c) Một lần nữa, tỷ lệ về khối lượng sẽ xảy ra theo một cách khác lạ. Hãy tăng các cạnh của vật thể của chúng ta lên ba lần và xem điều gì sẽ xảy ra với I. Trong tích phân $\int x^2 dm$, số hạng x sẽ tăng lên gấp ba, vì vậy điều này sẽ cho chúng ta một hệ số bằng 9. Nhưng điều gì sẽ xảy ra đối với dm? Việc tăng gấp ba về kích cỡ của vật thể của chúng ta sẽ làm cho khối lượng của nó tăng lên 8 lần, bởi vì vật thể mới được tạo bởi tám vật thể cũ, cùng với một khoảng trống ở giữa. Vì vậy dm sẽ tăng lên một hệ số bằng 8. Do đó, I của một vật thể có độ dài cạnh là $3l$ sẽ bằng 72 lần I của một vật thể có độ dài cạnh bằng ℓ, với giả thiết rằng các trục là đi qua hai điểm tương ứng bất kỳ. Bằng hình vẽ, chúng ta có:

Hàng đầu tiên đến từ lập luận về tỷ lệ, hàng thứ hai đến từ thực tế là moment quán tính đơn giản là được cộng lại, và hàng thứ ba đến từ định lý trục song song. Cân bằng các vế phải của hai hàng đầu, và sau đó sử dụng hàng thứ ba và thứ tư để khử ta có

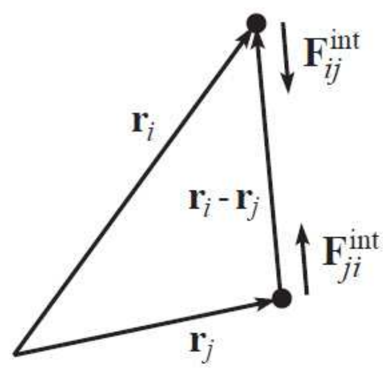
Giá trị này lớn hơn I của một hình vuông đồng chất trong Bài tập 8.7, mà có giá trị bằng $m\ell^2/6$, bởi vì khối lượng ở đây nói chung là ở xa tâm hơn. Việc tăng kích cỡ của vật thể



của chúng ta lên gấp 3 lần làm tăng "thể tích" lên gấp 8 lần, vì vậy số chiều fractal được cho bởi $3^d = 8 \quad \Longrightarrow \quad d = \log_3 8 \approx 1.89$.

8.9. Moment lực bằng không từ các nội lực

Gọi $\mathbf{F}_{ij}^{\text{nội lực}}$ là lực mà hạt thứ i chịu tác dụng từ hạt thứ j (xem Hình 8.71). Khi đó



Hình 8.71:

$$\mathbf{F}_i^{\text{nội lực}} = \sum_j \mathbf{F}_{ij}^{\text{nội lực}}. \tag{8.85}$$

Tổng moment nội lực tác dụng lên tất cả các hạt, đối với gốc tọa độ đã chọn, do đó là

$$\tau^{\text{nội lực}} \equiv \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{\text{nội lực}} = \sum_i \sum_j \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij}^{\text{nội lực}}. \tag{8.86}$$

Nhưng nếu chúng ta hoán vị các chỉ số (mà chúng đã đã ký hiệu chúng một cách tùy ý), chúng ta có

$$\tau^{\text{nội lực}} = \sum_j \sum_i \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ji}^{\text{nội lực}} = -\sum_j \sum_i \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ij}^{\text{nội lực}}, \tag{8.87}$$

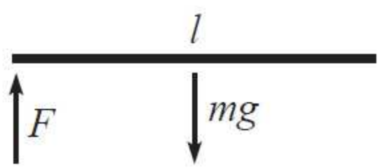
trong đó chúng ta đã sử dụng định luật thứ ba của Newton, $\mathbf{F}_{ij}^{\text{nội lực}} = -\mathbf{F}_{ji}^{\text{nội lực}}$. Cộng hai phương trình trên với nhau cho ta

$$2\tau^{\text{nội lực}} = \sum_i \sum_j (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ij}^{\text{nội lực}}. \tag{8.88}$$

Nhưng $\mathbf{F}_{ij}^{\text{nội lực}}$ song song với $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$, do giả thiết của chúng ta. Do đó, mỗi tích có hướng trong tổng sẽ bằng không.

Các tổng ở trên có thể làm cho lời giải này trông có vẻ phức tạp một chút. Nhưng ý tưởng ở đây đơn giản là các moment lực bị triệt tiêu theo cặp. Điều này là rõ ràng từ Hình 8.71, bởi vì hai lực được vẽ trong hình là bằng nhau và ngược chiều, và chúng có cùng cánh tay đòn đối với gốc tọa độ.

8.10. Bỏ một điểm tựa



Hình 8.72:

(a) LỜI GIẢI THỨ NHẤT : Gọi lực cần tính từ điểm tựa bên trái là F, và gọi gia tốc hướng xuống dưới của điểm khối tâm của thanh là a. Khi đó các phương trình $F = ma$ và $\tau = I\alpha$ (đối với điểm tựa cố định; xem Hình 8.72), cùng với mối liên hệ của chuyển động tròn giữa a và α, tương ứng là,

$$mg - F = ma, \quad mg\frac{l}{2} = \left(\frac{m\ell^2}{3}\right)\alpha, \quad a = \frac{l}{2}\alpha. \tag{8.89}$$

Phương trình thứ hai cho ta $\alpha = 3g/2l$. Phương trình thứ ba khi đó cho ta $a = 3g/4$. Và phương trình thứ nhất sau đó cho ta $F = mg/4$. Chú ý rằng đầu bên phải của thanh có gia tốc $2a = 3g/2$, mà có giá trị lớn hơn g.

LỜI GIẢI THỨ HAI: Hãy xét các moment lực xung quanh điểm khối tâm, và cũng xét các moment lực xung quanh điểm cố định, chúng ta tương ứng có,

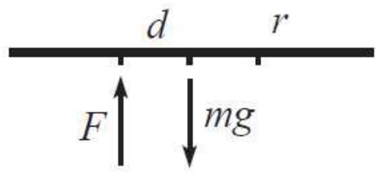
$$F\frac{l}{2} = \left(\frac{m\ell^2}{12}\right)\alpha, \quad \text{và} \quad mg\frac{l}{2} = \left(\frac{m\ell^2}{3}\right)\alpha. \tag{8.90}$$

Chia phương trình đầu cho phương trình thứ hai cho ta $F = mg/4$.

(b) LỜI GIẢI THỨ NHẤT: Như trong lời giải thứ nhất ở trên, chúng ta có (bằng cách sử dụng định lý trục song song; xem Hình 8.73)

$$mg - F = ma, \quad mgd = (\beta mr^2 + md^2)\alpha, \quad a = \alpha d. \tag{8.91}$$

Giải ra đối với F ta có $F = mg/(1 + d^2/\beta r^2)$. Với $d = r$ và $\beta = 1/3$, chúng ta nhận được



Hình 8.73:

kết quả của phần (a).

LỜI GIẢI THỨ HAI: Như trong lời giải thứ hai ở trên, bằng cách xem xét các moment lực xung quanh điểm khối tâm, và các moment lực xung quanh điểm tựa cố định, chúng ta có

$$Fd = (\beta mr^2)\alpha, \quad \text{và} \quad mgd = (\beta mr^2 + md^2)\alpha. \tag{8.92}$$

Chia phương trình thứ nhất của các phương trình này cho phương trình thứ hai cho ta $F = mg/(1 + d^2/\beta r^2)$.

> NHẬN XÉT: Đối với trường hợp đặc biệt $d = r$, chúng ta có điều sau đây: Nếu $\beta = 0$ (khối lượng tập trung hết tại điểm giữa) thì $F = 0$; nếu $\beta = 1$ (thanh trở thành quả tạ có hai khối lượng tại hai đầu) thì $F = mg/2$; và nếu $\beta = \infty$ (thanh được nối thêm dài ra bởi các đoạn không có khối lượng và có hai khối lượng đặt tại hai đầu của các đoạn kéo dài này) thì $F = mg$. Các kết quả này về mặt trực giác đều đúng cả. Trong trường hợp giới hạn $d = 0$, chúng ta có $F = mg$. Và trong trường hợp giới hạn $d = \infty$ (sử dụng thêm một sự kéo dài không khối lượng), chúng ta có $F = 0$. Về mặt kỹ thuật, chúng ta nên viết $d \ll \sqrt{\beta} r$ và $d \gg \sqrt{\beta} r$ ở đây. ♣

8.11. Thanh đổ

(a) Hãy đi tính τ và L đối với điểm khớp quay. Moment lực gây ra bởi trọng lực mà tác động lại điểm khối tâm có độ lớn là mgb. Moment quán tính của thanh quanh trục nằm ngang đi qua khớp quay (và vuông góc với thanh không khối lượng) đơn giản là mb^2. Vì vậy khi thanh bắt đầu bị đổ, phương trình $\tau = dL/dt$ là $mgb = (mb^2)\alpha$. Do đó, gia tốc ban đầu của điểm khối tâm, mà bằng $b\alpha$, là

$$b\alpha = g, \tag{8.93}$$

và nó độc lập với ℓ và b. Kết quả này là hợp lý. Thanh ban đầu rơi thẳng xuống, và khớp quay không tác dụng lên nó một lực nào bởi vì lúc đó nó không biết là thanh đang chuyển động.

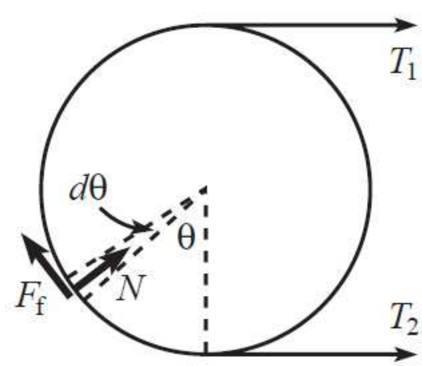
(b) Sự thay đổi duy nhất so với phần (a) là moment quán tính của thanh xung quanh trục nằm ngang đi qua khớp quay (và vuông góc với thanh không khối lượng). Từ định lý trục song song, moment quán tính này là $mb^2 + m\ell^2/12$. Vì vậy khi thanh bắt đầu đổ xuống, phương trình $\tau = dL/dt$ là $mgb = (mb^2 + m\ell^2/12)\alpha$. Do đó, gia tốc ban đầu của khối tâm là

$$b\alpha = \frac{g}{1 + (\ell^2/12b^2)}. \tag{8.94}$$

Đối với trường hợp $\ell \ll b$, kết quả này tiến tới g, mà nó nên phải như vậy. Và khi $\ell \gg b$, nó sẽ tiến về không, và nó cũng nên phải như vậy. Trong trường hợp này, một di chuyển rất nhỏ của khối tâm sẽ tương ứng với một di chuyển rất lớn của các điểm nằm ở xa dọc theo thanh. Do đó, do định luật bảo toàn năng lượng, điểm khối tâm phải chuyển động rất chậm.

8.12. Kéo một khối trụ

Xét lực tổng theo phương y (phương ngang) tác dụng lên một cung dài rất nhỏ của hình trụ.



Hình 8.74:

Góc θ được đo từ đáy của trụ, như được chỉ ra trong Hình 8.74. Lực căng tăng khi θ tăng (giả sử rằng $T_1 > T_2$), và lực ma sát F_f tác dụng lên hình trụ bằng với hiệu dT của lực căng tại hai đầu cung nhỏ (bằng cách sử dụng định luật ba Newton, và chú ý rằng không có tổng lực tác dụng lên sợi dây vì nó không có khối lượng). Lực ma sát tác dụng lên hình trụ do đó sinh ra một thành phần lực $dT \sin\theta$ theo phương y. Từ ví dụ trong Mục 2.1, phản lực tác dụng lên hình trụ là $N = Td\theta$, mà nhận được một thành phần lực $Td\theta \cos\theta$ theo phương y. Tổng lực tác dụng lên hình trụ tại cung dài nhỏ do đó bằng

$$dF_y = dT \sin\theta + Td\theta \cos\theta = d(T \sin\theta). \tag{8.95}$$

Tổng lực F_y tác dụng lên hình trụ do đó bằng

$$F_y = \int dF_y = \int d(T\sin\theta) = \Delta(T\sin\theta). \qquad (8.96)$$

Nhưng θ chạy từ 0 đến π, nghĩa là $\sin\theta$ có giá trị đầu và cuối đều bằng không. Do đó, tổng thay đổi của $T\sin\theta$ là bằng không, và vì vậy $F_y = 0$, như chúng ta mong muốn. Chú ý rằng không ở đâu trong lời giải này mà chúng ta có bất kỳ giả thiết gì với T. Sợi dây có thể trượt, và hình trụ có thể khá ráp tại một vài chỗ và khá là trơn tại những chỗ khác, và điều đó không ảnh hưởng gì. Tổng lực F_y vẫn bằng không (như chúng ta biết là nó phải như vậy, với lý do đơn giản là T_1 và T_2 chỉ kéo theo phương x). Về phương diện vật lý, điều xảy ra là N có giá trị lớn hơn trong phần nửa trên của nửa đường tròn so với phần bên dưới, và lực tổng hướng xuống dưới cuối cùng là bị triệt tiêu với lực ma sát hướng lên trên.

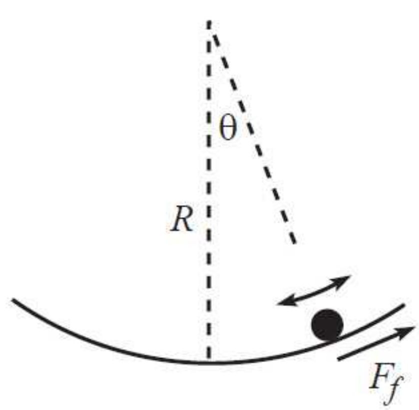
Kết quả $F_y = \Delta(T\sin\theta)$ ở trên vẫn đúng trong trường hợp tổng quát, và nó không chỉ đúng khi sợi dây quấn xung quanh một nửa đường tròn. Vì quy ước của chúng ta đối với θ, các ký hiệu sẽ vẫn đúng sao cho $\Delta(T\sin\theta)$ đơn giản là tổng các thành phần lực của T_1 và T_2 theo phương y, mà là kết quả chúng ta mong đợi.

8.13. Quả bóng dao động

Gọi góc từ đáy của hình trụ tới quả bóng là θ (xem Hình 8.75), và gọi F_f là lực ma sát. Khi đó phương trình $F = ma$ theo phương tiếp tuyến sẽ là

$$F_\mathrm{f} - mg\sin\theta = ma, \qquad (8.97)$$

trong đó chúng ta đã chọn chiều hướng sang bên phải là chiều dương đối với a và F_f. Hơn nữa,



Hình 8.75:

phương trình $\tau = I\alpha$ (đối với khối tâm) là

$$-rF_\mathrm{f} = \frac{2}{5}mr^2\alpha, \qquad (8.98)$$

trong đó chúng ta đã chọn chiều theo chiều kim đồng hồ là chiều dương đối với α. Sử dụng điều kiện lăn không trượt $r\alpha = a$, phương trình moment lực trở thành $F_f = -(2/5)ma$. Thay kết quả này vào trong phương trình (8.97), và sử dụng $\sin\theta \approx \theta$, chúng ta nhận được $mg\theta + (7/5)ma = 0$. Với giả thiết $r << R$, tâm của quả bóng sẽ chuyển động dọc theo một đường tròn với bán kính về cơ bản là bằng R, vì vậy chúng ta có $a \approx R\ddot{\theta}$. Do đó chúng ta sẽ nhận được

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{5g}{7R}\right)\theta = 0. \tag{8.99}$$

Đây là phương trình đối với chuyển động điều hòa đơn giản với tần số

$$\omega = \sqrt{\frac{5g}{7R}}. \tag{8.100}$$

Nói chung, nếu quả bóng có một moment quán tính bằng βmr^2, bạn có thể chỉ ra rằng tần số của dao động nhỏ là $\sqrt{g/(1+\beta)R}$. Chú ý rằng chúng ta đã cần sử dụng đến hai biểu diễn khác nhau của a trong lời giải này, đó là $r\alpha$ và $R\ddot{\theta}$.

NHẬN XÉT: Kết quả trong phương trình (8.100) là hơi nhỏ hơn một chút so với $\sqrt{g/R}$ đối với trường hợp khi quả bóng chỉ trượt. Lý giải theo các lực, thì lý do của điều này là lực ma sát trong trường hợp đó là một lực tổng theo phương tiếp tuyến nhỏ hơn. Lý giải theo năng lượng, thì là do năng lượng "bị mất" trong chuyển động quay, vì vậy quả bóng cuối cùng sẽ chuyển động chậm hơn.

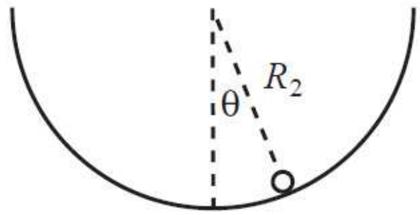
Nếu chúng ta bỏ qua giả thiết $r << R$, thì phương trình $r\alpha = a$ vẫn sẽ đúng, bởi vì chúng ta có thể xét quả bóng tức thời là đang quay xung quanh điểm tiếp xúc. Nhưng phương trình $a = R\ddot{\theta}$ sẽ bị thay bởi phương trình $a = (R-r)\ddot{\theta}$, bởi vì tâm của quả bóng chuyển động dọc theo một đường tròn có bán kính $R - r$. Do đó, kết quả chính xác của tần số sẽ là $w = \sqrt{5g/7(R-r)}$. Kết quả này sẽ tiến ra vô cùng khi $r \to R$. ♣

8.14. Các hình trụ dao động

Các moment quán tính của các hình trụ là $I_1 = M_1R_1^2$ và $I_2 = M_2R_2^2$. Gọi F là lực giữa hai hình trụ, được định nghĩa với chiều hướng sang bên phải hình trụ nhỏ là chiều dương. Gọi θ_1 và θ_2 là các góc quay của các hình trụ, với chiều ngược chiều kim đồng hồ là chiều dương, đối với vị trí khi hình trụ nhỏ nằm tại đáy của hình trụ lớn. Khi đó các phương trình moment lực là

$$FR_1 = M_1R_1^2\ddot{\theta}_1, \quad \text{và} \quad FR_2 = -M_2R_2^2\ddot{\theta}_2. \tag{8.101}$$

Chúng ta không quan tâm nhiều lắm tới θ_1 và θ_2 như là vị trí góc mà M_1 tạo với phương thẳng đứng. Gọi góc này là θ (xem Hình 8.76). Trong xấp xỉ $R_1 << R_2$, điều kiện lăn không trượt nói rằng $R_2\theta \approx R_2\theta_2 - R_1\theta_1$, bởi vì cả hai vế của phương trình này đều biểu diễn độ dài cung nằm



Hình 8.76:

cách xa so với đáy của hình trụ lớn. Sau đó cộng các phương trình trong (8.101) sau khi chia chúng cho các khối lượng cho ta

$$F\left(\frac{1}{M_1}+\frac{1}{M_2}\right)=-R_2\ddot{\theta}. \tag{8.102}$$

Phương trình đối với lực theo phương tiếp tuyến của M_1 là

$$F-M_1 g\sin\theta=M_1(R_2\ddot{\theta}). \tag{8.103}$$

Thay F từ phương trình (8.102) vào trong phương trình này cho ta, với $\sin\theta\approx\theta$,

$$\left(M_1+\frac{1}{\frac{1}{M_1}+\frac{1}{M_2}}\right)\ddot{\theta}+\left(\frac{M_1 g}{R_2}\right)\theta=0. \tag{8.104}$$

Sau khi rút gọn, tần số của các dao động nhỏ là

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{R_2}}\sqrt{\frac{M_1+M_2}{M_1+2M_2}}. \tag{8.105}$$

NHẬN XÉT: Trong trường hợp giới hạn $M_2 << M_1$, chúng ta nhận được $w\approx\sqrt{g/R_2}$. Trong trường hợp này, về cơ bản là không có lực ma sát giữa các hình trụ, bởi vì nếu không thì vật M_2 "không khối lượng" sẽ có gia tốc góc bằng vô cùng. Vì vậy chỉ có một phản lực, và hình trụ nhỏ về cơ bản là hành động giống như một con lắc đơn có chiều dài R_2. Trong trường hợp giới hạn $M_1 << M_2$, chúng ta nhận được $w\approx\sqrt{g/2R_2}$. Trong trường hợp này, hình trụ lớn về cơ bản là ở vị trí cố định, vì vậy chúng ta đơn giản là có cơ cấu đã được đề cập ở trong lời giải của Bài tập 8.13, với $\beta=1$. ♣

8.15. Kéo dài sợi dây

Xét moment động lượng đối với điểm treo P. Các lực tác động lên khối lượng là lực căng của sợi dây và trọng lực. Lực căng dây không sinh ra moment lực xung quanh P, và trọng lực không sinh ra moment lực theo phương z. Do đó, L_z là không đổi. Chuyển động sẽ luôn luôn gần tròn bởi vì độ dài sợi dây thay đổi rất chậm, vì vậy nếu chúng ta gọi w_l là tần số góc của chuyển động tròn khi sợi dây có chiều dài ℓ, thì chúng ta có thể nói rằng

$$L_z=mr^2\omega_l. \tag{8.106}$$

là hằng số. Tần số w_l có thể nhận được bằng cách sử dụng $F = ma$ đối với chuyển động tròn. Lực căng trong sợi dây về cơ bản là bằng $mg/\cos\theta$ (để làm cho các lực theo phương y bị triệt tiêu), vì vậy lực xuyên tâm theo phương ngang sẽ bằng $mg\tan\theta$. Do đó,

$$mg\tan\theta = mr\omega_l^2 = m(l\sin\theta)\omega_l^2 \quad \Longrightarrow \quad \omega_l = \sqrt{\frac{g}{l\cos\theta}} = \sqrt{\frac{g}{h}}. \tag{8.107}$$

Thay giá trị này vào trong phương trình (8.106), chúng ta thấy rằng giá trị hằng số của L_z là

$$L_z = mr^2\sqrt{\frac{g}{h}}. \tag{8.108}$$

Kết quả này đúng tại mọi thời điểm, vì vậy đại lượng $r^2/\sqrt{h}$ là hằng số. Hãy xem xét hai trường hợp.

(a) Khi $\theta \approx 0$, chúng ta có $h \approx l$, vì vậy phương trình (8.108) nói rằng $r^2/\sqrt{l}$ là hằng số. Do đó,

$$r \ \propto \ \ell^{1/4}, \tag{8.109}$$

mà có nghĩa rằng r tăng rất chậm khi bạn thả sợi dây ra tại $\theta \approx 0$.

(b) Khi $\theta \approx \pi/2$, chúng ta có $r \approx l$, vì vậy phương trình (8.108) nói rằng $\ell^2/\sqrt{h}$ là hằng số. Do đó,

$$h \ \propto \ \ell^4, \tag{8.110}$$

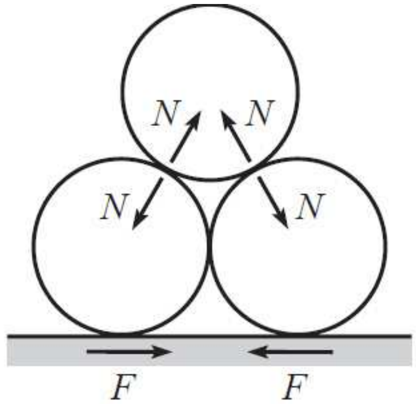
mà có nghĩa là h tăng rất nhanh khi bạn thả sợi dây ra tại $\theta \approx \pi/2$.

Chú ý rằng phương trình (8.108) nói rằng $h \propto r^4$ đối với bất cứ giá trị nào của θ. Vì vậy với θ bằng thế nào đi chăng nữa, nếu bạn từ từ kéo dài sợi dây ra sao cho r có giá trị gấp đôi, thì h sẽ tăng lên gấp 16 lần. Một cách tương đương, nếu bạn kéo sợi dây vào, đường bao của chuyển động của khối lượng sẽ là một mặt của một hình tròn xoay tạo bởi một đường cong có dạng $y \propto -x^4$.

8.16. Một tam giác từ ba hình trụ

(a) Gọi N là phản lực giữa các hình trụ, và gọi F là lực ma sát với mặt đất (xem Hình 8.77). Gọi a_x là gia tốc theo phương ngang tại thời điểm ban đầu của hình trụ nằm bên phải bên dưới (vì vậy $\alpha = a_x/R$ là gia tốc góc của nó), và gọi a_y là gia tốc theo phương thẳng đứng tại thời điểm ban đầu của hình trụ nằm trên cùng, với chiều hướng xuống dưới được chọn là chiều dương.

Nếu chúng ta xét moment lực xung quanh tâm của một trong hai hình trụ bên dưới, thì lực có moment khác không chỉ là lực F, bởi vì N, trọng lực, và phản lực từ mặt đất tất cả đều có chiều đi qua tâm đó. Các phương trình $F_x = ma_x$ đối với hình trụ bên phải bên



Hình 8.77:

dưới, $F_y = ma_y$ đối với hình trụ nằm trên, và $\tau = I\alpha$ cho hình trụ nằm bên phải bên dưới tương ứng là,

$$\begin{aligned} N\cos 60^o - F &= ma_x, \\ mg - 2N\sin 60^o &= ma_y, \\ FR &= (\beta m R^2)(a_x/R). \end{aligned} \tag{8.111}$$

Chúng ta có bốn ẩn N, F, a_x, và a_y, vì vậy chúng ta cần thêm một phương trình nữa. May mắn là a_x và a_y có liên hệ với nhau. Mặt tiếp xúc giữa các hình trụ nằm trên và dưới (ban đầu) nằm tạo với phương ngang một góc 30^o. Do đó, nếu các hình trụ nằm dưới di chuyển một khoảng d sang bên cạnh, thì hình trụ bên trên sẽ di chuyển một khoảng là $d\tan 30^o$ xuống dưới. Vì vậy,

$$a_x = \sqrt{3}a_y. \tag{8.112}$$

Chúng ta bây giờ có bốn phương trình và bốn ẩn. Giải ra đối với a_y bằng một phương pháp nào đó mà bạn chọn cho ta

$$a_y = \frac{g}{7 + 6\beta}. \tag{8.113}$$

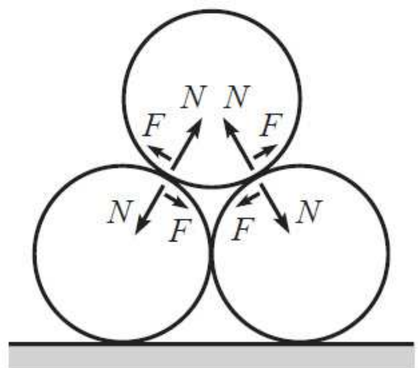
(b) Gọi N là phản lực giữa các hình trụ, và gọi F là lực ma sát giữa các hình trụ, với chiều dương là chiều được chỉ ra trong Hình 8.78. Gọi a_x là gia tốc theo phương nằm ngang ban đầu của hình trụ nằm ở dưới bên phải, và gọi a_y là gia tốc theo phương thẳng đứng ban đầu của hình trụ nằm trên, với chiều hướng xuống dưới được chọn là chiều dương. Gọi α là gia tốc góc của hình trụ nằm dưới bên phải, với chiều ngược chiều kim đồng hồ được chọn là chiều dương. Chú ý rằng α là *không* bằng với a_x/R, bởi vì các hình trụ bên dưới là trượt đối với mặt đất.

Nếu chúng ta xét moment lực xung quanh tâm của một trong hai hình trụ bên dưới, thì chỉ có lực F cho moment khác không. Và với lý do như ở trong phần (a), chúng ta có

$a_x = \sqrt{3}a_y$. Do đó, bốn phương trình tương tự như các phương trình trong (8.111) và (8.112) là

$$
\begin{aligned}
N\cos 60^o - F\sin 60^o &= ma_x, \\
mg - 2N\sin 60^o - 2F\cos 60^o &= ma_y, \\
FR &= (\beta mR^2)\alpha, \\
a_x &= \sqrt{3}a_y.
\end{aligned}
\tag{8.114}
$$

Chúng ta có năm ẩn, N, F, a_x, a_y, và α, vì vậy chúng ta cần thêm một phương trình nữa.



Hình 8.78:

Mẹo ở đây là mối liên hệ giữa α với a_x. Một cách để nhận được mối liên hệ này là bỏ qua chuyển động theo phương y của hình trụ trên cùng và tưởng tưởng hình trụ nằm bên phải bên dưới đang quay lên và vòng quanh hình trụ ở trên, mà đang được coi là cố định. Trong chuyển động quay này, tâm của hình trụ bên dưới chuyển động với một góc nghiêng 30^o so với phương nằm ngang (tại thời điểm ban đầu). Vì vậy nếu nó di chuyển một khoảng cách d rất nhỏ, thì tâm của nó sẽ di chuyển một khoảng cách là $d/\cos 30^o$ lên trên và về phía bên phải. Vì vậy hình trụ bên dưới sẽ quay một góc là $\theta = (d/\cos 30^o)/R = (2/\sqrt{3})(d/R)$. Việc tính đến cả chuyển động theo phương thẳng đứng của hình trụ bên trên cũng không làm thay đổi kết quả này. Do đó, lấy đạo hàm hai lần của mối liên hệ này cho ta

$$
\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{a_x}{R}. \tag{8.115}
$$

Bây giờ chúng ta có năm phương trình và năm ẩn. Giải ra đối với a_y theo phương pháp nào đó mà bạn chọn cho ta

$$
a_y = \frac{g}{7+8\beta}. \tag{8.116}
$$

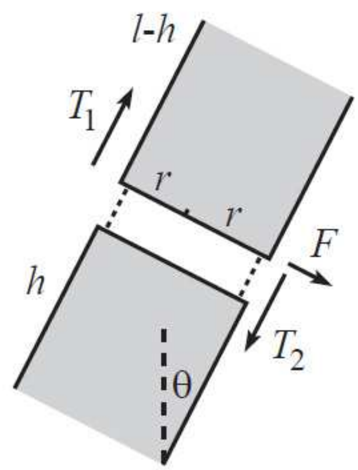
NHẬN XÉT: Nếu $\beta = 0$, nghĩa là, nếu tất cả khối lượng là tập trung tại tâm của các hình trụ, thì kết quả trong cả hai phần (a) và (b) giảm đi $g/7$. Trường hợp $\beta = 0$ này là tương đương với trường hợp các hình trụ (có phân bố khối lượng bất kỳ) là không có ma sát, bởi vì khi đó không có sự quay. Nếu $\beta \neq 0$, thì kết quả trong phần (b) sẽ nhỏ hơn kết quả trong phần (a). Điều này không hiển nhiên chút nào, nhưng lý do cơ bản là các hình trụ bên dưới trong phần (b) sẽ lấy nhiều năng lượng hơn bởi vì chúng phải quay nhanh hơn một chút, bởi vì $\alpha = (2/\sqrt{3})(a_x/R)$ thay vì $\alpha = a_x/R$. ♣

8.17. Ống khói đổ

Gọi θ là góc mà ống khói đã bị nghiêng. Trước khi chúng ta bắt đầu xét đến lực trong các thanh, đầu tiên hãy xác định $\ddot{\theta}$ như là một hàm của θ. Gọi ℓ là chiều cao của ống khói. Khi đó moment quán tính xung quanh khớp quay trên mặt đất là $m\ell^2/3$ (nếu chúng ta bỏ qua chiều rộng của ống khói). Và moment lực (xung quanh khớp quay) gây ra bởi trọng lực là $\tau = mg(\ell/2)\sin\theta$. Do đó, $\tau = d\mathbf{L}/dt$ cho ta $mg(\ell/2)\sin\theta = (1/3)m\ell^2\ddot{\theta}$, và vì vậy

$$\ddot{\theta} = \frac{3g\sin\theta}{2l}. \tag{8.117}$$

Bây giờ hãy xác định các lực bên trong các thanh. Chiến thuật của chúng ta sẽ là đi tưởng



Hình 8.79:

tượng rằng ống khói cấu tạo bởi một ống khói có chiều cao là h, với một ống khói khác có chiều cao $l-h$ được đặt lên trên nó. Chúng ta sẽ đi tìm các lực bên trong các thanh nối hai "ống khói thay thế" này, và sau đó chúng ta sẽ tìm giá trị lớn nhất của các lực này (sẽ được định nghĩa bên dưới là T_2) như là một hàm của h.

Các lực tác dụng lên phần trên là trọng lực và các lực từ hai thanh tại hai đầu của tấm ván dưới cùng của nó. Chúng ta sẽ tách hai lực trong hai thanh này thành các lực theo phương ngang và theo phương dọc theo ống khói. Gọi T_1 và T_2 là các thành phần lực dọc theo ống khói, và gọi F là tổng các thành phần lực theo phương ngang, như được chỉ ra trong Hình 8.79. Chúng ta đã chọn các chiều dương cho T_1 và T_2 sao cho giá trị dương của T_1 là tương ứng với sự nén bên trong thanh bên trái, và giá trị dương của T_2 tương ứng với sự kéo bên trong thanh bên phải (mà là các lực mà chúng thực sự sẽ có dạng như vậy, như chúng ta sẽ thấy). Hóa ra rằng nếu chiều rộng (mà chúng ta sẽ gọi là $2r$) nhỏ hơn rất nhiều so với chiều cao, thì $T_2 \gg F$ (như chúng ta sẽ thấy bên dưới), vì vậy lực kéo trong thanh bên phải về cơ bản là bằng T_2. Chúng ta do đó sẽ quan tâm tới việc tìm giá trị lớn nhất của T_2.

Khi viết ra các phương trình về lực và moment lực cho phần bên trên, chúng ta có ba phương trình (phương trình $F = ma$ theo phương tiếp tuyến và phương hướng tâm, và $\tau = dL/dt$ xung quanh khối tâm), và ba ẩn (F, T_1 và T_2). Nếu chúng ta định nghĩa tỷ lệ $f \equiv h/\ell$, thì phần trên có chiều dài là $(1-f)l$ và có khối lượng $(1-f)m$, và khối tâm của nó sẽ di chuyển theo một đường tròn có bán kính $(1+f)\ell/2$. Do đó, ba phương trình về lực và moment lực của chúng ta sẽ tương ứng là,

$$\begin{aligned} T_2 - T_1 + (1-f)mg\cos\theta &= (1-f)m\left(\frac{(1+f)l}{2}\right)\dot{\theta}^2, \\ F + (1-f)mg\sin\theta &= (1-f)m\left(\frac{(1+f)l}{2}\right)\ddot{\theta}, \\ (T_1+T_2)r - F\frac{(1-f)l}{2} &= (1-f)m\left(\frac{(1-f)^2\ell^2}{12}\right)\ddot{\theta}. \end{aligned} \tag{8.118}$$

Tại thời điểm này, chúng ta có thể tiếp tục đi giải hệ ba phương trình với ba ẩn này. Nhưng mọi thứ sẽ đơn giản hơn rất nhiều trong trường hợp giới hạn $r << l$. Phương trình thứ ba nói rằng $T_1 + T_2$ có độ lớn cùng bậc với $1/r$, và phương trình đầu tiên cho ta biết rằng $T_2 - T_1$ có bậc là 1. Hai điều này cho ta $T_1 \approx T_2$, có độ lớn cùng bậc với $1/r$. Do đó, chúng ta có thể coi $T_1 + T_2 \approx 2T_2$ trong phương trình thứ ba. Sử dụng xấp xỉ này, cùng với giá trị của $\ddot{\theta}$ từ phương trình (8.117), phương trình thứ hai và thứ ba sẽ trở thành

$$\begin{aligned} F + (1-f)mg\sin\theta &= \frac{3}{4}(1-f^2)mg\sin\theta, \\ 2rT_2 - F\frac{(1-f)l}{2} &= \frac{1}{8}(1-f)^3 mg\ell\sin\theta. \end{aligned} \tag{8.119}$$

Phương trình đầu tiên của hệ này cho ta

$$F = \frac{mg\sin\theta}{4}(-1+4f-3f^2), \tag{8.120}$$

và sau đó phương trình thứ hai cho ta

$$T_2 \approx \frac{mg\ell\sin\theta}{8r}f(1-f)^2. \tag{8.121}$$

Như đã trình bày ở trên, giá trị này là lớn hơn rất nhiều so với F (bởi vì $l/r \gg 1$), vì vậy lực căng trong thanh bên phải về cơ bản là bằng T_2. Lấy đạo hàm của T_2 đối với f, chúng ta thấy rằng nó đạt giá trị lớn nhất tại

$$f \equiv \frac{h}{l} = \frac{1}{3}. \tag{8.122}$$

Do đó, ống khói sẽ dễ bị gẫy nhất tại điểm có khoảng cách một phần ba chiều cao từ dưới lên (với giả thiết rằng chiều rộng là rất nhỏ so với chiều cao). Thật thú vị là $f = 1/3$ làm cho lực F trong phương trình (8.120) chính xác bằng không. Để biết thêm về bài toán ống khói đổ, xem Madsen (1977) và Varieschi và Kamiya (2003).

8.18. Bóng đập vào thanh

Gọi V, v, và w tương ứng là vận tốc của quả bóng, vận tốc của khối tâm của thanh, và vận tốc góc của thanh sau va chạm. Khi đó định luật bảo toàn động lượng, moment động lượng (xung quanh điểm cố định trùng với vị trí ban đầu của tâm của thanh), và bảo toàn năng lượng cho ta

$$\begin{aligned} MV_0 &= MV + mv, \\ MV_0 d &= MVd + \beta m\ell^2\omega, \\ MV_0^2 &= MV^2 + mv^2 + \beta m\ell^2\omega^2. \end{aligned} \tag{8.123}$$

Chúng ta phải giải ba phương trình này đối với V, v và w. Hai phương trình đầu nhanh chóng cho ta $vd = \beta\ell^2 w$. Giải ra đối với V trong phương trình đầu tiên rồi thay kết quả vào trong phương trình thứ ba, và sau đó triệt tiêu w bởi $vd = \beta\ell^2 w$ cho ta

$$v = \frac{2V_0}{1 + \frac{m}{M} + \frac{d^2}{\beta\ell^2}} \quad \Longrightarrow \quad \omega = V_0 \frac{2\frac{d}{\beta\ell^2}V_0}{1 + \frac{m}{M} + \frac{d^2}{\beta\ell^2}}. \tag{8.124}$$

Sau khi tìm được v, phương trình đầu tiên ở trên cho V có dạng

$$V = V_0 \frac{1 - \frac{m}{M} + \frac{d^2}{\beta\ell^2}}{1 + \frac{m}{M} + \frac{d^2}{\beta\ell^2}}. \tag{8.125}$$

Bạn nên kiểm tra các trường hợp giới hạn của kết quả này. Một nghiệm khác của phương trình (8.123) tất nhiên là $V = V_0$, $v = 0$, và $w = 0$. Các điều kiện đầu chắc chắn là phải thỏa mãn sự bảo toàn của p, L, và E với các điều kiện đầu đó (thực ra điều này là thừa). Không ở đâu trong phương trình (8.123) nói rằng quả bóng thực sự phải va chạm với thanh.

8.19. Định lý quả bóng và thanh

Như trong lời giải của Bài tập 8.18, chúng ta có

$$\begin{aligned} MV_0 &= MV + mv, \\ MV_0 d &= MVd + I\omega, \\ MV_0^2 &= MV^2 + mv^2 + I\omega^2. \end{aligned} \tag{8.126}$$

Vận tốc của điểm va chạm trên thanh ngay sau va chạm bằng với vận tốc của điểm khối tâm cộng với vận tốc quay của nó đối với khối tâm. Nói cách khác, nó bằng $v + wd$. Vận tốc tương đối đang cần tìm do đó là $(v+wd)-V$. Chúng ta có thể xác định giá trị của vận tốc tương đối này bằng cách giải ba phương trình ở trên đối với V, v, và w. Một cách tương đương, chúng ta có thể chỉ cần sử dụng các kết quả trong Bài tập 8.18. Tuy nhiên, có một cách đơn giản hơn rất nhiều, mà sẽ được trình bày dưới đây.

Hai phương trình đầu tiên nhanh chóng cho ta $mvd = Iw$. Phương trình cuối cùng sau đó có thể được viết dưới dạng, bằng việc sử dụng $Iw^2 = (Iw)w = (mvd)w$,

$$M(V_0 - V)(V_0 + V) = mv(v + \omega d). \tag{8.127}$$

Nếu bây giờ chúng ta viết phương trình đầu tiên dưới dạng

$$M(V_0 - V) = mv, \tag{8.128}$$

chúng ta có thể chia phương trình (8.127) cho phương trình (8.128) để nhận được $V_0+V = v+wd$, hoặc

$$V_0 = (v + \omega d) - V, \tag{8.129}$$

là điều mà chúng ta muốn chỉ ra. Biểu diễn theo các vận tốc, phát biểu chính xác của kết quả này là vận tốc tương đối sau va chạm là bằng và ngược chiều với vận tốc tương đối trước va chạm. Nói cách khác, $V_0 - 0 = -(V - (v + wd))$.

8.20. Siêu bóng

Bởi vì chúng ta biết rằng $|v_y|$ là không đổi sau khi nảy lên, chúng ta có thể bỏ qua nó khi xét đến định lý bảo toàn năng lượng. Và bởi vì xung lượng theo phương thẳng đứng từ nền nhà không sinh ra moment lực đối với tâm quả bóng, chúng ta có thể hoàn toàn bỏ qua chuyển động theo phương y trong bài toán này.

Xung lực theo phương nằm ngang từ nền nhà là nguyên nhân làm thay đổi cả v_x và w. Với các chiều dương được định nghĩa như trong bài toán, phương trình (8.61) cho ta

$$\begin{aligned} \Delta L &= R\Delta p \\ \implies \quad I(\omega' - \omega) &= Rm(v'_x - v_x). \end{aligned} \tag{8.130}$$

Và sự bảo toàn năng lượng cho ta[15]

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_x'^2 + \frac{1}{2}I\omega'^2 &= \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \\ \Longrightarrow \quad I(\omega'^2 - \omega^2) &= Rm(v_x^2 - v_x'^2). \end{aligned} \tag{8.131}$$

Chia phương trình này cho phương trình (8.130) cho ta

$$R(\omega' + \omega) = -(v_x' + v_x). \tag{8.132}$$

Chúng ta bây giờ có thể kết hợp phương trình này với phương trình (8.130) mà có thể được viết lại dưới dạng, bằng cách sử dụng $I = (2/5)mR^2$,

$$\frac{2}{5}R(\omega' - \omega) = v_x' - v_x. \tag{8.133}$$

Cho trước v_x và ω, hai phương trình ở trên là hai phương trình tuyến tính đối với hai ẩn, v_x' và ω'. Giải ra đối với v_x' và ω', và viết kết quả theo ký hiệu ma trận, cho ta

$$\begin{pmatrix} v_x' & R\omega' \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -10 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_x \\ R\omega \end{pmatrix}, \tag{8.134}$$

như mong muốn. Chú ý rằng phương trình (8.132), khi được viết dưới dạng $v_x + Rw = -(v_x' + Rw')$, nói rằng vận tốc tương đối của điểm tiếp xúc của quả bóng và mặt đất đơn giản là thay đổi dấu trong quá trình nảy.

NHẬN XÉT: Đối với một quả bóng có moment quán tính tổng quát $I = \beta mR^2$, bạn có thể sử dụng cách làm trên để chỉ ra rằng ma trận trong phương trình (8.134) sẽ có dạng tổng quát,

$$\frac{1}{1+\beta}\begin{pmatrix} 1-\beta & -2\beta \\ -2 & -(1-\beta) \end{pmatrix}, \tag{8.135}$$

Với $\beta = 1$ (một cái vòng), ma trận này trở thành

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{8.136}$$

mà có nghĩa là sử nảy đơn giản là sẽ làm hoán vị và đổi dấu các giá trị của v_x và Rw.

Một cách cụ thể, nếu bạn ném một "siêu vòng" sang một bên mà không có quay (nghĩa là,

[15] Chúng ta đã loại đi nghiệm tầm thường $w' = w$ và $v_x' = v_x$, mà nó tương ứng với chuyển động trượt trên một mặt phẳng không ma sát. Nghiệm không tầm thường mà chúng ta sẽ tìm ra là trường hợp không có trượt. Về cơ bản mà nói, để năng lượng được bảo toàn, thì không thể có công sinh ra bởi lực ma sát. Và bởi vì công bằng lực nhân với quãng đường chuyển động, điều này có nghĩa là (1) mặt phẳng là không có ma sát, sao cho lực bằng không, hoặc là (2) không có chuyển động tương đối giữa điểm tiếp xúc trên quả bóng với mặt phẳng, sao cho quãng đường chuyển động bằng không. Trường hợp sau là trường hợp mà chúng ta quan tâm ở đây.

$Rw = 0$), thì nó sẽ nảy thẳng lên trên vào trong không khí (nghĩa là, $v'_x = 0$) và có quay.

♣

8.21. Nảy nhiều lần

Phương trình (8.62) cho kết quả sau một lần nảy, vì vậy kết quả sau hai lần nảy là

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} v''_x \\ R\omega'' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3/7 & -4/7 \\ -10/7 & -3/7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v'_x \\ R\omega' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3/7 & -4/7 \\ -10/7 & -3/7 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} v_x \\ R\omega \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ R\omega \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} v_x \\ R\omega \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{8.137}$$

Bình phương của ma trận hóa ra lại bằng ma trận đơn vị. Do đó, sau hai lần nảy, cả v_x và w quay lại giá trị ban đầu của nó. Quả bóng sau đó sẽ lặp lại chuyển động của hai lần nảy trước đó (và cứ tiếp tục như thế, sau mỗi hai lần nảy tiếp theo). Sự khác biệt duy nhất giữa những hai lần nảy liên tiếp là quả bóng có thể bị dịch chuyển theo phương ngang. Bạn nên kiểm tra hiện tượng tuần hoàn thú vị này bằng thí nghiệm.

8.22. Lăn qua vật cản

Chúng ta sẽ sử dụng thực tế rằng moment động lượng của quả bóng đối với cạnh của bậc thềm (gọi điểm này là P) là không đổi sau va chạm. Điều này là đúng bởi vì bất cứ lực nào tác động tại điểm P đều không sinh ra moment lực đối với P. (Moment lực gây ra bởi trọng lực sẽ liên quan đến chuyển động nâng lên sau đó. Nhưng trong quá trình va chạm rất ngắn, L sẽ không thay đổi.) Thực tế này sẽ cho phép chúng ta tìm năng lượng của quả bóng ngay sau va chạm, mà chúng ta sau đó sẽ yêu cầu nó phải lớn hơn mgh.

Tách L ban đầu thành phần liên quan đến điểm khối tâm, cộng với phần từ quả bóng mà nó được coi như là một khối lượng chất điểm đặt tại khối tâm, chúng ta thấy rằng moment động lượng ban đầu là $L = (2/5)mR^2w_0 + mV_0(R-h)$, trong đó w_0 là vận tốc góc ban đầu. Nhưng điều kiện không trượt cho chúng ta biết rằng $w_0 = V_0/R$, vì vậy chúng ta có thể viết L dưới dạng

$$L = \frac{2}{5}mRV_0 + mV_0(R-h) = mV_0\left(\frac{7R}{5} - h\right). \tag{8.138}$$

Gọi w' là vận tốc góc của quả bóng xung quanh điểm P ngay sau khi va chạm. Định lý trục song song nói rằng moment quán tính quanh P bằng $(2/5)mR^2 + mR^2 = (7/5)mR^2$. Sự bảo toàn của L xung quanh P trong quá trình va chạm cho ta

$$mV_0\left(\frac{7R}{5}-h\right)=\frac{7}{5}mR^2\omega' \quad\Longrightarrow\quad \omega'=\frac{V_0}{R}\left(1-\frac{5h}{7R}\right). \tag{8.139}$$

Năng lượng của quả bóng ngay sau va chạm do đó bằng

$$E=\frac{1}{2}\left(\frac{7}{5}mR^2\right)\omega'^2=\frac{7}{10}mV_0^2\left(1-\frac{5h}{7R}\right)^2. \tag{8.140}$$

Quả bóng sẽ vượt qua bậc thềm nếu $E\geq mgh$, mà cho ta

$$V_0\geq\sqrt{\frac{10gh}{7}}\left(1-\frac{5h}{7R}\right)^{-1}. \tag{8.141}$$

NHẬN XÉT: Quả bóng hoàn toàn có thể vượt qua được bậc thềm thậm chí là nếu $h>R$, miễn là quả bóng dính vào cạnh của bậc thềm, và không bị trượt. (Nếu $h>R$, bậc thềm sẽ phải "bị trống ở bề mặt ngoài" sao cho quả bóng không va chạm với bề mặt của nó.) Nhưng chú ý rằng $V_0\to\infty$ khi $h\to 7R/5$. Đối với $h\geq 7R/5$, quả bóng không thể vượt qua bậc thềm được, cho dù V_0 lớn thế nào đi chăng nữa. Quả bóng sẽ bị ấn xuống vào mặt đất, thay vì chuyển động lên trên, nếu $h>7R/5$.

Đối với một vật thể với moment quán tính tổng quát là $I=\beta mR^2$ (như thế $\beta=2/5$ trong bài toán của chúng ta), bạn có thể chỉ ra rằng vận tốc ban đầu nhỏ nhất là

$$V_0\geq\sqrt{\frac{2gh}{1+\beta}}\left(1-\frac{h}{(1+\beta)R}\right)^{-1}. \tag{8.142}$$

Giá trị này sẽ giảm khi β tăng. Nó sẽ nhận giá trị nhỏ nhất khi "quả bóng" là một bánh xe với tất cả khối lượng tập trung trên vành (sao cho $\beta=1$), mà trong trường hợp này bánh xe có thể vượt qua bậc thềm thậm chí là nếu h có giá trị rất gần với $2R$. ♣

8.23. Bánh mỳ nướng rơi

Gọi v_0 và v là các vận tốc của điểm khối tâm ngay trước khi và ngay sau khi va chạm (vì vậy chúng ta biết rằng $v_0=\sqrt{2gH}$). I của một hình vuông và bằng với I của một thanh, $(1/12)m\ell^2$, vì vậy $\Delta L=(\ell/2)\Delta p$ cho ta[16]

$$\left(\frac{m\ell^2}{12}\right)\omega=-\frac{l}{2}(mv-mv_0) \quad\Longrightarrow\quad v_0-v=\frac{\ell\omega}{6}. \tag{8.143}$$

Định luật bảo toàn trong quá trình va chạm cho ta

$$\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}\left(\frac{m\ell^2}{12}\right)\omega^2 \quad\Longrightarrow\quad (v_0+v)(v_0-v)=\frac{\ell^2\omega^2}{12}. \tag{8.144}$$

[16]Dấu trừ ở vế phải là từ thực tế rằng chúng ta đang định nghĩa các vận tốc v có chiều dương là chiều hướng xuống dưới. Một cách tương đương, lực từ vật cản làm tăng vận tốc góc nhưng làm giảm vận tốc thẳng.

Chia phương trình này cho phương trình (8.143) cho ta $v_0 + v = lw/2$. Chúng ta bây giờ có hai phương trình tuyến tính đối với v và w. Giải ra ta có $v = v_0/2$ và $w = 3v_0/\ell$.

Sau va chạm, thời gian để miếng bánh mỳ chạm đất được cho bởi $vt + gt^2/2 = h$. Giải ra theo t, đặt $wt = \pi$ cho một nửa vòng quay, và sử dụng v và w chúng ta vừa tìm được, chúng ta nhận được

$$\frac{3v_0}{l} \cdot \frac{1}{g} \left(-\frac{v_0}{2} + \sqrt{\frac{v_0^2}{4} + 2gh} \right) = \pi. \tag{8.145}$$

Nhóm v_0^2 ra ngoài và sau đó sử dụng $v_0^2 = 2gH$ ta có

$$\frac{3H}{l} \left(\sqrt{1 + \frac{4h}{H}} - 1 \right) = \pi. \tag{8.146}$$

Để phần căn ở một vế, và sau đó lấy bình phương hai vế rồi giải ra đối với H cho ta

$$H = \frac{\pi^2 \ell^2}{6(6h - \pi l)}. \tag{8.147}$$

Giá trị đặc biệt của ℓ là $\ell = (6/\pi)h$ (mà sẽ tương ứng với một miếng bánh mỳ nướng rất lớn), trong trường hợp này $H = \infty$. Nếu ℓ lớn hơn $(6/\pi)h$, thì sẽ không có đủ thời gian để miếng bánh mỳ quay nửa vòng trước khi chạm sàn nhà. Lý do rất trực giác cho điều này là bởi vì $w = 6v/\ell$ (từ phần ở trên), sẽ không có cách nào để tăng w mà cũng không làm tăng v. Miếng bánh mỳ chỉ có cơ hội để quay được một nửa vòng nếu v là rất lớn, bởi vì sau đó trọng lực không có đủ thời gian để làm tăng v. Trong trường hợp giới hạn này, miếng bánh mỳ sẽ quay một nửa vòng vào lúc nó va với sàn nhà nếu $\pi/w = h/v$. Thay giá trị này $w = 6v/\ell$ cho ta $6h = \pi l$, như chúng ta mong muốn.

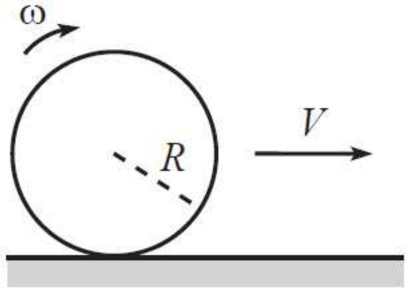
Với các giá trị hợp lý $h = 1$m và $\ell = 10$cm, chúng ta nhận được $H \approx 3$mm, khá là nhỏ. Bạn nên thử điều này với một cái bút chì để tự thuyết phục mình rằng thậm chí với khoảng cách nhỏ như thế này chúng ta cũng có thể nhận được nửa vòng quay mong muốn (hoặc chính xác hơn, là gần như mong muốn).

8.24. Từ trượt đến lăn

(a) Định nghĩa tất cả các đại lượng tịnh tiến có chiều dương là hướng sang bên phải, và tất cả các đại lượng quay có chiều dương hướng theo chiều quay của kim đồng hồ, như được chỉ ra trong Hình 8.80. Khi đó, ví dụ như, lực ma sát F_f là có giá trị âm. Lực ma sát làm chậm chuyển động tịnh tiến và làm tăng chuyển động quay, là vì theo

$$F_f = ma, \quad \text{và} \quad -F_f R = I\alpha. \tag{8.148}$$

Triệt tiêu F_f, và sử dụng $I = \beta m R^2$, cho ta $a = -\beta R\alpha$. Tích phân biểu thức này theo



Hình 8.80:

thời gian, cho đến khoảng thời gian khi quả bóng không còn trượt nữa, cho ta

$$\Delta V = -\beta R \Delta \omega. \tag{8.149}$$

Chú ý rằng chúng ta có thể nhận được điều này bằng cách đơn giản là sử dụng phương trình về xung lực, phương trình (8.61). Sử dụng $\Delta V = V_{\mathrm{f}} - V_0$, và $\Delta w = w_{\mathrm{f}} - w_0 = w_f$, và hơn nữa $w_{\mathrm{f}} = V_{\mathrm{f}}/R$ (điều kiện lăn không trượt), phương trình (8.149) cho ta

$$V_{\mathrm{f}} = \frac{V_0}{1+\beta}, \tag{8.150}$$

mà không phụ thuộc gì vào bản chất của F_{f}. F_{f} có thể phụ thuộc vào vị trí, thời gian, vận tốc, hoặc bất cứ cái gì khác. Mối liên hệ $a = -\beta R\alpha$, và do đó cả phương trình (8.149), sẽ vẫn còn đúng tại mọi thời điểm.

NHẬN XÉT: Chúng ta cũng có thể tính τ và L đối với một điểm được vẽ trên mặt đất mà là điểm tiếp xúc tại thời điểm đang xét. Không có moment lực đối với điểm này. Để tính L, chúng ta phải cộng L của điểm khối tâm và L đối với điểm khối tâm. Do đó, $\tau = d\mathbf{L}/dt$ cho ta $0 = (d/dt)(mvR + \beta m R^2 w)$, và vì vậy $a = -\beta R\alpha$, như ở trên. ♣

Sử dụng phương trình (8.150), và cũng sử dụng mối liên hệ $w_{\mathrm{f}} = V_{\mathrm{f}}/R$, phần động năng bị mất là

$$\begin{aligned}
\Delta K &= \frac{1}{2} m V_0^2 - \left(\frac{1}{2} m V_{\mathrm{f}}^2 + \frac{1}{2} I \omega_{\mathrm{f}}^2\right) \\
&= \frac{1}{2} m V_0^2 \left(1 - \frac{1}{(1+\beta)^2} - \frac{\beta}{(1+\beta)^2}\right) \\
&= \frac{1}{2} m V_0^2 \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right).
\end{aligned} \tag{8.151}$$

Khi $\beta \to 0$, năng lượng sẽ không bị mất, mà điều này là hợp lý, Và khi $\beta \to \infty$ (một sợi chỉ trượt trên trục của nó), tất cả năng lượng sẽ bị mất, mà điều này cũng hợp lý, bởi vì chúng ta về cơ bản là có một khối vật trượt mà không quay.

(b) Đầu tiên hãy đi tìm t. Lực ma sát là $F_{\mathrm{f}} = -\mu mg$, vì vậy $F = ma$ cho ta $-\mu g = a$. Do đó, $\Delta V = at = -\mu gt$. Nhưng phương trình (8.150) nói rằng $\Delta V \equiv V_{\mathrm{f}} - V_0 = -V_0\beta/(1+\beta)$. Do đó,

$$t = \frac{\beta}{(1+\beta)} \cdot \frac{V_0}{\mu g}. \tag{8.152}$$

Khi $\beta \to 0$, chúng ta có $t \to 0$, điều này là hợp lý. Và khi $\beta \to \infty$, chúng ta có $t \to V_0/(\mu g)$, mà bằng thời gian một khối vật sẽ mất để dừng lại.

Bây giờ hãy đi tìm d. Chúng ta có $d = V_0 t + (1/2)at^2$. Sử dụng $a = -\mu g$, và thay t từ phương trình (8.152) vào, chúng ta nhận được

$$d = \frac{\beta(2+\beta)}{(1+\beta)^2} \cdot \frac{V_0^2}{2\mu g}. \tag{8.153}$$

Hai trường hợp tới hạn đối với β sẽ kiểm chứng kết quả này.

Để tính toán công thực hiện bởi lực ma sát, chúng ta rất có thể sẽ bị hấp dẫn bởi việc viết ra tích $F_{\mathrm{f}}d$, với $F_{\mathrm{f}} = -\mu mg$ và d được cho trong phương trình (8.153). Nhưng kết quả sẽ không bằng với phần năng lượng bị mất được tính trong phương trình (8.151). Cái gì đã sai trong lập luận này? Lỗi ở đây là lực ma sát không tác động trên khoảng cách d. Để tìm khoảng cách mà trên đó F_{f} tác dụng, chúng ta phải tìm xem bề mặt của quả bóng di chuyển tương đối với mặt đất một khoảng bao xa. Vận tốc của một điểm trên quả bóng mà tức thời đang là điểm tiếp xúc là $V_{\text{tương đối}}(t) = V(t) - Rw(t) = (V_0 + at) - R\alpha t$. Sử dụng $\alpha = -a/\beta R$ và $a = -\mu g$, vận tốc này trở thành

$$V_{\text{tương đối}}(t) = V_0 - \frac{1+\beta}{\beta}\mu g t. \tag{8.154}$$

Tích phân phương trình này từ $t = 0$ tới t được cho trong phương trình (8.152) cho ta

$$d_{\text{tương đối}} = \int V_{\text{tương đối}}(t)dt = \frac{\beta}{1+\beta} \cdot \frac{V_0^2}{2\mu g}. \tag{8.155}$$

Công thực hiện bởi lực ma sát là $F_{\mathrm{f}} d_{\text{tương đối}} = -\mu mg d_{\text{tương đối}}$, mà thực ra cho ta phần động năng bị mất cho trong phương trình (8.151).

8.25. Rất nhiều thanh

Xét va chạm giữa hai thanh. Gọi V là vận tốc của điểm tiếp xúc trên thanh nặng. Bởi vì thanh này về cơ bản là rất nặng, chúng ta có thể coi nó là một quả bóng rất nặng, đang chuyển động với vận tốc V. Số bậc tự do của chuyển động quay của thanh nặng là không có liên quan gì ở đây, miễn là ta chỉ quan tâm đến thanh nhẹ. Chúng ta do đó có thể sử dụng kết quả của Bài tập 8.19 để nói rằng vận tốc tương đối của các điểm tiếp xúc là không đổi trước và sau khi va chạm. Điều này suy ra rằng điểm tiếp xúc trên thanh nhẹ sẽ nhận được một vận tốc là $2V$, bởi vì thanh nặng về cơ bản là không bị ảnh hưởng gì bởi sự va chạm và tiếp tục chuyển động với vận tốc là V.

Bây giờ chúng ta hãy đi tìm vận tốc của đầu kia của thanh nhẹ. Thanh này nhận được một xung lực từ thanh nặng, vì vậy chúng ta có thể sử dụng phương trình (8.61) cho thanh nhẹ để nhận được

$$\Delta L = r\Delta p \quad \Longrightarrow \quad \beta m r^2 \omega = r(m v_{\text{CM}}) \quad \Longrightarrow \quad r\omega = \frac{v_{\text{CM}}}{\beta}. \tag{8.156}$$

Vận tốc của đầu (trên) bị đánh là $v_{\text{trên}} = rw + v_{\text{CM}}$, bởi vì nó bằng vận tốc của khối tâm (CM) cộng với vận tốc quay. Vận tốc của đầu (dưới) của thanh là $v_{\text{dưới}} = rw - v_{\text{CM}}$, bởi vì nó bằng vận tốc của khối tâm trừ đi vận tốc quay.[17] Tỷ số của các vận tốc này là

$$\frac{v_{\text{dưới}}}{v_{\text{trên}}} = \frac{\frac{v_{\text{CM}}}{\beta} - v_{\text{CM}}}{\frac{v_{\text{CM}}}{\beta} + v_{\text{CM}}} = \frac{1-\beta}{1+\beta}. \tag{8.157}$$

Đây là một kết quả tổng quát khi bạn đánh vào một đầu của một thanh với một lực bất kỳ. Trong bài tập đang xét, chúng ta có $v_{\text{trên}} = 2V$. Do đó,

$$v_{\text{dưới}} = V\left(\frac{2(1-\beta)}{1+\beta}\right). \tag{8.158}$$

Lập luận là tương tự đối với tất cả các va chạm khác. Do đó, các đầu đáy của các thanh sẽ chuyển động với các vận tốc mà tạo thành một cấp số nhân với công bội là $2(1-\beta)/(1+\beta)$. Nếu công bội này nhỏ hơn 1 (nghĩa là, nếu $\beta > 1/3$), thì các vận tốc sẽ tiến về không khi $n \to \infty$. Nếu nó lớn hơn một (nghĩa là, nếu $\beta < 1/3$), thì các vận tốc sẽ tiến ra vô cùng khi $n \to \infty$. Nếu nó bằng 1 (nghĩa là, nếu $\beta = 1/3$), thì các vận tốc bằng V và do đó là độc lập với n, như chúng ta đang mong muốn chỉ ra. Một thanh đồng chất có $\beta = 1/3$ đối với tâm của nó (mà thường được viết dưới dạng $I = m\ell^2/12$, trong đó $\ell = 2r$).

[17] Bởi vì $\beta \leq 1$ đối với bất kỳ thanh trong thực tế nào, chúng ta có $rw = v_{\text{CM}}/\beta \geq v_{\text{CM}}$. Do đó, $rw - v_{\text{CM}}$ là lớn hơn hoặc bằng không.

Chương 9

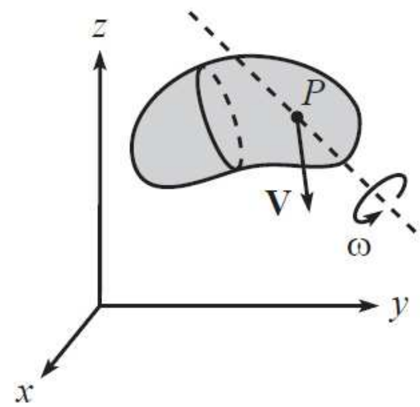
Momen động lượng, Phần II ($\hat{L}$ tổng quát)

Trong Chương 8, chúng ta đã thảo luận các tình huống trong đó hướng của vector moment động lượng **L** không đổi, và chỉ có độ lớn của nó thay đổi. Trong chương này, chúng ta sẽ xem xét những tình huống tổng quát hơn trong đó hướng của **L** được phép thay đổi. Bản chất vector của **L** sẽ chứng minh là nó rất quan trọng ở đây, và chúng ta sẽ thu được tất cả các kết quả kỳ lạ đối với các con quay quay tròn và những thứ kiểu như vậy. Chương này khá là dài, nhưng cấu trúc nói chung của nó là ba mục đầu tiên sẽ đề cập đến lý thuyết tổng quát, sau đó Mục 9.4 sẽ giới thiệu một số cơ cấu vật lý thực tế, và rồi Mục 9.6 sẽ là bắt đầu thảo luận về các con quay.

9.1 Các nội dung mở đầu liên quan đến chuyển động quay

9.1.1 Dạng của chuyển động tổng quát

Trước khi bắt đầu, chúng ta cần chắc chắn rằng tất cả chúng ta đều hiểu giống nhau về một vài điểm quan trọng về các chuyển động quay. Bởi vì các chuyển động quay nói chúng thì xảy ra trong không gian ba chiều, nên thường là khó để có thể hình dung ra chúng. Một hình vẽ phác họa trên một mảnh giấy có thể không giúp ta mường tượng được vấn đề. Với lý do này, chương này là một trong những chương khó nhất của cuốn sách này. Nhưng để dễ dàng hiểu nó hơn, một vài trang tới sẽ trình bày một số định nghĩa và định lý mà sẽ có ích về sau. Định lý đầu tiên này mô tả dạng tổng quát của bất kỳ chuyển động nào. Bạn có thể cho là nó hiển nhiên, nhưng để chứng minh nó chúng ta cũng cần phải dùng mẹo một chút.



Hình 9.1:

Định lý 9.1. *(Định lý Chasles) Xét một vật thể rắn đang trải qua một chuyển động bất kỳ. Chọn bất kỳ điểm P nào trong vật thể đó. Khi đó ở bất kỳ thời điểm nào (xem Hình 9.1), chuyển động của vật thể có thể được viết như là tổng của chuyển động tịnh tiến của điểm P, cộng với một chuyển động quay xung quanh một trục nào đó (mà có thể thay đổi theo thời gian) đi qua P.*[1]

Chứng minh. Chuyển động của vật thể có thể được viết dưới dạng tổng của một chuyển động tịnh tiến của điểm P, cộng với một chuyển động nào đó đối với P (điều này là đúng bởi vì các tọa độ tương đối là các đại lượng có thể cộng được với nhau). Chúng ta phải chỉ ra rằng chuyển động tương đối đó là một chuyển động quay. Điều này dường như là hoàn toàn hợp lý, và nó đúng bởi vì vật thể là vật thể rắn; nghĩa là, khoảng cách tương đối giữa tất cả các điểm luôn không đổi. Nếu vật thể không phải là vật thể rắn, thì định lý này sẽ không còn đúng nữa.

Để hiểu sâu hơn hơn, xét một vỏ cầu cố định trong vật thể, có tâm tại điểm P. Chuyển động của vật thể hoàn toàn được xác định bởi chuyển động của các điểm trên hình cầu này, vì vậy chúng ta chỉ cần kiểm tra xem điều gì xảy ra với hình cầu. Bởi vì các khoảng cách được bảo toàn trong vật thể rắn, các điểm trên mặt cầu phải luôn có cùng một

[1] Nói các khác, một người ở trạng thái nghỉ đối với một hệ quy chiếu có gốc tọa độ tại P, và có các trục song song với các trục của một hệ quy chiếu cố định, sẽ nhìn thấy vật thể đang trải qua một chuyển động quay xung quanh một trục nào đó đi qua P.

khoảng cách theo phương bán kính tới điểm P. Và bởi vì chúng ta đang xét chuyển động tương đối đối với P, chúng ta do đó đã đưa bài toán về vấn đề sau đây: Một quả cầu rắn có thể biến hình thành chính nó như thế nào? Chúng ta sẽ nói rằng bất kỳ phép biến hình nào như thế đều có tính chất rằng tồn tại hai điểm mà cuối cùng chúng sẽ ở tại vị trí ban đầu của chúng.[2] Hai điểm này khi đó phải là hai đầu mút của một đường kính (với giả thiết rằng toàn bộ quả cầu không quay lại vị trí ban đầu của nó, mà trong trường hợp này tất cả các điểm cuối cùng sẽ trở lại vị trí ban đầu đầu), bởi vì các khoảng cách được bảo toàn; một điểm cho trước mà quay lại vị trí ban đầu của nó, thì điểm nằm ở đầu đối diện theo phương đường kính cũng sẽ phải kết thúc ở tại vị trí nó đã bắt đầu, để duy trì khoảng cách giữa chúng là bằng độ dài đường kính.

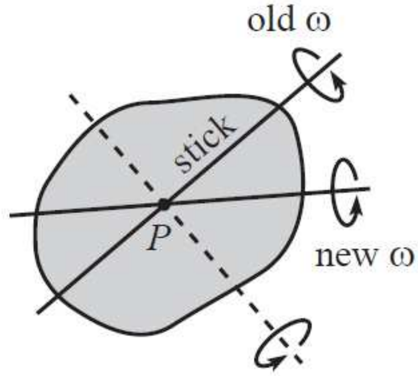
Nếu khẳng định trên là đúng, thì chúng ta đã chứng minh được định lý này, bởi vì đối với một phép biến hình rất nhỏ, một điểm cho trước chỉ chuyển động theo một hướng, bởi vì nó không có đủ thời gian để rẽ theo bất kỳ hướng nào khác. Vì vậy một điểm mà cuối cùng sẽ quay lại vị trí ban đầu của nó sẽ phải đứng yên trong toàn bộ khoảng thời gian chuyển động (rất nhỏ) đó. Do đó, tất cả các điểm nằm trên đường kính nối hai điểm cố định cũng đều phải đứng yên trong suốt khoảng thời gian rất nhỏ đó, bởi vì các khoảng cách là được bảo toàn. Vì vậy chúng ta nhận được một chuyển động quay xung quanh trục là đường kính đó.

Khẳng định "hai điểm cuối cùng sẽ quay lại vị trí ban đầu của chúng" là hoàn toàn đáng tin, nhưng không may là rất khó để chứng minh nó. Những khẳng định với những tính chất như thế này luôn luôn rất thú vị để nghĩ về chúng, vì vậy tôi sẽ dành lại phần chứng minh khẳng định trên như là một bài tập (Bài tập 9.2). Hãy tự mình cố gắng giải nó.

Chúng ta sẽ sử dụng định lý này một cách liên tục trong chương này (thường là chúng ta không nói là đang sử dụng nó). Chú ý rằng chúng ta đang giả thiết rằng P là một điểm trong vật thể, bởi vì chúng ta đã sử dụng thực tế là P có tính chất bảo toàn khoảng cách giữa nó và các điểm khác trong vật thể. □

NHẬN XÉT : Một trường hợp trong đó định lý này là không hiển nhiên rõ ràng cho lắm là trường hợp sau (cơ cấu này chỉ có chuyển động quay, mà không có chuyển động tịnh tiến

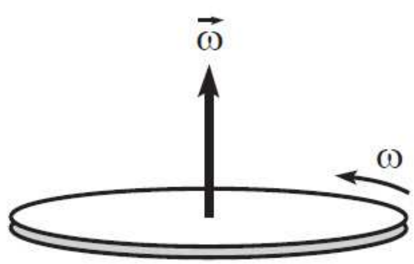
[2]Điều này thực ra đúng với *bất kỳ* phép biến hình nào biến một quả cầu rắn thành chính nó, nhưng đối với các mục đích hiện tại chúng ta chỉ quan tâm đến các phép biến hình rất nhỏ, bởi vì chúng ta chỉ đang xem xét điều gì đang xảy ra tại một thời điểm đã cho.



Hình 9.2:

của điểm P). Xét một vật thể đang quay xung quanh một trục cố định, là thanh được chỉ ra trong Hình 9.2. Nhưng bây giờ tưởng tượng là cầm lấy thanh này và quay nó xung quanh một trục khác (là đường nét đứt được chỉ ra trong Hình 9.2). Điều không thực sự hiển nhiên là chuyển động (tức thì) sau đó là một chuyển động quay xung quanh một trục mới nào đó đi qua điểm P (mà vẫn luôn luôn đứng yên). Nhưng thực ra nó là như vậy. Chúng ta sẽ tính toán định lượng vấn đề này trong ví dụ "Quả cầu quay" ở phần sau trong mục này. ♣

9.1.2 Vector vận tốc góc



Hình 9.3:

Sẽ là rất hữu ích khi giới thiệu về vector vận tốc góc, $\boldsymbol{\omega}$, được định nghĩa như là một vector có hướng dọc theo hướng của trục quay, và có độ lớn bằng vận tốc góc. Việc chọn hướng nào trong hai hướng có thể có dọc theo trục quay được xác định theo quy tắc bàn tay phải: nếu bạn xoay các ngón tay của bàn tay phải của bạn theo hướng của chiều quay, thì ngón tay cái của bạn sẽ chỉ theo hướng của $\boldsymbol{\omega}$. Ví dụ như, một chiếc đĩa hát đang quay tròn có $\boldsymbol{\omega}$ vuông góc với đĩa, đi qua tâm (như được chỉ ra ở trong Hình 9.3),[3] với độ lớn của nó bằng với vận tốc góc, ω. Các điểm trên trục quay là những điểm mà (tức thời)

[3]Thực sự nó là vô nghĩa khi nói rằng $\boldsymbol{\omega}$ đi qua tâm của đĩa, bởi vì bạn có thể vẽ vector đó ở bất kỳ vị

không chuyển động. Dĩ nhiên, hướng của ω có thể thay đổi theo thời gian, vì vậy những điểm mà trước nằm ở trên trục bây giờ có thể đang chuyển động.

NHẬN XÉT :

1. Nếu muốn, bạn có thể không theo quy tắc trên và sử dụng quy tắc bàn tay trái để xác định hướng của ω, miễn là bạn sử dụng nó một cách nhất quán. Hướng của ω sẽ có hướng ngược lại, nhưng điều đó không thành vấn đề, bởi vì ω không thực sự có ý nghĩa vật lý gì. Bất kỳ một kết quả mang ý nghĩa vật lý nào (ví dụ như, vận tốc của một hạt, được cho ở bên dưới trong Định lý 9.2) sẽ có cùng một giá trị, không phụ thuộc vào việc bạn sử dụng (một cách nhất quán) quy tắc bàn tay nào.
2. Thực tế rằng chúng ta có thể xác định một chuyển động quay bằng cách xác định một vector ω là một điều đặc biệt đối với không gian ba chiều. Nếu chúng ta sống trong không gian một chiều, thì sẽ không có cái gì gọi là chuyển động quay. Nếu chúng ta sống trong không gian hai chiều, thì tất cả các chuyển động quay sẽ xảy ra trong mặt phẳng đó, vì vậy chúng ta có thể ký hiệu cho một chuyển động quay bằng cách đơn giản là đưa ra tốc độ quay của nó, ω. Trong không gian ba chiều, các chuyển động quay xảy ra trong $\binom{3}{2} = 3$ mặt phẳng độc lập. Và để cho thuận tiện, chúng ta chọn cách ký hiệu các chuyển động quay này bởi các phương vuông góc với các mặt phẳng này, và bởi tốc độ quay trong mỗi mặt phẳng đó. Nếu chúng ta sống trong không gian bốn chiều, thì các chuyển động quay có thể xảy ra trong $\binom{4}{2} = 6$ mặt phẳng, vì vậy chúng ta sẽ phải ký hiệu một chuyển động quay bằng cách đưa ra 6 mặt phẳng và 6 vận tốc góc. Chú ý rằng một vector, mà có bốn thành phần trong không gian bốn chiều, sẽ không thể giúp giải quyết được vấn đề này. ♣

Cùng với việc giúp xác định các điểm mà tức thời đứng yên, ω còn có thể dễ dàng đưa ra vận tốc của bất kỳ điểm nào trong vật thể đang quay. Xét trường hợp trong đó trục quay đi qua gốc tọa độ, là trường hợp nói chung sẽ được chúng ta giả thiết ở trong chương này, nếu không chúng ta sẽ nói rõ. Khi đó chúng ta có định lý sau.

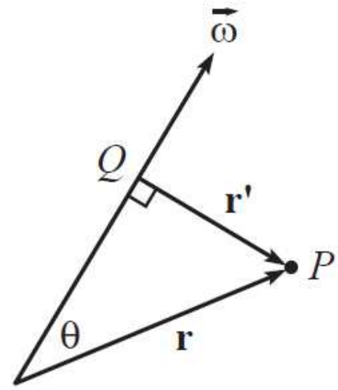
Định lý 9.2. *Cho một vật thể đang quay với vận tốc góc ω, khi đó vận tốc của một điểm tại vị trí* $\mathbf{r}$ *được cho bởi*

$$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}. \tag{9.1}$$

Chứng minh. Kẻ một đường vuông góc từ điểm đã cho trong câu hỏi (gọi nó là P) tới trục của ω. Gọi Q là chân của đường vuông góc đó, và gọi $\mathbf{r}'$ là vector từ Q tới P (xem Hình 9.4). Từ các tính chất của tích có hướng (xem Phụ lục B), $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$ là trực giao

trí nào, và nó vẫn chỉ là cùng một vector, miễn là nó có độ lớn và hướng đúng. Tuy nhiên, thông thường thì chúng ta vẽ ω dọc theo trục của trục quay và nói rằng "Một vật quay tròn với vận tốc góc $\omega, \ldots$"

với ω, $\mathbf{r}$, và cũng trực giao với $\mathbf{r}'$ bởi vì $\mathbf{r}'$ là một tổ hợp tuyến tính của ω và $\mathbf{r}$. Do đó, chiều của $\mathbf{v}$ là đúng; nó luôn luôn vuông góc với ω và $\mathbf{r}'$, vì vậy nó miêu tả chuyển động tròn xung quanh trục của ω. Hơn nữa, bằng cách sử dụng quy tắc bàn tay phải cho tích có hướng (hoặc quy tắc bàn tay trái, nếu bạn đã chọn cách khác biệt này để định nghĩa ω), $\mathbf{v}$ có hướng phù hợp xung quanh ω, là hướng vào trong mặt giấy tại thời điểm đã chỉ ra trong hình vẽ. Và bởi vì



Hình 9.4:

$$|\mathbf{v}| = |\omega||\mathbf{r}|\sin\theta = \omega r', \tag{9.2}$$

chúng ta thấy rằng $\mathbf{v}$ có độ lớn phù hợp, bởi vì $\omega r'$ là vận tốc của chuyển động tròn xung quanh ω. Vì vậy $\mathbf{v}$ thực sự là vector vận tốc phù hợp. (Nếu chúng ta có trường hợp đặc biệt trong đó P nằm dọc trên ω, thì $\mathbf{r}$ sẽ song song với ω, vì vậy tích có hướng sẽ cho một kết quả bằng không đối với $\mathbf{v}$, như nó nên phải là như vậy.) □

Chúng ta sẽ sử dụng rất tốt phương trình (9.1) và áp dụng nó liên tục trong suốt chương này. Thậm chí là nếu rất khó để có thể tưởng tượng được cái gì đang xảy ra trong một chuyển động quay đã cho, tất cả điều bạn phải làm để tìm vận tốc của bất cứ điểm nào là tính toán tích có hướng $\omega \times \mathbf{r}$. Ngược lại, nếu vận tốc của tất cả các điểm trong một vật thể được cho bởi $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$, thì vật thể phải đang trải qua một chuyển động quay với vận tốc góc ω, bởi vì tất cả các điểm trên trục của ω là không chuyển động, và tất cả các điểm khác chuyển động với vận tốc phù hợp với chuyển động quay này.

Một điều rất đẹp về các vận tốc góc là chúng đơn giản có thể cộng lại được với nhau. Phát biểu chính xác hơn là:

Định lý 9.3. *Cho các hệ tọa độ S_1, S_2, và S_3 có chung một gốc tọa độ. Giả sử S_1 quay với vận tốc góc $\omega_{1,2}$ đối với S_2, và giả sử S_2 quay với vận tốc góc $\omega_{2,3}$ đối với S_3. Khi đó*

S_1 sẽ quay (một cách tức thời) với vận tốc góc

$$\omega_{1,3} = \omega_{1,2} + \omega_{2,3} \tag{9.3}$$

đối với S_3.

Chứng minh. Nếu $\omega_{1,2}$ và $\omega_{2,3}$ chỉ theo cùng một hướng, thì định lý là rõ ràng; các vận tốc góc đơn giản là cộng lại với nhau. Tuy nhiên, nếu chúng không chỉ theo cùng một hướng, thì mọi thứ sẽ khó khăn hơn để hình dung ra. Nhưng chúng ta có thể chứng minh định lý này bằng cách sử dụng rất nhiều đến định nghĩa của ω.

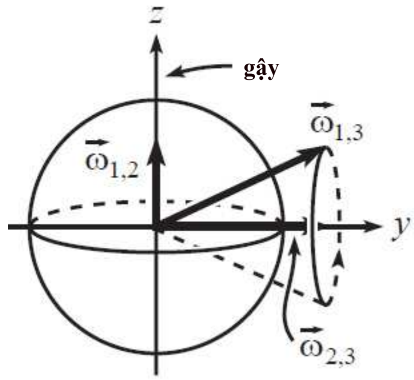
Chọn một điểm P_1 nằm yên trong hệ tọa độ S_1. Gọi $\mathbf{r}$ là vector từ gốc tọa độ tới P_1. Vận tốc của P_1 (đối với một điểm P_2 rất gần nó mà đang nằm yên trong S_2) do chuyển động quay của S_1 với vận tốc góc $\omega_{1,2}$ là $\mathbf{V}_{P_1P_2} = \omega_{1,2} \times \mathbf{r}$. Vận tốc của điểm P_2 (đối với một điểm P_3 rất gần nó nằm yên trong S_3) do chuyển động quay với vận tốc góc $\omega_{2,3}$ là $\mathbf{V}_{P_2P_3} = \omega_{2,3} \times \mathbf{r}$, bởi vì P_2 về cơ bản là cũng có vector vị trí là $\mathbf{r}$. Do đó, vận tốc của điểm P_1 đối với điểm P_3 là $\mathbf{V}_{P_1P_2} + \mathbf{V}_{P_2P_3} = (\omega_{1,2} + \omega_{2,3}) \times \mathbf{r}$. Điều này là đúng cho bất cứ điểm P_1 nào nằm yên trong S_1, vì vậy hệ quy chiếu S_1 sẽ quay với vận tốc góc $(\omega_{1,2} + \omega_{2,3})$ đối với S_3. Chúng ta thấy rằng chứng minh này về cơ bản là đến từ các thực tế là (1) các vận tốc tịnh tiến là có thể cộng lại với nhau được, và (2) là các vận tốc góc chỉ khác so với các vận tốc tịnh tiến bởi một tích có hướng với $\mathbf{r}$. □

Nếu $\omega_{\mathbf{12}}$ là hằng số trong S_2, thì vector $\omega_{\mathbf{1,3}} = \omega_{1,2} + \omega_{2,3}$ sẽ thay đổi đối với S_3 theo thời gian, bởi vì $\omega_{1,2}$, là vector cố định trong S_2, là đang thay đổi đối với S_3 (với giả thiết rằng $\omega_{1,2}$ và $\omega_{2,3}$ là không song song với nhau). Nhưng tại bất cứ thời điểm nào, $\omega_{\mathbf{1,3}}$ có thể nhận được bằng cách cộng các giá trị tại thời điểm đó của $\omega_{1,2}$ và $\omega_{2,3}$. Xét ví dụ sau đây.

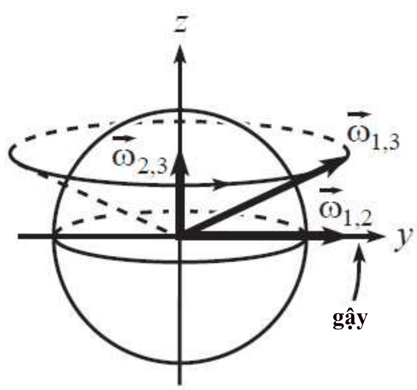
Ví dụ (Quả cầu quay): Một quả cầu quay với vận tốc góc ω_3 xung quanh một thanh mà ban đầu nó chỉ theo hướng $\hat{\mathbf{z}}$. Bạn nắm lấy thanh và quay nó xung quanh trục $\hat{\mathbf{y}}$ với vận tốc góc ω_2. Hỏi vận tốc góc của quả cầu đối với hệ quy chiếu trái đất theo thời gian bằng bao nhiêu?

Lời giải: Theo ngôn ngữ của Định lý 9.3, quả cầu sẽ được coi là hệ quy chiếu S_1; thanh và trục $\hat{\mathbf{y}}$ được coi là hệ quy chiếu S_2; và hệ quy chiếu trái đất là hệ quy chiếu S_3. Tại thời điểm sau khi bạn nắm lấy thanh, chúng ta có $\omega_{1,2} = \omega_3\hat{\mathbf{z}}$, và $\omega_{2,3} = \omega_2\hat{\mathbf{y}}$. Do đó, vận tốc góc của quả cầu đối với hệ quy chiếu trái đất là

$\omega_{\mathbf{1,3}} = \omega_{1,2} + \omega_{2,3} = \omega_3\hat{\mathbf{z}} + \omega_2\hat{\mathbf{y}}$, như được chỉ ra trong Hình 9.5. Hãy tự thuyết phục bạn rằng tổ hợp của hai phép quay này sẽ nhận được chuyển động bằng không của các điểm nằm dọc theo đường thẳng của $\omega_{1,3}$. Theo thời gian, thanh (và do đó $\omega_{1,2}$) sẽ quay xung quanh trục y, vì vậy $\omega_{\mathbf{1,3}} = \omega_{\mathbf{1,2}} + \omega_{\mathbf{2,3}}$ sẽ vẽ một hình nón xung quanh trục y, như được chỉ ra trong hình vẽ.



Hình 9.5:



Hình 9.6:

NHẬN XÉT: Chú ý rằng $\omega_{1,3}$ sẽ cư xử khác đi đối với một sự phát biểu khác một chút trong bài toán: Giả sử ban đầu quả cầu quay với vận tốc góc $\omega_2\hat{\mathbf{y}}$ xung quanh một thanh, và sau đó nắm lấy thanh và quay nó với vận tốc góc $\omega_3\hat{\mathbf{z}}$. Đối với tình huống này, $\omega_{1,3}$ ban đầu sẽ chỉ theo hướng giống như phát biểu ban đầu của bài toán (nó ban đầu bằng $\omega_2\hat{\mathbf{y}} + \omega_3\hat{\mathbf{z}}$). Nhưng theo thời gian, bây giờ thì thành phần theo phương nằm ngang của nó (được xác định bởi thanh), là $\omega_{1,3}$, là thành phần thay đổi, vì vậy $\omega_{1,3} = \omega_{1,2} + \omega_{2,3}$ sẽ vẽ một hình nón xung quanh trục $\mathbf{z}$, như chỉ ra trong Hình 9.6. ♣

Một vấn đề quan trọng liên quan đến các chuyển động quay đó là chúng được định nghĩa đối với *một hệ tọa độ*. Sẽ không có ý nghĩa gì khi hỏi một vận thể quay nhanh như thế nào xung quanh một điểm nào đó, hoặc thậm chí là xung quanh một trục nào đó. Ví dụ như, xét một vật thể đang quay với vận tốc góc $\omega = \omega_3\hat{\mathbf{z}}$ đối với hệ quy chiếu trái đất. Việc chỉ nói là, "Vật thể đó có vận tốc góc $\omega = \omega_3\hat{\mathbf{z}}$," là không đủ, bởi vì một người nào đó đang đứng trong hệ quy chiếu của vật thể đó sẽ đo được vận tốc góc của nó là $\omega = 0$, và do đó sẽ rất bối rối bởi phát biểu của bạn. Trong suốt chương này, chúng ta sẽ cố gắng ghi nhớ việc nói ra hệ tọa độ mà ω được đo đối với hệ tọa độ đó. Nhưng nếu chúng ta quên điều đó, thì hệ tọa độ mặc định sẽ là hệ tọa độ trái đất.

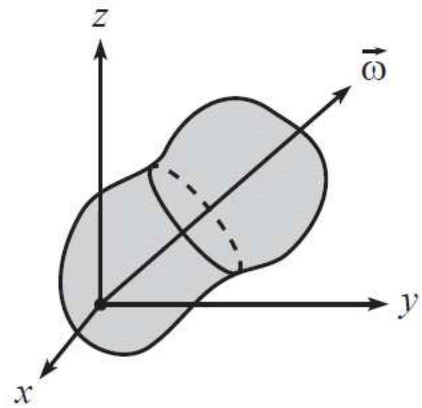
Mục này hoàn toàn là trừu tượng, vì vậy đừng có lo lắng quá nhiều về nó lúc này. Cách tốt nhất có thể là cứ tiếp tục đọc, và sau đó quay lại một lúc sau khi đã hiểu thêm một vài mục tiếp theo. Dù gì đi chăng nữa, chúng ta sẽ thảo luận về rất nhiều khía cạnh khác (có thể là nhiều hơn những điều mà bạn muốn biết) của ω trong Mục 9.7.2, vì vậy bạn chắc chắn là sẽ làm rất nhiều bài tập với nó. Bây giờ, nếu bạn muốn vắt óc ra để nghĩ về các vector ω, bạn nên làm Bài tập 9.3, và cũng nên xem xét ba lời giải đã cho của bài tập này.

9.2 Tensor quán tính

Cho một vật thể đang trải qua một chuyển động tổng quát, *tensor quán tính* là một cái gì đó liên quan giữa moment động lượng, $\mathbf{L}$, và vận tốc góc, ω. Tensor này (mà nó chỉ là một cái tên mỹ miều cho "ma trận" trong tình huống này) phụ thuộc vào hình dạng của vật thể, như chúng ta sẽ thấy. Trong việc tìm $\mathbf{L}$ gây ra bởi chuyển động tổng quát, chúng ta sẽ theo các bước làm của Mục 8.1. Đầu tiên chúng ta sẽ xem xét trường hợp đặc biệt của chuyển động quay xung quanh một trục đi qua gốc tọa độ, sau đó chúng ta sẽ xem xét chuyển động tổng quát nhất có thể.

9.2.1 Chuyển động quay quanh một trục đi qua gốc tọa độ

Vật thể ba chiều trong Hình 9.7 đang quay với vận tốc góc ω. Xét một mảnh nhỏ của vật thể, có khối lượng dm và vị trí $\mathbf{r}$. Vận tốc của mảnh nhỏ này là $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$, vì vậy moment động lượng của nó (đối với gốc tọa độ) là $\mathbf{r} \times \mathbf{p} = (dm)\mathbf{r} \times \mathbf{v} = (dm)\mathbf{r} \times (\omega \times \mathbf{r})$. Moment



Hình 9.7:

động lượng của toàn bộ vật thể do đó là

$$\mathbf{L} = \int \mathbf{r} \times (\omega \times \mathbf{r}) dm, \tag{9.4}$$

trong đó tích phân chạy trên toàn bộ thể tích của vật thể. Trong trường hợp khi vật thể rắn được tạo bởi một tập hợp các khối lượng chất điểm m_i, thì moment động lượng sẽ là

$$\mathbf{L} = \sum_{\mathbf{i}} m_i \mathbf{r_i} \times (\omega \times \mathbf{r_i}). \tag{9.5}$$

Việc lấy tích có hướng hai lần trong các phương trình (9.4) và (9.5) nhìn có vẻ rắc rối, nhưng thực ra nó không đến nỗi tệ như vậy. Đầu tiên, chúng ta có

$$\begin{aligned} \omega \times \mathbf{r} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} \\ &= (\omega_2 z - \omega_3 y)\hat{\mathbf{x}} + (\omega_3 x - \omega_1 z)\hat{\mathbf{y}} + (\omega_1 y - \omega_2 x)\hat{\mathbf{z}}. \end{aligned} \tag{9.6}$$

Chúng ta đang sử dụng ký hiệu ω_1 thay cho ω_x, vân vân..., bởi vì đã có nhiều x, y, z xuất hiện ở đây rồi. Tích có hướng hai lần do đó bằng

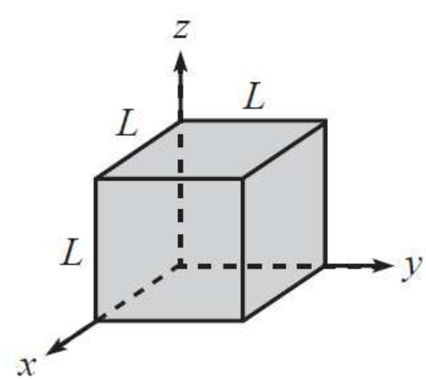
$$\begin{aligned} \mathbf{r} \times (\omega \times \mathbf{r}) &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ x & y & z \\ (\omega_2 z - \omega_3 y) & (\omega_3 x - \omega_1 z) & (\omega_1 y - \omega_2 x) \end{vmatrix} \\ &= \big(\omega_1(y^2 + z^2) - \omega_2 xy - \omega_3 zx\big)\hat{\mathbf{x}} \\ &+ \big(\omega_2(z^2 + x^2) - \omega_3 yz - \omega_1 xy\big)\hat{\mathbf{y}} \\ &+ \big(\omega_3(x^2 + y^2) - \omega_1 zx - \omega_2 yz\big)\hat{\mathbf{z}}. \end{aligned} \tag{9.7}$$

Moment động lượng trong phương trình (9.4) do đó có thể được viết dưới dạng ma trận gọn ghẽ như sau,

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \int(y^2+z^2) & -\int xy & -\int zx \\ -\int xy & \int(z^2+x^2) & -\int yz \\ -\int zx & -\int yz & \int(x^2+y^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \\
&\equiv \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \\
&\equiv \mathbf{I}\omega. \qquad (9.8)
\end{aligned}
$$

Để cho sáng sủa, chúng ta đã không viết phần dm trong các tích phân (và chúng ta sẽ tiếp tục bỏ nó đi trong hầu hết các phần còn lại của mục này). Ma trận **I** được gọi là *tensor quán tính*. Nếu từ "tensor" làm bạn sợ, hãy quên nó đi. **I** đơn giản chỉ là một ma trận. Nó tác động lên một vector (vector vận tốc góc) và sinh ra một vector khác (vector moment động lượng).

Ví dụ (Hình lập phương với gốc tọa độ tại một góc): Hãy tính tensor quán tính của một khối hình lập phương có khối lượng M và độ dài cạnh L, với các trục tọa độ là song song với cách cạnh của hình lập phương, và gốc tọa độ đặt tại một góc của nó (xem Hình 9.8).



Hình 9.8:

Lời giải: Do tính đối xứng của hình lập phương, chỉ có hai tích phân mà chúng ta cần tính trong phương trình (9.8). Các số hạng trên đường chéo tất cả đều bằng

$\int(y^2+z^2)dm$, và các số hạng không nằm trên đường chéo tất cả đều bằng $-\int xydm$. Với $dm = \rho dxdydz$, và $\rho = M/L^3$, hai tích phân này là

$$\begin{aligned} \int_0^L\int_0^L\int_0^L (y^2+z^2)\rho dxdydz = \rho L^2\int_0^L y^2dy + \rho L^2\int_0^L z^2dz = \frac{2}{3}ML^2, \\ -\int_0^L\int_0^L\int_0^L xy\rho dxdydz = -\rho L\int_0^L xdx\int_0^L ydy = -\frac{ML^2}{4}. \end{aligned} \tag{9.9}$$

Do đó,

$$\mathbf{I} = ML^2\begin{pmatrix} 2/3 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 2/3 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 2/3 \end{pmatrix}. \tag{9.10}$$

Sau khi tìm ra **I**, chúng ta có thể tính moment động lượng tương ứng với bất cứ vận tốc góc đã cho nào. Ví dụ như, nếu khối lập phương đang quay xung quanh trục z với vận tốc góc ω, thì chúng ta có thể áp dụng ma trận **I** vào vector $(0, 0, \omega)$ để tìm moment động lượng bằng $\mathbf{L} = ML^2\omega(-1/4, -1/4, 2/3)$. Chú ý một thực tế khá là kỳ lạ rằng L_x và L_y là không bằng không, mặc dù chuyển động quay chỉ là quay quanh trục z. Chúng ta sẽ thảo luận vấn đề này sau những nhận xét dưới đây.

NHẬN XÉT:

1. Tensor quán tính trong phương trình (9.8) là một thứ trông khá là phức tạp. Bạn do đó sẽ rất là vui khi biết rằng bạn hiếm khi phải dùng tới nó. Thật là tốt khi biết rằng nó sẽ ở đó khi bạn cần dùng tới nó, nhưng khái niệm về *các trục chính* (sẽ được thảo luận trong Mục 9.3) sẽ cung cấp cho ta một cách để tránh sử dụng tensor quán tính trên (hoặc chính xác hơn, là sẽ làm nó đơn giản hơn rất nhiều) và do đó sẽ có ích hơn rất nhiều trong việc giải các bài toán.

2. **I** là một ma trận đối xứng, mà đây là một tính chất sẽ rất quan trọng trong Mục 9.3. Do đó chỉ có sáu số hạng động lập, thay vì là cả chín số hạng.

3. Trong trường hợp khi mà vật thể rắn được tạo bởi một tập hợp các khối lượng chất điểm m_i, các số hạng trong ma trận đơn giản là các tổng. Ví dụ như, số hạng trên cùng bên trái là $\sum m_i(y_i^2 + z_i^2)$.

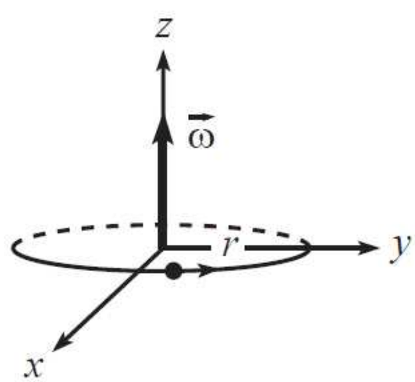
4. **I** chỉ phụ thuộc vào hình dạng của vật thể, và không phụ thuộc vào ω.

5. Để xây dựng **I**, bạn không những chỉ cần xác định gốc tọa độ, mà bạn cũng cần phải xác định các trục x, y, z của hệ tọa độ của bạn. Và các vector cơ sở phải là trực giao, bởi vì việc tính toán tích có hướng ở trên chỉ đúng đối với một hệ cơ sở trực chuẩn. Nếu ai đó khác chọn một cơ sở trực chuẩn khác (nhưng có cùng gốc tọa độ), thì **I** của người đó sẽ có *các số hạng* khác, cũng như là ω của người đó, cũng như là **L** của người đó. Nhưng ω và **L** của người đó sẽ chính xác là giống *các vector* ω và **L** của

bạn. Chúng sẽ có dạng khác chỉ vì chúng được viết trong một hệ tọa độ khác. Một vector chỉ là chính nó, không phụ thuộc vào việc bạn chọn cách xem xét nó như thế nào. Nếu mỗi người chỉ tay theo hướng mà người đó tính toán được vector **L**, thì mọi người sẽ chỉ theo cùng một hướng.

6. Đối với trường hợp một vật phẳng quay trong mặt phẳng $x-y$, chúng ta có $z=0$ đối với mọi điểm trong vật thể. Và $\omega = \omega_3\hat{\mathbf{z}}$, vì vậy $\omega_1 = \omega_2 = 0$. Số hạng duy nhất khác không trong **L** trong phương trình (9.8) do đó là $L_3 = \int (x^2+y^2) dm\omega_3$, mà đơn giản là kết quả $L_z = I_z\omega$ mà chúng ta đã tìm được trong phương trình (8.5). ♣

Bây giờ mọi thứ đều rất ổn. Cho bất kỳ một vật thể rắn nào, chúng ta có thể tính **I** (đối với một gốc tọa độ đã cho, sử dụng một tập các trục tọa độ đã cho). Và cho ω, chúng ta có thể áp dụng **I** vào nó để tìm **L**. Nhưng những số hạng trong **I** thực sự có ý nghĩa như thế nào? Làm thế nào để chúng ta hiểu ý nghĩa vật lý của chúng? Ví dụ như, chú ý rằng ω_3 không chỉ xuất hiện trong L_3 trong phương trình (9.8), mà cũng xuất hiện trong L_1 và L_2. Nhưng ω_3 thì liên quan đến sự quay xung quanh trục z, vì vậy nó đang làm cái gì trong L_1 và L_2? Xét các ví dụ sau đây.



Hình 9.9:

Ví dụ 1 (Khối lượng chất điểm trong mặt phẳng $x-y$): Xét một khối lượng chất điểm m đang chuyển động theo một đường tròn có bán kính r (có tâm tại gốc tọa độ) trong mặt phẳng $x-y$, với vận tốc góc ω_3, như chỉ ra trong Hình vẽ 9.9. Sử dụng $\omega = (0,0,\omega_3), x^2+y^2=r^2$, và $z=0$ trong phương trình (9.8) (với một tổng rời rạc của duy nhất một vật thể, thay vì các tích phân), moment động lượng đối với gốc tọa độ là

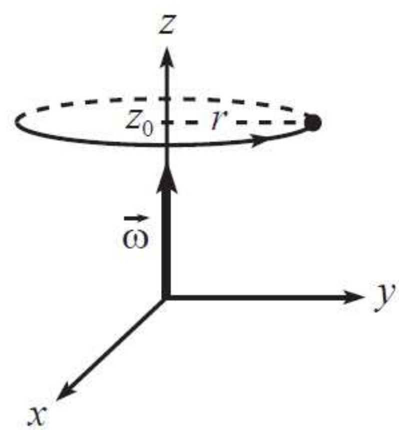
$$\mathbf{L} = (0,0,mr^2\omega_3). \tag{9.11}$$

Thành phần theo phương z là $mr(r\omega_3) = mrv$, như nó phải bằng như vậy. Và các thành phần theo phương x và y bằng không, như chúng phải bằng như vậy. Trường hợp này trong đó $\omega_1 = \omega_2 = 0$ và $z = 0$ đơn giản là trường hợp chúng ta đã nghiên cứu trong Chương 8, như đã được đề cập trong Nhận xét 6 ở trên.

Ví dụ 2 (Khối lượng chất điểm trong không gian): Xét một khối lượng chất điểm m đang chuyển động trong một đường tròn bán kính r, với vận tốc góc ω_3. Nhưng bây giờ cho đường tròn có tâm đặt tại điểm $(0, 0, z_0)$, với mặt phẳng của đường tròn song song với mặt phẳng $x - y$, như được chỉ ra trong Hình 9.10. Sử dụng $\omega = (0, 0, \omega_3)$, $x^2 + y^2 = r^2$, và $z = z_0$ trong phương trình (9.8), moment động lượng đối với gốc tọa độ là

$$\mathbf{L} = m\omega_3(-xz_0, -yz_0, r^2). \tag{9.12}$$

Thành phần theo phương z là mrv, như nó phải bằng như vậy. Nhưng một cách



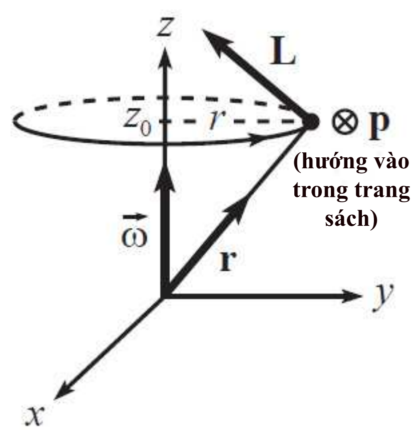
Hình 9.10:

đáng ngạc nhiên, chúng có các L_1 và L_2 khác không, thậm chí là khi khối lượng chỉ quay xung quanh trục z. $\mathbf{L}$ *không* chỉ theo phương dọc theo ω ở đây. Vậy điều gì đang xảy ra?

Xét một thời điểm khi khối lượng nằm trong mặt phẳng $y - z$, như được chỉ ra trong Hình 9.10. Vận tốc của khối lượng khi đó là theo phương của vector $-\hat{\mathbf{x}}$. Do đó, chất điểm hầu như chắc chắn là có moment động lượng xung quanh trục y, cũng như là xung quanh trục z. Một người nào đó đang xem hình ảnh chuyển động của khối lượng tại thời điểm này không thể biết là nó đang quay quanh trục y hay là trục z, hay là đang trải qua một chuyển động phức tạp nào đó. Nhưng chuyển động tại thời điểm trước hay sau thời điểm này là không liên quan gì tại thời điểm này, miễn là chúng ta chỉ quan tâm đến moment động lượng, và chúng ta chỉ quan tấm đến cái gì đang xảy ra tại thời điểm này.

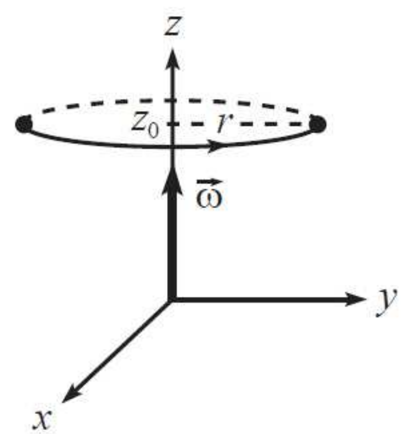
Tại thời điểm này, moment động lượng xung quanh trục y là $L_2 = -mz_0v$, bởi vì z_0 là khoảng cách từ trục y, và dấu âm đến từ quy tắc bàn tay phải. Sử dụng $v = \omega_3 r = \omega_3 y$, chúng ta có $L_2 = -mz_0\omega_3 y$, phù hợp với phương trình (9.12). Hơn nữa, tại thời điểm này, L_1 bằng không, bởi vì vector vận tốc là song song với trục x. Bởi vì $x = 0$, nên điều này phù hợp với phương trình (9.12). Như là một bài tập luyện tập, bạn có thể kiểm tra rằng phương trình (9.12) cũng đúng khi khối lượng được đặt tại một điểm tổng quát (x, y, z_0).

Chúng ta thấy rằng, ví dụ như, số hạng $I_{yz} \equiv -\int yz$ trong $\mathbf{I}$ cho ta biết rằng thành phần ω_3 của vận tốc góc đóng góp vào thành phần L_2 của moment động lượng một lượng là bao nhiêu. Và do tính chất đối xứng của $\mathbf{I}$, số hạng $I_{yz} = I_{zy}$ trong $\mathbf{I}$ cũng cho ta biết rằng thành phần ω_2 của vận tốc góc đóng góp vào thành phần L_3 của moment động lượng một lượng là bao nhiêu. Trong trường hợp trước, nếu chúng ta nhóm tích của các đại lượng khác nhau dưới dạng $-\int(\omega_3 y)z$, chúng ta thấy rằng đây đơn giản là thành phần thích hợp của vận tốc nhân với khoảng cách từ trục y. Trong trường hợp sau với $-\int(\omega_2 z)y$, các số hạng được nhóm ngược lại. Nhưng trong cả hai trường hợp, chỉ có một nhân tử y và một nhân tử z, do đó $\mathbf{I}$ đối xứng.



Hình 9.11:

NHẬN XÉT: Đối với một khối lượng chất điểm, $\mathbf{L}$ thực ra là dễ dàng nhận được hơn bằng cách là chỉ cần tính $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$. Kết quả tại thời điểm được chỉ ra trong Hình 9.10 được vẽ ở trong Hình 9.11, trong đó rõ ràng là $\mathbf{L}$ có cả hai thành phần theo phương y và phương z, và do đó $\mathbf{L}$ rõ ràng là không chỉ theo phương dọc theo ω. Đối với một vật thể phức tạp hơn, tensor $\mathbf{I}$ nói chung sẽ được sử dụng, bởi vì cần phải thực hiện việc lấy tích phân của thành phần $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ trên toàn bộ vật thể, và tensor này đã có các phép tích phân này trong nó. Dù gì đi chăng nữa, với bất cứ phương pháp nào bạn sử dụng, bạn sẽ thấy rằng ngoại trừ trong các trường hợp đặc biệt (xem Mục 9.3), **L** sẽ không chỉ dọc theo hướng của ω. ♣



Hình 9.12:

Ví dụ 3 (Hai khối lượng chất điểm): Bây giờ hãy thêm một khối lượng chất điểm m vào trong ví dụ trước. Cho nó chuyển động trong cùng một đường tròn với chất điểm kia, nhưng tại vị trí nằm đối diện theo một đường kính, như chỉ ra trong Hình 9.12. Sử dụng $\omega = (0, 0, \omega_3)$, $x^2 + y^2 = r^2$, và $z = z_0$ trong phương trình (9.8), bạn có thể chỉ ra rằng moment động lượng đối với gốc tọa độ là

$$\mathbf{L} = 2m\omega_3(0, 0, r^2). \tag{9.13}$$

Bởi vì $v = \omega_3 r$, thành phần theo phương z là $2mrv$, và nó phải bằng như vậy. Và L_1 và L_2 bằng không, không giống như trong ví dụ trước, bởi vì các thành phần này của **L** của hai khối lượng là triệt tiêu nhau. Điều này xảy ra bởi vì tính đối xứng của các khối lượng xung quanh trục z, mà gây ra các số hạng I_{zx} và I_{zy} trong tensor quán tính bị triệt tiêu; mỗi số hạng là tổng của hai số hạng, với các giá trị của x ngược dấu nhau, hoặc là các giá trị của y ngược dấu nhau. Nói cách khác, bạn có thể chỉ cần chú ý rằng việc lấy tổng với vector đối xứng gương **L** trong Hình 9.10 sẽ làm triệt tiêu các thành phần theo phương x và y.

Bây giờ hãy xem xét động năng của vật thể của chúng ta, mà nó đang quay xung quanh một trục đi qua gốc tọa độ. Để tìm động năng này, chúng ta phải cộng các động năng của tất cả các mảnh nhỏ lại. Một mảnh nhỏ có động năng $(dm)v^2/2 = dm|\omega \times \mathbf{r}|^2/2$. Do đó, sử dụng phương trình (9.6), tổng động năng sẽ là

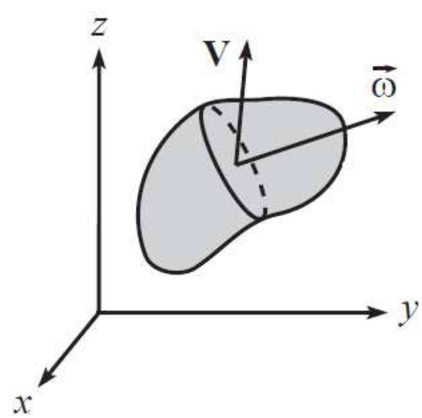
$$T = \frac{1}{2}\int \left((\omega_2 z - \omega_3 y)^2 + (\omega_3 x - \omega_1 z)^2 + (\omega_1 y - \omega_2 x)^2\right)dm. \quad (9.14)$$

Nhân biểu thức này ra, chúng ta thấy rằng (sau khi thực hiện một vài phép toán) chúng ta có thể viết T dưới dạng

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \cdot \begin{pmatrix} \int(y^2+z^2) & -\int xy & -\int zx \\ -\int xy & \int(z^2+x^2) & -\int yz \\ -\int zx & -\int yz & \int(x^2+y^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\omega \cdot \mathbf{I}\omega = \frac{1}{2}\omega \cdot \mathbf{L}. \quad (9.15) \end{aligned}$$

Nếu $\omega = \omega_3\hat{\mathbf{z}}$, thì biểu thức này được rút gọn thành $T = I_{zz}\omega_3^2/2$, phù hợp với kết quả trong phương trình (8.8), với một sự thay đổi nhỏ trong ký hiệu.

9.2.2 Chuyển động tổng quát



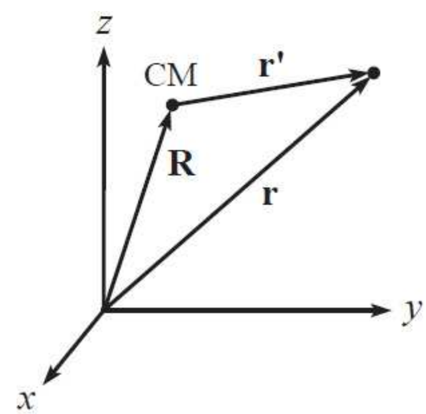
Hình 9.13:

Làm thế nào để chúng ta giải quyết chuyển động tổng quát trong không gian? Nghĩa là, điều gì sẽ xảy ra nếu một vật thể vừa chuyển động tịnh tiến vừa chuyển động quay? Đối với chuyển động trong Hình 9.13, các mảnh khối lượng khác nhau sẽ không chuyển động trong các đường tròn xung quanh gốc tọa độ, vì vậy chúng ta không thể viết $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$, như chúng ta đã làm trước đó trong phương trình (9.4).

Để xác định $\mathbf{L}$ (đối với gốc tọa độ), và cũng như động năng T, chúng ta sẽ sử dụng Định lý 9.1 để viết chuyển động như là tổng của một chuyển động tịnh tiến cộng với một chuyển động quay. Trong khi áp dụng định lý, chúng ta có thể chọn bất kỳ điểm nào trong vật thể là điểm P trong định lý. Tuy nhiên, chỉ trong trường hợp khi P là khối tâm của vật thể thì chúng ta có thể tìm ra những điều có ích, như chúng ta sẽ thấy. Định lý khi đó nói rằng chuyển động của vật thể là tổng của chuyển động của khối tâm cộng với một chuyển động quay xung quanh khối tâm. Vì vậy hãy giả sử điểm khối tâm chuyển động với vận tốc $\mathbf{V}$, và giả sử vật thể ngay tại thời điểm đó quay với vận tốc góc ω' xung quanh điểm khối tâm (nghĩa là, đối với hệ tọa độ có gốc tọa độ là điểm khối tâm, và các trục là song song với các trục của hệ tọa độ cố định).[4]

Gọi vị trí của điểm khối tâm đối với gốc tọa độ là $\mathbf{R} = (X, Y, Z)$, và gọi vị trí của một mảnh khối lượng của vật thể đã cho đối với điểm khối tâm là $\mathbf{r}' = (x', y', z')$. Khi đó $\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}'$ là vị trí của mảnh khối lượng đối với gốc tọa độ (xem Hình 9.14). Gọi vận tốc của mảnh nhỏ đối với điểm khối tâm là $\mathbf{v}'$ (vì vậy $\mathbf{v}' = \omega' \times \mathbf{r}'$). Khi đó $\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{v}'$ là vận tốc của nó đối với gốc tọa độ.

Hãy xem xét $\mathbf{L}$ trước. Moment động lượng là



Hình 9.14:

$$\begin{aligned}\mathbf{L} = \int \mathbf{r} \times \mathbf{v} dm &= \int (\mathbf{R} + \mathbf{r}') \times \big(\mathbf{V} + (\omega' \times \mathbf{r}')\big) dm \\ &= \int (\mathbf{R} \times \mathbf{V}) dm + \int \mathbf{r}' \times (\omega' \times \mathbf{r}') dm \\ &= M(\mathbf{R} \times \mathbf{V}) + \mathbf{L}_{\text{CM}}, \end{aligned} \tag{9.16}$$

trong đó các số hạng chéo biến mất bởi vì các hàm tích phân là tuyến tính với $\mathbf{r}'$. Chính xác hơn, là các hàm tích phân liên quan đến $\int \mathbf{r}' dm$, mà nó bằng không theo định nghĩa

[4]Không cần thiết phải cho dấu phẩy trên ω ở đây, bởi vì vector vận tốc góc trong hệ tọa độ khối tâm là bằng với vận tốc góc trong hệ tọa độ trái đất. Nhưng chúng ta sẽ sử dụng dấu phẩy chỉ là bởi vì chúng ta sẽ có các dấu phẩy trên các đại lượng của hệ quy chiếu khối tâm bên dưới.

của điểm khối tâm (bởi vì $\int \mathbf{r}' dm/M$ là vị trí của điểm khối tâm đối với điểm khối tâm, có giá trị bằng không). $\mathbf{L}_{\text{CM}}$ là moment động lượng đối với khối tâm.[5]

Chúng ta thấy rằng như là trong trường hợp vật phẳng trong Mục 8.1.2, moment động lượng (đối với gốc tọa độ) của vật thể có thể được tìm bằng cách coi vật thể như là một khối lượng chất điểm đặt tại khối tâm và tìm moment động lượng của khối lượng chất điểm này đối với gốc tọa độ, và sau đó cộng với moment động lượng của vật thể đối với khối tâm. Chú ý rằng hai phần này của moment động lượng không nhất thiết phải chỉ theo cùng một hướng, như chúng ta đã làm trong trường hợp vật phẳng chuyển động trong mặt phẳng $x - y$.

Bây giờ hãy xem xét T. Động năng là

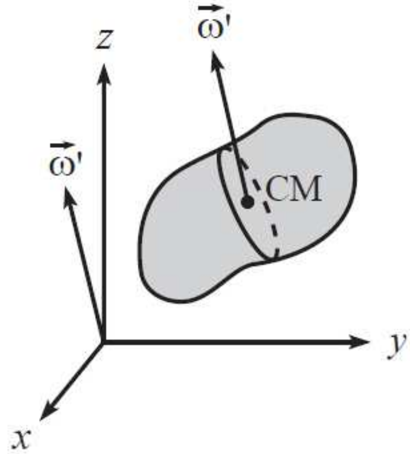
$$\begin{aligned} T = \int \frac{1}{2} v^2 dm &= \int \frac{1}{2} |\mathbf{V} + \mathbf{v}'|^2 dm \\ &= \int \frac{1}{2} V^2 dm + \int \frac{1}{2} v'^2 dm \\ &= \frac{1}{2} M V^2 + \int \frac{1}{2} |\omega' \times \mathbf{r}'|^2 dm \\ &\equiv \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} \omega' . \mathbf{L}_{\text{CM}}, \end{aligned} \tag{9.17}$$

trong đó hàng cuối cùng có được từ các bước dẫn đến phương trình (9.15). Số hạng chéo $\int \mathbf{V} \times \mathbf{v}' dm = \int \mathbf{V} \times (\omega' \times \mathbf{r}') dm$ bị triệt tiêu bởi vì hàm tích phân là tuyến tính đối với $\mathbf{r}'$ và do đó nhận được tích phân bằng không, theo định nghĩa của điểm khối tâm. Như là trong trường hợp vật phẳng trong Mục 8.1.2, động năng của một vật thể có thể được tìm bằng cách coi vật thể như là một khối lượng chất điểm đặt tại điểm khối tâm, và sau đó cộng với động năng của vật thể do sự quay xung quanh khối tâm.

9.2.3 Định lý trục song song

Xét trường hợp đặc biệt trong đó điểm khối tâm quay xung quanh gốc tọa độ với cùng vận tốc góc mà vật thể quay xung quanh điểm khối tâm (xem Hình 9.15), nghĩa là, $\mathbf{V} = \omega' \times \mathbf{R}$. Điều này có thể làm được, ví dụ như, bằng cách xuyên vật thể vào đáy một thanh rắn hình chữ "T" và sau đó quay quay thanh hình chữ T này và vật thể xung quanh đường thẳng (cố định) của phần "trên" của thanh hình chữ T (gốc tọa độ phải đi qua đường thẳng này). Khi đó chúng ta sẽ có một tình huống khá đẹp trong đó tất cả

[5]Khi viết thế này, chúng ta muốn nói rằng moment động lượng là được đo trong hệ tọa độ có gốc là điểm khối tâm, và có các trục là song song với các trục của hệ tọa độ cố định.



Hình 9.15:

các điểm trong vật thể chuyển động trong các đường tròn cố định xung quanh trục quay. Về mặt toán học, điều này có từ $\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{v}' = \omega' \times \mathbf{R} + \omega' \times \mathbf{r}' = \omega' \times \mathbf{r}$. Bỏ đi các dấu phẩy trên ω, phương trình (9.16) trở thành

$$\mathbf{L} = M\mathbf{R} \times (\omega \times \mathbf{R}) + \int \mathbf{r}' \times (\omega \times \mathbf{r}')dm. \tag{9.18}$$

Khai triển phép lấy tích có hướng hai lần theo các bước mà đã dẫn đến phương trình (9.8), chúng ta có thể viết biểu thức này dưới dạng

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} &= M \begin{pmatrix} Y^2+Z^2 & -XY & -ZX \\ -XY & Z^2+X^2 & -YZ \\ -ZX & -YZ & X^2+Y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} \int(y'^2+z'^2) & -\int x'y' & -\int z'x' \\ -\int x'y' & \int(z'^2+x'^2) & -\int y'z' \\ -\int z'x' & -\int y'z' & \int(x'^2+y'^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \\ &\equiv (\mathbf{I}_R + \mathbf{I}_{\mathrm{CM}})\omega. \end{aligned} \tag{9.19}$$

Đây là định lý trục song song tổng quát. Nó nói rằng một khi bạn đã tính toán được $\mathbf{I}_{\mathrm{CM}}$ đối với điểm khối tâm, thì nếu bạn muốn tính toán $\mathbf{I}$ đối với một điểm khác, bạn đơn giản chỉ phải cộng với ma trận $\mathbf{I}_R$, mà ma trận này nhận được bằng cách coi vật thể như là một khối lượng chất điểm đặt tại điểm khối tâm. Vì vậy bạn phải tính thêm sáu số hạng nữa (có sáu số hạng, thay vì là chín, bởi vì ma trận $\mathbf{I}_R$ là đối xứng) thay vì chỉ phải tính có một số hạng MR^2 như trong định lý trục song song trong Chương 8, cho bởi phương trình (8.13). Bài tập 9.4 sẽ cho ta cách chứng minh khác định lý trục song song, mà không phải đề cập đến vận tốc góc.

NHẬN XÉT: Tên định lý "trục song song" ở đây thực ra là một cách dùng thuật ngữ sai. Tensor quán tính không tương ứng với một trục cụ thể nào cả, như là moment quán tính trong Chương 8. Moment quán tính chỉ là một số hạng trong các số hạng nằm trên đường chéo (tương ứng với một trục đã cho) trong tensor quán tính. Tensor quán tính phụ thuộc vào toàn bộ hệ tọa độ. Vì vậy theo nghĩa đó chúng ta nên gọi định lý này là định lý "các trục song song", bởi vì các trục của hệ tọa độ trong hệ tọa độ khối tâm được giả thiết là song song với các trục tọa độ của hệ tọa độ cố định. Dù gì đi chăng nữa, vấn đề ở đây là định lý trục song song trong Chương 8 giải quyết việc dịch chuyển một trục tọa độ, trong đó định lý này giải quyết việc dịch chuyển điểm gốc tọa độ (và do đó nói chung cũng dịch chuyển tất cả ba trục tọa độ). ♣

Khi chỉ xét đến động năng, nếu ω và ω' là bằng nhau, sao cho $\mathbf{V} = \omega' \times \mathbf{R}$, thì phương trình (9.17) cho ta (bỏ đi dấu phẩy ở trong ω)

$$T = \frac{1}{2}M|\omega \times \mathbf{R}|^2 + \int \frac{1}{2}|\omega \times \mathbf{r}'|^2 dm. \tag{9.20}$$

Thực hiện các bước mà đã dẫn đến phương trình (9.15), biểu thức này trở thành

$$T = \frac{1}{2}\omega \cdot (\mathbf{I}_{\mathbf{R}} + \mathbf{I}_{\text{CM}})\omega = \frac{1}{2}\omega.\mathbf{L}. \tag{9.21}$$

9.3 Các trục chính

Các biểu thức rất cồng kềnh trong mục trước có thể làm cho chúng ta không cảm thấy thoải mái, nhưng hóa ra nói chung chúng ta có thể làm việc mà không cần tới chúng. Chiến thuật để tránh tất cả các biểu thức cồng kềnh trên là đi sử dụng *các trục chính* của một vật thể, mà chúng ta sẽ định nghĩa ở bên dưới.

Nói chung, tensor quán tính $\mathbf{I}$ trong phương trình (9.8) có chín số hạng khác không, mà sáu trong chín số hạng này là độc lập với nhau do tính đối xứng của $\mathbf{I}$. Hơn nữa nó phụ thuộc vào việc chọn gốc tọa độ, nên tensor quán tính phụ thuộc vào tập các vector của cơ sở trực chuẩn đã được chọn trong hệ tọa độ; tất nhiên các biến x, y, z trong các hàm lấy tích phân phụ thuộc vào hệ tọa độ mà chúng đang được đo. Cho một khối vật chất, và cho một gốc tọa độ bất kỳ,[6] bất kỳ tập các vector cơ sở trực chuẩn nào cũng đều sử dụng được, nhưng có một tập các vector cơ sở trực chuẩn đặc biệt mà làm cho tất cả

[6]Điểm khối tâm thường được chọn là điểm gốc tọa độ, nhưng điều này không nhất thiết phải như vậy. Tồn tại các trục chính tương ứng với bất kỳ điểm gốc tọa độ nào.

các tính toán của chúng ta trở nên rất đẹp. Tập các vector cơ sở này được gọi là *các trục chính*. Chúng có thể được định nghĩa theo nhiều cách tương đương khác nhau:

- Các trục chính là các vector cơ sở trực chuẩn mà trong đó $\mathbf{I}$ có dạng đường chéo, nghĩa là[7]

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}. \tag{9.22}$$

  I_1, I_2, và I_3 được gọi là *các moment chính*. Đối với rất nhiều vật thể, sẽ hoàn toàn rất là hiển nhiên các trục chính là các trục nào. Ví dụ như, xét một hình chữ nhật đồng chất trong mặt phẳng $x-y$. Chọn gốc tọa độ là điểm khối tâm, và cho các trục x và y song song với các cạnh. Khi đó các trục chính rõ ràng là các trục x, y và z, bởi vì tất cả các số hạng nằm ngoài đường chéo của tensor quán tính trong phương trình (9.8) sẽ biến mất, do đính đối xứng. Ví dụ như, $I_{xy} \equiv -\int xydm$ bằng không, bởi vì với mọi điểm (x, y) trong hình chữ nhật, tồn tại một điểm tương ứng $(-x, y)$, vì vậy các phần đóng góp vào $\int xydm$ sẽ bị triệt tiêu theo cặp. Hơn nữa, các tích phân liên quan đến biến z đều đồng nhất bằng không, bởi vì $z = 0$.

- Một trục chính là một trục $\hat{\omega}$ sao cho $\mathbf{I}\hat{\omega} = I\hat{\omega}$. Nghĩa là, một trục chính là một hướng đặc biệt với tính chất là nếu ω chỉ theo hướng đó, thì $\mathbf{L}$ cũng vậy. Các trục chính của một vật thể khi đó là một tập ba vector trực chuẩn $\hat{\omega}_1$, $\hat{\omega}_2$, $\hat{\omega}_3$ với tính chất

$$\mathbf{I}\hat{\omega}_1 = \ell_1\hat{\omega}_1 \qquad \mathbf{I}\hat{\omega}_2 = \ell_2\hat{\omega}_2 \qquad \mathbf{I}\hat{\omega}_3 = \ell_3\hat{\omega}_3. \tag{9.23}$$

  Ba mệnh đề trong phương trình (9.23) là tương đương với phương trình (9.22), bởi vì các vector $\hat{\omega}_1$, $\hat{\omega}_2$, và $\hat{\omega}_3$ đơn giản là $(1, 0, 0), (0, 1, 0)$, và $(0, 0, 1)$ trong hệ quy chiếu mà trong đó chúng là các vector cơ sở.

- Xét một vật thể đang quay quanh một trục cố định với vận tốc góc không đổi. Khi đó, trục này là một trục chính nếu không cần phải có một moment lực nào để cho điều này xảy ra. Vì vậy theo một nghĩa nào đó, vật thể sẽ "vui vẻ" khi quay xung

[7] Về mặt kỹ thuật, chúng ta nên viết I_{11} hoặc là I_{xx} thay vì I_1, vân vân..., trong ma trận này, bởi vì số hạng một chỉ số I_1 trông giống như là một thành phần của một vector, chứ không phải là của một ma trận. Nhưng các ký hiệu hai chỉ số sẽ làm cho các công thức cồng kềnh, vì vậy chúng ta sẽ chỉ sử dụng I_1, vân vân....

quanh một trục chính. Một tập ba trục trực chuẩn, mỗi trục đều có tính chất này, theo định nghĩa là cái mà chúng ta gọi là một tập các trục chính.

Định nghĩa này của một trục chính là tương đương với định nghĩa ở trên với lý do sau đây. Giả sử rằng vật thể quay quanh một trục cố định $\hat{\omega}_1$ sao cho $\mathbf{L} = I\hat{\omega}_1 = I_1\hat{\omega}_1$, như trong phương trình (9.23). Khi đó bởi vì $\hat{\omega}_1$ được giả thiết là cố định, nên chúng ta thấy rằng $\mathbf{L}$ cũng là cố định. Do đó, $\tau = d\mathbf{L}/dt = 0$.

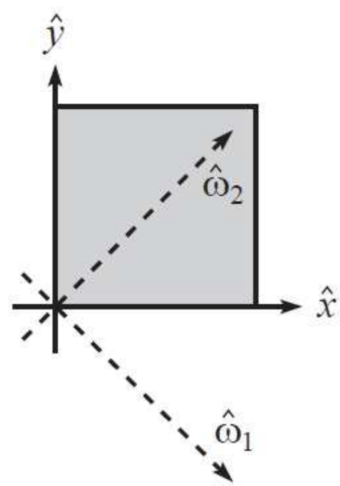
Ngược lại, nếu vật thể đang quay quanh một trục cố định $\hat{\omega}_1$, và nếu $\tau = d\mathbf{L}/dt = 0$, thì chúng ta sẽ có $\mathbf{L}$ chỉ theo hướng dọc theo $\hat{\omega}_1$ (nghĩa là, $\mathbf{L} = I_1\omega_1$). Điều này là đúng bởi vì nếu $\mathbf{L}$ *không* có hướng dọc theo $\hat{\omega}_1$, thì tưởng tượng vẽ một điểm ở đâu đó trên vật thể dọc theo đường của $\mathbf{L}$. Một lúc sau đó, điểm này sẽ quay xung quanh vector cố định $\hat{\omega}_1$. Nhưng đường thẳng của $\mathbf{L}$ phải luôn luôn đi qua điểm này, bởi vì chúng ta có thể đã quay các trục của chúng ta xung quanh $\hat{\omega}_1$ và bắt đầu lại quá trình này tại một thời điểm ngay sau đó (lập luận này dựa trên việc $\hat{\omega}_1$ là không đổi). Do đó, chúng ta thấy rằng $\mathbf{L}$ đã thay đổi, mâu thuẫn với giả thiết là $\tau = d\mathbf{L}/dt = 0$. Vì vậy, $\mathbf{L}$ thực ra phải chỉ theo hướng của $\hat{\omega}_1$.

Đối với một chuyển động quay xung quanh một trục chính $\hat{\omega}$, việc không cần đến bất cứ moment lực nào có nghĩa là nếu vật thể được gắn khớp tại gốc tọa độ, và nếu điểm gốc tọa độ là chỗ duy nhất mà các lực tác dụng vào (mà có nghĩa là sẽ không có moment lực tác dụng quanh nó), thì vật thể có thể có chuyển động quay với vận tốc góc không đổi ω. Nếu bạn cố gắng thiết lập hiện tượng này với một trục không phải là trục chính, thì bạn sẽ không thể thực hiện được.

Ví dụ (Hình vuông với gốc tọa độ tại một góc): Xét một hình vuông đồng chất trong Hình 9.16. Trong Phụ lục E, chúng ta chỉ ra rằng các trục chính là các đường thẳng nét đứt được vẽ trong hình vẽ (và cùng với trục z vuông góc với mặt trang giấy). Nhưng không cần thiết phải sử dụng kỹ thuật trong phần phụ lục để thấy được điều này, bởi vì trong cơ sở mới này do tính đối xứng, rõ ràng là tích phân $\int x_1x_2$ là bằng không; với mọi x_1 trong tích phân, đều tồn tại một $-x_1$. Và $x_3 \equiv z$ thì đồng nhất bằng không, làm cho tất cả các số hạng không nằm trên đường chéo trong $\mathbf{I}$ cũng bằng không. Do đó, bởi vì $\mathbf{I}$ là có dạng đường chéo trong cơ sở mới này, các vector cơ sở này là các trục chính.

Hơn nữa, về mặt trực giác thì rõ ràng là hình vuông sẽ rất vui vẻ để quay quanh bất cứ một trong các trục này mãi. Trong một chuyển động quay như vậy, chắc chắn là khớp quay sẽ tác dụng một *lực* (nếu trục là $\omega_{\mathbf{1}}$ hoặc $\hat{\mathbf{z}}$, nhưng sẽ không nếu trục là $\omega_{\mathbf{2}}$), để sinh ra gia tốc hướng tâm của điểm khối tâm trong chuyển động tròn của nó. Nhưng nó sẽ không tác dụng một *moment lực* đối với gốc tọa độ (bởi vì $\mathbf{r}$ trong $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ bằng không). Điều này là tốt, bởi vì đối với một chuyển động quay xung quanh một trong các trục chính này, $d\mathbf{L}/dt = 0$, vì vậy không cần thiết phải có bất cứ một moment lực nào.

Trái ngược với các giá trị bằng không trong cơ sở mới, thì tích phân $\int xy$ trong cơ sở cũ thì *không* bằng không, bởi vì tất cả các điểm đều đóng góp vào tích phân một đại lượng dương. Vì vậy tensor quán tính sẽ không có dạng đường chéo trong cơ sở cũ, mà có nghĩa là $\hat{x}$ và $\hat{y}$ không phải là các trục chính. Nhất quán với điều này, rõ ràng là không thể làm cho hình vuông quay quanh, ví dụ như, trục x, với giả thiết rằng nó chỉ tiếp xúc với thế giới bên ngoài qua một khớp quay (ví dụ như, là một quả bóng tròn lắp vào trong một hốc rỗng hình tròn) tại gốc tọa độ. Hình vuông đơn giản là không muốn duy trì chuyển động quay này. Về mặt toán học, $\mathbf{L}$ (đối với điểm gốc tọa độ) không có hướng chỉ dọc theo phương trục x, vì vậy nó sẽ quay tròn xung quanh trục x cùng với hình vuông, vẽ ra mặt của một hình nón. Điều này có nghĩa là $\mathbf{L}$ đang thay đổi. Nhưng không có moment lực nào cả (đối với gốc tọa độ) để tạo ra sự thay đổi này của $\mathbf{L}$. Vì vậy, một chuyển động như vậy không thể tồn tại.



Hình 9.16:

Tại thời điểm này, hoàn toàn không hiển nhiên rằng một tập các trục chính trực chuẩn là tồn tại đối với một vật thể bất kỳ. Nhưng thực ra là như vậy, như sẽ được phát biểu trong Định lý 9.4 bên dưới. Bây giờ với giả thiết rằng các trục chính là tồn tại, thì trong cơ sở này $\mathbf{L}$ và T trong các phương trình (9.8) và (9.15) sẽ có dạng rất đẹp,

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= (I_1\omega_1, I_2\omega_2, I_3\omega_3), \\ T &= \frac{1}{2}\big(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2\big). \end{aligned} \tag{9.24}$$

Các đại lượng ω_1, ω_2, và ω_3 ở đây là các thành phần của một vector ω tổng quát được viết trong cơ sở các trục chính; nghĩa là, $\omega = \omega_1\hat{\omega}_\mathbf{1} + \omega_2\hat{\omega}_\mathbf{2} + \omega_3\hat{\omega}_\mathbf{3}$. Phương trình (9.24) là một phương trình đơn giản hơn rất nhiều so với các công thức trong các phương trình (9.8) và (9.15). Chúng ta do đó sẽ liên tục làm việc với các trục chính trong suốt phần còn lại của chương này.

Chú ý rằng các hướng của các trục chính (đối với vật thể) chỉ phụ thuộc vào hình dạng của vật thể. Chúng do đó có thể được coi là được vẽ lên (hoặc bên trong) nó. Vì vậy, chúng nói chung sẽ chuyển động xung quanh trong không gian khi vật thể quay. Ví dụ như, nếu vật thể đang quay xung quanh một trục chính, thì trục đó sẽ cố định trong khi hai trục chính khác sẽ quay xung quanh trục đó. Trong các mối liên hệ như $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ và $\mathbf{L} = (I_1\omega_1, I_2\omega_2, I_3\omega_3)$, các thành phần ω_i và $I_i\omega_i$ được đo dọc theo các trục chính $\hat{\omega}_\mathbf{i}$ *tức thời*. Bởi vì các trục chính này thay đổi theo thời gian, nó hoàn toàn có thể là các thành phần ω_i và $I_i\omega_i$ cũng thay đổi theo thời gian, như chúng ta sẽ thấy trong Mục 9.5 (và sau đó).

Bây giờ hãy phát biểu định lý mà nói rằng một tập các trục chính thực sự tồn tại đối với bất kỳ vật thể nào và bất kỳ gốc tọa độ nào. Chứng minh của định lý này liên quan đến một kỹ thuật rất hữu ích nhưng cũng khá là tinh tế, nhưng nó lại hơi nằm ngoài nội dung chính ở đây, vì vậy chúng ta sẽ để nó ở trong Phụ lục D. Hãy xem qua chứng minh này nếu bạn muốn, nhưng nếu bạn chỉ muốn chấp nhận sự thật là các trục chính là tồn tại thì cũng ổn.

Định lý 9.4. *Cho một ma trận thực đối xứng cấp* 3×3, $\mathbf{I}$, *tồn tại ba vector thực trực chuẩn,* $\hat{\omega}_k$, *và ba số thực,* I_k, *với tính chất*

$$\mathbf{I}\hat{\omega}_k = I_k\hat{\omega}_k. \tag{9.25}$$

Chứng minh. Xem Phụ lục D. □

Bởi vì tensor quán tính trong phương trình (9.8) thực sự là đối xứng đối với bất kỳ vật thể nào và gốc tọa độ nào, nên định lý này nói rằng chúng ta luôn có thể tìm được ba vector cơ sở trực giao mà thỏa mãn phương trình (9.23). Hoặc một cách tương đương, cũng ta luôn có thể tìm được ba vector cơ sở trực giao sao cho **I** là một ma trận đường chéo, như trong phương trình (9.22). Nói cách khác, các trục chính luôn luôn tồn tại. Bài tập 9.7 cho chúng ta một cách khác để minh họa sự tồn tại của các trục chính trong trường hợp đặc biệt của một vật phẳng.

Lúc nào cũng vậy, sẽ là tốt nhất khi làm việc trong một hệ tọa độ mà có các trục chính là cơ sở của nó, bởi vì sự đơn giản của phương trình (9.24). Và như đã đề cập trong Chú thích cuối trang 6, gốc tọa độ thông thường là được chọn tại điểm khối tâm, bởi vì từ Mục 8.4.3 điểm khối tâm là một trong các điểm gốc tọa độ sao cho $\tau = d\mathbf{L}/dt$ là áp dụng được. Nhưng sự lựa chọn này là không cần thiết; có các trục chính tương ứng với bất kỳ điểm gốc tọa độ nào.

Đối với một vật thể tương đối là đối xứng, các trục chính luôn luôn là các lựa chọn hiển nhiên và có thể được viết ra chỉ đơn giản là bằng cách nhìn vào vật thể đó (các ví dụ được cho ở bên dưới). Tuy nhiên, nếu bạn được cho một vật thể không đối xứng, thì cách duy nhất để xác định các trục chính là chọn một cơ sở bất kỳ, sau đó tìm **I** trong cơ sở này, và sau đó lần lượt làm các bước trong quá trình chéo hóa. Quá trình chéo hóa này về cơ bản là bao gồm các bước trong phần đầu của chứng minh Định lý 9.4 (được cho trong Phụ lục D), với một bước thêm nữa là đi tìm các vector nghiệm của quá trình chéo hóa, vì vậy chúng ta sẽ để nó trong Phụ lục E. Bạn không cần phải lo lắng quá nhiều về phương pháp này. Thực tế là hầu như tất cả các hệ cơ học mà bạn phải giải quyết sẽ liên quan đến một vật thể với tính chất đối xứng đủ để bạn có thể ngay lập tức viết ra các trục chính của nó.

Bây giờ hãy đi chứng minh hai định lý rất hữu ích (và rất giống nhau) sau.

Định lý 9.5. *Nếu hai moment chính bằng nhau ($I_1 = I_2 \equiv I$), thì bất kỳ trục nào (đi qua gốc tọa độ đã chọn) trong mặt phẳng của các trục chính tương ứng là một trục chính, và moment của nó cũng bằng I. Tương tự, nếu cả ba moment chính bằng nhau ($I_1 = I_2 = I_3 \equiv I$), thì bất kỳ trục nào (đi qua gốc tọa độ đã chọn) trong không gian cũng là một trục chính, và moment của nó cũng bằng I.*

Chứng minh. Phần đầu tiên của định lý đã được chứng minh trong phần cuối chứng minh trong Phụ lục D, nhưng chúng ta sẽ làm lại nó một lần nữa ở đây. Bởi vì $I_1 = I_2 \equiv I$, ta có $\mathbf{I_1 u_1} = I\mathbf{u_1}$, và $\mathbf{I_2 u_2} = I\mathbf{u_2}$, trong đó các $\mathbf{u}$ là các trục chính. Do đó, $\mathbf{I}(a\mathbf{u_1} + b\mathbf{u_2}) = I(a\mathbf{u_1} + b\mathbf{u_2})$, với a và b bất kỳ. Do đó, bất kỳ một tổ hợp tuyến tính nào của $\mathbf{u_1}$ và $\mathbf{u_2}$

(nghĩa là, bất kỳ vector nào trong mặt phẳng sinh bởi $\mathbf{u_1}$ và $\mathbf{u_2}$) cũng là một nghiệm của $\mathbf{I}\mathbf{u} = I\mathbf{u}$ và do đó là một trục chính, theo định nghĩa.

Chứng minh của phần hai của định lý cũng được tiến hành một cách tương tự. Bởi vì $I_1 = I_2 = I_3 \equiv I$, ta có $\mathbf{I}\mathbf{u_1} = I\mathbf{u_1}$, $\mathbf{I}\mathbf{u_2} = I\mathbf{u_2}$ và $\mathbf{I}\mathbf{u_3} = I\mathbf{u_3}$. Vì vậy, $\mathbf{I}(a\mathbf{u_1} + b\mathbf{u_2} + c\mathbf{u_3}) = I(a\mathbf{u_1} + b\mathbf{u_2} + c\mathbf{u_3})$. Do đó, bất kỳ một tổ hợp tuyến tính nào của $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}$ và $\mathbf{u_3}$ (nghĩa là, bất kỳ vector nào trong không gian) cũng là một nghiệm của $\mathbf{I}\mathbf{u} = I\mathbf{u}$ và do đó là một trục chính, theo định nghĩa.

Tóm lại, nếu $I_1 = I_2 \equiv I$, thì $\mathbf{I}$ là ma trận đơn vị (nhân với một thừa số nào đó) trong không gian sinh bởi $\mathbf{u_1}$ và $\mathbf{u_2}$. Và nếu $I_1 = I_2 = I_3 \equiv I$, thì $\mathbf{I}$ là ma trận đơn vị (nhân với một thừa số nào đó) trong toàn bộ không gian. Chú ý rằng ở đây không yêu cầu các vector $\mathbf{u_i}$ phải là trực giao. Tất cả những gì chúng ta cần là chúng sinh được không gian mà chúng ta đang xét. □

Nếu như hai hay ba moment bằng nhau, sao cho có thể chọn các trục chính một cách tùy ý, thì có thể chọn một nhóm các trục chính không trực giao. Tuy nhiên, chúng ta sẽ luôn luôn chọn các trục chính trực giao. Vì vậy khi chúng ta nói ”một tập hợp các trục chính,” thì chúng ta muốn nói tới một tập các trục chính trực chuẩn.

Định lý 9.6. *Nếu một vật phẳng là đối xứng qua một phép quay một góc $\theta \neq 180°$ trong mặt phẳng $x - y$ (như là một hình lục giác), thì tất cả các trục trong mặt phẳng $x - y$ (đối với gốc tọa độ đã được chọn là tâm của phép quay đối xứng) là một trục chính với moment bằng nhau.*

Chứng minh. Gọi $\hat{\omega}_0$ là một trục chính trong mặt phẳng, và gọi $\hat{\omega}_\theta$ là trục nhận được khi quay $\hat{\omega}_0$ một góc θ. Khi đó $\hat{\omega}_0$ cũng là một trục chính với cùng moment chính, do tính đối xứng của vật thể. Do đó, $\mathbf{I}\hat{\omega}_0 = I\hat{\omega}_0$, và $\mathbf{I}\hat{\omega}_\theta = I\hat{\omega}_\theta$.

Bây giờ, bất kỳ vector ω nào trong mặt phẳng $x - y$ đều có thể được viết dưới dạng một tổ hợp tuyến tính của $\hat{\omega}_0$ và $\hat{\omega}_\theta$, miễn là $\theta \neq 180°$ (hoặc là khác không). Nghĩa là, $\hat{\omega}_0$ và $\hat{\omega}_\theta$ sẽ sinh ra mặt phẳng $x - y$. Do đó, bất kỳ vector ω nào cũng có thể được viết dưới dạng $\omega = a\hat{\omega}_0 + b\hat{\omega}_\theta$, và vì vậy

$$\mathbf{I}\omega = \mathbf{I}(a\hat{\omega}_0 + b\hat{\omega}_\theta) = aI\hat{\omega}_0 + bI\hat{\omega}_\theta = I\omega. \tag{9.26}$$

Do đó, ω cũng là một trục chính. Bài tập 9.8 đưa ra một chứng minh khác cho định lý này. □

Định lý này thực ra là vẫn đúng thậm chí là không cần sự hạn chế là chỉ cho "vật phẳng". Nghĩa là, nó đúng đối với bất kỳ một vật thể nào với một phép đối xứng quay xung quanh trục z (loại trừ $\theta \neq 180°$). Điều này có thể thấy được như sau. Trục z là một trục chính, bởi vì ω có hướng chỉ dọc theo $\hat{z}$, khi đó $\mathbf{L}$ cũng phải chỉ dọc theo $\hat{z}$, do tính chất đối xứng. Do đó có (ít nhất) hai trục chính nằm trong mặt phẳng $x - y$. Gọi một trong hai trục chính này là $\hat{\omega}_0$ và tiến hành như ở trên.

Bây giờ hãy làm một số ví dụ ngắn. Chúng ta sẽ chỉ ra các trục chính của các vật thể được liệt kê bên dưới (đối với gốc tọa độ). Nhiệm vụ của bạn là phải chỉ ra rằng chúng là chính xác. Thông thường, một lập luận nhanh về tính đối xứng cho ta

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \int(y^2+z^2) & -\int xy & -\int zx \\ -\int xy & \int(z^2+x^2) & -\int yz \\ -\int zx & -\int yz & \int(x^2+y^2) \end{pmatrix} \tag{9.27}$$

là ma trận đường chéo. Trong tất cả các ví dụ này (xem Hình 9.17), gốc tọa độ của các trục chính được hiểu là gốc tọa độ của hệ tọa độ đã cho (mà không cần thiết phải là điểm khối tâm). Trong mô tả các trục, ngoài các tính chất khác được nêu, thì chúng luôn luôn đi qua gốc tọa độ.

Ví dụ 1: Khối lượng chất điểm tại gốc tọa độ.

các trục chính: bất kỳ trục nào.

Ví dụ 2: Khối lượng chất điểm tại điểm có tọa độ (x_0, y_0, z_0).

các trục chính: trục đi qua điểm đó, và bất kỳ các trục nào vuông góc với trục này.

Ví dụ 3: Hình chữ nhật có tâm tại gốc tọa độ, như được chỉ ra trong hình vẽ.

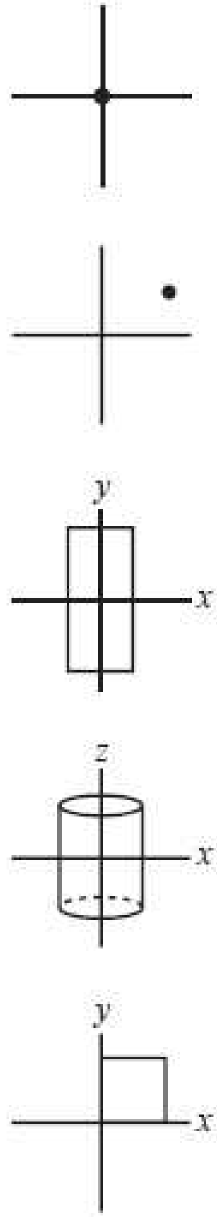
các trục chính: các trục x, y và z.

Ví dụ 4: Khối hình trụ có trục là trục z.

các trục chính: trục z, và bất kỳ các trục nào trong mặt phẳng $x - y$.

Ví dụ 5: Hình vuông với một góc tại điểm gốc tọa độ, như được chỉ ra trong hình vẽ.

các trục chính: trục z, trục đi qua điểm khối tâm, trục vuông góc với trục này.



Hình 9.17:

9.4 Hai dạng bài tập cơ bản

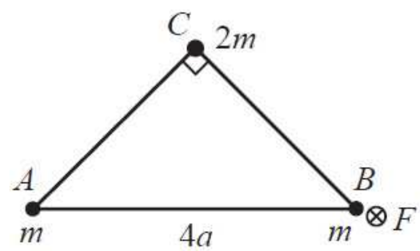
Ba mục trước đã giới thiệu rất nhiều các nội dung trừu tượng. Chúng ta bây giờ sẽ xem xét một vài hệ vật lý trong thực tế. Nội dung về các trục chính cho ta khả năng để giải rất nhiều loại bài tập. Tuy nhiên, có hai loại sẽ xuất hiện một cách thường xuyên. Tất nhiên có rất nhiều biến thể của hai loại này, nhưng chúng nói chung có thể được phát biểu như sau.

- Tác động vào một vật thể rắn bởi một xung (nghĩa là, một cú đập nhanh). Hỏi chuyển động của vật thể ngay sau cú đập là như thế nào?

- Một vật thể quay xung quanh một trục cố định. Tác động vào nó một moment lực. Hỏi tần số của chuyển động quay là bao nhiêu? Hoặc ngược lại, cho tần số, hỏi moment lực cần tác động là bao nhiêu?

Chúng ta sẽ làm việc thông qua một ví dụ cho mỗi loại bài tập này. Trong cả hai trường hợp, lời giải đều liên quan đến một số các bước thực hiện theo trình tự, vì vậy chúng ta sẽ viết chúng ra một cách rõ ràng.

9.4.1 Chuyển động sau một xung tác động

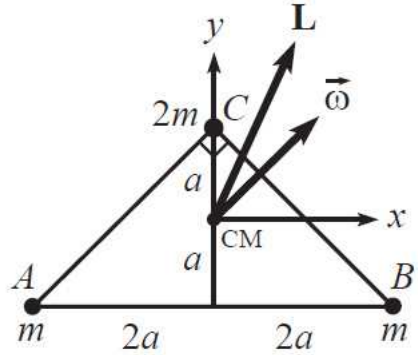


Hình 9.18:

Đề bài: Xét một vật thể rắn như trong Hình 9.18. Ba khối lượng được nối với nhau bởi ba thanh không khối lượng, theo một hình tam giác vuông cân với chiều dài cạnh huyền là $4a$. Khối lượng tại đỉnh góc vuông là $2m$, và hai khối lượng còn lại là m. Gọi chúng là A, B, C, như đã được chỉ ra trong hình vẽ. Giả sử rằng vật thể là đang lơ lửng tự do trong không gian vũ trụ. Khối lượng B bị đánh bởi một cú đập nhanh, hướng vào trong trang giấy. Giả sử xung tác động truyền cho vật có độ lớn $\int F dt = P$. (Xem Mục 8.6 để biết một thảo luận về xung lực và xung lượng.) Hỏi vận tốc của ba khối lượng ngay sau cú đánh là bao nhiêu?

Lời giải: Chiến thuật của chúng ta sẽ là đi tìm moment động lượng của hệ (đối với điểm khối tâm) bằng cách sử dụng xung lượng, và sau đó đi tính các moment chính và đi tìm vector vận tốc góc (mà sẽ cho các vận tốc đối với điểm khối tâm), và cuối cùng thì cộng với chuyển động của điểm khối tâm.

Đường cao từ đỉnh góc vuông hạ xuống cạnh huyền có độ dài là $2a$, và rất dễ nhận biết là điểm khối tâm nằm tại trung điểm của đường cao này (xem Hình 9.19). Bằng cách chọn điểm khối tâm là gốc tọa độ của chúng ta, và gọi mặt phẳng của tờ giấy là mặt phẳng $x-y$, các vị trí của ba khối lượng là $\mathbf{r}_A = (-2a, -a, 0), \mathbf{r}_B = (2a, -a, 0)$ và $\mathbf{r}_C = (0, a, 0)$. Bây giờ có năm bước thực hiện chuẩn mà chúng ta phải tiến hành.



Hình 9.19:

- **Tìm L:** Chiều dương của trục z hướng ra ngoài trang giấy, vì vậy vector xung lực là $\mathbf{P} \equiv \int \mathbf{F}dt = (0, 0, -P)$. Do đó, moment động lượng của hệ (đối với điểm khối tâm) là

$$\begin{aligned}\mathbf{L} = \int \tau dt &= \int (\mathbf{r}_B \times \mathbf{F})dt = \mathbf{r}_B \times \int \mathbf{F}dt \\ &= (2a, -a, 0) \times (0, 0, -P) = aP(1, 2, 0),\end{aligned} \tag{9.28}$$

như được chỉ ra trong Hình 9.19. Chúng ta đã sử dụng thực tế là $\mathbf{r}_B$ về cơ bản là hằng số trong quá trình xảy ra cú đánh (bởi vì cú đánh được giả sử là xảy ra rất nhanh) trong việc bỏ $\mathbf{r}_B$ ra ngoài dấu tính phân.

- **Tính các moment chính:** Các trục chính là các trục x, y, và trục z, bởi vì tính đối xứng của tam giác làm cho $\mathbf{I}$ có dạng đường chéo trong cơ sở này, như bạn có thể nhanh chóng kiểm tra lại. Các moment (đối với điểm khối tâm) là

$$\begin{aligned}I_x &= ma^2 + ma^2 + (2m)a^2 = 4ma^2, \\ I_y &= m(2a)^2 + m(2a)^2 + (2m)0^2 = 8ma^2, \\ I_z &= I_x + I_y = 12ma^2.\end{aligned} \tag{9.29}$$

Chúng ta đã sử dụng định lý trục vuông góc để nhận được I_z, mặc dù nó sẽ không cần đến để giải bài toán.

- **Tìm ω:** Chúng ta bây giờ có hai biểu thức đối với moment động lượng của hệ. Một biểu thức được biểu diễn qua xung lực, phương trình (9.28). Biểu thức kia được biểu diễn qua các moment và các thành phần của vector vận tốc góc, phương trình

(9.24). Cân bằng các phương trình này cho ta

$$
\begin{aligned}
(I_x\omega_x, I_y\omega_y, I_z\omega_z) &= aP(1,2,0) \\
\Longrightarrow \quad (4ma^2\omega_x, 8ma^2\omega_y, 12ma^2\omega_z) &= aP(1,2,0) \\
\Longrightarrow (\omega_x, \omega_y, \omega_z) &= \frac{P}{4ma}(1,1,0),
\end{aligned} \tag{9.30}
$$

như được chỉ ra trong Hình 9.19.

- **Tính các vận tốc đối với điểm khối tâm:** Ngay sau cú đánh, vật thể quay xung quanh điểm khối tâm với vận tốc góc đã được tìm trong phương trình (9.30). Các vận tốc đối với điểm khối tâm khi đó là $\mathbf{u_i} = \omega \times \mathbf{r_i}$. Vì vậy,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}_A &= \omega \times \mathbf{r}_A = \frac{P}{4ma}(1,1,0) \times (-2a, -a, 0) = (0,0,P/4m), \\
\mathbf{u}_B &= \omega \times \mathbf{r}_B = \frac{P}{4ma}(1,1,0) \times (2a, -a, 0) = (0,0,-3P/4m), \\
\mathbf{u}_C &= \omega \times \mathbf{r}_C = \frac{P}{4ma}(1,1,0) \times (0, a, 0) = (0,0,P/4m).
\end{aligned} \tag{9.31}
$$

Để kiểm tra lại, rõ ràng là hợp lý khi $\mathbf{u}_B$ là lớn gấp ba lần so với $\mathbf{u}_A$ và $\mathbf{u}_C$, bởi vì B có khoảng cách so với trục quay gấp ba lần so với A và C, như bạn có thể kiểm tra lại bằng việc sử dụng một chút hình học trong Hình 9.19.

- **Cộng vào vận tốc của điểm khối tâm:** Xung lực (nghĩa là, sự thay đổi của động lượng) cung cấp cho toàn bộ hệ là $\mathbf{P} = (0,0,-P)$. Tổng khối lượng của cả hệ là $M = 4m$. Do đó, vận tốc của điểm khối tâm là

$$
V_{\text{CM}} = \frac{\mathbf{P}}{M} = (0,0,-P/4m). \tag{9.32}
$$

Vận tốc tổng của các khối lượng do đó là

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v}_A &= \mathbf{u}_A + V_{\text{CM}} = (0,0,0), \\
\mathbf{v}_B &= \mathbf{u}_B + V_{\text{CM}} = (0,0,-P/m), \\
\mathbf{v}_C &= \mathbf{u}_C + V_{\text{CM}} = (0,0,0).
\end{aligned} \tag{9.33}
$$

NHẬN XÉT :

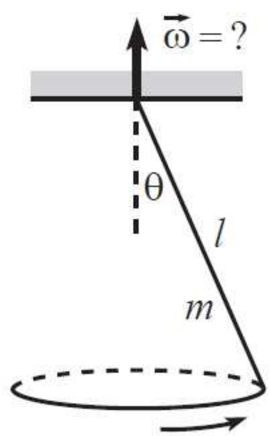
1. Chúng ta thấy rằng các khối lượng A và C là tức thời đứng yên ngay sau cú đánh, và khối lượng B nhận toàn bộ xung tác động. Nhìn lại thì điều này là rõ ràng. Cơ bản mà nói, thì hoàn toàn có thể để cho cả A và C là vẫn đứng yên trong khi B di

chuyển một chút, vì vậy đây là điều xảy ra. Nếu B di chuyển vào trong trang giấy bởi một khoảng cách ϵ nhỏ, thì A và C sẽ không biết rằng là B đã di chuyển, bởi vì khoảng cách của chúng tới B sẽ thay đổi (với giả sử rằng là chúng không di chuyển) một khoảng có độ lớn chỉ có bậc ϵ^2. Nếu chúng ta thay đổi bài toán và cho thêm một khối lượng D vào, giả sử như, trung điểm của cạnh huyền, thì nó sẽ trở nên *không* thể để cho A, C, và D đứng yên trong khi B di chuyển một chút. Vì vậy sẽ phải có chuyển động nào đó khác thêm vào B. Cơ cấu này chính là chủ đề của Bài tập luyện tập 9.38.

2. Theo thời gian, hệ sẽ trải qua một chuyển động tương đối phức tạp. Điểm khối tâm sẽ chuyển động với vận tốc không đổi trong khi đó các khối lượng sẽ quay xung quanh nó theo một cách khá là rắc rối. Bởi vì không có moment lực tác động lên hệ (sau cú đánh ban đầu), chúng ta biết rằng $\mathbf{L}$ sẽ luôn bằng hằng số. Hóa ra rằng ω quay xung quanh $\mathbf{L}$ trong khi các khối lượng quay xung quanh ω đang thay đổi này. Những vấn đề này là chủ đề của Mục 9.6, mặc dù trong thảo luận đó chúng ta đã tự hạn chế chỉ cho các con quay đối xứng, nghĩa là, các con quay với hai moment bằng nhau. Nhưng bên cạnh những vấn đề này, rất là tốt để biết rằng chúng ta có thể xác định được cái gì đang xảy ra ngay sau cú đánh mà không gặp khó khăn nhiều lắm.

3. Vật thể trong bài toán này được giả thiết là đang trôi lơ lửng ngoài vũ trụ. Nếu thay vào đó chúng ta có một vật thể bị gắn khớp vào một điểm cố định đã cho, thì chúng ta phải sử dụng khớp này là điểm gốc tọa độ. Khi đó không cần thiết phải thực hiện bước cuối cùng là cộng vào vận tốc của điểm gốc tọa độ (mà ở trên là điểm khối tâm), bởi vì vận tốc này bây giờ là bằng không. Một cách tương đương, chỉ cần coi điểm gắn khớp là một điểm có khối lượng bằng vô hạn, do đó nó sẽ là điểm khối tâm (đứng yên). ♣

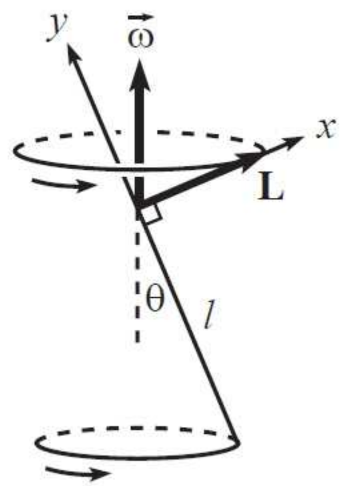
9.4.2 Tần số của chuyển động do một moment lực



Hình 9.20:

Đề bài: Xét một thanh có chiều dài ℓ, khối lượng m, và có khối lượng riêng đồng nhất. Thanh được gắn khớp tại đầu trên của nó và đung đưa xung quanh một trục thẳng đứng. Giả sử rằng các điều kiện được thiết lập sao cho thanh luôn luôn tạo một góc θ so với phương thẳng đứng, như được chỉ ra trong Hình 9.20. Hỏi tần số chuyển động, ω, của chuyển động này là bao nhiêu?

Lời giải: Chiến thuật của chúng ta sẽ là đi tìm các moment chính và sau đó là moment động lượng của hệ (biểu diễn theo ω), và sau đó đi tìm tốc độ thay đổi của $\mathbf{L}$, rồi sau đó tính toán moment lực và cân bằng nó với $d\mathbf{L}/dt$. Chúng ta sẽ chọn điểm gắn khớp là điểm gốc tọa độ.[8] Một lần nữa, có năm bước theo một trình tự chuẩn mà chúng ta phải thực hiện.



Hình 9.21:

- **Tính các moment chính** Các trục chính là trục dọc theo thanh, cùng với hai trục trực giao bất kỳ vuông góc với thanh. Vì vậy gọi các trục x và y là các trục được chỉ ra trong Hình 9.21. Chiều dương của trục z khi đó có hướng chỉ ra ngoài trang giấy. Các moment (đối với điểm gắn khớp) là $I_x = m\ell^2/3, I_y = 0$ và $I_z = m\ell^2/3$ (mà sẽ không cần dùng đến).

- **Tìm L** Vector vận tốc góc chỉ theo phương thẳng đứng (tuy nhiên, hãy xem nhận xét thứ ba sau lời giải này), vì vậy trong cơ sở các trục chính, vector vận tốc góc là

[8]Đây là một sự lựa chọn tốt hơn so với điểm khối tâm bởi vì bằng cách này chúng ta không phải lo lắng về bất cứ các lực nào tác dụng tại khớp khi tính toán moment lực. Nhiệm vụ của Bài tập luyện tập 9.41 là làm việc với lời giải phức tạp hơn có điểm khối tâm là gốc tọa độ.

$\omega = (\omega \sin\theta, \omega\cos\theta, 0)$, trong đó ω chưa được xác định. Moment động lượng của hệ (đối với điểm gắn khớp) do đó là

$$\mathbf{L} = (I_x\omega_x, I_y\omega_y, I_z\omega_z) = \big((1/3)m\ell^2\omega\sin\theta, 0, 0\big). \tag{9.34}$$

- **Tìm $d\mathbf{L}/dt$:** Vector $\mathbf{L}$ trong phương trình (9.34) có hướng lên trên về bên phải, dọc theo trục x (tại thời điểm được chỉ ra trong Hình 9.21), với độ lớn là $L = (1/3)m\ell^2\omega\sin\theta$. Khi thanh quay xung quanh trục thẳng đứng, $\mathbf{L}$ sẽ vẽ ra bề mặt của một hình nón. Nghĩa là, điểm đầu của $\mathbf{L}$ vẽ ra một đường tròn nằm ngang. Bán kính của đường tròn này là thành phần nằm ngang của $\mathbf{L}$, mà bằng $L\cos\theta$. Vận tốc của điểm đầu đó (có độ lớn bằng $d\mathbf{L}/dt$) do đó là $(L\cos\theta)\omega$, bởi vì $\mathbf{L}$ quay xung quanh trục thẳng đứng với cùng tần số của thanh. Vì vậy $d\mathbf{L}/dt$ có độ lớn

$$\left|\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right| = (L\cos\theta)\omega = \frac{1}{3}m\ell^2\omega^2\sin\theta\cos\theta, \tag{9.35}$$

và nó có hướng chỉ vào trong trang giấy.

NHẬN XÉT: Với các vật thể phức tạp hơn trong đó $I_y \neq 0$, $\mathbf{L}$ sẽ không có hướng đẹp đẽ dọc theo một trục chính, vì vậy độ dài của thành phần nằm ngang của nó (bán kính của đường tròn mà $\mathbf{L}$ vẽ ra) sẽ không rõ ràng ngay lập tức. Trong trường hợp này, bạn có thể hoặc là tính toán một cách rõ ràng thành phần nằm ngang (xem ví dụ về con quay trong Mục 9.7.5), hoặc bạn chỉ có thể làm các việc theo cách thức cũ bằng cách đi tìm tốc độ thay đổi của $\mathbf{L}$ thông qua biểu thức $d\mathbf{L}/dt = \omega \times \mathbf{L}$, mà nó đúng với các lý do giống như làm cho $\mathbf{v} \equiv d\mathbf{r}/dt = \omega \times \mathbf{r}$ đúng. Trong bài toán này, chúng ta nhận được

$$\begin{aligned} d\mathbf{L}/dt &= (\omega\sin\theta, \omega\cos\theta, 0) \times \big((1/3)m\ell^2\omega\sin\theta, 0, 0\big) \\ &= \big(0, 0, -(1/3)m\ell^2\omega^2\sin\theta\cos\theta\big), \end{aligned} \tag{9.36}$$

phù hợp với phương trình (9.35). Và hướng của nó cũng đúng, bởi vì chiều âm của trục z chỉ vào trong trang giấy. Chú ý rằng chúng ta đã tính toán tích có hướng này trong cơ sở các trục chính. Mặc dù các trục này là thay đổi theo thời gian, chúng là một tập các vector cơ sở hoàn toàn tốt tại thời điểm bất kỳ. ♣

- **Tính moment lực:** Moment lực (đối với điểm khớp quay) là do trọng lực, tác dụng lên điểm khối tâm của thanh. Vì vậy $\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ có độ lớn

$$\tau = rF\sin\theta = (\ell/2)(mg)\sin\theta, \tag{9.37}$$

và nó có hướng vào trong trang giấy.

- **Cân bằng τ với $d\mathbf{L}/dt$:** Các vector $d\mathbf{L}/dt$ và τ cả hai đều hướng vào trong trang giấy, điều này là tốt, bởi vì chúng nên có cùng hướng. Việc cân bằng độ lớn của chúng cho ta

$$\frac{m\ell^2\omega^2 \sin\theta\cos\theta}{3} = \frac{mg\ell\sin\theta}{2} \quad \Longrightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{3g}{2l\cos\theta}}. \tag{9.38}$$

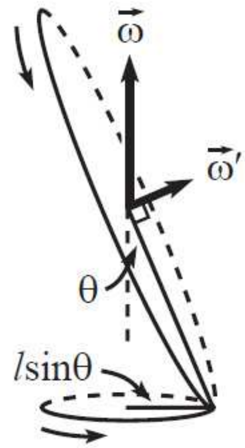
NHẬN XÉT:

- Tần số này là lớn hơn một chút so với tần số quay nhận được nếu chúng ta có một khối lượng tại đầu của một thanh không khối lượng có chiều dài ℓ. Từ Bài tập 9.12, tần số trong trường hợp này là $\sqrt{g/\ell\cos\theta}$. Vì vậy, theo nghĩa nào đó, một thanh đồng chất có chiều dài ℓ sẽ cư xử giống như một khối lượng tại đầu của một thanh không khối lượng có chiều dài là $2l/3$, miễn là khi chỉ các chuyển động quay này là được quan tâm đến.
- Khi $\theta \to \pi/2$, tần số sẽ tiến ra ∞, và điều này hợp lý. Và khi $\theta \to 0$, nó tiến đến $\sqrt{3g/2l}$, nhưng điều này không hiển nhiên lắm.
- Như đã giải thích trong Bài tập 9.1, ω ngay tại một thời điểm tức thời không được xác định một cách duy nhất trong một vài tình huống. Tại thời điểm được chỉ ra trong Hình 9.20, thanh đang chuyển động thẳng vào trong trang giấy. Điều gì sẽ xảy ra nếu một người nào đó khác muốn nghĩ thanh (ngay tức thời) đang quay xung quanh trục ω' vuông góc với thanh (là trục x, như trong ký hiệu ở trên), thay vì là trục thẳng đứng, như được chỉ ra trong Hình 9.22. Hỏi vận tốc góc ω' là bao nhiêu?

  Tốt thôi, nếu ω là vận tốc góc của thanh xung quanh trục thẳng đứng, thì chúng ta có thể quan sát đỉnh của thanh như là tức thời đang chuyển động trong một đường tròn có bán kính $l\sin\theta$ xung quanh trục thẳng đứng ω. Vì vậy $\omega(l\sin\theta)$ là vận tốc của đỉnh của thanh. nhưng chúng ta có thể quan sát đỉnh của thanh như là tức thời đang chuyển động trong một đường tròn có bán kính ℓ xung quanh ω', như đã được chỉ ra. Vận tốc của đỉnh của thanh vẫn là $\omega(l\sin\theta)$, vì vậy vận tốc góc xung quanh trục này được cho bởi $\omega'\ell = \omega(l\sin\theta)$. Vì vậy $\omega' = \omega\sin\theta$, mà đơn giản nó là thành phần theo phương x của ω mà chúng ta đã tìm được ở trên, ngay trước phương trình (9.34). Moment quán tính xung quanh ω' là $m\ell^2/3$, vì vậy moment động lượng có độ lớn là $(m\ell^2/3)(\omega\sin\theta)$, phù hợp với phương trình (9.34). Và hướng của nó là dọc theo trục x, như nó phải là như vậy.

  Chú ý rằng mặc dù ω không được xác định một cách duy nhất tại bất kỳ thời điểm nào, thì $\mathbf{L} \equiv \int(\mathbf{r}\times\mathbf{p})dm$ phải chắc chắn được xác định duy nhất.[9] Việc chọn ω có hướng thẳng đứng, như chúng ta đã làm trong lời giải bên trên, theo nghĩa nào đó là sự lựa chọn tự nhiên, bởi vì ω này không đổi theo thời gian. ♣

[9] Sự xác định không duy nhất của ω nảy sinh từ thực tế rằng $I_y = 0$ ở đây. Nếu tất cả các moment là khác không, thì $(L_x, L_y, L_z) = (I_x\omega_x, I_y\omega_y, I_z\omega_z)$ sẽ xác định ω duy nhất, khi đã cho $\mathbf{L}$.



Hình 9.22:

9.5 Các phương trình Euler

Xét một vật thể rắn ngay tức thời đang quay xung quanh một trục ω. Trục ω này có thể thay đổi theo thời gian, nhưng tất cả những gì mà chúng ta quan tâm đến ở đây bây giờ là nó như thế nào tại thời điểm đã cho. Moment động lượng được cho bởi phương trình (9.8) dưới dạng $\mathbf{L} = \mathbf{I}\omega$, trong đó $\mathbf{I}$ là tensor quán tính, được tính toán đối với một gốc tọa độ cho trước và một tập các trục đã cho (và tất nhiên ω được viết trong cùng một cơ sở).

Như thường lệ, mọi thứ sẽ đẹp hơn rất nhiều nếu chúng ta sử dụng các trục chính (đối với một gốc tọa độ đã chọn) như là các vector cơ sở của hệ tọa độ của chúng ta. Bởi vì các trục này là cố định đối với vật thể đang quay, chúng sẽ quay đối với hệ tọa độ cố định. Trong cơ sở này, $\mathbf{L}$ sẽ có dạng rất đẹp,

$$\mathbf{L} = (I_1\omega_1, I_2\omega_2, I_3\omega_3), \tag{9.39}$$

trong đó ω_1, ω_2 và ω_3 là các thành phần của ω dọc theo các trục chính. Nói cách khác, nếu bạn lấy vector $\mathbf{L}$ trong không gian và chiếu nó lên trên các trục chính tức thời, thì bạn sẽ nhận được các thành phần trong phương trình (9.39).

Một mặt, việc viết $\mathbf{L}$ theo các trục chính đang quay cho phép chúng ta viết nó trong dạng đẹp đẽ của phương trình (9.39). Nhưng mặt khác, việc viết $\mathbf{L}$ theo cách này sẽ làm cho chúng ta phải thực hiện một số việc để đi xác định nó sẽ thay đổi theo thời gian như thế nào, bởi vì các trục chính bản thân chúng là đang thay đổi. Tuy nhiên, hóa ra rằng những lợi ích nhận được từ điều này sẽ nhiều hơn so với các bất lợi, vì vậy chúng ta sẽ liên tục sử dụng các trục chính làm các vector cơ sở của chúng ta.

Mục đích của mục này là đi tìm một biểu thức đối với $d\mathbf{L}/dt$, và sau đó cân bằng nó với moment lực. Kết quả sẽ là các phương trình Euler trong phương trình (9.45).

Tìm các phương trình Euler

Nếu chúng ta viết **L** theo hệ tọa độ vật thể, là hệ tọa độ mà chúng ta sẽ chọn được xác định bởi các trục chính được vẽ lên trên vật thể, thì **L** có thể thay đổi (đối với hệ tọa độ trái đất) bởi hai lý do. Nó có thể thay đổi bởi vì các tọa độ của nó trong hệ tọa độ vật thể thay đổi, và nó cũng có thể thay đổi bởi vì sự quay của hệ tọa độ vật thể. Để cho chính xác hơn, gọi $\mathbf{L_0}$ là vector **L** tại một thời điểm đã cho. Tại thời điểm này, tưởng tượng là vẽ vector $\mathbf{L_0}$ lên trên hệ tọa độ vật thể, sao cho $\mathbf{L_0}$ khi đó quay cùng vật thể. Tốc độ thay đổi của **L** đối với hệ tọa độ trái đất có thể được viết (một cách đồng nhất) theo cách sau,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d(\mathbf{L} - \mathbf{L_0})}{dt} + \frac{d\mathbf{L_0}}{dt}. \tag{9.40}$$

Số hạng thứ hai ở đây đơn giản là tốc độ thay đổi của một vector cố định trong vật thể, mà chúng ta biết nó bằng $\omega \times L_0$, mà bằng $\omega \times L$ tại thời điểm này. Số hạng thứ nhất là tốc độ thay đổi của **L** đối với hệ tọa độ vật thể, mà chúng ta sẽ ký hiệu nó bởi $\delta\mathbf{L}/\delta t$. Đây là đại lượng mà một người nào đó đang đứng yên trong hệ tọa độ vật thể đo được. Vì vậy cuối cùng chúng ta nhận được

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{\delta\mathbf{L}}{\delta t} + \omega \times \mathbf{L}. \tag{9.41}$$

Đây thực ra là một mệnh đề tổng quát, đúng đối với bất kỳ vector nào trong hệ tọa độ quay (chúng ta sẽ nhận được nó theo một cách khác toán học hơn trong Chương 10). Không có gì là đặc biệt với **L** khi ta sử dụng nó trong phương trình trên. Hơn nữa, chúng ta không cần phải tự giới hạn đối với các trục chính. Khi miêu tả bằng lời, cái mà chúng ta đã chỉ ra là tổng thay đổi bằng với sự thay đổi đối với hệ tọa độ quay, cộng với sự thay đổi của hệ tọa độ quay đối với hệ tọa độ cố định. Đây chỉ là cách thông thường của việc cộng vận tốc khi một hệ tọa độ di chuyển đối với một thệ tọa độ khác.

Bây giờ chúng ta hãy sử dụng sự lựa chọn các trục chính của chúng ta là các trục trong hệ tọa độ vật thể. Điều này sẽ đưa phương trình (9.41) về một dạng có thể sử dụng được. Sử dụng phương trình (9.39), chúng ta có thể viết lại phương trình (9.41) dưới dạng

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(I_1\omega_1, I_2\omega_2, I_3\omega_3) + (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \times (I_1\omega_1, I_2\omega_2, I_3\omega_3). \tag{9.42}$$

Số hạng $\delta\mathbf{L}/\delta t$ thực ra là bằng với $(d/dt)(I_1\omega_1, I_2\omega_2, I_3\omega_3)$, bởi vì một người nào đó trong hệ tọa độ vật thể sẽ đo các thành phần của $\mathbf{L}$ đối với các trục chính bằng $(I_1\omega_1, I_2\omega_2, I_3\omega_3)$. Và $\delta\mathbf{L}/\delta t$ theo định nghĩa là tốc độ mà các thành phần này thay đổi.

Phương trình (9.42) cân bằng hai vector. Bởi vì nó đúng với bất kỳ vector nào, các vector (bằng nhau) này là không phụ thuộc vào hệ tọa độ mà chúng ta chọn để miêu tả chúng (phương trình (9.41) là không liên quan gì đến một hệ tọa độ). Nhưng bởi vì chúng ta đã chọn một hệ tọa độ rõ ràng cho vế phải của phương trình (9.42), chúng ta cũng nên chọn hệ tọa độ đó cho vế trái. Khi đó chúng ta có thể cân bằng các thành phần ở vế trái với các thành phần ở vế phải. Chiếu $d\mathbf{L}/dt$ lên trên các trục chính tức thời, chúng ta có

$$\left(\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_1, \left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_2, \left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_3\right) = \frac{d}{dt}(I_1\omega_1, I_2\omega_2, I_3\omega_3) + (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \times (I_1\omega_1, I_2\omega_2, I_3\omega_3). \tag{9.43}$$

NHẬN XÉT: Vế trái nhìn trông phức tạp hơn bản chất của nó. Lý do chúng ta đã viết nó theo cách cồng kềnh này là như sau (đây là một nhận xét mà cần phải đọc rất chậm rãi). Chúng ta đã có thể viết vế trái dưới dạng $(d/dt)(L_1, L_2, L_3)$, nhưng điều này có thể gây ra sự nhầm lẫn giữa việc liệu L_i là các thành phần đối với các trục đang quay, hay là các thành phần đối với tập các trục cố định mà trùng với các trục chính đang quay tại thời điểm đang xét này. Nghĩa là, có phải chúng ta chiếu $\mathbf{L}$ lên các trục chính để nhận được các thành phần của nó, và rồi lấy đạo hàm của các thành phần này? Hay là chúng ta lấy đạo hàm của $\mathbf{L}$ và rồi chiếu nó lên các trục chính để nhận được các thành phần? Cách hiểu sau là cái mà chúng ta đề cập trong phương trình (9.43).[10] Trong cách mà chúng ta đã viết vế trái của phương trình (9.43), thì rõ ràng là chúng ta đã lấy đạo hàm trước. Sau tất cả thì chúng ta đơn giản là chiếu phương trình (9.41) lên trên các trục chính. ♣

Các đạo hàm lấy theo thời gian ở vế phải của phương trình (9.43) là $d(I_1\omega_1)/dt = I_1\dot{\omega}_1$, vân vân..., bởi vì các I là không đổi. Thực hiện phép nhân có hướng và cân bằng với các

[10] Cách hiểu trước theo định nghĩa là $\delta\mathbf{L}/dt$. Hai cách hiểu này chắc chắn là cho các kết quả khác nhau. Ví dụ như, nếu thay vì $\mathbf{L}$ chúng ta xét một vector cố định trong vật thể (ví dụ như vector $\mathbf{L_0}$ ở trên), thì cách hiểu thứ nhất cho một kết quả bằng không, trong khi đó cách hiểu thứ hai cho một kết quả khác không. Xét cái mà chúng ta đang muốn nói đến, như là, vector $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, tôi nghĩa rằng cách hiểu logic hơn của $(d/dt)(L_1, L_2, L_3)$ là cách thứ nhất, vì vậy nên tuyệt đối tránh sử dụng nó.

thành phần tương ứng mỗi vế cho ta ba phương trình,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_1 &= I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_3\omega_2, \\
\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_2 &= I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3, \\
\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_3 &= I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_2\omega_1.
\end{aligned} \tag{9.44}$$

Chúng ta bây giờ sẽ sử dụng các kết quả của Mục 8.4.3 để nói rằng nếu chúng ta đã chọn gốc tọa độ của hệ quy chiếu quay hoặc là một điểm cố định hay là điểm khối tâm (như là điểm mà chúng ta luôn chọn), thì chúng ta có thể cân bằng $d\mathbf{L}/dt$ với moment lực, τ. Do đó chúng ta có

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_3\omega_2, \\
\tau_2 &= I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3, \\
\tau_3 &= I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_2\omega_1.
\end{aligned} \tag{9.45}$$

Đây là *các phương trình Euler*. Bạn chỉ cần phải nhớ một trong các phương trình này, bởi vì hai phương trình còn lại có thể nhận được bằng cách lấy hoán vị các chỉ số.

NHẬN XÉT :

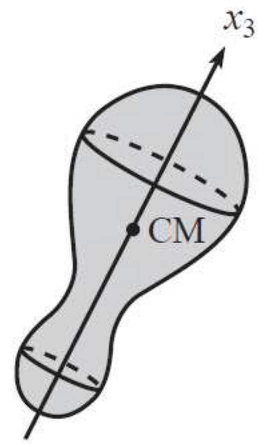
1. Chúng ta nhắc lại rằng các vế trái và vế phải của các phương trình (9.45) là các thành phần được đo đối với các trục chính tức thời. Khi chúng ta làm một bài toán, ví dụ như, trong đó τ_3 có một giá trị là hằng số khác không, và τ_1 và τ_2 là luôn luôn bằng không (như trong ví dụ trong Mục 9.4.2). Điều này không có nghĩa là τ là một vector hằng số. Ngược lại, τ luôn luôn chỉ dọc theo hướng của vector $\hat{\mathbf{x}}_3$ trong hệ tọa độ quay, nhưng vector này là đang thay đổi trong hệ tọa độ cố định (trừ khi $\hat{\mathbf{x}}_3$ chỉ dọc theo ω).

2. Hai loại số hạng trong các vế phải của các phương trình (9.44) là hai loại thay đổi mà $\mathbf{L}$ có thể có. $\mathbf{L}$ có thể thay đổi bởi vì các thành phần của nó đối với hệ quy chiếu quay thay đổi, và $\mathbf{L}$ cũng có thể thay đổi bởi vì vật thể là đang quay xung quanh ω.

3. Mục 9.6.1 về con quay đối xứng tự do (được quan sát từ một hệ quy chiếu vật thể) cung cấp cho ta một ví dụ tốt của việc sử dụng các phương trình Euler. Một ứng dụng thú vị khác là bài toán nổi tiếng "Định lý vợt tennis" (Bài tập 9.14).

4. Cũng nên chú ý rằng bạn không bao giờ *phải* sử dụng các phương trình Euler. Bạn đơn giản có thể bắt đầu từ đầu và sử dụng phương trình (9.41) mỗi khi bạn giải một bài toán. Quan điểm ở đây là chúng ta đã thực hiện các tính toán của $d\mathbf{L}/dt$ một lần và có thể sử dụng nó về sau, vì vậy bạn có thể chỉ sử dụng kết quả trong các phương trình (9.45). ♣

9.6 Con quay đối xứng tự do



Hình 9.23:

Con quay đối xứng tự do là ví dụ cổ điển của một ứng dụng của các phương trình Euler. Xét một vật thể mà có hai moment chính của nó bằng nhau, với điểm khối tâm là điểm gốc tọa độ. Giả sử rằng vật thể được đặt trong không gian vũ trụ bên ngoài, xa khỏi bất cứ nguồn ngoại lực nào. Chúng ta sẽ chọn vật thể có dạng đối xứng trụ xung quanh một trục nào đó (xem Hình 9.23), mặc dù việc này là không cần thiết; ví dụ như, một vật thể có mặt cắt hình vuông cũng sẽ nhận được hai moment chính bằng nhau. Các trục chính khi đó là trục đối xứng và hai trục trực giao bất kỳ nào trong mặt cắt đi qua điểm khối tâm. Gọi trục đối xứng được chọn là trục $\hat{\mathbf{x}}_3$. Khi đó các moment là $I_1 = I_2 \equiv I$, và I_3.

Chúng ta đầu tiên sẽ xem xét mọi thứ từ quan điểm của một người đang đứng yên trên vật thể, và sau đó chúng ta sẽ xem xét các thứ từ quan điểm của một người đứng yên trong một hệ quy chiếu quán tính. Mức độ toán học liên quan đến ở đây thì không tệ lắm, nhưng với hầu hết các loại bài toán về con quay, nó sẽ khó khăn để có được cảm nhận trực giác đối với việc các vector khác nhau đang chuyển động như thế nào. Và việc có được cảm nhận trực giác thậm chí còn khó hơn trong việc phân tích trong hệ tọa độ vật thể sau đây do việc sử dụng hệ quy chiếu phi quán tính. Nhưng hãy xem chúng ta tìm được gì.

9.6.1 Quan sát từ hệ quy chiếu vật thể

Thay $I_1 = I_2 \equiv I$ vào trong các phương trình của Euler trong phương trình (9.45), và sử dụng thực tế rằng tất cả các τ_i đều bằng không (bởi vì không có các moment lực, do con quay là "tự do"), chúng ta có

$$\begin{aligned} 0 &= I\dot{\omega}_1 + (I_3 - I)\omega_3\omega_2, \\ 0 &= I\dot{\omega}_2 + (I - I_3)\omega_1\omega_3, \\ 0 &= I_3\dot{\omega}_3. \end{aligned} \tag{9.46}$$

Phương trình cuối cùng nói rằng ω_3 là hằng số. Nếu sau đó chúng ta định nghĩa

$$\Omega \equiv \left(\frac{I_3 - I}{I}\right)\omega_3, \tag{9.47}$$

thì hai phương trình đầu trở thành

$$\dot{\omega}_1 + \Omega\omega_2 = 0, \quad \text{và} \quad \dot{\omega}_2 - \Omega\omega_1 = 0. \tag{9.48}$$

Lấy đạo hàm của biểu thức thứ nhất trong hai phương trình này, và sau đó sử dụng biểu thức thứ hai để triệt tiêu $\dot{\omega}_2$, cho ta

$$\ddot{\omega}_1 + \Omega^2\omega_1 = 0, \tag{9.49}$$

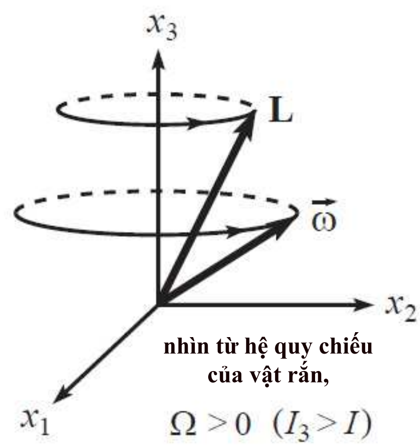
và tương tự đối với ω_2. Đây là một phương trình của dao động điều hòa đơn giản cổ điển. Chúng ta do đó có thể viết $\omega_1(t)$ dưới dạng, ví dụ như, một hàm cosine. Và khi đó phương trình (9.48) nhận được một dạng hàm sine đối với $\omega_2(t)$. Vì vậy chúng ta có

$$\omega_1(t) = A\cos(\Omega t + \phi), \quad \omega_2(t) = A\sin(\Omega t + \phi). \tag{9.50}$$

Chúng ta thấy rằng $\omega_1(t)$ và $\omega_2(t)$ là các thành phần của một đường tròn trong hệ quy chiếu vật thể. Do đó, vector ω sẽ vẽ lên một hình nón xung quanh $\hat{\mathbf{x}}_3$ (xem Hình 9.24), với tần số là Ω, như được quan sát bởi một người đang đứng trên vật thể. Tần số Ω này trong phương trình (9.47) phụ thuộc vào giá trị của ω_3 và vào dạng hình học của vật thể (thông qua I_3 và I). Nhưng bán kính, A, của hình nón ω được xác định bởi các giá trị đầu của ω_1 và ω_2.

Moment động lượng là

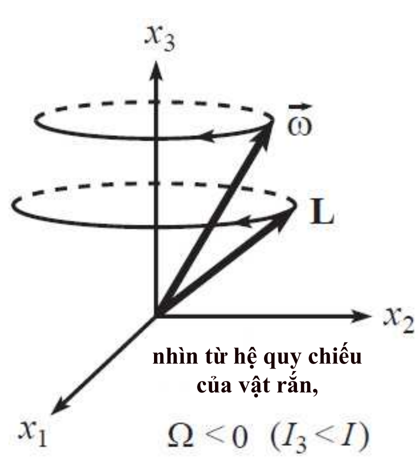
$$\mathbf{L} = (I_1\omega_1, I_2\omega_2, I_3\omega_3) = (IA\cos(\Omega t + \phi), IA\sin(\Omega t + \phi), I_3\omega_3), \tag{9.51}$$



Hình 9.24:

vì vậy **L** cũng vẽ ra một hình nón xung quanh $\hat{\mathbf{x}}_3$ với tần số Ω, như được quan sát bởi ai đó đang đứng trên vật thể. Điều này được chỉ ra trong Hình 9.24 đối với trường hợp $\Omega > 0$ (nghĩa là, $I_3 > I$). Trong trường hợp này, $I_3 > I$ suy ra rằng $L_3/L_2 > \omega_3/\omega_2$, vì vậy vector **L** nằm trên vector ω (nghĩa là, ở giữa vector ω và $\hat{\mathbf{x}}_3$). Một vật thể với $I_3 > I$, ví dụ như một đồng xu, được gọi là một con quay *dẹt*.

Hình 9.25 chỉ ra trường hợp trong đó $\Omega < 0$ (nghĩa là, $I_3 < I$). Trong trường hợp này, $I_3 < I$ suy ra rằng $L_3/L_2 < \omega_3/\omega_2$, vì vậy **L** nằm bên dưới vector ω, như đã chỉ ra trong hình vẽ. Và bởi vì Ω là âm, các vector ω và **L** sẽ quay xung quanh $\hat{\mathbf{x}}_3$ theo hướng ngược lại (theo chiều kim đồng hồ, khi được quan sát từ bên trên). Một vật thể với $I_3 < I$, ví dụ như là một củ cà rốt, được gọi là một con quay *dài*.



Hình 9.25:

Ví dụ (Trái đất): Hãy xét trái đất là con quay của chúng ta. Khi đó $\omega_3 \approx 2\pi/(1$

ngày).[11] Việc phình ra ở đường xích đạo (gây ra bởi chuyển động tự quay của trái đất) làm cho I_3 lớn hơn một chút so với I, và hóa ra rằng $(I_3 - I)/I \approx 1/320$. Do đó, phương trình (9.47) cho ta $\Omega \approx (1/320)2\pi/(1 \text{ ngày})$. Vì vậy vector ω nên quay tròn xung quanh theo một hình nón một lần trong mỗi 320 ngày, như là được quan sát bởi một người trên trái đất. Giá trị thực này vào khoảng 430 ngày. Sự sai khác liên quan đến rất nhiều thứ khác nhau, bao gồm cả sự không hoàn toàn cứng của trái đất, nhưng ít nhất chúng ta đã có một câu trả lời trong các giới hạn lập luận với độ chính xác hợp lý. Sự quay tròn tiến động này của ω được biết đến như là "Sự lắc lư Chandler."

Trong thực tế, làm thế nào để chúng ta có thể xác định được hướng của ω? Đơn giản là chụp một bức ảnh có thời gian phơi sáng kéo dài vào buổi tối. Các ngôi sao sẽ tạo thành các cung tròn của các đường tròn. Tại tâm của tất cả các đường tròn này là một điểm mà nó không chuyển động. Đây chính là hướng của ω. May mắn là, Ω là nhỏ hơn rất nhiều so với ω, vì vậy vector ω không thay đổi mấy trong thời gian phơi sáng, ví dụ như, khoảng một giờ. Vì vậy tâm của các đường tròn về cơ bản là được xác định tốt.

Đối với trái đất thì hình nón ω có kích cỡ như thế nào? Một cách tương đương, giá trị của A bằng bao nhiêu trong phương trình (9.50)? Các quan sát đã chỉ ra rằng vector ω đâm xuyên qua trái đất tại một điểm có khoảng cách khoảng 10 m từ cực bắc, mặc dù khoảng cách này thay đổi lên xuống theo thời gian.[12] Vì vậy, $A/\omega_3 \approx (10\text{m})/R_E$. Nửa góc của hình nón ω do đó là có độ lớn chỉ vào khoảng 10^{-4} độ. Vì vậy nếu bạn sử dụng một bức ảnh chụp có thời gian dài phơi sáng một tối để xem điểm nào trên bầu trời đứng im, và sau đó nếu bạn làm giống như vậy cho 200 tối, bạn có thể không thể nói rằng hai điểm đó thực sự là hai điểm khác nhau.

[11] Điều này không phải là hoàn toàn chính xác, bởi vì trái đất quay 366 lần đối với mỗi 365 ngày, do sự chuyển động xung quanh mặt trời, nhưng nó là đủ chính xác đối với mục đích của chúng ta ở đây.

[12] Khoảng cách này về mặt lý thuyết có thể lớn hơn nhiều hoặc nhỏ hơn nhiều so với 10 m. Nó vô tình có độ lớn như thế là do bản chất của lực tác dụng ngoài. Hệ quả của lực này là sự thay đổi áp suất tại đáy của đại dương và trong không khí; xem Gross (2000). Nếu không có lực tác dụng ngoài, biên độ sẽ tiến về không, do sự không rắn hoàn toàn của trái đất.

9.6.2 Nhìn từ hệ quy chiếu cố định

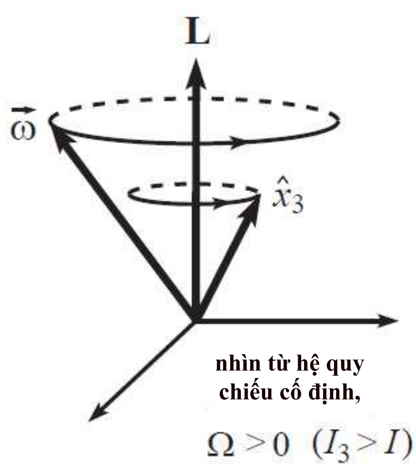
Bây giờ hãy xem con quay đối xứng của chúng ta sẽ như thế nào từ một hệ quy chiếu cố định. Các phương trình của Euler sẽ không giúp được gì nhiều ở đây, bởi vì chúng làm việc với các thành phần của ω trong hệ quy chiếu vật thể. Nhưng may mắn là chúng ta có thể tìm chuyển động bắt đầu từ đầu. Khi biểu diễn theo các trục chính (đang thay đổi), $\hat{\mathbf{x}}_1$, $\hat{\mathbf{x}}_2$, $\hat{\mathbf{x}}_3$, chúng ta có

$$\begin{aligned} \omega &= (\omega_1\hat{\mathbf{x}}_1 + \omega_2\hat{\mathbf{x}}_2) + \omega_3\hat{\mathbf{x}}_3, \\ \mathbf{L} &= I(\omega_1\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{1} + \omega_2\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{2}) + I\omega_3\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{3}. \end{aligned} \tag{9.52}$$

Triệt tiêu số hạng $(\omega_1\hat{\mathbf{x}}_1 + \omega_2\hat{\mathbf{x}}_2)$ từ các phương trình này cho ta (biểu diễn theo Ω được định nghĩa trong phương trình (9.47))

$$\mathbf{L} = I(\omega + \Omega\hat{\mathbf{x}}_3) \quad \Longrightarrow \quad \omega = \frac{L}{I}\hat{\mathbf{L}} - \Omega\hat{\mathbf{x}}_3, \tag{9.53}$$

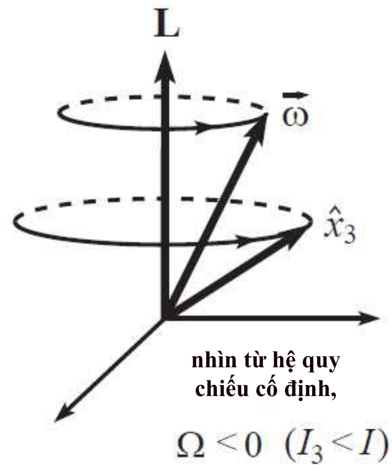
trong đó $L = |\mathbf{L}|$, và $\hat{\mathbf{L}}$ là vector đơn vị theo hướng của $\mathbf{L}$. Mối quan hệ tuyến tính giữa



Hình 9.26:

$\mathbf{L}$, ω, và $\hat{\mathbf{x}}_3$ suy ra rằng ba vector này nằm trong một mặt phẳng. Nhưng $\mathbf{L}$ là luôn cố định, bởi vì không có moment lực nào trong hệ. Do đó, ω và $\hat{\mathbf{x}}_3$ sẽ quay tròn (như chúng ta sẽ thấy bên dưới) xung quanh $\mathbf{L}$, với tính chất là ba vector này luôn luôn đồng phẳng. Xem Hình vẽ 9.26 đối với trường hợp $\Omega > 0$, nghĩa là, $I_3 > I$ (một con quay dẹt), và Hình 9.27 đối với trường hợp $\Omega < 0$, nghĩa là, $I_3 < I$ (một con quay dài).

Tần số của chuyển động quay tròn tiến động này là bao nhiêu, khi được quan sát từ hệ tọa độ cố định? Tốc độ thay đổi của $\hat{\mathbf{x}}_3$ là $\omega \times \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{3}$, bởi vì $\hat{\mathbf{x}}_3$ là cố định trong hệ tọa độ



Hình 9.27:

vật thể, vì vậy sự thay đổi của nó chỉ đến từ sự quay xung quanh ω. Do đó, phương trình (9.53) cho ta

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}_3}{dt} = \left(\frac{L}{I}\hat{\mathbf{L}} - \Omega\hat{\mathbf{x}}_3\right) \times \hat{\mathbf{x}}_3 = \left(\frac{L}{I}\hat{\mathbf{L}}\right) \times \hat{\mathbf{x}}_3. \tag{9.54}$$

Nhưng đây đơn giản là biểu thức cho tốc độ thay đổi của một vector đang quay xung quanh một vector cố định $\tilde{\omega} \equiv (L/I)\hat{\mathbf{L}}$. Tần số của sự quay này là $|\tilde{\omega}| = L/I$. Do đó, $\hat{\mathbf{x}}_3$ quay tròn xung quanh vector cố định $\mathbf{L}$ với tần số

$$\tilde{\omega} = \frac{L}{I}, \tag{9.55}$$

trong hệ tọa độ cố định. Và do đó vector ω cũng vậy, bởi vì nó là đồng phẳng với $\hat{\mathbf{x}}_3$ và $\mathbf{L}$.

NHẬN XÉT:

1. Chúng ta vừa tìm ra được rằng ω quay tròn xung quanh $\mathbf{L}$ với tần số L/I. Khi đó cái gì là sai trong lập luận sau: "Bởi vì tốc độ thay đổi của $\hat{\mathbf{x}}_3$ bằng $\omega \times \hat{\mathbf{x}}_3$, tốc độ thay đổi của ω phải bằng $\omega \times \omega$, mà có giá trị bằng không. Do đó, ω phải là hằng số." Lỗi trong lập luận đó là do vector ω không phải là cố định trong hệ quy chiếu vật thể. Một vector $\mathbf{A}$ phải là cố định trong hệ quy chiếu vật thể để cho tốc độ thay đổi của nó được cho bởi $\omega \times \mathbf{A}$.

2. Chúng ta đã tìm ra trong các phương trình (9.51) và (9.47) rằng một người đang đứng trên vật thể đang quay sẽ thấy $\mathbf{L}$ (và ω) quay tròn với tần số $\Omega \equiv \omega_3(I_3 - I)/I$ xung quanh $\hat{\mathbf{x}}_3$. Nhưng chúng ta tìm ra trong phương trình (9.55) rằng một người đang đứng trong hệ quy chiếu cố định thấy rằng $\hat{\mathbf{x}}_3$ (và ω) quay tròn với tần số L/I xung quanh $\mathbf{L}$. Liệu hai kết quả này có tương thích với nhau? Liệu có phải là chúng ta nên nhận được cùng tần số từ mỗi cách quan sát? (Các câu trả lời là: có, không).

Hai tần số này thực ra là nhất quán với nhau, như chúng ta có thể thấy bởi lập luận sau. Xét mặt phẳng (gọi nó là S) chứa ba vector $\mathbf{L}$, ω và $\hat{\mathbf{x}}_3$. Chúng ta biết từ phương trình (9.51) rằng S quay với tần số $\Omega\hat{\mathbf{x}}_3$ đối với vật thể. Do đó, vật thể sẽ quay với tần số $-\Omega\hat{\mathbf{x}}_3$ đối với S. Và từ phương trình (9.55), S sẽ quay với tần số $(L/I)\hat{\mathbf{L}}$ đối với hệ quy chiếu cố định. Do đó, tổng vận tốc góc của vật thể đối với hệ quy chiếu cố định là (sử dụng hệ quy chiếu S như là một hệ quy chiếu trung gian)

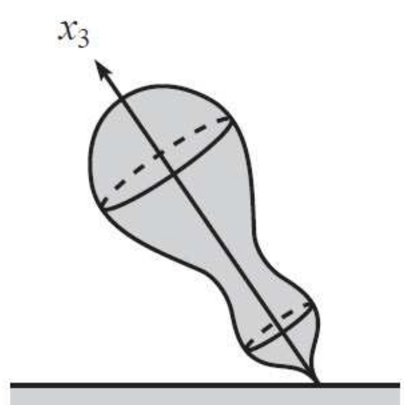
$$\omega_{\text{tổng}} = \frac{L}{I}\hat{\mathbf{L}} - \Omega\hat{\mathbf{x}}_3. \tag{9.56}$$

Nhưng từ phương trình (9.53), giá trị này đơn giản là ω, như nó phải bằng như vậy. Vì vậy hai tần số trong các phương trình (9.47) và (9.55) thực ra là nhất quán.

Đối với trái đất, I_3 và I gần như là như nhau, vì vậy $\Omega \equiv \omega_3(I_3 - I)/I$ và L/I là hoàn toàn khác nhau. L/I xấp xỉ bằng với L/I_3, mà nó về cơ bản là bằng ω_3. Mặt khác, Ω xấp xỉ bằng với $(1/300)\omega_3$. Về cơ bản mà nói, một người quan sát bên ngoài sẽ thấy ω quay xung quanh hình nón của nó với tốc độ xấp xỉ bằng với tốc độ tự quay của trái đất. Nhưng nó không phải chính xác là tốc độ này, và sự khác nhau này là nguyên nhân gây ra việc người quan sát trên trái đất thấy rằng ω quay tròn với một Ω khác không.

3. Sự quay tròn tiến động trong hệ quy chiếu cố định của $\hat{\mathbf{x}}_3$ xung quanh $\mathbf{L}$ không nên bị nhầm lẫn với hiệu ứng "sự quay tròn tiến động của các phân điểm". Xem Bài tập 10.15 để biết về một thảo luận của hiệu ứng này. ♣

9.7 Con quay đối xứng có trọng lượng

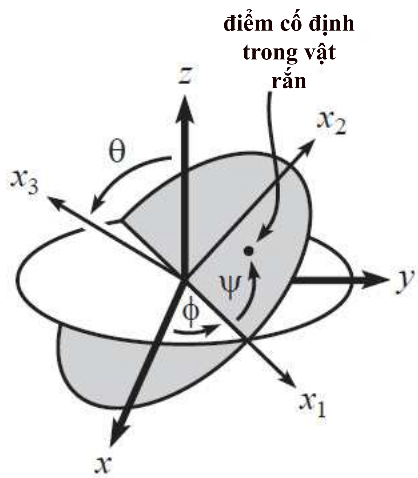


Hình 9.28:

Bây giờ xét một con quay đối xứng có trọng lượng, nghĩa là, một con quay tự quay quanh nó trên một mặt bàn, dưới ảnh hưởng của lực trọng trường (xem Hình vẽ 9.28).

Giả sử rằng đầu nhọn của con quay bị cố định trên mặt bàn bởi một khớp quay. Chúng ta sẽ tìm ra chuyển động của con quay bởi hai cách khác nhau bên dưới trong các Mục 9.7.3 và 9.7.4. Cách thứ nhất sử dụng $\tau = d\mathbf{L}/dt$, và cách thứ hai sử dụng phương pháp Lagrange.

9.7.1 Các góc Euler



Hình 9.29:

Đối với cả hai phương pháp, sẽ đều thuận tiện khi sử dụng *các góc Euler*, θ, ϕ, ψ, mà đã được chỉ ra trong Hình 9.29 và được định nghĩa như sau.

- θ: Gọi $\hat{\mathbf{x}}_3$ là trục đối xứng của con quay. Định nghĩa θ là góc mà $\hat{\mathbf{x}}_3$ tạo với trục thẳng đứng $\hat{\mathbf{z}}$ của hệ tọa độ cố định.

- ϕ: Vẽ mặt phẳng trực giao với $\hat{\mathbf{x}}_3$. Gọi $\hat{\mathbf{x}}_1$ là giao của mặt phẳng này với mặt phẳng $x - y$ nằm ngang. Định nghĩa ϕ là góc mà $\hat{\mathbf{x}}_1$ tạo với trục $\hat{\mathbf{x}}$ trong hệ tọa độ cố định. Chú ý rằng $\hat{\mathbf{x}}_1$ không nhất thiết là phải cố định trong vật thể.

- ψ: Gọi $\hat{\mathbf{x}}_2$ là vector trực giao với $\hat{\mathbf{x}}_3$ và $\hat{\mathbf{x}}_1$, như đã chỉ ra trong hình vẽ. Cũng như $\hat{\mathbf{x}}_1$, $\hat{\mathbf{x}}_2$ không nhất thiết phải là vector cố định trong vật thể. Gọi hệ tọa độ S là hệ tọa độ mà các trục của nó là $\hat{\mathbf{x}}_1$, $\hat{\mathbf{x}}_2$ và $\hat{\mathbf{x}}_3$. Định nghĩa ψ là góc của sự quay của vật thể xung quanh trục $\hat{\mathbf{x}}_3$ trong hệ tọa độ S. Vì vậy $\dot{\psi}\hat{\mathbf{x}}_3$ là vận tốc góc của vật thể đối với S. Và từ hình vẽ, chúng ta cũng thấy rằng vận tốc góc của hệ tọa độ S đối với hệ tọa độ cố định là $\dot{\phi}\hat{\mathbf{z}} + \dot{\theta}\hat{\mathbf{x}}_1$.

Vận tốc góc của vật thể đối với hệ tọa độ cố định là bằng với vận tốc góc của vật thể đối với hệ tọa độ S, cộng với vận tốc góc của hệ tọa độ S đối với hệ tọa độ cố định. Từ phần trên, chúng ta do đó có

$$\omega = \dot{\psi}\hat{\mathbf{x}}_3 + (\dot{\theta}\hat{\mathbf{z}} + \dot{\phi}\hat{\mathbf{x}}_1). \tag{9.57}$$

Thông thường sẽ thuận tiện hơn khi viết lại toàn bộ ω phụ thuộc vào các vector cơ sở trực giao $\hat{\mathbf{x}}_1$, $\hat{\mathbf{x}}_2$ và $\hat{\mathbf{x}}_3$. Bởi vì $\hat{\mathbf{z}} = \cos\theta\hat{\mathbf{x}}_3 + \sin\theta\hat{\mathbf{x}}_2$, phương trình (9.57) cho ta

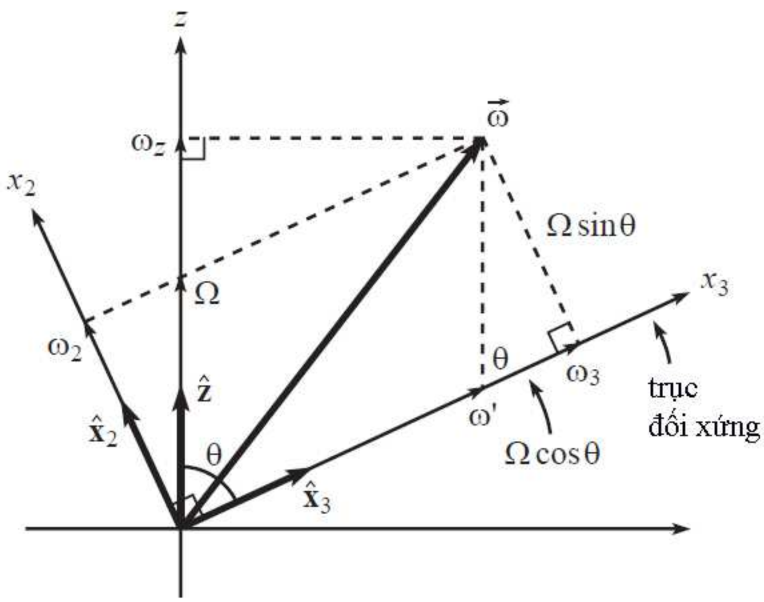
$$\omega = (\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)\hat{\mathbf{x}}_3 + \dot{\phi}\sin\theta\hat{\mathbf{x}}_2 + \dot{\theta}\hat{\mathbf{x}}_1. \tag{9.58}$$

Dạng này của ω nói chung là sẽ có ích hơn, bởi vì $\hat{\mathbf{x}}_1$, $\hat{\mathbf{x}}_2$, $\hat{\mathbf{x}}_3$ là các trục chính của vật thể. (Chúng ta đang giả thiết rằng chúng ta đang làm việc với một con quay đối xứng, với $I_1 = I_2 \equiv I$. Điều này có nghĩa là bất cứ các trục nào trong mặt phẳng $\hat{\mathbf{x}}_1 - \hat{\mathbf{x}}_2$ là các trục chính.) Mặc dù $\hat{\mathbf{x}}_1$ và $\hat{\mathbf{x}}_2$ không cố định trong vật thể, chúng vẫn là các trục chính tốt tại bất kỳ thời điểm nào.

9.7.2 Độ lệch của các thành phần của ω

Các biểu thức trên của ω nhìn có vẻ hơi đáng sợ, nhưng có một biểu đồ rất hữu ích mà chúng ta có thể vẽ ra (xem Hình 9.30) mà nó làm cho mọi thứ dễ hơn nhiều để biết cái gì đang xảy ra. Hãy nói một chút về điều này trước khi đi vào giải quyết bài toán ban đầu của con quay tự quay. Biểu đồ thì khá là dày đặc (bạn thậm chí có thể nói rằng nó trông còn đáng sợ hơn ω ở trên), vì vậy chúng ta sẽ thảo luận về nó một cách chậm rãi. Trong phần thảo luận sau đây, chúng ta sẽ đơn giản mọi thứ bằng cách cho $\dot{\theta} = 0$. Tất cả các tính chất thú vị của ω sẽ không bị ảnh hưởng. Thành phần $\dot{\theta}\hat{\mathbf{x}}_1$ của ω trong các phương trình (9.57) và (9.58) đơn giản là có từ việc tưởng tượng sự đi lên hoặc rơi xuống của con quay. Chúng ta do đó sẽ tập trung vào các vấn đề phức tạp hơn, như là các thành phần của ω trong mặt phẳng của $\hat{\mathbf{x}}_3$, $\hat{\mathbf{z}}$, và $\hat{\mathbf{x}}_2$.

Với $\dot{\theta} = 0$, Hình 9.30 chỉ ra rằng vector ω trong mặt phẳng $\hat{\mathbf{x}}_3 - \hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{x}}_2$ (trong cách mà chúng ta đã vẽ, thì $\hat{\mathbf{x}}_1$ có hướng chỉ vào trong trang giấy, trái ngược với Hình 9.29). Chúng ta sẽ đề cập tới hình vẽ này rất nhiều lần trong các bài tập của chương này. Sẽ có rất nhiều nhận xét được đưa ra về nó, vì vậy chúng ta sẽ chỉ liệt kê chúng ra. Thảo luận sau đây liên quan đến *chuyển động học* của ω, nghĩa là, về ý nghĩa của các thành phần khác nhau của nó và chúng liên quan đến nhau như thế nào. Thảo luận về *động lực học* của ω, nghĩa là, tại sao các thành phần của nó lại nhận các giá trị như thế, khi cho trước một hệ vật lý nào đó, là chủ đề của Mục 9.7.3 sau đó.



Hình 9.30:

1. Nếu ai đó yêu cầu bạn "phân tách" ω thành các thành phần dọc theo $\hat{\mathbf{z}}$ và $\hat{\mathbf{x}}_3$, thì bạn sẽ làm gì? Liệu bạn sẽ vẽ các đường thẳng vuông góc với các trục này để nhận được các độ dài đã được chỉ ra trong hình vẽ (mà chúng ta sẽ ký hiệu chúng là ω_z và ω_3), hay là bạn sẽ vẽ các đường thẳng song song với các trục này để nhận được các độ dài được chỉ ra trong hình vẽ (mà chúng ta sẽ ký hiệu chúng là Ω và ω')? Không có câu trả lời "chính xác" cho câu hỏi này. Bốn đại lượng $\omega_z, \omega_3, \Omega, \omega'$, đơn giản là đại diện cho các thứ khác nhau. Chúng ta sẽ hiểu rõ mỗi một đại lượng này bên dưới, cùng với ω_2 (là hình chiếu của ω dọc theo $\hat{\mathbf{x}}_2$). Hóa ra rằng Ω và ω' là các tần số mà mắt của bạn có thể thấy dễ nhất, trong khi đó ω_2 và ω_3 là cái mà bạn muốn sử dụng khi tính toán liên quan đến moment động lượng. Nhưng ở mức mà tôi có thể thấy, thì ω_z sẽ không được sử dụng gì nhiều.

2. Chú ý rằng điều này là đúng

$$\omega = \omega' \hat{\mathbf{x}}_3 + \Omega \hat{\mathbf{z}}, \tag{9.59}$$

nhưng nó sẽ *không* đúng rằng $\omega = \omega_3 \hat{\mathbf{x}}_3 + \omega_z \hat{\mathbf{z}}$. Một phát biểu đúng khác là

$$\omega = \omega_3 \hat{\mathbf{x}}_3 + \omega_2 \hat{\mathbf{x}}_2. \tag{9.60}$$

3. Biểu diễn theo các góc Euler, chúng ta thấy, bằng việc so sánh các phương trình (9.59) và (9.57), với $\dot{\theta} = 0$, rằng

$$\omega' = \dot{\psi}, \quad \text{và} \quad \Omega = \dot{\phi}. \tag{9.61}$$

Và chúng ta cũng có, bằng cách so sánh (9.60) và (9.58), với $\dot{\theta} = 0$,

$$\begin{aligned} \omega_3 &= \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta = \omega' + \Omega\cos\theta, \\ \omega_2 &= \dot{\phi}\sin\theta = \Omega\sin\theta. \end{aligned} \tag{9.62}$$

Những điều này cũng rõ ràng từ Hình 9.30. Do đó về mặt kỹ thuật thì không cần thiết phải đưa ra các định nghĩa mới về $\omega_2, \omega_3, \Omega, \omega'$ trong Hình 9.30, bởi vì các góc Euler là hoàn toàn đủ. Nhưng chúng ta sẽ đề cập lại hình vẽ này rất nhiều lần, và nó cũng sẽ dễ dàng hơn một chút khi làm việc với các góc omega này so với các tổ hợp khác nhau của các góc Euler.

4. Ω là tần số dễ tưởng tượng nhất. Nó là tần số của sự quay tiến động của con quay xung quanh trục thẳng đứng $\hat{\mathbf{z}}$.[13] Nói cách khác, trục đối xứng $\hat{\mathbf{x}}_3$ vẽ ra một hình nón (đang giả sử là $\dot{\theta} = 0$) xung quanh trục $\hat{\mathbf{z}}$ với tần số Ω. Lý do của điều này là như sau. Vector ω là vector mà cho ta vận tốc của bất kỳ điểm nào (tại vị trí $\mathbf{r}$) cố định trong con quay bằng $\omega \times \mathbf{r}$. Do đó, bởi vì vector $\hat{\mathbf{x}}_3$ được cố định trong con quay, chúng ta có thể viết

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}_3}{dt} = \omega \times \hat{\mathbf{x}}_3 = (\omega'\hat{\mathbf{x}}_3 + \Omega\hat{\mathbf{z}}) \times \hat{\mathbf{x}}_3 = (\Omega\hat{\mathbf{z}}) \times \hat{\mathbf{x}}_3. \tag{9.63}$$

Nhưng đây chính xác là biểu thức của tốc độ thay đổi của một vector đang quay xung quanh một trục $\hat{\mathbf{z}}$ với tần số Ω. (Chứng minh này tương tự với chứng minh mà dẫn đến phương trình (9.54).) Chú ý rằng tần số quay tiến động xung quanh trục $\hat{\mathbf{z}}$ *không* phải là ω_z. Nó chắc chắn không thể là ω_z, bởi vì chúng ta có thể tưởng tượng đang nắm lấy trục đối xứng và giữ nó tại vị trí, sao cho ω chỉ dọc theo hướng của $\hat{\mathbf{x}}_3$. Viễn cảnh này có một ω_z khác không, nhưng không có sự quay tiến động nào.

NHẬN XÉT : Trong quá trình dẫn đến phương trình (9.63), về cơ bản là chúng đã đã bỏ đi phần của ω mà có phương dọc theo trục $\hat{\mathbf{x}}_3$, bởi vì một sự quay xung quanh $\hat{\mathbf{x}}_3$

[13] Mặc dù chúng ta đang sử dụng cùng một ký tự, thì Ω này không có gì liên quan đến Ω được định nghĩa trong phương trình (9.47), ngoại trừ thực tế rằng chúng cả hai biểu diễn tần số của một cái gì đó đang quay tiến động xung quanh một trục.

không đóng góp gì vào chuyển động của $\hat{\mathbf{x}}_3$. Tuy nhiên, chú ý rằng thực ra là có vô vàn cách để bỏ đi một phần dọc theo $\hat{\mathbf{x}}_3$. Ví dụ như, chúng ta có thể tách ω dưới dạng $\omega = \omega_3\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{3}} + \omega_{\mathbf{2}}\hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{2}}$. Khi đó chúng ta nhận được $d\hat{\mathbf{x}}_3/dt = (\omega_2\hat{\mathbf{x}}_2)\times\hat{x}_3$, mà có nghĩa là $\hat{\mathbf{x}}_3$ ngay tức thời là đang quay xung quanh $\hat{\mathbf{x}}_2$ với tần số ω_2. Mặc dù điều này là đúng, nó cũng không có ích bằng kết quả trong phương trình (9.63), bởi vì trục $\hat{\mathbf{x}}_2$ là thay đổi theo thời gian (nó quay tròn tiến động xung quanh $\hat{\mathbf{z}}$). Vấn đề ở đây là vector vận tốc góc tức thời xung quanh mà trục đối xứng quay xung quanh nó là không được xác định tốt (Bài tập 9.1 sẽ thảo luận vấn đề này).[14] Nhưng trục $\hat{\mathbf{z}}$ là trục duy nhất của các vector vận tốc góc này mà cố định. Khi chúng ta xem xét con quay (hoặc chính xác hơn là trục đối xứng), chúng ta do đó sẽ thấy nó đang quay tiến động xung quanh trục $\hat{\mathbf{z}}$. ♣

5. ω' cũng dễ dàng để hình dung được. Tưởng tượng rằng bạn đang đứng im trong một hệ tọa độ mà đang quay xung quanh trục $\hat{\mathbf{z}}$ với tần số Ω. Khi đó bạn sẽ thấy trục đối xứng của con quay vẫn đứng im một cách tuyệt đối, và chuyển động duy nhất mà bạn thấy là con quay tự quay quanh trục này với tần số ω'. (Điều này là đúng bởi vì $\omega = \omega'\hat{\mathbf{x}}_3 + \Omega\hat{\mathbf{z}}$, và sự quay của hệ tọa độ của bạn làm cho bạn không nhìn thấy phần $\Omega\hat{\mathbf{z}}$.) Nếu bạn vẽ một điểm ở đâu đó trên con quay, thì điểm đó sẽ vẽ ra một đường tròn cố định nghiêng, và điểm đó sẽ quay lại, ví dụ như, độ cao lớn nhất của nó với tần số ω'. Một người trong hệ tọa độ trái đất sẽ thấy điểm này trải qua một chuyển động tương đối phức tạp nhưng cũng sẽ phải quan sát thấy cùng một tần số khi điểm đó quay trở lại vị trí có độ cao lớn nhất của nó. Vì vậy ω' là cái gì đó cũng hoàn toàn mang ý nghĩa vật lý trong hệ tọa độ trái đất.

6. ω_3 là cái bạn sẽ sử dụng để nhận được thành phần của $\mathbf{L}$ dọc theo $\hat{\mathbf{x}}_3$, bởi vì $L_3 = I_3\omega_3$. ω_3 thì hơi khó để hình dung hơn so với Ω và ω', nhưng nó là tần số mà con quay tức thời đang quay, như là quan sát của một người nào đó đang đứng im trong một hệ tọa độ tức thời quay xung quanh trục $\hat{\mathbf{x}}_2$ với tần số ω_2. (Điều này là đúng bởi vì $\omega = \omega_2\hat{\mathbf{x}}_2 + \omega_3\hat{\mathbf{x}}_3$, và sự quay của hệ tọa độ đó làm cho người đó không

[14] Vận tốc góc tức thời của *toàn bộ vật thể* thì tất nhiên là được xác định tốt. Có một đường xác định các điểm trong vật thể mà tức thời lúc đó nằm yên. Nhưng nếu bạn xem xét chỉ mỗi trục đối xứng thôi, thì sẽ có một sự mơ hồ ở đây (xem Chú thích cuối trang 9). Nói tóm lại, bởi vì chỉ có một điểm trên trục (là điểm dưới cùng), thay vì là toàn bộ một đường thẳng, đang tức thời đứng yên, nên vector vận tốc góc tức thời có thể chỉ theo bất kỳ hướng nào.

nhìn thấy phần $\omega_2\hat{\mathbf{x}}_2$.) Sự quay này là khó hình dung hơn trong hệ tọa độ trái đất, bởi vì trục $\hat{\mathbf{x}}_2$ thay đổi theo thời gian.

Có một kịch bản tình huống vật lý trong đó ω_3 là tần số rất dễ dàng quan sát được. Tưởng tượng rằng con quay đang quay tiến động xung quanh trục $\hat{\mathbf{z}}$ với góc θ không đổi (chúng ta sẽ thấy trong Mục 9.7.5 rằng đây thực ra là một chuyển động có thể của con quay), và tưởng tượng rằng con quay có một thanh không ma sát nhô ra dọc theo trục đối xứng của nó. Nếu bạn nắm lấy thanh và dừng chuyển động quay tiến động lại, sao cho con quay bây giờ chỉ đang tự quay xung quanh trục đối xứng đang đứng yên của nó, khi đó sự tự quay này sẽ có tần số là ω_3. Điều này là đúng bởi vì khi bạn cầm lấy thanh, moment lực của bạn không có thành phần nào dọc theo trục $\hat{\mathbf{x}}_3$ (bởi vì thanh nằm dọc theo trục này, và bởi vì nó là không ma sát). Do đó, L_3 không thay đổi, và cả ω_3 cũng vậy.

7. ω_2 thì tất nhiên là tương tự như là ω_3. ω_2 là cái mà bạn sử dụng để nhận được thành phần của $\mathbf{L}$ dọc theo $\hat{\mathbf{x}}_2$, bởi vì $L_2 = I_2\omega_2$. Nó là tần số mà con quay đang quay tức thời, khi được quan sát bởi một ai đó đang đứng im trong hệ tọa độ mà đang quay tức thời xung quanh trục $\hat{\mathbf{x}}_3$ với tần số ω_3. (Điều này là đúng bởi vì $\omega = \omega_2\hat{\mathbf{x}}_2 + \omega_3\hat{\mathbf{x}}_3$, và sự quay của hệ tọa độ làm cho người đó không nhìn thấy phần $\omega_3\hat{\mathbf{x}}_3$.) Một lần nữa, chuyển động quay này là khó hình dung hơn trong hệ tọa độ trái đất, bởi vì trục $\hat{\mathbf{x}}_3$ là thay đổi theo thời gian. Chú ý rằng khi nói "trục $\hat{\mathbf{x}}_3$ tức thời" là chúng ta muốn nói đến trục cố định trong không gian mà trùng với trục đối xứng tại thời điểm đang xét. Trục đối xứng do đó sẽ chuyển động ra khỏi trục này, phù hợp với thực tế là người trong hệ tọa độ đang quay ở trên nhìn thấy con quay đang quay xung quanh trục $\hat{\mathbf{x}}_2$.

   Kịch bản tình huống vật lý mà cho ω_2, tương tự như kịch bản mà cho ω_3 ở trên, là như sau. Tưởng tượng một thanh không ma sát được gắn vào con quay tại đầu nhọn của nó, vuông góc với trục đối xứng, sao cho chúng tạo thành hình một chữ "T." Khi thanh này đang quay tròn (bỏ qua thực tế rằng nó phải được quay xuyên qua mặt bàn), nắm lấy nó tại thời điểm nó chỉ dọc theo $\hat{\mathbf{x}}_2$. Con quay khi đó sẽ quay với tần số ω_2 xung quanh thanh bị cố định. Điều này là đúng với các lý do tương tự như các lý do trong trường hợp của ω_3 ở trên.

8. ω_z thì không có ích gì lắm, ở mức mà tôi có thể thấy. Điều quan trọng nhất để chú

ý về ω_z là nó *không* phải là tần số của sự quay tiến động xung quanh trục $\hat{\mathbf{z}}$, thậm chí là nó là thành phần của ω chiếu lên $\hat{\mathbf{z}}$. Tần số của sự quay tiến động này là Ω, như chúng ta đã tìm được ở trên trong phương trình (9.63). Một thực tế đúng, nhưng ở mức độ nào đó là vô dụng, về ω_z là nếu một ai đó đang đứng im trong một hệ tọa độ đang quay xung quanh trục $\hat{\mathbf{z}}$ với tần số ω_z, thì người đó thấy tất cả các điểm trong con quay tức thời đang quay xung quanh trục nằm ngang $\hat{\mathbf{x}}$ với tần số ω_x, trong đó ω_x là thành phần của ω chiếu lên trục $\hat{\mathbf{x}}$. (Điều này là đúng bởi vì $\omega = \omega_x\hat{\mathbf{x}} + \omega_z\hat{\mathbf{z}}$, và sự quay của hệ tọa độ làm cho người đó không nhìn thấy phần $\omega_z\hat{\mathbf{z}}$.)

9.7.3 Phương pháp moment lực

Cuối cùng bây giờ hãy đi tìm chuyển động của con quay trọng lực. Phương pháp đầu tiên này liên quan đến moment lực khá là đơn giản, mặc dù là hơi dài dòng. Chúng ta sẽ trình bày nó ở đây để (1) chỉ ra rằng bài toán có thể giải được mà không cần dùng đến phương trình của Lagrange, và (2) để thực hành một số tính toán liên quan đến việc sử dụng $\tau = d\mathbf{L}/dt$. Chúng ta sẽ sử dụng dạng của ω được cho trong phương trình (9.58), bởi vì ở đó nó đã được tách ra thành các thành phần theo phương của các trục chính. Để cho thuận tiện, định nghĩa $\dot{\beta} = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta$, sao cho

$$\omega = \dot{\beta}\hat{\mathbf{x}}_3 + \dot{\phi}\sin\theta\hat{\mathbf{x}}_2 + \dot{\theta}\hat{\mathbf{x}}_1. \tag{9.64}$$

Chú ý rằng chúng ta vừa quay trở lại chuyển động tổng quát nhất, trong đó $\dot{\theta}$ không nhất thiết phải là bằng không. Với điểm gốc tọa độ, chúng ta sẽ chọn nó là đầu nhọn của con quay, mà được giả sử là cố định trên mặt bàn.[15] Gọi các moment chính đối với điểm gốc tọa độ này là $I_1 = I_2 \equiv I$, và I_3. Moment động lượng của con quay khi đó sẽ là

$$\mathbf{L} = I_3\dot{\beta}\hat{\mathbf{x}}_3 + I\dot{\phi}\sin\theta\hat{\mathbf{x}}_2 + I\dot{\theta}\hat{\mathbf{x}}_1. \tag{9.65}$$

Bây giờ chúng ta phải đi tính $d\mathbf{L}/dt$. Điều làm cho việc này cần thiết là thực tế rằng các vector đơn vị $\hat{\mathbf{x}}_1$, $\hat{\mathbf{x}}_2$, và $\hat{\mathbf{x}}_3$ thay đổi theo thời gian (chúng thay đổi theo θ và ϕ). Nhưng hãy tiếp tục và lấy đạo hàm phương trình (9.65). Sử dụng quy tắc lấy đạo hàm của hàm

[15] Chúng ta có thể sử dụng điểm khối tâm là điểm gốc tọa độ của chúng ta, nhưng khi đó chúng ta sẽ phải đưa vào các lực phức tạp tác động tại điểm khớp quay, mà điều này là rất khó. Nhưng hãy xem Bài tập 9.19 cho trường hợp trong đó đầu nhọn của con quay là tự do trượt trên một mặt bàn không ma sát.

tích (mà nó vẫn đúng đối với tích của một hàm vô hướng và một hàm vector), chúng ta có

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{L}}{dt} =& I_3\frac{d\dot{\beta}}{dt}\hat{\mathbf{x}}_3 + I\frac{d(\dot{\phi}\sin\theta)}{dt}\hat{\mathbf{x}}_2 + I\frac{d\dot{\theta}}{dt}\hat{\mathbf{x}}_1 \\ &+ I_3\dot{\beta}\frac{d\hat{\mathbf{x}}_3}{dt} + I\dot{\phi}\sin\theta\frac{d\hat{\mathbf{x}}_2}{dt} + I\dot{\theta}\frac{d\hat{\mathbf{x}}_1}{dt}.\end{aligned} \tag{9.66}$$

Sử dụng một chút hình học, bạn có thể chỉ ra rằng

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{\mathbf{x}}_3}{dt} &= -\dot{\theta}\hat{\mathbf{x}}_2 + \dot{\phi}\sin\theta\hat{\mathbf{x}}_1, \\ \frac{d\hat{\mathbf{x}}_2}{dt} &= \dot{\theta}\hat{\mathbf{x}}_3 - \dot{\phi}\cos\theta\hat{\mathbf{x}}_1, \\ \frac{d\hat{\mathbf{x}}_1}{dt} &= -\dot{\phi}\sin\theta\hat{\mathbf{x}}_3 + \dot{\phi}\cos\theta\hat{\mathbf{x}}_2.\end{aligned} \tag{9.67}$$

Như là một bài tập luyện tập, bạn nên kiểm tra lại những kết quả này bằng việc sử dụng Hình vẽ 9.29. Ví dụ như, trong phương trình đầu tiên, hãy chỉ ra rằng một sự thay đổi của θ sẽ làm cho $\hat{\mathbf{x}}_3$ di chuyển một khoảng cách nào đó theo phương của $\hat{\mathbf{x}}_2$; và chỉ ra rằng một sự thay đổi của ϕ làm cho $\hat{\mathbf{x}}_3$ di chuyển một khoảng cách nào đó theo phương của $\hat{\mathbf{x}}_1$. Thay những biểu thức đạo hàm từ phương trình (9.67) vào trong phương trình (9.66) cho ta, sau một số biến đổi đại số,

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{L}}{dt} =& I_3\ddot{\beta}\hat{\mathbf{x}}_3 + (I\ddot{\phi}\sin\theta + 2I\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta - I_3\dot{\beta}\dot{\theta})\hat{\mathbf{x}}_2 \\ &+ (I\ddot{\theta} - I\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta + I_3\dot{\beta}\dot{\phi}\sin\theta)\hat{\mathbf{x}}_1.\end{aligned} \tag{9.68}$$

Bây giờ hãy xem xét moment lực tác dụng lên con quay. Moment lực này sinh ra bởi trọng lực kéo nó xuống tại điểm khối tâm. Vì vậy từ Hình vẽ 9.29, τ có hướng chỉ dọc theo hướng của $\hat{\mathbf{x}}_1$ và có độ lớn bằng $Mgl\sin\theta$, trong đó ℓ là khoảng cách từ điểm khớp quay đến điểm khối tâm. Sử dụng phương trình (9.68), thành phần thứ ba của $\tau = d\mathbf{L}/dt$ sẽ nhanh chóng cho ta

$$\ddot{\beta} = 0. \tag{9.69}$$

Do đó, $\dot{\beta}$ là một hằng số, mà chúng ta sẽ gọi nó là ω_3 (theo tinh thần của phương trình (9.64) thì đây là một sự lựa chọn ký hiệu một cách hiển nhiên). Hai thành phần khác của $\tau = d\mathbf{L}/dt$ sau đó cho ta

$$\begin{aligned}I\ddot{\phi}\sin\theta + \dot{\theta}(2I\dot{\phi}\cos\theta - I_3\omega_3) &= 0, \\ (Mg\ell + I\dot{\phi}^2\cos\theta - I_3\omega_3\dot{\phi})\sin\theta &= I\ddot{\theta}.\end{aligned} \tag{9.70}$$

Chúng ta sẽ sử dụng sau các phương trình này cho đến khi chúng ta lại nhận được chúng một lần nữa bằng cách sử dụng phương pháp của Lagrange.

9.7.4 Phương pháp Lagrange

Phương trình (9.15) cho chúng ta động năng của con quay có dạng $T = \omega \cdot L/2$. Sử dụng các phương trình (9.64) và (9.65), chúng ta có (bằng cách viết $\dot\psi + \dot\phi\cos\theta$ thay vì viết ngắn gọn là $\dot\beta$)[16]

$$T = \frac{1}{2}\omega.\mathbf{L} = \frac{1}{2}I_3(\dot\psi + \dot\phi\cos\theta)^2 + \frac{1}{2}I(\dot\phi^2\sin^2\theta + \dot\theta^2). \tag{9.71}$$

Năng lượng thế năng là

$$V = Mg\ell\cos\theta, \tag{9.72}$$

trong đó ℓ là khoảng cách từ khớp quay tới điểm khối tâm. Hàm Lagrange là $\mathcal{L} = T - V$ (chúng ta sử dụng "$\mathcal{L}$" ở đây để tránh sự nhầm lẫn với moment động lượng "L"), và vì vậy phương trình chuyển động nhận được đối với biến ψ là

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\psi} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} \quad\Longrightarrow\quad \frac{d}{dt}(\dot\psi + \dot\phi\cos\theta) = 0. \tag{9.73}$$

Do đó, $\dot\psi + \dot\phi\cos\theta$ là một hằng số. Gọi nó là ω_3. Các phương trình chuyển động nhận được đối với ϕ và θ khi đó là (với việc sử dụng $\dot\psi + \dot\phi\cos\theta = \omega_3$)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\phi} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \quad&\Longrightarrow\quad \frac{d}{dt}(I_3\omega_3\cos\theta + I\dot\phi\sin^2\theta) = 0, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\theta} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} \quad&\Longrightarrow\quad I\ddot\theta = (Mg\ell + I\dot\phi^2\cos\theta - I_3\omega_3\dot\phi)\sin\theta. \end{aligned} \tag{9.74}$$

Lấy đạo hàm phương trình đầu tiên, chúng ta thấy rằng các phương trình này là đồng nhất với các phương trình trong phương trình (9.70).

Chú ý rằng có hai đại lượng được bảo toàn, chúng có từ thực tế là $\partial\mathcal{L}/\partial\psi$ và $\partial\mathcal{L}/\partial\phi$ bằng không. Các đại lượng bảo toàn là các moment động lượng tương ứng theo hướng $\hat{\mathbf{x}}_3$ và $\hat{\mathbf{z}}$. Điều này là đúng bởi vì từ phương trình (9.65), moment động lượng đầu tiên là $L_3 = I_3\omega_3$ và moment động lượng sau là $L_z = L_3\cos\theta + L_2\sin\theta = (I_3\omega_3)\cos\theta + (I\dot\phi\sin\theta)\sin\theta$. Các moment động lượng này là bảo toàn bởi vì moment lực có hướng theo phương của $\hat{\mathbf{x}}_1$, vì vậy không có moment lực trong mặt phẳng sinh ra bởi $\hat{\mathbf{x}}_3$ và $\hat{\mathbf{z}}$.

[16]Không vấn đề gì khi sử dung β ở mục trước. Chúng ta chỉ giới thiệu nó bởi vì dùng nó sẽ viết mọi thứ nhanh hơn. Nhưng chúng ta không thể sử dụng nó ở đây, bởi vì nó phụ thuộc vào các tọa độ khác, và phương pháp Lagrange yêu cầu phải sử dụng các tọa độ độc lập. Chúng minh theo nguyên lý biến phân của phương pháp này trong Chương 6 đã sử dụng giả thiết độc lập này.

9.7.5 Con quay tự quay tròn với $\dot{\theta} = 0$

Một trường hợp đặc biệt của các phương trình (9.70) xảy ra khi $\dot{\theta} = 0$. Trong trường hợp này, phương trình đầu tiên của (9.70) nói rằng $\dot{\phi}$ là hằng số. Điểm khối tâm của con quay do đó sẽ trải qua một chuyển động tròn đều trong một mặt phẳng nằm ngang. Gọi $\Omega \equiv \dot{\phi}$ là tần số của chuyển động tròn này (đây là ký hiệu giống như trong phương trình (9.61)). Khi đó phương trình thứ hai của (9.70) trở thành

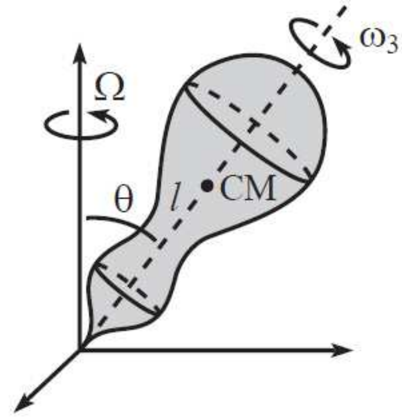
$$I\Omega^2 \cos\theta - I_3\omega_3\Omega + Mg\ell = 0. \tag{9.75}$$

Phương trình bậc hai này có thể được giải ra để nhận được hai tần số quay tròn tiến động có thể, Ω, của con quay. Và đúng như vậy, thực ra có hai tần số của nó, miễn là ω_3 lớn hơn một giá trị tối thiểu nào đó.

Các trang ở trên trong Mục "Con quay đối xứng có trọng lượng" này là hơi trừu tượng, vì vậy bây giờ hãy nhận lại phương trình (9.75) lại từ đầu. Nghĩa là, chúng ta sẽ giả sử $\dot{\theta} = 0$ từ đầu lời giải, và sau đó giải mọi thứ bằng việc đi tìm $\mathbf{L}$ và sử dụng $\tau = d\mathbf{L}/dt$, theo tinh thần của Mục 9.4.2. Trong thực hành, chiến thuật bắt đầu mọi thứ từ đầu này luôn luôn là cách làm tốt nhất để thực hiện, như bạn sẽ thấy trong các bài tập và các bài tập luyện tập của chương này. Các bước thực hiện trong các Mục 9.7.3 và 9.7.4 là rất tốt để biết chúng, nhưng kỹ thuật trong ví dụ sau đây sẽ cung cấp một cách làm trực giác hơn nhiều trong việc xem xét mọi việc. Ví dụ này là bài toán cổ điển về "con quay". Chúng ta sẽ khởi động bằng cách giải nó trong một trường hợp xấp xỉ. Sau đó chúng ta sẽ giải nó một cách chính xác.

Ví dụ (Con quay): Một con quay đối xứng có khối lượng M và có điểm khối tâm của nó cách một khoảng ℓ so với điểm khớp quay của nó. Các moment quán tính đối với điểm khớp quay là $I_1 = I_2 \equiv I$, và I_3. Con quay tự quay xung quanh trục đối xứng của nó với tần số ω_3 (theo ngôn ngữ của Mục 9.7.2), và các điều kiện ban đầu được thiết lập sao cho điểm khối tâm quay tròn xung quanh trục thẳng đứng. Trục đối xứng tạo một góc θ không đổi so với phương thẳng đứng (xem Hình 9.31).

(a) Giả sử rằng moment động lượng gây ra bởi ω_3 là lớn hơn rất nhiều so với bất kỳ moment động lượng nào trong bài toán này, hãy tìm một biểu thức xấp xỉ của tần số tiến động, Ω.



Hình 9.31:

(b) Bây giờ hày giải bài toán một cách chính xác. Nghĩa là, hãy tìm Ω bằng cách xét tất cả các moment động lượng.

Lời giải:

(a) Moment động lượng (đối với điểm khớp quay) do sự tự quay của con quay có độ lớn là $L_3 = I_3\omega_3$, và nó có hướng chỉ dọc theo hướng của $\hat{\mathbf{x}}_3$. Gọi vector moment động lượng này là $\mathbf{L}_3 \equiv L_3\hat{\mathbf{x}}_3$. Khi con quay quay tròn tiến động, $\mathbf{L}_3$ sẽ vạch ra một mặt nón xung quanh trục thẳng đứng. Vì vậy đầu của $\mathbf{L}_3$ sẽ chuyển động trong một đường tròn có bán kính $L_3 \sin\theta$. Tần số của chuyển động tròn này là tần số tiến động, Ω. Vì vậy, $d\mathbf{L}_3/dt$, mà là vận tốc của điểm đầu, có độ lớn

$$\Omega(L_3 \sin\theta) = \Omega I_3\omega_3 \sin\theta, \tag{9.76}$$

và nó có hướng chỉ vào trong trang giấy.

Moment lực (đối với điểm khớp quay) là do trọng lực tác động vào điểm khối tâm, vì vậy nó có độ lớn là $Mgl \sin\theta$, và nó có hướng chỉ vào trong trang giấy. Do đó, $\tau = d\mathbf{L}/dt$ cho ta

$$\Omega = \frac{Mg\ell}{I_3\omega_3}. \tag{9.77}$$

Giá trị này độc lập với θ, và nó tỷ lệ nghịch với ω_3.

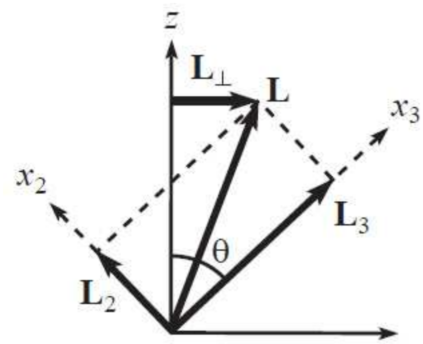
(b) Lỗi của lập luận trên là chúng ta đã thừa nhận moment động lượng nảy sinh từ thành phần theo phương $\hat{\mathbf{x}}_2$ (đã được định nghĩa trong Mục 9.7.1) của vận tốc góc do sự chuyển động quay tiến động của con quay xung quanh trục $\hat{\mathbf{z}}$. Thành phần này có độ lớn là $\Omega \sin\theta$.[17] Do đó, moment động lượng do thành

[17] Vận tốc góc của sự quay tiến động là $\Omega\hat{\mathbf{z}}$. Chúng ta có thể tách nó thành các thành phần dọc theo

phần của vận tốc góc theo hướng $\hat{\mathbf{x}}_2$ có độ lớn

$$L_2 = I\Omega \sin\theta. \tag{9.78}$$

Gọi phần này của moment động lượng là $\mathbf{L}_2 \equiv L_2\hat{\mathbf{x}}_2$. Tổng $\mathbf{L} = \mathbf{L_2} + \mathbf{L_3}$ được



Hình 9.32:

chỉ ra trong Hình 9.32. $\mathbf{L}$ quay tròn tiến động xung quanh trong một mặt nón, vì vậy chỉ có thành phần theo phương nằm ngang của nó (gọi nó là $\mathbf{L}_\perp$) thay đổi. Từ hình vẽ, độ dài của $\mathbf{L}_\perp$ là khác với các độ dài của các thành phần nằm ngang của $\mathbf{L}_3$ và $\mathbf{L}_2$. Do đó,

$$L_\perp = L_3 \sin\theta - L_2 \cos\theta = I_3\omega_3 \sin\theta - I\Omega \sin\theta \cos\theta. \tag{9.79}$$

Độ lớn của tốc độ thay đổi của $\mathbf{L}$ là[18]

$$\left|\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right| = \Omega L_\perp = \Omega(I_3\omega_3 \sin\theta - I\Omega \sin\theta \cos\theta). \tag{9.80}$$

Cả τ (mà có độ lớn là $Mgl\sin\theta$) và $d\mathbf{L}/dt$ đều có hướng chỉ vào trong trang giấy, vì vậy việc cân bằng độ lớn của chúng cho ta

$$I\Omega^2 \cos\theta - I_3\omega_3\Omega + Mg\ell = 0 \tag{9.81}$$

phù hợp với phương trình (9.75), là điều mà chúng ta đã muốn chỉ ra. Công thức nghiệm của phương trình bậc hai nhanh chóng cho ta hai nghiệm của Ω, mà có thể được viết dưới dạng

$$\Omega_\pm = \frac{I_3\omega_3}{2I\cos\theta}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4MIg\ell\cos\theta}{I_3^2\omega_3^2}}\right). \tag{9.82}$$

các hướng $\hat{\mathbf{x}}_2$ và $\hat{\mathbf{x}}_3$ trực giao. Thành phần $\Omega\cos\theta$ dọc theo $\hat{\mathbf{x}}_3$ đã được đưa vào trong định nghĩa của ω_3 (xem Hình 9.30).

[18]Kết quả này cũng có thể nhận được theo một cách hình thức hơn. Bởi vì $\mathbf{L}$ quay tiến động với vận tốc góc $\Omega\hat{\mathbf{z}}$, tốc độ thay đổi của $\mathbf{L}$ là $d\mathbf{L}/dt = \Omega\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{L}$. Nếu bạn tính toán tích có hướng này trong cơ sở x_1, x_2, x_3, bạn sẽ nhận được kết quả trong phương trình (9.80).

Chú ý rằng nếu $\theta = \pi/2$, thì phương trình (9.81) thực ra là một phương trình bậc nhất, vì vậy chỉ có một nghiệm của Ω, mà là nghiệm trong phương trình (9.77). Lý do của điều này là $\mathbf{L}_2$ có phương thẳng đứng, vì vậy nó không thay đổi. Chỉ có $\mathbf{L}_3$ đóng góp vào $d\mathbf{L}/dt$, vì vậy nghiệm xấp xỉ trong phần (a) thực ra là một nghiệm chính xác. Do sự đơn giản này, một con quay sẽ là đơn giản hơn rất nhiều để làm việc với nó khi trục đối xứng của nó có phương nằm ngang.

Hai nghiệm trong phương trình (9.82) được biết đến như là các tần số *tiến động nhanh* và *tiến động chậm*. Với giá trị của ω_3 lớn, bạn có thể chỉ ra rằng tần số tiến động chậm là

$$\Omega_- \approx \frac{Mg\ell}{I_3\omega_3}, \tag{9.83}$$

phù hợp với nghiệm được tìm ra trong phương trình (9.77).[19] Nhiệm vụ này, cùng với rất nhiều đặc điểm thú vị khác của bài toán này (bao gồm cả việc hiểu về tần số tiến động nhanh, Ω_+), là chủ đề của Bài tập 9.17, mà bạn được khuyến khích để giải nó.

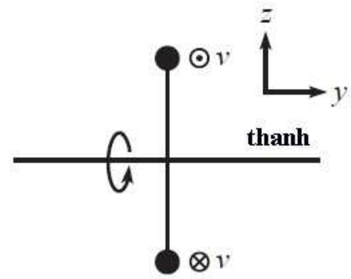
9.7.6 Một "giải thích" về sự quay tiến động

Thực tế rằng một con quay có thể quay tiến động chậm rãi xung quanh một đường tròn mà đơn giản là không bị rơi xuống (như là một con lắc đơn) là tương đối kỳ lạ. Chúng ta đã chỉ ra bên trên rằng chuyển động quay tiến động này có thể nhận được một cách tốt đẹp từ $\tau = d\mathbf{L}/dt$, nhưng nó sẽ đẹp đẽ hơn nếu có một cách trực giác hơn để giải thích nó, dựa trên ít nhất ở một mức độ nào đó vào $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Mặc dù tôi không tìm được một sự giải thích trực giác hoàn toàn thuyết phục, tôi nghĩ rằng thảo luận sau đây sẽ làm rõ mọi điều. Thảo luận này sẽ mang tính chất định tính (vì vậy sẽ không có phương trình và các con số), nhưng nó vẫn sẽ đủ để giải thích hầu hết các phần liên quan đến chuyển động quay tiến động.

Xung lực tác động lên một quả tạ đôi

Đầu tiên hãy xem xét một hệ đơn giản bao gồm một quả tạ với một thanh không khối lượng được gắn chặt vuông góc tại tâm của nó. Quả tạ quay tròn xung quanh thanh mà

[19] Điều này là tương đối rõ ràng. Nếu ω_3 là đủ lớn so với Ω, thì chúng ta có thể bỏ qua số hạng thứ nhất trong phương trình (9.81). Nghĩa là, chúng ta có thể bỏ qua các ảnh hưởng của $\mathbf{L}_2$, mà chính xác là cái mà chúng ta đã làm trong nghiệm xấp xỉ trong phần (a).



Hình 9.33:

bị giữ cố định; xem Hình 9.33. Gọi các trục y và z được định nghĩa như được chỉ ra trong hình vẽ, với trục x có hướng chỉ ra ngoài trang giấy. Vector moment động lượng tổng có hướng chỉ về bên phải, theo hướng dương của trục y. Chúng ta bây giờ sẽ bỏ qua không xét đến trọng lực. Một cách tương đương, chúng ta có thể cho quả tạ được gắn khớp tại điểm khối tâm của nó.

Tại thời điểm các khối lượng nằm trong mặt phẳng của trang giấy, như đã được chỉ ra trong hình vẽ (với khối lượng bên trên đang đi ra ngoài khỏi trang giấy và khối lượng bên dưới đang đi vào trong), chúng ta sẽ tác dụng hai xung lực nhỏ bằng nhau và ngược chiều vào thanh, có hướng lên trên ở bên phải và hướng xuống dưới ở bên trái; xem Hình 9.34.[20] Giả sử rằng các lực được tác dụng chỉ trong một khoảng thời gian rất nhỏ, nhưng các lực đó là đủ lớn sao cho xung lượng là khác không. Cái gì sẽ xảy ra đối với các khối lượng? Đặc biệt, cái gì sẽ xảy ra với mặt phẳng của chuyển động quay của chúng?

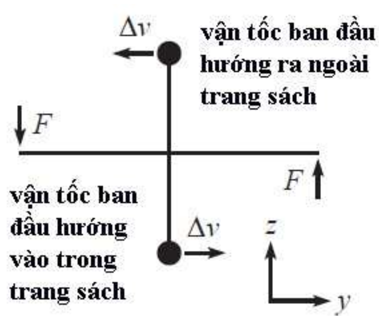
Bởi vì cấu trúc là rắn tuyệt đối, các lực xung lực tác dụng lên thanh làm cho hai khối lượng nhận được các thành phần vận tốc nhỏ theo các hướng $\pm y$, như được chỉ ra trong Hình 9.34. Nếu các lực được tác dụng trong một khoảng thời gian rất nhỏ t, thì các thành phần vận tốc này có dạng $v = at$ (với t rất nhỏ và a rất lớn). Hơn nữa, các khối lượng di chuyển một khoảng $d = at^2/2$ về hai bên. Nhưng bởi vì số hạng bậc hai của thời gian rất nhỏ t xuất hiện ở đây, khoảng cách này là có thể bỏ qua. Nói cách khác, các khối lượng nhận được một vận tốc khác không v, nhưng về cơ bản là không nhận d. Đây là một kết quả nói chung khi một vật bị đập bởi một cái búa: ngay sau cú đập, nó có một vận tốc khác không, nhưng về cơ bản là có dịch chuyển bằng không.

Một hình ảnh từ bên trên (với trục z đang chỉ ra ngoài trang giấy) của các vận tốc

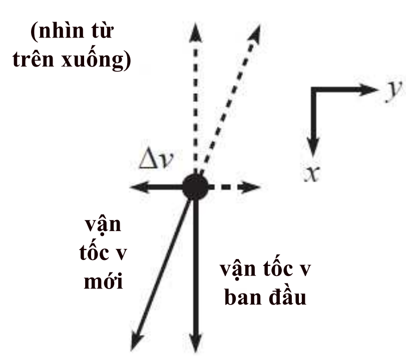
[20] Chúng ta sẽ tác dụng các lực bằng nhau và ngược chiều chỉ để sao cho điểm khối tâm không chuyển động. Và chúng ta làm điều này không gì khác hơn là để cho bài toán đơn giản. Chuyển động của điểm khối tâm là không liên quan gì đến vấn đề mà chúng ta muốn làm trong cơ cấu quả tạ này.

của hai khối lượng ngay sau cú đập được chỉ ra trong Hình 9.35. Các đường thẳng chấm chấm biểu diễn vận tốc của khối lượng bên dưới mà ở phía sau (nghĩa là, nằm dưới) khối lượng ở trên. Bây giờ, nếu ai đó cho bạn hai vận tốc này và không nói trước cho bạn biết cái gì đang xảy ra, thì bạn đơn giản sẽ nói rằng quả tạ đang quay tròn theo một đường tròn nằm trong mặt phẳng thẳng đứng được xác định bởi đường thẳng của các vector vận tốc mới trong Hình 9.35. Nói cách khác, mặt phẳng của chuyển động tròn đã được quay xung quanh trục thẳng đứng z. Một hình ảnh nhìn từ trên xuống của tình huống này được chỉ trong Hình 9.36. Từ thời điểm này trở đi, các khối lượng quay tròn trong mặt phẳng thẳng đứng mới. Điều này nghĩa là moment động lượng của quả tạ đã nhận được một thành phần theo chiều dương của trục x (hướng ra phía ngoài trang giấy trong Hình 9.34 và hướng xuống trong Hình 9.36), phù hợp với thực tế là moment lực từ hai lực tác dụng có hướng theo chiều dương của trục x.

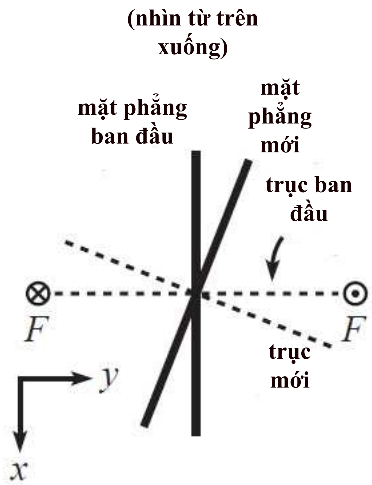
Ví dụ này minh họa thực tế kỳ lạ rằng nếu bạn đánh mạnh trục quay theo một hướng (ở đây là hướng thẳng đứng), nó sẽ chuyển động theo một hướng khác (theo phương nằm ngang).



Hình 9.34:



Hình 9.35:



Hình 9.36:

Xung lực tác dụng lên một con quay có trục đối xứng

Bây giờ hãy xét tình huống phức tạp hơn trong đó thay vì quả tạ ở trên chúng ta có một con quay đối xứng, vì dụ như, một đĩa dẹt với với thanh trồi ra từ tâm của nó. (Chúng ta sẽ bỏ qua trọng lực tại thời điểm này.) Mọi thứ bây giờ là phức tạp, bởi vì nếu chúng ta tác dụng lực xung vào thanh, mặt phẳng của đĩa không thể ngay lập tức quay tròn như ở trên, bởi vì việc này sẽ liên quan đến các điểm "cạnh" trên đĩa sẽ chuyển động một khoảng cách hữu hạn trong khoảng thời gian bằng không, bởi vì chúng di chuyển từ mặt phẳng quay ban đầu tới mặt phẳng quay mới. Vì vậy chuyển động của nó sẽ như thế nào?

Câu trả lời ban đầu là con quay đối xứng của chúng ta là hơi giống với loại vật thể như là quả tạ ở trên, vì vậy chuyển động sẽ phải trông giống như quả tạ. Nói cách khác, trục của con quay cuối cùng (bằng cách này hay cách khác) có một chút phải chỉ theo hướng của trục x, như là trong trường hợp của quả tạ. nhưng câu trả lời chính xác là bởi vì chúng ta có con quay tự do ở đây, chúng ta biết từ thảo luận về con quay tự do trong Mục 9.6.2 chính xác cái gì sẽ xảy ra: trục đối xứng của đĩa sẽ chuyển động quay tiến động (cung với vector vận tốc góc) trong một mặt nón hẹp xung quanh vector moment động lượng mới, mà có hướng chỉ theo phương hơi ra ngoài trang giấy do moment lực theo phương x. Vì vậy mặc dù trục đối xứng của đĩa không chỉ theo phướng dọc theo hướng của $\mathbf{L}$ như xảy ra với quả tạ, nó *trung bình* sẽ có hướng dọc theo $\mathbf{L}$, rất gần với phương của trục x.

Bây giờ hãy cho trọng lực vào trong cơ cấu. Hóa ra rằng chúng ta có thể coi một chuyển động quay tiến động của một con quay có trọng lực là kết quả của một chuỗi rất nhiều các xung lực nhỏ tác động vào một con quay tự do mà nếu không thì nó sẽ rơi tự do (trong đó trong lực không sinh ra moment lực). Lý do của điều này là như sau.

Tưởng tượng rằng chúng ta cầm lấy con quay đang tự quay quanh nó (không gắn khớp nó ở bất kỳ điểm nào) và di chuyển nó sang ngang (vuông góc với thanh) với một vận tốc không đổi cho trước; vận tốc này sẽ phải được chọn là một giá trị đặc biệt nào đó (xem Chú thích cuối trang 23 bên dưới). Và sau đó chúng ta thả nó ra. Trọng lực gây ra một lực tại điểm khối tâm, nhưng không gây ra moment lực xung quanh điểm khối tâm, vì vậy con quay đơn giản là sẽ rơi xuống tự do với vận tốc theo phương ngang không đổi có giá trị chính là vận tốc mà chúng ta truyền cho nó. Nhưng hãy giả sử rằng ngay sau khi chúng ta thả nó ra, chúng ta giữ con quay tại một độ cao không đổi bằng cách tác dụng một cú đánh rất nhanh và rất nhẹ hướng lên trên vào đầu dưới của thanh, và sau đó đợi trong một khoảng thời gian ngắn trong khi điểm khối tâm đi lên và rồi rơi xuống vào chuyển động tự do của nó, và rồi lặp lại quá trình trên vô số lần (ví dụ như chúng ta tác dụng 100 cú đánh nhẹ mỗi giây). Nếu chúng ta thu xếp sao cho giá trị trung bình theo thời gian của lực tác dụng lên trên bằng mg, thì điểm khối tâm (về cơ bản) là ở độ cao không thay đổi.

Sau mỗi cú đánh, trục của con quay sẽ trải qua chuyển động quay tiến động tự do của nó theo một mặt cầu rất hẹp, vì vậy nếu điểm khối tâm của con quay không chuyển động, đầu thanh cuối cùng sẽ hơi chỉ sang bên một chút, dọc theo hướng của **L** mới.[21] Nhưng chuyển động sang bên của con quay (do vận tốc ban đầu phù hợp mà chúng ta truyền cho nó) sẽ đưa đầu thanh quay trở lại vị trí ban đầu của nó một cách chính xác; xem hình ảnh từ trên xuống trong Hình 9.37. Điểm chấm trong hình vẽ đại diện cho một điểm cố định trong không gian. Chúng ta có thể tưởng tượng quá trình này xảy ra theo hai bước. Trong bước 1, trục sẽ thay đổi hướng của nó do xung lượng đối với điểm khối tâm. Và trong bước 2, con quay chuyển động sang bên (do vận tốc ban đầu chúng ta truyền cho nó) trong quá trình nó đi lên rồi rơi xuống theo quỹ đạo ném xiên. Khi quá trình này lặp đi lặp lại, điểm khối tâm sẽ chuyển động theo một đường tròn, với đầu thanh (về cơ bản) là cố định.[22] Nói cách khác, chúng ta đã vừa tạo lại con quay chuyển động tiến động của

[21]Giả sử rằng hình nón hẹp của chuyển động quay tiến động của thanh xung quanh **L** bằng cách nào đó bị tắt dần, sao cho thanh cuối cùng sẽ có hướng chỉ theo hướng của **L**. Bởi vì chúng ta cuối cùng sẽ đi xét đầu này của thanh là vị trí của khớp quay, nên đây là một giả thiết hợp lý.

[22]Chúng ta sẽ cần tác dụng một lực hướng dọc theo trục, để cung cấp gia tốc hướng tâm cho điểm khối tâm trong chuyển động quay tiến động. Nhưng lực này không sinh ra moment lực xung quanh điểm

chúng ta.[23] Và bởi vì chúng ta có thể coi lực liên tục hướng lên trên mà một khớp quay tác dụng lên một con quay có trọng lực là một chuỗi các cú đánh nhanh rất nhỏ, chúng ta thấy rằng một con quay có trọng lực đang quay tiến động xung quanh một khớp quay về cơ bản là giống như cong quay ở trên đang quay tiến động xung quanh điểm chấm tròn cố định trong không gian trong Hình 9.37.

Lập luận ở trên chỉ mang tính chất định tính, nhưng nó làm cho chuyển động quay tiến động của một con quay có khối lượng đáng tin hơn một chút. Tất nhiên, bởi vì chúng ta đã nói rằng một con quay có khối lượng bị gắn khớp tại một điểm có thể được coi là một con quay tự do trải qua một chuỗi các xung lực và chuyển động tự do, chúng ta đơn giản sẽ chuyển gánh nặng của việc chứng minh sang việc hiểu một cách trực giác tại sao một con quay tự do lại quay tiến động theo cách của nó. Nhưng điều này làm cho tôi đau đầu, vì vậy tôi sẽ dừng lại tại đây. Nhưng ít nhất chúng ta biết rằng một con quay tự do sẽ cư xử khá là giống với cơ cấu quả tạ ở trên, mà chúng ta đã chỉ ra (bằng việc xem xét các lực) tại sao trục quay dịch chuyển sang bên khi các lực theo phương thẳng đứng tác dụng vào.

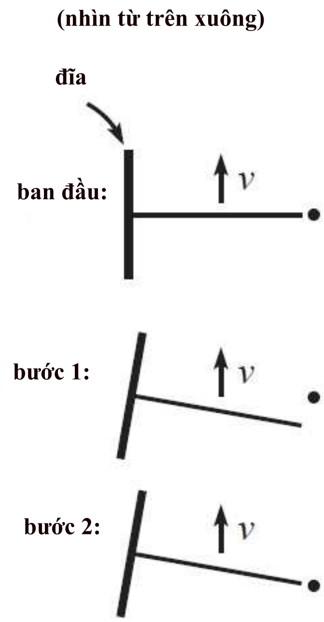
9.7.7 Chương động

Chúng ta bây giờ sẽ giải phương trình (9.70) trong một trường hợp tổng quát hơn ở một mức độ nào đó, trong đó θ là được phép thay đổi một chút. Nghĩa là, chúng ta sẽ xét một nhiễu động nhỏ vào chuyển động tròn tương ứng với phương trình (9.75). Chúng ta sẽ giả thiết rằng ω_3 là lớn ở đây, và chúng ta sẽ giả sử rằng chuyển động tròn ban đầu tương ứng với quay tiến động chậm, sao cho $\dot{\theta}$ là nhỏ. Dưới những giả thiết này, chúng ta sẽ tìm ra rằng con quay sẽ nảy lên xuống xung quanh một chút khi nó (đại thể là) chuyển động theo một đường tròn. Sự nảy này được biết đến như là chuyển động *chương động*.

Bởi vì $\dot{\theta}$ là nhỏ so với ω_3, chúng ta có thể bỏ qua (tới một mức xấp xỉ tốt) các số hạng

khối tâm, vì vậy nó không ảnh hưởng đến bất cứ khía cạnh nào của bài toán này.

[23]Nếu các điều kiện ban đầu không được thiết lập một cách đúng đắn, thì con quay sẽ nảy lên và xuống khi nó quay tiến động (hiện tượng này được biết đến như là *chương động*, được miêu tả bên dưới trong Mục 9.7.7). Nói riêng, nếu bạn giữ trục đứng yên và rồi thả nó ra, con quay ban đầu sẽ rơi thẳng xuống. Vì vậy trực giác của bạn sẽ tưởng tượng được rất tốt ở đây. Nhưng sau đó, mọi thứ phức tạp hơn sẽ bắt đầu xảy ra, như đã được giải thích trong Nhận xét 6 in mục về chương động bên dưới.



Hình 9.37:

ở giữa của các vế trái của các phương trình (9.70) để nhận được

$$I\ddot{\phi}\sin\theta - \dot{\theta}I_3\omega_3 = 0,$$
$$(Mg\ell - I_3\omega_3\dot{\phi})\sin\theta = I\ddot{\theta}. \tag{9.84}$$

Chúng ta bằng cách nào đó phải giải các phương trình ra đối với $\theta(t)$ và $\phi(t)$. Lấy đạo hàm của phương trình đầu tiên và bỏ đi số hạng bậc hai (mà là không đáng kể khi các nhiễu là đủ nhỏ) cho ta $\ddot{\theta} = (I\sin\theta/I_3\omega_3)d^2\dot{\phi}/dt^2$. Thay biểu thức này đối với $\ddot{\theta}$ vào trong phương trình thứ hai cho ta

$$\frac{d^2\dot{\phi}}{dt^2} + \omega_{\rm n}^2(\dot{\phi} - \Omega_{\rm S}) = 0, \tag{9.85}$$

trong đó

$$\omega_{\rm n} \equiv \frac{I_3\omega_3}{I} \quad \text{và} \quad \Omega_{\rm S} = \frac{Mg\ell}{I_3\omega_3} \tag{9.86}$$

tương ứng là tần số của chương động (như chúng ta sẽ sớm được thấy) và là tần số của tiến động chậm được cho trong phương trình (9.77). Tịnh tiến các biến thành $y \equiv \dot{\phi} - \Omega_{\rm S}$ trong phương trình (9.85) cho ta phương trình dao động điều hòa đẹp đẽ, $\ddot{y} + \omega_{\rm n}^2 y = 0$. Giải phương trình này và sau đó tịnh tiến biến ngược lại trở về $\dot{\phi}$ cho ta

$$\dot{\phi}(t) = \Omega_{\rm S} + A\cos(\omega_{\rm n}(t) + \gamma), \tag{9.87}$$

trong đó A và γ được xác định bởi các điều kiện đầu. Tích phân biểu thức này cho ta

$$\phi(t) = \Omega_{\rm S}t + \left(\frac{A}{\omega_{\rm n}}\right)\sin(\omega_{\rm n}(t) + \gamma), \tag{9.88}$$

cộng với một hằng số tích phân.

Bây giờ hãy giải ra $\theta(t)$. Thay $\phi(t)$ của chúng ta vào trong phương trình đầu tiên của (9.84) cho ta

$$\dot{\theta}(t) = -\left(\frac{I\sin\theta}{I_3\omega_3}\right)A\omega_\mathrm{n}\sin\left(\omega_\mathrm{n}t+\gamma\right) = -A\sin\theta\sin\omega_\mathrm{n}t+\gamma, \tag{9.89}$$

trong đó chúng ta đã sử dụng định nghĩa của ω_n trong phương trình (9.86). Bởi vì $\theta(t)$ không thay đổi nhiều, chúng ta có thể đặt $\sin\theta \approx \sin\theta_0$, trong đó θ_0 là, ví dụ như, giá trị ban đầu của $\theta(t)$. Bất kỳ sai số nào ở đây đều là các đại lượng nhỏ bậc hai. Sau đó lấy tích phân ta có

$$\theta(t) = B + \left(\frac{A}{\omega_\mathrm{n}}\sin\theta_0\right)\cos\left(\omega_\mathrm{n}t+\gamma\right), \tag{9.90}$$

trong đó B là một hằng số tích phân. Các phương trình (9.88) và (9.90) chỉ ra rằng cả θ (bỏ qua phần $\Omega_\mathrm{S}t$ không đổi) và θ đều dao động với tần số ω_n, và với các biên độ tỷ lệ nghịch với ω_n. Chú ý rằng phương trình (9.86) nói rằng ω_n tăng lên theo ω_3.

(Cú hích về một bên): Giả sử rằng chuyển động quay tiến động tròn đều ban đầu đang xảy ra với $\theta = \theta_0$ và $\dot{\phi} = \Omega_\mathrm{S}$. Khi đó bạn truyền cho con quay một cú hích nhanh dọc theo chiều của chuyển động, sao cho $\dot{\phi}$ đột nhiên trở thành $\Omega_\mathrm{S} + \Delta\Omega$ ($\Delta\Omega$ có thể là dương hoặc âm). Hãy tìm $\phi(t)$ và $\theta(t)$.

Lời giải: Đây là một bài tập với các điều kiện ban đầu. Chúng ta được cho các giá trị đầu của $\dot{\phi}$, $\dot{\theta}$, và ϕ (có giá trị bằng $\Omega_\mathrm{S} + \Delta\Omega$, 0, và ϕ_0 tương ứng), và mục tiêu của chúng ta là đi giải các ẩn A, B, và γ trong các phương trình (9.87), (9.89), và (9.90). $\dot{\theta}$ có giá trị ban đầu bằng không, vì vậy phương trình (9.89) cho ta $\gamma = 0$ (hoặc bằng π, nhưng giá trị này cũng dẫn tới cùng kết quả). Và $\dot{\phi}$ ban đầu bằng $\Omega_\mathrm{S} + \Delta\Omega$, vì vậy phương trình (9.87) cho ta $A = \Delta\Omega$. Cuối cùng, θ có giá trị đầu là θ_0, vì vậy phương trình (9.90) cho $B = \theta_0 - (\Delta\Omega/\omega_\mathrm{n})\sin\theta_0$. Đặt tất cả các đại lượng này với nhau, chúng ta có

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \Omega_\mathrm{S}t + \left(\frac{\triangle\Omega}{\omega_\mathrm{n}}\right)\sin\omega_\mathrm{n}t,\\ \theta(t) &= \theta_0 - \left(\frac{\triangle\Omega}{\omega_\mathrm{n}}\sin\theta_0\right)(1-\cos\omega_\mathrm{n}t).\end{aligned} \tag{9.91}$$

Và để tham khảo về sau (đối với các bài tập của chương này), chúng ta cũng sẽ liệt kê các đạo hàm của chúng,

$$\begin{aligned}\dot{\phi}(t) &= \Omega_\mathrm{S} + \triangle\Omega\cos\omega_\mathrm{n}t,\\ \dot{\theta}(t) &= -\triangle\,\Omega\sin\theta_0\sin\omega_\mathrm{n}t.\end{aligned} \tag{9.92}$$

NHẬN XÉT:

1. Nhớ rằng tất cả các phân tích này chỉ đúng nếu $\dot{\theta}$ và $\dot{\phi}$ là nhỏ so với ω_3, và nếu θ luôn luôn có giá trị gần với θ_0.

2. Đối với cơ cấu ban đầu chúng ta đã chọn (nghĩa là, đối với $\dot{\phi} = 0$), phương trình (9.91) chỉ ra rằng θ luôn luôn nằm ở một bên của θ_0. Nếu $\Delta\Omega > 0$, thì $\theta(t) \leq \theta_0$ với mọi t (nghĩa là, con quay sẽ luôn luôn ở vị trí cao hơn, bởi vì θ được đo so với phương thẳng đứng). Nếu $\Delta\Omega < 0$, thì $\theta(t) \geq \theta_0$ với mọi t (nghĩa là, con quay luôn luôn ở vị trí thấp hơn.)

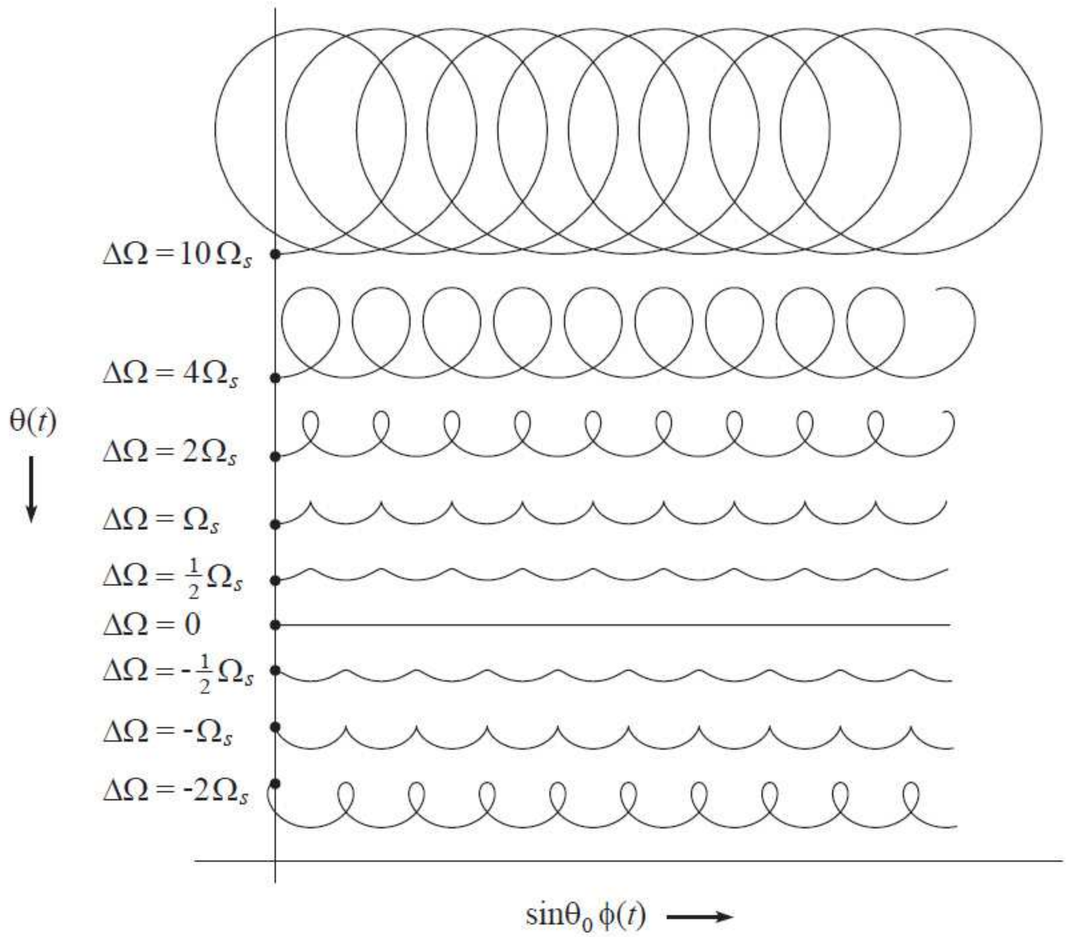
3. Xét điểm mà có khoảng cách ℓ so với gốc tọa độ và di chuyển theo một đường tròn với các tọa độ góc được cho bởi $(\phi, \theta)_{\text{trung bình}} = (\Omega_\text{S} t, \theta_0 - (\triangle\Omega/\omega_\text{n})\sin\theta_0)$. Đây là vị trí "trung bình" của điểm khối tâm, theo nghĩa là phương trình (9.91) cho các tọa độ góc của điểm khối tâm đối với điểm này có dạng

$$(\phi, \theta)_{\text{tương đối}} = \left(\frac{\triangle\Omega}{\omega_\text{n}}\right)(\sin\omega_\text{n} t, \sin\theta_0\cos\omega_\text{n} t). \tag{9.93}$$

Giá trị $\sin\theta_0$ trong tọa độ thứ hai ở đây có nghĩa rằng biên độ của dao động của θ có độ lớn gấp $\sin\theta_0$ lần biên độ của dao động của ϕ. Đây chính xác là hệ số cần thiết để làm cho điểm khối tâm chuyển động theo một đường tròn, như được quan sát bởi một người chuyển động cùng với các tọa độ $(\phi, \theta)_{\text{trung bình}}$, bởi vì một sự thay đổi của θ gây ra một chuyển dịch $l d\theta$, trong khi đó một sự thay đổi của ϕ gây ra một chuyển dịch $l\sin\theta_0 d\phi$.

4. Hình 9.38 vẽ các đồ thị của $\theta(t)$ đối với $\sin\theta_0\phi(t)$ với nhiều giá trị của $\Delta\Omega$. Các điểm tại thời điểm ban đầu của mỗi một trong chín đồ thị tất cả đều biểu diễn cùng một điểm xuất phát tại $\theta = \theta_0$. Các đồ thị được xếp chồng lên nhau chỉ để cho việc so sánh; khoảng cách theo phương thẳng đứng giữa chúng là không có ý nghĩa gì. Chúng ta đã chọn trục nằm ngang là $\sin\theta_0\phi(t)$ thay vì $\phi(t)$, và chúng ta đã chọn trục thẳng đứng có θ là đang giảm hướng xuống dưới, sao cho các đồ thị này chính xác là các đường đi bạn sẽ thấy điểm khối tâm vẽ ra trong không gian. Chúng ta đã chọn các giá trị bất kỳ của Ω_S và ω_n để vẽ các đồ thị (dó đó không có các con số trên các trục, bởi vì chúng sẽ không có ý nghĩa gì mấy), nhưng mặc dù các giá trị được lựa chọn đi thế nào đi chăng nữa, các hình dạng của các đồ thị vẫn là không đổi (ví dụ như, các đường $\Delta\Omega = \pm\Omega_\text{S}$ luôn luôn có các điểm góc). Các dao động có các tần số và biên độ khác nhau, nhưng cả hai trục đều được lấy cùng tỷ lệ (như bạn có thể kiểm tra).

5. Từ hình vẽ, chúng ta thấy rằng các chuyển động tương ứng với $\Delta\Omega$ và $-\Delta\Omega$ nhìn trông giống nhau ngoại trừ việc bị dịch chuyển tịnh tiến theo phương thẳng đứng (đối với các điểm xuất phát, mà biểu diễn cho cùng một điểm), và cũng bị dịch chuyển theo phương nằm ngang bởi một nửa đường tròn. Điều này có thể thấy được từ phương trình (9.91); việc thay đổi $\Delta\Omega$ thành $-\Delta\Omega$ có tác dụng là làm dịch chuyển số hạng

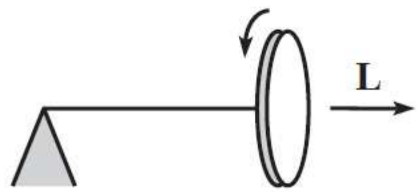


Hình 9.38:

hằng số trong $\theta(t)$, và cũng làm dịch chuẩn thời gian bởi một nữa vòng tròn, bởi vì $\triangle\Omega \sin\omega_{\rm n}t = (-\triangle\Omega)\sin(\omega_{\rm n}t+\pi)$, và tương tự đối với hàm cosine.

6. Trong trường hợp $\Delta\Omega = -\Omega_{\rm S}$, điểm khối tâm băn đầu đứng yên. Điều này tương ứng với việc giữ trục của con quay nằm yên và sau đó thả nó ra. Từ hình vẽ 9.38 chúng ta thấy rằng ban đầu điểm khối tâm đơn giản là sẽ rơi thẳng xuống, như trực giác của bạn mách bảo. (Nó có thể không rõ ràng từ hình vẽ, nhưng Bài tập 9.25 chỉ ra rằng đường cong thực ra là thẳng đứng tại các điểm trên cao trong chuyển động.) Nhưng sau đó sự kỳ lạ của moment động lượng sẽ xảy ra, và con quay cuối cùng sẽ nảy và tiến động thay vì tiếp tục rơi xuống như là một chất điểm khối lượng.

   Về mặt định tính, chúng ta có thể hiểu sự nảy và quay tiến động này như sau. Giả sử ban đầu trục của con quay và moment động lượng có hướng chỉ về bên phải vì bạn cầm lấy trục này, như được chỉ ra trong Hình 9.39. Sau khi bạn thả nó ra, một số điều sẽ xảy ra: (1) Bởi vì lực trọng trường hướng xuống dưới, con quay bắt đầu rơi. Trục quay do đó bây giờ có hướng hơi xuống dưới một chút, mà có nghĩa là moment động lượng sẽ nhận được một thành phần hướng xuống dưới. Lực từ khớp quay do đó phải sinh ra một moment lực xung quanh điểm khối tâm. Bởi quy tắc bàn tay phải, lực này phải có hướng vào trong trang giấy. (2) Từ $F = ma$, lực hướng vào trong này làm cho con quay tăng tốc vào trong trang giấy. Điều này làm cho trục quay sẽ có hướng vào trong trang giấy một chút, vài vậy moment động lượng sẽ nhận được một thành phần theo hướng này. Theo quy tắc bàn tay phải, khi đó phải có một lực hướng lên từ khớp quay để cung cấp moment lực cần thiết cho việc này. (3) Lực hướng lên này sẽ làm chậm chuyển động đi xuống và thực ra cuối cùng sẽ lớn hơn mg và làm cho điểm khối tâm đi lên trở lại. Điều này có nghĩa là moment động lượng có thành phần theo phương thẳng đứng của nó tăng lên, vì vậy theo quy tắc bàn tay phải phải có một lực từ khớp quay có hướng chỉ ra ngoài trang giấy để cung cấp moment lực cần thiết cho điều này. (4) Lực hướng ra ngoài này khi đó làm chậm chuyển động đi vào trong trang giấy và cuối cùng sẽ làm cho nó dừng hẳn, và sau đó quá trình sẽ tự lặp lại. Tất nhiên, lập luận định tính này không chỉ ra rằng tất cả các chi tiết một cách chính xác, nhưng ít nhất nó làm cho chuyển động đáng tin hơn một chút.



Hình 9.39:

7. Nếu bạn bắt đầu bằng cách giữ trục quay của con quay nằm yên, như là trong nhận xét phía trên, trường hợp $\Delta\Omega = 0$ tương ứng với việc cho trục quay một lực đẩy ban đầu thích hợp hướng vào trong trang giấy (thay vì chỉ thả nó rơi như ở trên) sao cho sự thay đổi của moment động lượng theo hướng vào trong trang giấy yêu cầu một lực hướng lên có độ lớn mg từ khớp quay. Điểm khối tâm khi đó sẽ giữ nguyên độ cao và đơn giản là sẽ dịch chuyển trong một đường tròn nằm ngang mà không có sự nảy.

♣

9.8 Bài tập

Mục 9.1: Các nội dung mở đầu liên quan đến chuyển động quay

9.1. Các loại ω khác nhau *

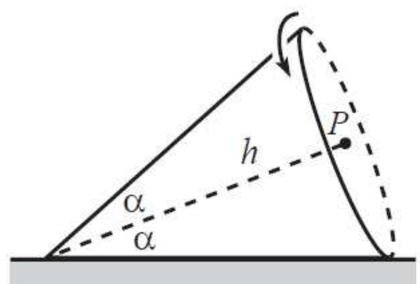
Xét một hạt tại điểm $(a, 0, 0)$, với vận tốc $(0, v, 0)$. Tại thời điểm này, hạt có thể được coi là đang quay xung quanh nhiều vector (ω) khác nhau đi qua điểm gốc tọa độ. Không chỉ có duy nhất một ω chính xác. Hãy tìm tất có các ω có thể xảy ra (chỉ ra hướng và độ lớn của chúng).

9.2. Các điểm cố định trên một mặt cầu **

Xét một phép biến hình của một mặt cầu cứng vào chính nó. Hãy chỉ ra rằng có hai điểm trên mặt cầu cuối cùng sẽ trở lại vị trí ban đầu của nó.

9.3. Hình nón lăn **

Một hình nón lăn không trượt trên một mặt bàn. Nửa góc của đỉnh nón là α, và trục



Hình 9.40:

của nó có chiều dài h (xem Hình 9.40). Gọi vận tốc của tâm của đáy hình nón, là điểm P trong hình vẽ, là v. Hỏi vận tốc góc của hình nón đối với hệ quy chiếu trái đất bằng bao nhiêu tại thời điểm chỉ ra trong hình vẽ? Có nhiều cách để giải bài toán này, vì vậy bạn được khuyến khích hãy xem ba lời giải trong sách, thậm chí là sau khi đã giải nó.

Mục 9.2: Tensor quán tính

9.4. Định lý trục song song

Gọi (X, Y, Z) là vị trí của điểm khối tâm của một vật thể, và gọi (x', y', z') là vị trí đối với điểm khối tâm. Chứng minh định lý trục song song, phương trình (9.19), bằng cách đặt $x = X + x'$, $y = Y + y'$, và $z = Z + z'$ trong phương trình (9.8).

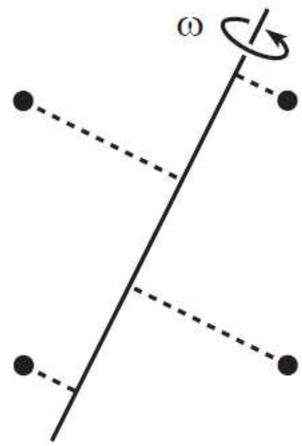
Mục 9.3: Các trục chính

9.5. Một hình trụ thú vị *

Hỏi tỷ số của độ cao so với bán kính của một hình trụ phải bằng bao nhiêu sao cho tất cả các trục đều là một trục chính (với điểm khối tâm là gốc tọa độ)?

9.6. Hình vuông quay *

Đây là một bài tập liên quan đến hình học. Định lý 9.5 nói rằng nếu các moment quán



Hình 9.41:

tính xung quanh hai trục là bằng nhau, thì bất kỳ trục nào trong mặt phẳng của hai trục này đều là một trục chính. Điều này có nghĩa là vật thể sẽ vui vẻ quay xung quanh bất kỳ trục nào trong mặt phẳng này, nghĩa là, mà không cần đến moment lực nào. Minh họa điều này một cách tường minh đối với bôn khối lượng bằng nhau trong hình dạng của một hình vuôn, với tâm là điểm gốc tọa độ, mà hiển nhiên là nó có hai moment bằng nhau. Giả sử rằng các khối lượng được nối với nhau bởi các sợi dây vào trục quay, như được chỉ ra trong Hình 9.1, và giả sử rằng tất cả chúng quay với cùng tần số ω xung quanh trục này, sao cho chúng vẫn giữ trong hình dạng một hình vuông. Nhiệm vụ của bạn là chỉ ra rằng các lực căng trong các sợi dây có giá trị sao cho không có moment lực tổng đối với tâm của hình vuông mà tác dụng lên trục quay.

9.7. Sự tồn tại các trục chính của một vật phẳng *

Cho một vật phẳng trong mặt phẳng $x-y$, hãy chỉ ra rằng các trục chính là tồn tại bằng cách xét điều gì sẽ xảy ra với tích phân $\int xy$ khi các trục tọa độ bị quay xung quanh gốc tọa độ một góc $\pi/2$.

9.8. Các tính đối xứng và các trục chính của một vật phẳng **

Một sự quay của các trục trong mặt phẳng $x-y$ bởi một phép quay một góc θ sẽ biến các tọa độ theo quy luật (bạn có thể chấp nhận điều này)

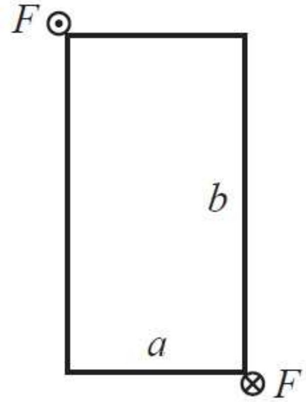
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{9.94}$$

Sử dụng điều này để chỉ ra rằng nếu một vật phẳng trong mặt phẳng $x-y$ có một sự đối xứng dưới một phép quay một góc $\theta \neq \pi$, thì $\int xy = 0$ đối với bất kỳ sự lựa chọn các trục nào, mà nó có nghĩa là tất cả các trục (đi qua gốc tọa độ) trong mặt phẳng đều là các trục chính.

Mục 9.4: Hai dạng bài tập cơ bản

9.9. Tác động vào một hình chữ nhật *

Một hình chữ nhật phẳng đồng chất có độ dài các cạnh là a và b đang đứng yên trong

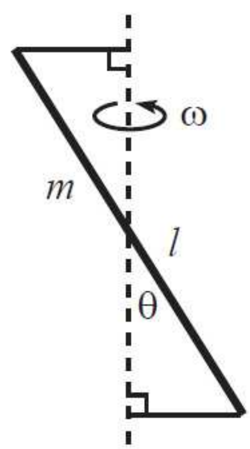


Hình 9.42:

không gian, không quay. Bạn tác động vào các góc tại hai đầu của một đường chéo, với các lực bằng nhau và ngược chiều (xem Hình 9.42). Hãy chỉ ra rằng vector ω ban đầu có hướng chỉ dọc theo đường chéo còn lại.

9.10. Thanh quay **

Một thanh có khối lượng m và chiều dài ℓ đang quay với tần số ω xung quanh một trục,

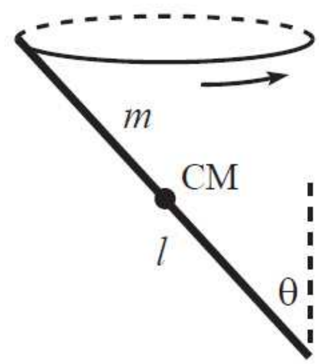


Hình 9.43:

như chỉ ra trong Hình 9.43. Thanh tạo một góc θ so với trục quay và được giữ trong chuyển động của nó bởi hai sợi dây vuông góc với trục quay. Hỏi lực căng trong các sợi dây bằng bao nhiêu? (Bỏ qua trọng lực.)

9.11. Thanh bên dưới một vòng tròn **

Một thanh có khối lượng m và chiều dài ℓ được sắp xếp sao cho khối tâm của nó đứng



Hình 9.44:

yên trong khi đầu trên của nó trượt theo một đường tròn trên một vòng tròn không ma sát, như chỉ ra trong Hình 9.44. Thanh tạo một góc θ so với phương thẳng đứng. Hỏi tần số của chuyển động này bằng bao nhiêu?

9.12. Con lắc đơn quay tròn **

Xét một con lắc tạo bởi một thanh không khối lượng chiều dài ℓ với một khối lượng chất điểm m tại một đầu của thanh. Giả sử các điều kiện được thiết lập sao cho khối lượng chuyển động theo một đường tròn nằm ngang. Gọi θ là góc không đổi mà thanh tạo với phương thẳng đứng. Hãy tìm tần số, Ω, của chuyển động tròn này theo ba cách khác nhau.

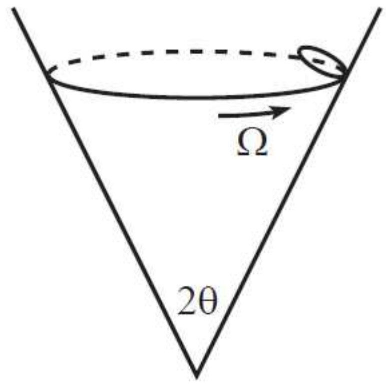
1. Sử dụng $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Phương pháp này chỉ thực hiện được nếu bạn có một chất điểm khối lượng. Với các vật thể có kích cỡ, bạn phải sử dụng một trong các phương pháp sau liên quan đến moment lực.

2. Sử dụng $\tau = d\mathbf{L}/dt$ với điểm gắn khớp của con lắc đơn là gốc tọa độ.

3. Sử dụng $\tau = d\mathbf{L}/dt$ với điểm vị trí của khối lượng là gốc tọa độ.

9.13. Lăn bên trong một hình nón **

Một hình nón cố định nằm trên đỉnh nhọn của nó, với trục của nó theo phương thẳng



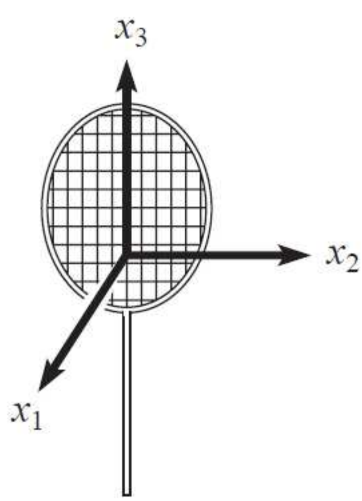
Hình 9.45:

đứng. Nửa góc của đỉnh nón là θ. Một chiếc vòng nhỏ có bán kính r lăn không trượt trên bề mặt bên trong của nó. Giả sử rằng các điều kiện được thiết lập sao cho (1) điểm tiếp xúc giữa vòng và mặt nón chuyển động theo một đường tròn có độ cao là h ở trên đỉnh nón, và (2) mặt phẳng của vòng tròn luôn luôn vuông góc với đường thẳng nối điểm tiếp xúc và đỉnh nón (xem Hình 9.45). Hỏi tần số, Ω, của chuyển động tròn này bằng bao nhiêu? Hãy giải bài toàn trong trường hợp xấp xỉ khi r nhỏ hơn rất nhiều so với bán kính của chuyển động tròn, $h\tan\theta$.

Mục 9.5 Các phương trình Euler

9.14. Định lý vợt tennis ***

Nếu bạn cố gắng xoay một vợt tennis (hoặc một quyển sách, vân vân ...) xung quanh bất



Hình 9.46:

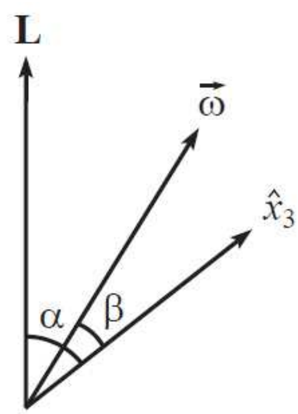
cứ một trong ba trục chính của nó, bạn sẽ thấy rằng các điều khác nhau sẽ xảy ra đối với các trục khác nhau. Giả sử rằng các moment chính (đối với điểm khối tâm) được ký hiệu bởi $I_1 > I_2 > I_3$ (xem Hình 9.46), bạn sẽ thấy rằng vợt sẽ quay tròn rất tốt xung quanh các trục $\hat{\mathbf{x}}_1$ và $\hat{\mathbf{x}}_3$, nhưng nó sẽ lắc lư theo một cách khá phức tạp xung quanh trục $\hat{\mathbf{x}}_2$. Kiểm tra lại điều này bằng cách làm thí nghiệm với một cuốn sách (tốt hơn là nhẹ thôi, và được quấn quanh bởi một sợi dây cao su), hoặc một vợt tennis, nếu bạn vô tình đang có nó.

Bây giờ hãy kiểm tra điều này theo cách toán học. Điểm mấu chốt ở đây là bạn không thể bắt đầu chuyển động của nó với ω *chính xác* hướng dọc theo một trục chính. Do đó, cái mà bạn muốn chỉ ra là chuyển động xung quanh $\hat{\mathbf{x}}_1$ và $\hat{\mathbf{x}}_3$ là *ổn định* (nghĩa là, một sai số nhỏ trong các điều kiện ban đầu sẽ vẫn là nhỏ về sau), trong khi đó chuyển động xung quanh trục $\hat{\mathbf{x}}_2$ sẽ là *không ổn định* (nghĩa là, một sai số nhỏ trong các điều kiện ban đầu sẽ trở lên lớn dần, cho tới khi chuyển động cuối cùng không còn giống như là một sự quay xung quanh trục $\hat{\mathbf{x}}_2$ nữa).[24] Nhiệm vụ của bạn là sử dụng các phương trình của Euler để chứng minh các phát biểu về sự ổn định. (Bài tập luyện tập 9.33 sẽ cho một cách khác để nhận được kết quả này.)

Mục 9.6: Con quay đối xứng tự do

9.15. Các góc của con quay tự do *

Trong Mục 9.6.2, chúng ta đã chỉ ra rằng đối với một con quay đối xứng tự do, moment



Hình 9.47:

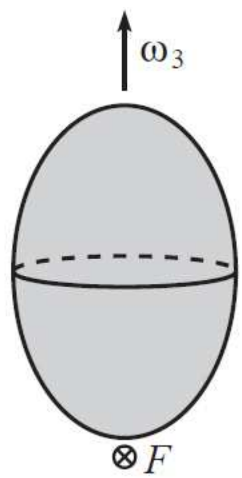
động lượng $\mathbf{L}$, vận tốc góc ω, và trục đối xứng $\hat{\mathbf{x}}_3$ tất cả nằm trên cùng một mặt phẳng.

[24]Nếu bạn thử trong một khoảng thời gian đủ dài, bạn có thể sẽ có vector ω ban đầu chỉ theo hướng đủ gần với hướng của trục $\hat{\mathbf{x}}_2$ sao cho quyển sách sẽ vẫn còn (hầu như) quay xung quanh trục $\hat{\mathbf{x}}_2$ trong toàn bộ thời gian nó chuyển động. Tuy nhiên, hãy sử dụng thời gian đó một cách tốt hơn thay vì làm việc này.

Gọi α là góc giữa $\hat{\mathbf{x}}_3$ và $\mathbf{L}$, và gọi β là góc giữa $\hat{\mathbf{x}}_3$ và ω (xem Hình 9.47). Hãy tìm mối liên hệ giữa α và β phụ thuộc theo các moment chính, I và I_3.

9.16. Nằm ở bên trên **

Một con quay với $I = nI_3$, trong đó n là một hệ số nào đó, ban đầu đang tự quay xung



Hình 9.48:

quanh trục x_3 của nó với vận tốc góc ω_3. Bạn tác dụng một lực tại điểm đáy của nó, hướng vào bên trong trang giấy như được chỉ ra trong Hình 9.48 (tưởng tượng rằng bạn đập một lực vào một cái chốt nhô ra từ đáy của con quay). Hỏi giá trị lớn nhất của n bằng bao nhiêu sao cho vector ω tổng không bao giờ nghiêng xuống dưới trục nằm ngang trong chuyển động sau đó, dù cho bạn có đập con quay với một lực mạnh như thế nào đi chăng nữa?

Phần 9.7: Con quay đối xứng có trọng lượng

9.17. Con quay **

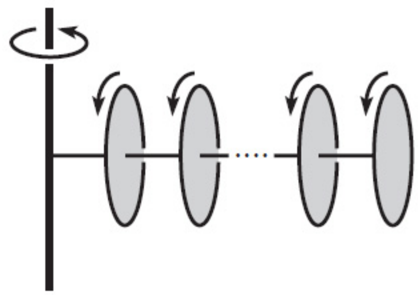
Bài tập này liên quan đến ví dụ con quay tự quay trong Mục 9.7.5. Nó sử dụng kết quả đối với Ω trong phương trình (9.82).

1. Hỏi giá trị nhỏ nhất của ω_3 bằng bao nhiêu sao cho chuyển động quay tiến động tròn là có thể xảy ra?

2. Hãy tìm các biểu thức xấp xỉ đối với $\Omega_\pm$ khi ω_3 là rất lớn. Tuy nhiên, cụm từ "rất lớn" là hơi không có nghĩa. Hỏi cần phải sử dụng mệnh đề toán học nào để thay thế nó?

9.18. Nhiều con quay **

N đĩa giống nhau và thanh không khối lượng được sắp xếp như trong Hình 9.49. Mỗi



Hình 9.49:

đĩa được gắn chặt với thanh tại mặt trái của nó và được gắn khớp với thanh tại mặt bên phải của nó. Thanh ngoài cùng bên trái được gắn khớp với một cột. Bạn muốn thiết lập chuyển động quay tiến động tròn với các thanh luôn luôn tạo thành một đường thẳng nằm ngang. Hỏi các vận tốc góc tương đối của các đĩa bằng bao nhiêu sao cho điều này là có thể xảy ra?

9.19. Con quay có trọng lượng trên một cái bàn không ma sát **

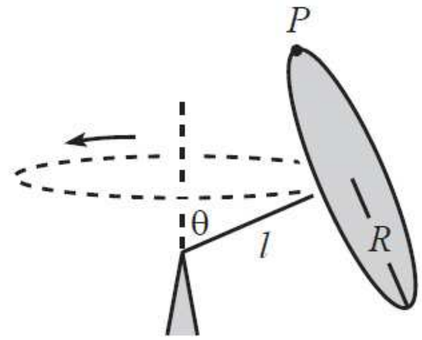
Bài bài toán về một con quay đối xứng có trọng lượng quay trên một mặt bàn không

Hình 9.50:

ma sát (xem Hình 9.50). Bạn có thể làm bài này bằng cách đơn giản là phát biểu những thay đổi cần thiết trong phần thu được trong Mục 9.7.3 (hoặc Mục 9.7.4).

9.20. Điểm cố định cao nhất **

Xét một con quay tạo bởi một đĩa đồng chất có bán kính R, được nối với gốc tọa độ bởi một thanh không khối lượng (mà nó được gắn chặt với đĩa) có độ dài ℓ. Vẽ một điểm

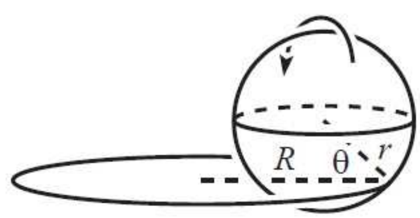


Hình 9.51:

trên con quay tại vị trí cao nhất của nó, và gọi điểm này là điểm P (xem Hình 9.51). Bạn muốn thiết lập một chuyển động quay tiến động tròn, với việc thanh tạo một góc không đổi θ với phương thẳng đứng (θ có thể được chọn là bất kỳ góc nào giữa không và π), và với P luôn luôn ở điểm cao nhất của con quay. Hỏi tần số của chuyển động quay tiến động, Ω, là bao nhiêu? Mối liên hệ giữa R và ℓ phải thỏa mãn điều gì để cho chuyển động này có thể xảy ra?

9.21. Quả bóng rổ trên vành tròn ***

Một quả bóng rổ lăn không trượt vòng quanh một vành của rổ bóng theo một cách mà

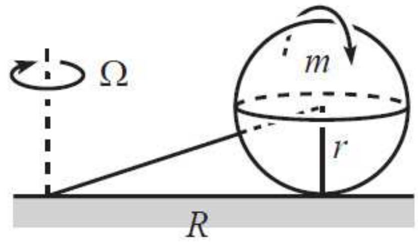


Hình 9.52:

những điểm tiếp xúc vẽ ra một đường tròn lớn trên quả bóng, và điểm khối tâm chuyển động vòng quanh theo một đường tròn nằm ngang với tần số Ω. Các bán kính của quả bóng và vành rổ tương ứng là r và R, và bán kính của quả bóng nối với điểm tiếp xúc tạo một góc θ so với phương nằm ngang (xem Hình 9.52). Giả sử rằng moment quán tính của quả bóng xung quanh tâm của nó là $I = (2/3)mr^2$. Hãy tìm Ω.

9.22. Một cây kẹo lăn ***

Xét một cây kẹo tạo bởi một hình cầu đặc có khối lượng m và bán kính r mà bị xuyên qua tâm bởi một thanh không khối lượng. Đầu tự do của thanh được gắn khớp với mặt đất (xem Hình 9.53). Hình cầu lăn không trượt trên mặt đất, với tâm của nó chuyển động

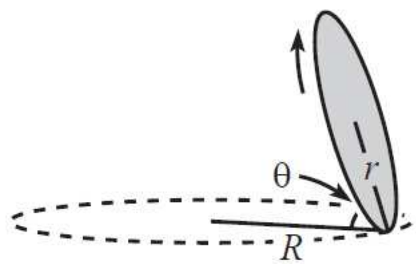


Hình 9.53:

theo một đường tròn bán kính R với tần số Ω. Hỏi phản lực giữa mặt đất và cây kẹo bằng bao nhiêu?

9.23. Đồng xu lăn ***

Các điều kiện ban đầu được thiết lập sao cho một đồng xu có bán kính r lăn tròn theo

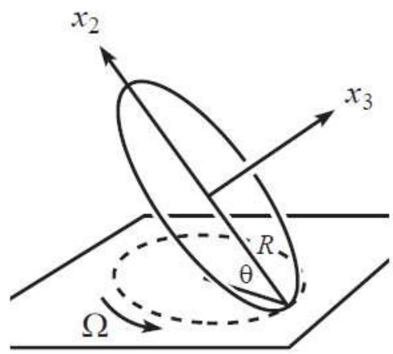


Hình 9.54:

một đường tròn, như được chỉ ra trong Hình 9.54. Điểm tiếp xúc trên mặt đất vẽ ra một đường tròn bán kính R, và đồng xu tạo một góc không đổi θ so với phương nằm ngang. Đồng xu lăn không trượt (với giả thiết rằng lực ma sát với mặt đất là đủ lớn cần thiết). Hỏi tần số, Ω, của chuyển động tròn của điểm tiếp xúc trên mặt đất bằng bao nhiêu? Hãy chỉ ra rằng chuyển động như vậy chỉ tồn tại nếu $R > (5/6)r\cos\theta$.

9.24. Đồng xu lắc lư ***

Nếu bạn xoay một đồng xu xung quanh một đường kính thẳng đứng của nó trên một mặt bàn, nó sẽ từ từ mất năng lượng và bắt đầu một chuyển động lắc lư. Góc giữa đồng xu và mặt bàn sẽ dần dần giảm đi, và cuối cùng nó sẽ nằm im. Giả sử rằng quá trình này diễn ra chậm, và xét chuyển động khi đồng xu tạo một góc θ với mặt bàn (xem Hình 9.55). Bạn có thể giả thiết là điểm khối tâm về cơ bản là đứng yên. Gọi R là bán kính của đồng xu, và gọi Ω là tần số mà điểm tiếp xúc với mặt bàn vẽ ra trong chuyển động tròn của nó. Giả sử đồng xu lăn không trượt.



Hình 9.55:

1. Hãy chỉ ra rằng vận tốc góc của đồng xu là $\omega = \Omega \sin\theta \hat{\mathbf{x}}_2$, trong đó $\hat{\mathbf{x}}_2$ có hướng chỉ lên dọc theo đồng xu, hướng ra ngoài điểm tiếp xúc.

2. Hãy chỉ ra rằng
$$\mathbf{\Omega} = 2\sqrt{\frac{g}{R\sin\theta}}. \tag{9.95}$$

3. Hãy chỉ ra rằng Abe (hay là Tom, Franklin, George, John, Dwight, Susan, hoặc Sacagawea) dường như đang quay, khi được quan sát từ phía trên, với tần số
$$2(1-\cos\theta)\sqrt{\frac{g}{R\sin\theta}}. \tag{9.96}$$

9.25. Các điểm lùi của chương động **

1. Sử dụng ký hiệu và các điều kiện đầu trong ví dụ của Mục 9.7.7, hãy chứng minh rằng các điểm góc xảy ra trong chương động nếu và chỉ nếu $\Delta\Omega = \pm\Omega_S$. Một điểm góc là điểm mà đồ thị của $\theta(t)$ đối với $\phi(t)$ có độ dốc không liên tục.

2. Chứng minh rằng các điểm góc này thực ra là các điểm lùi. Một điểm lùi là một điểm góc tại đó đồ thị đảo chiều trong mặt phẳng $\phi - \theta$.

9.26. Các đường tròn chương động **

1. Sử dụng ký hiệu và các điều kiện đầu trong ví dụ trong Mục 9.7.7, và giả sử rằng $\omega_3 \gg \triangle\Omega \gg \Omega_S$, hãy tìm (một cách xấp xỉ) hướng của moment động lượng ngay sau khi cú hích ngang xảy ra.

2. Sử dụng phương trình (9.91) để chỉ ra rằng điểm khối tâm sau đó chuyển động (một cách xấp xỉ) theo một đường tròn xung quanh $\mathbf{L}$. Và chỉ ra rằng chuyển động "tròn"

này chính là cái mà bạn đang mong đợi từ lập luận về con quay tự do trong Mục 9.6.2, đặc biệt là phương trình (9.55).

Bài tập mẫu thêm

9.27. Lăn không trượt *

Cách thức chuẩn để một quả bóng lăn không trượt trên một bề mặt phẳng là các điểm tiếp xúc trên quả bóng vẽ ra một đường tròn lớn theo phương thẳng đứng trên quả bóng. Liệu còn có các cách nào khác nữa không để cho một quả bóng lăn không trượt?

9.28. Lăn thẳng? **

Trong một vài tình huống, như là cơ cấu đồng xu lăn trong Bài tập 9.23, vận tốc của điểm khối tâm của một vật đang lăn thay đổi hướng theo thời gian. Xét một quả cầu đồng chất lăn không trượt trên mặt đất (có thể là theo một cách không bình thường được miêu tả trong lời giải của Bài tập 9.27). Liệu có thể để cho vận tốc của điểm khối tâm đổi hướng? Hãy biện luận câu trả lời của bạn một cách chặt chẽ.

9.29. Quả bóng trên tờ giấy ***

Một quả bóng đồng chất lăn không trượt trên một mặt bàn (có thể lăn theo cách không bình thường được miêu tả trong lời giải của Bài tập 9.27). Nó lăn lên trên một mảnh giấy, mà bạn khi đó kéo nó xung quanh (theo phương nằm ngang) theo một cách bất kỳ. Bạn thậm chí có thể kéo tờ giấy đột ngột, giật nó sao cho quả bóng bị trượt đối với tờ giấy. Sau khi bạn cho phép quả bóng ra khỏi tờ giấy, nó cuối cùng sẽ lăn không trượt trên mặt bàn. Hãy chỉ ra rằng vận tốc cuối của quả bóng bằng với vận tốc ban đầu của nó.

9.30. Quả bóng trên một bề mặt có thể quay được ****

Một quả bóng đồng chất lăn không trượt trên một bề mặt có thể quay được (có thể theo cách không bình thường được miêu tả trong lời giải của Bài tập 9.27). Khi được quan sát từ hệ tọa độ quán tính mặt đất, hãy chỉ ra rằng quả bóng chuyển động theo một đường tròn (không nhất thiết là có tâm tại tâm của bề mặt quay) với tần số bằng 2/7 lần tần số của bề mặt quay.

9.9 Bài tập luyện tập

Mục 9.1: Các nội dung mở đầu liên quan đến chuyển động quay

9.31. Bánh xe quay tròn **

Một bánh xe với các nan hoa lăn không trượt trên mặt đất. Một máy ảnh đứng yên chụp một bức ảnh của nó khi nó lăn qua, từ bên cạnh. Do thời gian mở cửa chớp của máy ảnh là khác không, các nan hoa nói chúng sẽ bị mờ. Tại những vị trí nào trong bức ảnh các nan hoa *không* bị mờ? *Gợi ý:* Một câu trả lời sai hay mắc phải là chỉ có một điểm duy nhất.

Mục 9.2: Tensor quán tính

9.32. Tensor quán tính *

Hãy tính toán tích có hướng kép $\mathbf{r} \times (\omega \times \mathbf{r})$ trong phương trình (9.7) bằng việc sử dụng đồng nhất thức vector,

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}.\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}.\mathbf{B}). \tag{9.97}$$

Mục 9.3: Các trục chính

9.33. Định lý vợt tennis **

Bài tập 9.14 cho ta phát biểu của "định lý vợt tennis," và lời giải của nó liên quan đến các phương trình Euler. Hãy minh họa định lý này ở đây bằng cách viết ra các mệnh đề bảo toàn của L^2 và bảo toàn của E và sau đó sử dụng chúng theo cách sau. Viết ra một phương trình mà nói rằng nếu ω_2 và ω_3 (hoặc ω_1 và ω_2) ban đầu có giá trị nhỏ, thì chúng sẽ tiếp tục có giá trị nhỏ. Và viết một phương trình tương tự mà nói rằng nếu ω_1 và ω_3 ban đầu có giá trị nhỏ, thì sau đó chúng *không* cần thiết phải tiếp tục có giá trị nhỏ. (Nó sẽ là vấn đề khác để chỉ ra rằng chúng thực ra *sẽ không* tiếp tục giữ giá trị nhỏ nữa. Nhưng bây giờ đừng có lo lắng gì về điều này ở đây. Bất cứ điều gì *có thể* xảy ra thì thông thường *sẽ xảy ra* trong vật lý.)

9.34. Các moment của một khối lập phương **

Theo tinh thần của Phụ lục E, hãy tính toán các moment chính của một hình hộp lập phương đặc có khối lượng m và chiều dài cạnh là ℓ, với các trục tọa độ song song với các cạnh của hình lập phương, và gốc tọa độ lại tại một góc.

9.35. Các moment nghiêng

(a) Xét một vật phẳng trong mặt phẳng $x - y$. Nếu các trục x và y là các trục chính, hãy sử dụng ma trận quay trong phương trình (9.94) để chỉ ra rằng moment quán tính quanh trục x', mà tạo với trục x một góc θ, là $I_{x'} = I_x \cos^2\theta + I_y \sin^2\theta$.

(b) Xét một vật thể ba chiều tổng quát có các trục chính là các trục x, y, và z. Xét trục khác có hướng chỉ theo vector đơn vị α, β, γ. Hãy chỉ ra rằng moment quán tính đối với trục này là $\alpha^2 I_x + \beta^2 I_y + \gamma^2 I_z$. *Gợi ý:* Tích có hướng, được thảo luận trong Phụ lục B, cung cấp cho chúng ta một phương pháp đẹp đẽ để tính toán khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng.

9.36. Tứ cực **

Xét một vật thể hình dạng bất kỳ khối lượng m có điểm khối tâm tại điểm gốc tọa độ. Bằng cách sử dụng định luật cosine, thế năng hấp dẫn của một khối lượng M tại vị trí $\mathbf{R}$ là

$$V(\mathbf{R}) = -\int \frac{GMdm}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\beta}}, \tag{9.98}$$

trong đó tích phân chạy trên toàn bộ thể tích của vật thể, và β là góc mà vector vị trí $\mathbf{r}$ của một điểm bất kỳ trong vật thể tạo với vector $\mathbf{R}$.

(a) Giả sử rằng tất cả các điểm trong vật thể thỏa mãn $r \ll R$, hãy chỉ ra rằng một biểu thức xấp xỉ đối với thế năng là

$$V(\mathbf{R}) \approx -\frac{GMm}{R} - \frac{GM}{2R^3}\int r^2(3\cos^2\beta - 1)dm, \tag{9.99}$$

và sau đó chỉ ra rằng biểu thức này có thể được viết dưới dạng

$$V(\mathbf{R}) \approx -\frac{GMm}{R} - \frac{GM}{2R^3}(I_1 + I_2 + I_3 - 3I_R), \tag{9.100}$$

trong đó I_1, I_2, và I_3 là các moment đối với ba trục trực giao bất kỳ (mà chúng ta sẽ chọn là các trục chính trong phần (b)), và I_R là moment đối với trục dọc theo vector $\mathbf{R}$.

(b) Bây giờ xét một hành tinh với trục quay đối xứng $\hat{\mathbf{x}}_3$, ví dụ như là trái đất mà phình ra tại đường xích đạo do sự tự quay của nó. Sử dụng kết quả của Bài tập luyện tập 5.5, hãy chỉ ra rằng thế năng trong phương trình (9.100) có thể được viết dưới dạng

$$V(\mathbf{R}) \approx -\frac{GMm}{R} - \frac{GM}{2R^3}(I_3 - I)(1 - 3\cos^2\theta), \tag{9.101}$$

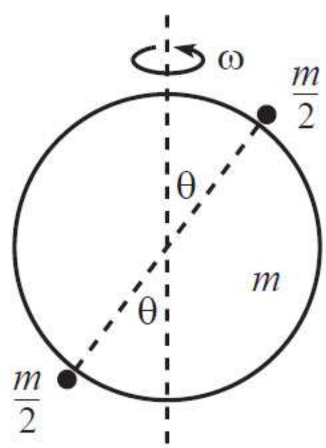
trong đó $I \equiv I_1 = I_2$, và θ là góc mà $\mathbf{R}$ tạo với $\hat{\mathbf{x}}_3$.

Số hạng thứ hai ở đây được biết đến như là số hạng *tứ cực*. Trong tĩnh điện, một *lưỡng cực* bao gồm hai điện tích bằng nhau và ngược dấu nằm cách nhau một khoảng d. Một một điểm cho trước ở cách xa, các lực từ hai điện tích này một phần triệt tiêu nhau. Nhưng chúng không hoàn toàn triệt tiêu nhau, bởi vì các lực tĩnh điện (mà tác dụng giống như lực hút, theo luật $1/r^2$) phụ thuộc vào khoảng cách và hướng của các điện tích, và hai điện tích được đặt tại các điểm khác nhau. Nếu hai lưỡng cực được định hướng theo các phương ngược chiều nhau và sau đó được đặt cạnh nhau, cách nhau một khoảng d (sao cho có các điện tích q và $-q$ đan xen nhau tại các góc của một hình vuông) thì các lực từ hai lưỡng cực này gần như là triệt tiêu nhau. Nhưng lại một lần nữa, sự triệt tiêu không xảy ra hoàn toàn, bởi vì các lưỡng cực được đặt tại các vị trí khác nhau. Sự phân bố điện tích này được gọi là một *tứ cực*, và nó tương tự với tình huống của một hành tinh đang tự quay (và đang phình ra), bởi vì một hình tinh như vậy bao gồm một quả bóng hình cầu (mà tạo ra số hạng đầu tiên trong phương trình (9.101)), cộng với một vùng khối lượng "âm" đặt thêm vào quả bón tại các cực và một vùng có khối lượng dương đặt thêm vào quả bóng tại đường xích đạo. Việc nhìn hình vuông các điện tích ở trên từ xa dọc theo đường chéo chứa hai điện tích âm cũng tương tự như việc nhìn trái đất từ xa dọc theo trục quay của nó.

Mục 9.4: Hai dạng bài tập cơ bản

9.37. Hình cầu và các hạt *

Một hình cầu đồng chất khối lượng m và bán kính R quay xung quanh một trục thẳng

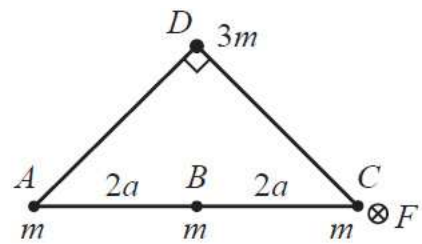


Hình 9.56:

đứng với vận tốc góc ω. Hai hạt có khối lượng $m/2$ được đưa lại gần hình cầu tại hai điểm đối xứng dọc theo đường kính, theo một góc θ so với phương thẳng đứng, như chỉ ra trong Hình 9.56. Các khối lượng, mà ban đầu về cơ bản là nằm im, đột nhiên dính vào hình cầu. Hỏi vector vận tốc góc ω sau đó tạo với phương thẳng đứng một góc là bao nhiêu? (Nếu bạn muốn, bạn có thể kiểm tra kết quả của bạn bằng cách chỉ ra rằng góc θ mà làm cho góc này lớn nhất là $\sin^{-1}\sqrt{7/9} \approx 61.9^o$.)

9.38. Đập một tam giác **

Xét vật thể rắn như trong Hình 9.57. Bốn khối lượng nằm tại các điểm được chỉ ra trên

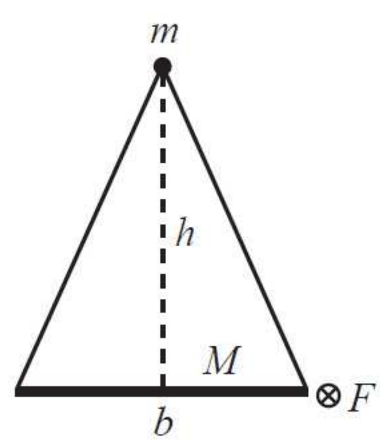


Hình 9.57:

một tam giác vuông cân rắn với cạnh huyền dài $4a$. Khối lượng tại góc vuông là $3m$, và ba khối lượng khác là m. Gọi chúng là A, B, C, D, như đã chỉ ra trong hình vẽ. Giả sử rằng vật thể là đang lơ lửng tự do trong không gian vũ trụ. Khối lượng C bị đập với một cú đánh nhanh, hướng vào trong trang giấy. Giả sử xung lực có độ lớn là $\int F dt = P$. Hỏi vận tốc của các khối lượng ngay sau khi cú đánh bằng bao nhiêu?

9.39. Đập một tam giác khác **

Xét một vật thể rắn như trong Hình 9.58. Một thanh đồng chất có khối lượng M nằm

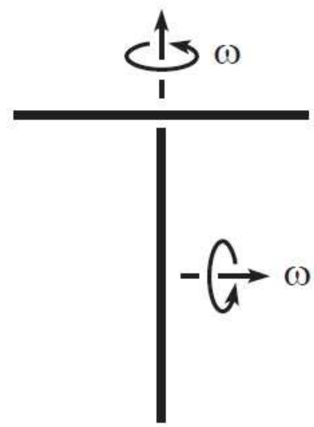


Hình 9.58:

dọc theo đáy của một tam giác cân, và một khối lượng m nằm tại điểm đối diện. Đáy này có chiều dài b, và chiều cao là h. Giả sử rằng vật thể đang lở lửng tự do ở trong không gian vũ trụ. Đầu bên phải của thanh bị đập bởi một cú đánh nhanh, hướng vào trong trang giấy. Giả sử xung lực có độ lớn là $\int F dt = P$. Hỏi vận tốc của khối lượng m ngay sau cú đánh bằng bao nhiêu?

9.40. Hai thanh dính vào nhau **

Hai thanh đồng chất giống nhau đang quay xung quanh tâm nằm yên của chúng với các



Hình 9.59:

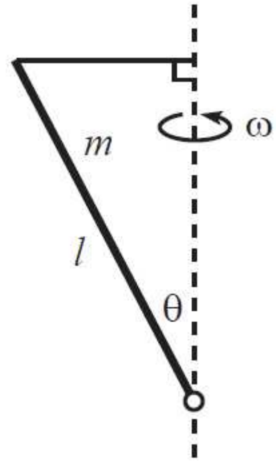
vận tốc góc bằng nhau, như được chỉ ra trong Hình 9.59. Thanh bên dưới được nâng lên một cách từ từ cho tới khi đầu trên của nó va chạm với tâm của thanh bên trên. Các thanh dính vào nhau tạo thanh một vật thể rắn hình chữ "T". Giả sử rằng va chạm xảy ra khi thanh ở trên nằm trong mặt phẳng của tờ giấy. Ngay lập tức sau va chạm, một điểm (cùng với điểm khối tâm) trên vật chữ "T" sẽ tức thời đứng yên. Hỏi điểm đó nằm ở đâu?

9.41. Quay tròn thanh lần nữa **

Hãy giải lại bài toán trong Mục 9.4.2, nhưng bây giờ sử dụng điểm khối tâm là điểm gốc tọa độ.

9.42. Khớp quay và sợi dây **

Một thanh có khối lượng m và chiều dài ℓ quay xung quanh một trục với tần số ω, như được chỉ ra trong Hình 9.60. Thanh tạo một góc θ với trục đó. Một đầu của thanh bị gắn khớp trên trục đó, và đầu còn lại được nối với trục bởi một sợi dây vuông góc với trục. Hỏi lực căng của sợi dây bằng bao nhiêu, và lực mà khớp quay tác dụng lên thanh bằng bao nhiêu? (Bỏ qua trọng lực.)



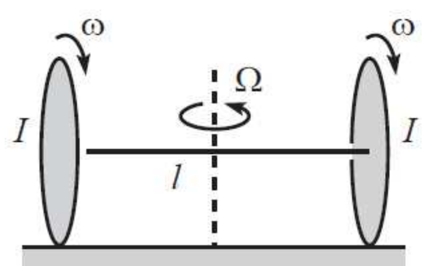
Hình 9.60:

9.43. Quay tấm phẳng **

Một tấm phẳng đồng chất hình chữ nhật có khối lượng m và độ dài các cạnh là a và b quay xung quanh một đường chéo với vận tốc góc ω. Hỏi moment lực cần thiết cho chuyển động này là như thế nào? Cho hình chữ nhật có diện tích là cố định bằng A, hỏi hình chữ nhật có dạng như thế nào nếu bạn muốn moment lực cần thiết trên là lớn nhất có thể? Hỏi chặn trên của moment lực đó là bao nhiêu?

9.44. Quay trục xe **

Hai bánh xe có khối lượng m và moment quán tính I được nối với nhau bởi một trục

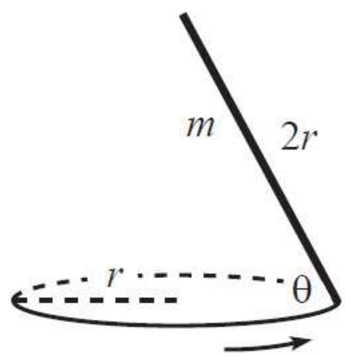


Hình 9.61:

không khối lượng có chiều dài ℓ, như được chỉ ra trong Hình 9.61. Hệ nằm trên một bề mặt không ma sát, và các bánh xe quay với tần số ω quanh trục. Hơn nữa, cả hệ quay với tần số Ω xung quanh trục thẳng đứng đi qua tâm của trục. Hỏi giá trị lớn nhất của Ω bằng bao nhiêu sao cho các bánh xe vẫn nằm trên mặt đất?

9.45. Thanh trên một vòng tròn **

(a) Một thanh có khối lượng m và chiều dài $2r$ được sắp xếp tạo một góc θ so với phương nằm ngang, với đầu dưới của nó trượt theo một đường tròn trên một vành tròn không ma sát có bán kính r, như được chỉ ra trong Hình 9.62. Hỏi tần số của chuyển động này bằng bao nhiêu? Hóa ra rằng có một giá trị cực tiểu của θ sao cho chuyển động này có thể xảy ra; giá trị đó bằng bao nhiêu?



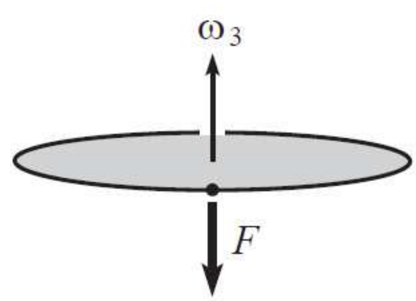
Hình 9.62:

(b) Nếu bạn kính của vành tròn bây giờ là R, hỏi giá trị lớn nhất của r/R sao cho chuyển động này là có thể xảy khi đối với $\theta \to 0$?[25]

Mục 9.6: Con quay đối xứng tự do

9.46. Sự lắc lư nhẹ *

Một đồng xu có khối lượng m và bán kính R ban đầu đang quay xung quanh trục vuông



Hình 9.63:

góc với mặt phẳng của nó, với vận tốc góc ω_3. Nó được đỡ bởi một khớp quay đặt tại

[25]Bạn cũng có thể thử làm cả hai phần của bài toán này đối với cơ cấu trong đó thanh đung đưa bên dưới vòng tròn, với đầu trên của nó chạy dọc theo vòng tròn.

tâm của nó. Bạn tác dụng một lực rất nhỏ hướng xuống dưới tại một điểm trên vành của đồng xu, như được chỉ ra trong Hình 9.63, truyền cho đồng xu một thành phần vận tốc góc rất nhỏ $\omega_\perp$ trong mặt phẳng của đồng xu. Khi mặt phẳng của đồng xu quay trở lại mặt phẳng ban đầu của nó lần đầu tiên, hỏi (một cách xấp xỉ) sự định hướng của đồng xu là như thế nào?

9.47. Sự định hướng ban đầu **

Một đồng xu có khối lượng m và bán kính R ban đầu đang quay xung quanh trục vuông góc với mặt phẳng của nó, với vận tốc góc ω_3. Nó được đỡ bởi một khớp quay đặt tại tâm của nó. Bạn tác dụng một lực (khác không) hướng xuống dưới tại một điểm trên vành của đồng xu, như được chỉ ra trong Hình 9.63, truyền cho đồng xu một thành phần vận tốc góc $\omega_\perp$ trong mặt phẳng của nó. Xét lần thứ n của mặt phẳng cảu đồng xu khi nó quay lại mặt phẳng ban đầu của nó. Hỏi giá trị nhỏ nhất của n bằng bao nhiêu để cho đồng xu có thể có *chính xác* cùng sự định hướng như khi tại thời điểm ban đầu? Hỏi $\omega_\perp$ phải bằng bao nhiêu biểu diễn theo ω_3 để đạt được điều này?

9.48. Nhìn các mặt sấp **

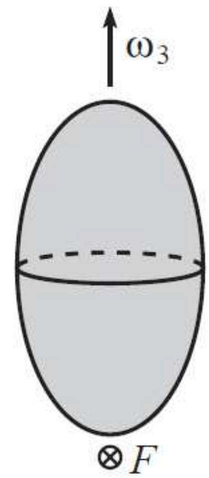
Một đồng xu (đang lơ lửng trong không gian) có khối lượng m và bán kính R ban đầu đang quay xung quanh trục vuông góc với mặt phẳng của nó, với vận tốc góc ω_3. Bạn quan sát đồng xu thẳng hướng từ bên trên của nó, và bạn tác dụng một lực vào một điểm trên vành của nó, như được chỉ ra trong Hình 9.63. Hỏi giá trị nhỏ nhất của xung lực, $\int F dt$, phải phải tác dụng là bao nhiêu để cho vừa đủ nhìn thấy mặt bên dưới của đồng xu tại một thời điểm sau đó trong quá trình chuyển động lắc lư của nó? Giả sử rằng bạn tác dụng xung lực nhỏ nhất này, hỏi tâm của đồng xu sẽ di chuyển bao xa tại thời điểm bạn có thể nhìn thấy mặt dưới?

9.49. Tung một đồng xu **

Tưởng tượng đang tung một đồng xu ban đầu nằm ngửa theo phương ngang. Nếu vận tốc góc ban đầu có phương nằm ngang, thì đồng xu sẽ quay xung quanh đường kính nằm ngang này trong toàn bộ thời gian ở trong không trung. Phần tỷ lệ thời gian mà đồng xu nằm ngửa trong quá trình chuyển động trong không khí đó đó là 1/2. Tuy nhiên, trong thực tế, sẽ là không thể để làm cho vận tốc góc ω ban đầu *chính xác* có phương nằm ngang, vì vậy giả sử rằng các thành phần ban đầu là $\omega_\perp$ và ω_3, với $\omega_3 \ll \omega_\perp$. Hãy chỉ ra rằng trong giới hạn này, tỷ lệ thời gian mà đồng xu có mặt ngửa trong khi chuyển động là $1/2 + (4\omega_3^2)/(\pi\omega_\perp^2)$.[26]

9.50. Chúc xuống dưới **

Một con quay với $I = 3I_3$ trôi lơ lửng ngoài không gian vũ trụ và ban đầu quay xung



Hình 9.64:

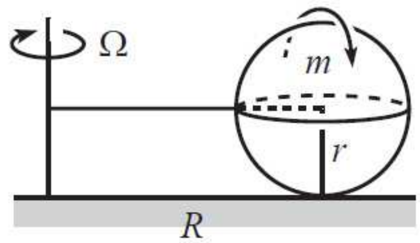
quanh trục x_3 của nó với vận tốc góc ω_3. Bạn tác dụng một lực tại đáy của nó, hướng vào trong trang giấy, như được chỉ ra trong Hình 9.64, sinh ra một thành phần vận tốc góc $\omega_\perp$, hướng sang bên phải. Hỏi $\omega_\perp$ biểu diễn qua ω_3 phải bằng bao nhiêu để vector tổng ω chúc xuống dưới mặt nằm ngang nhiều nhất có thể trong chuyển động sau đó?

Mục 9.7: Con quay đối xứng có trọng lượng

9.51. Lăn thanh kẹo *

Xét một thanh kẹo được làm từ một hình cầu đặc có khối lượng m và bán kính r mà được xuyên một thanh không khối lượng dọc theo bán kính. Đầu tự do của thanh được gắn khớp với một cột (xem Hình 9.65), và hình cầu lăn không trượt trên mặt đất, với tâm của nó chuyển động theo một đường tròn bán kính R với tần số Ω. Hỏi phản lực giữa mặt đất và hình cầu bằng bao nhiêu?

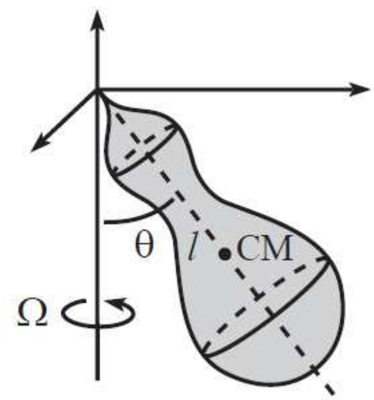
[26]Nếu đồng xu ban đầu thực sự nằm ngang (hoặc ít nhất về mặt trung bình là không có xu hướng nghiêng về một hướng đặc biệt nào, mà điều này vẫn là một điều kiện dường như khó có thể đảm bảo được), và nếu bạn bắt đồng xu vào trong tay bạn để làm giảm đi ảnh hưởng của hiệu ứng nảy ngẫu nhiên trên mặt bàn, thì kết quả của bài tập này suy ra rằng đồng xu sẽ có xu hướng nằm ngửa lên. Hiệu ứng này được phân tích kỹ càng trong một bài báo của Persi Diaconics, Susan Holmes, và Richard Montgomery (sẽ được xuất bản), là những người ước lượng rằng xác suất của việc nhận được mặt ngửa đối với một đồng xu được tung lên một cách bình thường là vào khoảng 0.51.



Hình 9.65:

9.52. ω nằm ngang **

Một con quay (với khối lượng m, các moment I và I_3, và khoảng cách ℓ từ khớp quay đến

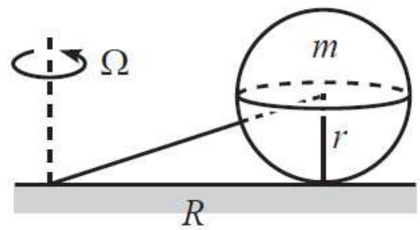


Hình 9.66:

điểm khối tâm) đang trải qua một chuyển động quay tiến động đều, với trục của nó tạo một góc không đổi θ với chiều âm của trục z, như được chỉ ra trong Hình 9.66. Nếu các điều kiện được thiết lập sao cho vận tốc góc ω của con quay luôn luôn nằm theo phương ngang, hỏi tần số của tiến động là bao nhiêu? Liệu có thể tồn tại chuyển động như vậy nếu con quay là nằm trên đường nằm ngang, tạo một góc θ với chiều dương của trục z?

9.53. Thanh kẹo trượt ***

Xét một thanh kẹo tạo bởi một hình cầu đặc có khối lượng m và bán kính r mà bị xiên bởi một thanh không khối lượng theo phương bán kính. Đầu tự do của thanh được gắn khớp với mặt đất không ma sát (xem Hình 9.67). Quả cầu *trượt* trên mặt đất, với cùng một điểm trên hình cầu luôn luôn chạm vào mặt đất. Tâm hình cầu chuyển động theo một đường tròn có bán kính R với tần số Ω. Hãy chỉ ra rằng phản lực giữa mặt đất và hình cầu là $N = mg + mr\Omega^2$, mà có giá trị độc lập với R. Giải bài toán này bằng cách:



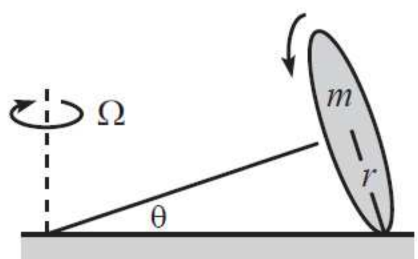
Hình 9.67:

(a) Sử dụng một lập luận theo $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.[27]

(b) Sử dụng lập luận phức tạp hơn $\tau = d\mathbf{L}/dt$.

9.54. Bánh xe quay và trục xe ***

Một trục xe không khối lượng có một đầu gắn với một bánh xe (là một đĩa đồng chất có



Hình 9.68:

khối lượng m và bán kính r), với đầu kia được gắn khớp vào mặt đất (xem Hình 9.68). Bánh xe lăn không trượt trên mặt đất, với trục xe nghiêng một góc θ. Điểm tiếp xúc trên mặt đất vẽ lên một đường tròn với tần số Ω.

(a) Hãy chỉ ra rằng vector ω có hướng chỉ theo phương nằm ngang về bên phải (tại thời điểm đã chỉ ra trong hình vẽ), với độ lớn là $\omega = \Omega/\tan\theta$.

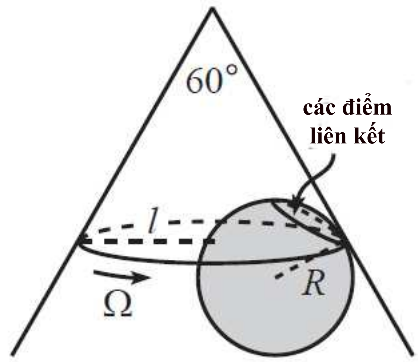
(b) Hãy chỉ ra rằng phản lực giữa mặt đất và bánh xe là

$$N = mg\cos^2\theta + mr\Omega^2\left(\frac{1}{4}\cos\theta\sin^2\theta + \frac{3}{2}\cos^3\theta\right). \tag{9.102}$$

9.55. Quả bóng dưới một hình nón

Một quả bóng rỗng (với $I = (2/3)mR^2$) lăn không trượt trên mặt bên trong của một

[27]Phương pháp này vô tình có tác dụng ở đây, bởi vì bản chất cực kỳ đẹp đẽ của chuyển động của hình cầu. Đối với chuyển động tổng quát hơn (ví dụ như, trong Bài tập 9.22, trong đó hình cầu đang tự quay), bạn phải sử dụng $\tau = d\mathbf{L}/dt$.



Hình 9.69:

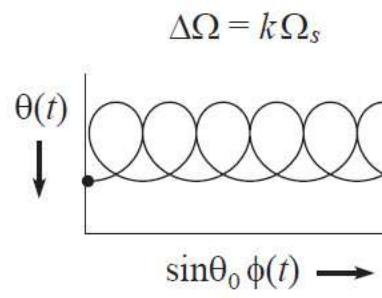
hình nón cố định, có đỉnh nón hướng lên trên, như được chỉ ra trong Hình 9.69. Góc của đỉnh nón là 60^o. Các điều kiện đầu được thiết lập sao cho điểm tiếp xúc trên mặt nón vẽ ra một đường tròn nằm ngang có bán kính ℓ với tần số Ω, trong khi đó điểm tiếp xúc trên quả bóng vẽ ra một đường tròn có bán kính $R/2$. Giả sử rằng hệ số ma sát giữa quả bóng và hình nón là đủ lớn để ngăn cản sự trượt. Hỏi tần số của chuyển động quay tiến động, Ω, bằng bao nhiêu? Nó sẽ giảm về giá trị bằng bao nhiêu trong trường hợp giới hạn $\ell \gg R$ và $\ell \to (\sqrt{3}/2)R$ (quả bóng tất nhiên phải nằm vừa bên trong hình nón). Mối liên hệ giữa ℓ và R phải thỏa mãn như thế nào nếu cơ cấu vẫn hoạt động được với một quả bóng đặc với $I = (2/5)mR^2$?

9.56. Quả bóng trong một hình nón ****

Một quả bóng (với $I = (2/5)MR^2$) lăn không trượt trên mặt trong của một hình nón cố định, có đỉnh hướng xuống dưới. Nửa góc của đỉnh nón bằng θ. Các điều kiện đầu được thiết lập sao cho điểm tiếp xúc trên mặt nón vẽ ra một đường tròn nằm ngang bán kính $\ell \gg R$, với tần số Ω, trong khi đó điểm tiếp xúc trên quả bóng vẽ ra một đường tròn có bán kính r (không nhất thiết phải bằng R, như là trường hợp của một đường tròn lớn). Giả sử rằng hệ số ma sát giữa quả bóng và hình nón là đủ lớn để ngăn cản sự trượt. Hỏi tần số của chuyển động quay tiến động, Ω, bằng bao nhiêu? Hóa ra rằng Ω có thể có giá trị vô hạn nếu r/R nhận một giá trị đặc biệt nào đó; hỏi giá trị đó bằng bao nhiêu? Làm việc trong trường hợp xấp xỉ khi $R \ll \ell$.

9.57. Các vòng lặp chương động **

Trong Hình 9.38, các vòng lặp không hoàn toàn giao với nhau trong trường hợp $\Delta\Omega = 4\Omega_S$, nhưng chúng sẽ cắt nhau trong trường hợp $\Delta\Omega = 10\Omega_S$ (một vòng lặp đã cho ở đây cắt hai vòng khác ở mỗi bên). Hãy chỉ ra rằng giá trị của k sao cho các vòng lặp cạnh nhau trong



Hình 9.70:

trường hợp $\Delta\Omega = k\Omega_S$ chỉ vừa đủ tiếp xúc với nhau (như trong Hình 9.70) là $k \approx 4.6033$. Bạn sẽ phải giải số ở đây. *Gợi ý:* Đường cong sẽ có phương thẳng đứng tại các điểm liên quan.

9.10 Lời giải bài tập

9.1. Các loại ω khác nhau

Chúng ta muốn tìm tất cả các vector ω với tính chất là $\omega \times a\hat{\mathbf{x}} = v\hat{\mathbf{y}}$. Bởi vì ω là vuông góc với tích có hướng này, ω phải nằm trong mặt phẳng $x - z$. Chúng ta sẽ chứng minh rằng nếu ω tạo một góc θ với trục x và có độ lớn $v/(a\sin\theta)$, thì nó thỏa mãn $\omega \times a\hat{\mathbf{x}} = v\hat{\mathbf{y}}$. Thực vậy,

$$\omega \times a\hat{\mathbf{x}} = |\omega||a\hat{\mathbf{x}}|\sin\theta\hat{\mathbf{y}} = v\hat{\mathbf{y}}. \tag{9.103}$$

Ngoài ra, chú ý rằng một ω như vậy có thể được viết dưới dạng

$$\omega = \frac{v}{a\sin\theta}(\cos\theta, 0, \sin\theta) = \left(\frac{v}{a\tan\theta}, 0, \frac{v}{a}\right). \tag{9.104}$$

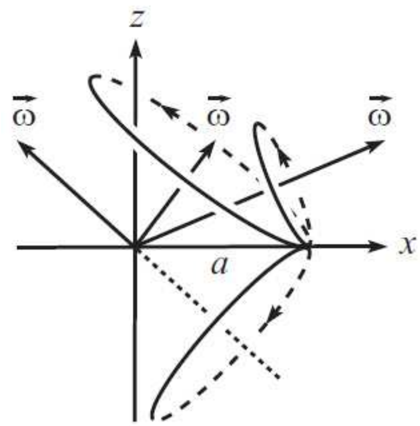
Chỉ có thành phần theo phương z ở đây là liên quan trong tích có hướng với $a\hat{\mathbf{x}}$, vì vậy chúng ta có $\omega \times a\hat{\mathbf{x}} = (v/a)\hat{\mathbf{z}} \times a\hat{\mathbf{x}} = v\hat{\mathbf{y}}$. Câu trả lời cho bài toán do đó là ω phải có dạng trong phương trình (9.104).

Sẽ là hợp lý khi độ lớn của ω là $v/(a\sin\theta)$, bởi vì khi chúng ta kẻ một đường vuông góc từ vị trí của hạt xuống đường thẳng của ω, chúng ta thấy rằng hạt có thể được coi như là đang tức thời chuyển động theo một đường tròn có bán kính $r = a\sin\theta$ xung quanh ω, với vận tốc là v. Và vì vậy chúng ta có $v = \omega r$. Việc hạt có thực sự chuyển động theo đường tròn này không không là không quan trọng. Chuyển động trong quá khứ và tương lai của nó không ảnh hưởng gì đến việc tìm vận tốc góc tức thời ω. Tất cả điều chúng ta cần biết là vận tốc tại thời điểm đã cho.

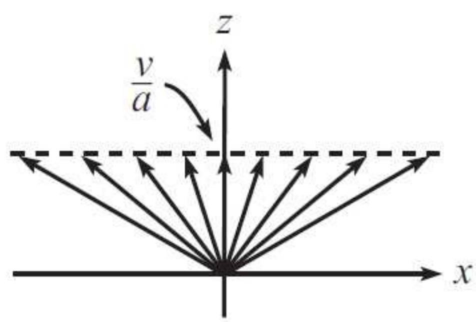
Một vài ω có thể có được vẽ trong Hình 9.71. Về mặt kỹ thuật, hoàn toàn có thể để có $\pi < \theta < 2\pi$, nhưng khi đó hệ số $v/(a\sin\theta)$ trong phương trình (9.104) sẽ âm, mà có nghĩa là ω

thực sự sẽ có hướng hướng lên trên trong mặt phẳng $x - z$ (theo ý nghĩa vật lý, ω phải có hướng chỉ lên nếu vận tốc của hạt có hướng theo chiều dương của trục y). Vì vậy chúng ta sẽ giả thiết $0 < \theta < \pi$. Và bởi vì giá trị v/a của ω_z trong phương trình (9.104) là độc lập với θ, tất cả các trường hợp có thể có của ω sẽ trông giống như trong Hình 9.72.

Với $\theta = \pi/2$, chúng ta có $\omega = v/a$, và điều này là hợp lý. Nếu θ là rất nhỏ, thì ω sẽ rất lớn, bởi vì $\omega \propto 1/\sin\theta$. Điều nãy cũng hợp lý, bởi vì hạt (tức thời) là đang chuyển động xung quanh một vòng tròn rất nhỏ với tốc độ v đã cho.



Hình 9.71:



Hình 9.72:

NHẬN XÉT: Điểm mấu chốt của bài toán này là hạt có thể là đang trong quá trình có vector vị trí của nó vẽ ra một hình nón xung quanh một trong rất nhiều trục có thể có, hoặc nó có thể đang trải qua một chuyển động phức tạp hơn. Nếu chúng ta chỉ được cho các thông tin về vị trí và vận tốc, thì sẽ là không thể đủ để xác định chuyển động nào trong hai chuyển động này đang xảy ra. Và nó có vẻ không thể đủ để xác định ω một cách duy nhất. Điều này là đúng đối với một tập hợp các điểm mà nằm trên nhiều nhất một đường thẳng đi qua gốc tọa độ. Nếu các điểm, cùng với điểm gốc tọa độ, sinh ra nhiều hơn một đường thẳng một chiều, thì ω thực ra là được xác định duy nhất (xem Chú thích cuối chương 9). ♣

9.2. Các điểm cố định trên một mặt cầu

LỜI GIẢI THỨ NHẤT: Với các mục đích của Định lý 9.1, chúng ta chỉ cần chỉ ra rằng có hai điểm cuối cùng sẽ quay trở lại vị trí mà chúng xuất phát đối với một phép biến hình *vô cùng nhỏ*. Nhưng bởi vì hoàn toàn có thể đi chứng minh điều này đối với một phép biến hình tổng quát, chúng ta sẽ xét trường hợp tổng quát ở đây.

Xét điểm A mà cuối cùng có vị trí xa nhất so với vị trí đầu của nó.[28] Gọi điểm kết thúc của nó là B. Vẽ đường tròn lớn, C_{AB}, đi qua A và B. Vẽ đường tròn lớn, C_A, mà vuông góc với C_{AB} tại A; và vẽ đường tròn lớn C_B, mà vuông góc với C_{AB} tại B. Chúng ta sẽ chứng minh rằng phép biến hình sẽ biến C_A thành C_B. Điều này là đúng với lý do sau. Ảnh của C_A chắc chắn là một đường tròn lớn đi qua B. Và đường tròn lớn này phải vuông góc với C_{AB}, bởi vì nếu không sẽ tồn tại một điểm khác sau phép biến hình sẽ có vị trí xa hơn vị trí ban đầu của nó so với điểm A (xem Hình 9.73). Bởi vì chỉ có duy nhất một đường tròn lớn đi qua B mà vuông góc với C_{AB}, ảnh của C_A thực ra phải là C_B.

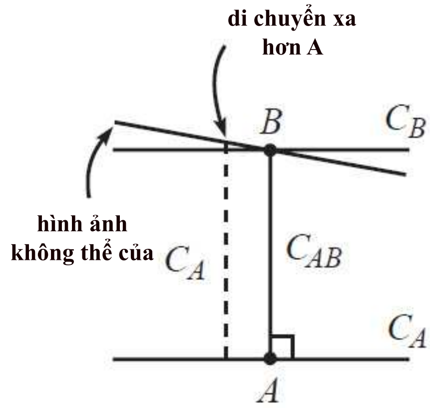
Bây giờ xét hai điểm, P_1 và P_2, tại đó C_A và C_B giao nhau (bất cứ hai đường tròn lớn nào cũng giao nhau tại hai điểm). Xem xét điểm P_1. Các khoảng cách P_1A và P_1B là bằng nhau, bởi vì C_{AB} tạo các góc bằng nhau (bằng 90^o) với C_A và C_B. Do đó, điểm P_1 không bị di chuyển bởi phép biến hình. Điều này là đúng bởi vì P_1 sau phép biến hình sẽ nằm trên C_B (do C_B là ảnh của C_A, mà P_1 bắt đầu là nằm trên nó), và nếu nó sau phép biến hình có vị trí tại một điểm khác P_1, thì khoảng cách cuối cùng của nó tới B sẽ khác với khoảng cách ban đầu của nó từ A. Điều này mau thuẫn với thực tế rằng các khoảng cách là được bảo toàn trên mặt cầu rắn. Tương tự đối với P_2. Do đó chúng ta đã tìm được hai điểm mong muốn.

Chú ý rằng đối với một phép biến hình không phải là vô cùng nhỏ, tất cả các điểm trên mặt cầu có thể di chuyển trong thời gian thực hiện phép biến hình. Nhưng cái mà chúng ta vừa chỉ ra là có hai điểm cuối cùng sẽ quay lại vị trí ban đầu của chúng, mặc dù chúng có thể di chuyển trong thời gian đó.

LỜI GIẢI THỨ HAI: Theo tinh thần của lời giải bên trên, chúng ta có thể có một lời giải đơn giản hơn, nhưng lời giải này chỉ đúng trong trường hợp các phép biến hình vô cùng nhỏ.

Chọn một điểm A bất kỳ mà chuyển động trong quá trình biến hình. Vẽ đường tròn lớn đi qua A và vuông góc với phương chuyển động của A. (Phương này là hoàn toàn xác định được, bởi vì chúng ta đang xét một phép biến hình vô cùng nhỏ, vì vậy A không có thời gian để thay đổi chiều chuyển động.) Tất cả các điểm của đường tròn lớn này phải chuyển động (nếu chúng

[28] Nếu có nhiều hơn một điểm như vậy, thì chọn bất cứ điểm nào trong số chúng. Với việc xét rằng kết quả của bài toán này là tổng chuyển động của hình cầu là một chuyển động quay xung quanh một trục nào đó, thực ra sẽ có một đường tròn lớn các điểm chuyển động xa nhất.



Hình 9.73:

có chuyển động) vuông góc với đường tròn lớn, bởi vì nếu không khoảng cách của chúng từ A sẽ thay đổi. Nhưng tất cả chúng không thể di chuyển theo cùng một hướng, bởi vì khi đó tâm của đường tròn lớn, và do đó là mặt cầu, sẽ di chuyển (nhưng nó được giả sử là bị cố định). Do đó, ít nhất một điểm trên đường tròn lớn di chuyển theo chiều ngược lại chiều mà A di chuyển. Do đó, do tính liên tục, một điểm nào đó (và do đó cả điểm đối xứng theo đường kính của nó) trên đường tròn lớn phải đứng yên.

9.3. Hình nón lăn

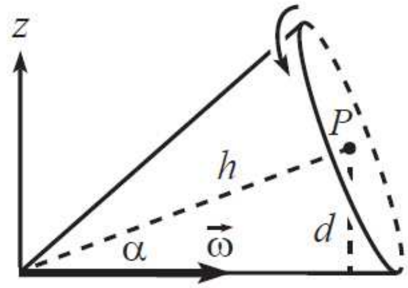
Với việc sẽ làm rất kỹ bài toán này, chúng ta sẽ trình bày ba cách giải ở đây. Cách giải thứ hai và thứ ba là các cách mà có thể làm bạn đau đầu, vì vậy bạn có thể sẽ muốn đọc lại chúng sau khi đã xem thảo luận về vector vận tốc góc trong Mục 9.7.2.

LỜI GIẢI THỨ NHẤT: Không phải thực hiện bất cứ tính toán nào, chúng ta biết rằng ω có hướng chỉ dọc theo đường thẳng tiếp xúc của hình nón với mặt bàn, bởi vì đây là những điểm trên hình nón mà tức thời đang đứng yên. Và chúng ta biết rằng theo thời gian, ω quay xung quanh trong một mặt phẳng nằm ngang với vận tốc góc $v/(h\cos\alpha)$, bởi vì điểm P di chuyển với vận tốc v trong một đường tròn có bán kính $h\cos\alpha$ xung quanh trục z.

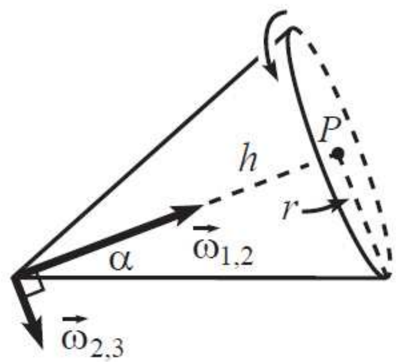
Độ lớn của ω có thể được tìm như sau. Tại một thời điểm đã cho, P có thể được coi là đang quay tròn theo một đường tròn có bán kính $d = h\sin\alpha$ xung quanh ω (xem Hình 9.74). Bởi vì P chuyển động với vận tốc v, vận tốc góc của chuyển động quay này là $\omega = v/d$. Do đó,

$$\omega = \frac{v}{h\sin\alpha}. \tag{9.105}$$

LỜI GIẢI THỨ HAI: Chúng ta có thể sử dụng Định lý 9.3 với các hệ tọa độ sau đây. S_1 là hệ tọa độ được cố định trong hình nón; S_3 là hệ tọa độ trái đất; và S_2 là hệ tọa độ mà (tức thời) quay xung quanh trục $\omega_{2,3}$ như được chỉ ra trong Hình 9.75, với vận tốc sao cho trục của hình nón



Hình 9.74:



Hình 9.75:

vẫn được cố dịnh trong S_2. Đầu của vector $\omega_{2,3}$ vẽ ra một đường tròn bởi vì nó quay tiến động xung quanh trục z, vì vậy sau khi hình nón chuyển động một chút, chúng ta sẽ cần sử dụng một hệ tọa độ S_2 mới. Nhưng tại bất cứ thời điểm nào, S_2 tức thời quay xung quanh trục vuông góc với trục của hình nón.

Theo ngôn ngữ của Định lý 9.3, $\omega_{1,2}$ và $\omega_{2,3}$ có hướng như đã được chỉ ra trong hình vẽ. Chúng ta phải đi tìm độ lớn của chúng và sau đó cộng các vector để xác định vận tốc góc của S_1 đối với S_3. Đầu tiên, chúng ta có

$$|\omega_{2,3}| = \frac{v}{h}, \tag{9.106}$$

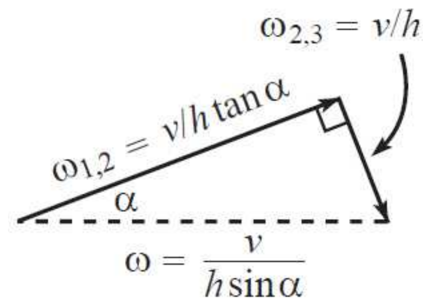
bởi vì điểm P chuyển động (một cách tức thời) với vận tốc v trong một đường tròn có bán kính h xung quanh $\omega_{2,3}$. Bây giờ chúng ta đi chứng minh rằng

$$|\omega_{1,2}| = \frac{v}{r} = \frac{v}{h\tan\alpha}, \tag{9.107}$$

trong đó r là bán kính của đáy hình nón. Điều này là đúng bởi vì một người nào đó đang đứng yên trong S_2 sẽ nhìn thấy điểm cuối của bán kính (là điểm được vẽ trong Hình 9.75) chuyển động "ngược lại" với vận tốc v, bởi vì nó đứng yên so với mặt bàn. Do vậy, hình nón phải đang quay với tần số v/r trong S_2.

Tổng của $\omega_{1,2}$ và $\omega_{2,3}$ được chỉ ra trong Hình 9.76. Vector tổng có độ lớn là $v/(h\sin\theta)$, và nó có hướng nằm ngang bởi vì $|\omega_{2,3}|/|\omega_{1,2}| = \tan\alpha$.

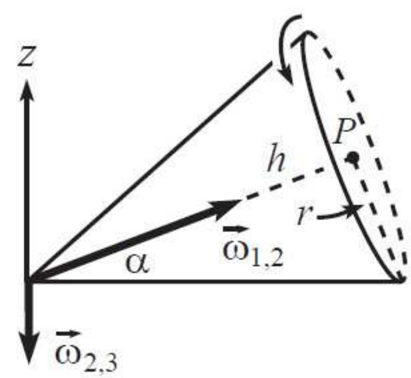
LỜI GIẢI THỨ BA: Chúng ta có thể sử dụng Định lý 9.3 với các hệ tọa độ sau đây. S_1 là hệ tọa



Hình 9.76:

độ cố định trong hình nón; và S_3 là hệ tọa độ trái đất (giống như trong lời giải thứ hai). Nhưng bây giờ gọi S_2 là hệ tọa độ mà quay xung quanh trục z (âm), với vận tốc sao cho trục của hình nón là cố định trong nó. Chú ý rằng chúng ta có thể tiếp tục sử dụng cùng hệ tọa độ S_2 này theo thời gian, không giống như hệ tọa độ S_2 trong lời giải thứ hai.

$\omega_{1,2}$ và $\omega_{2,3}$ chỉ theo các hướng như trong Hình 9.77. Cũng như ở trên, chúng ta phải đi tìm độ lớn của chúng và sau đó cộng hai vector để xác định vận tốc góc của S_1 đối với S_3. Đầu tiên, chúng ta có



Hình 9.77:

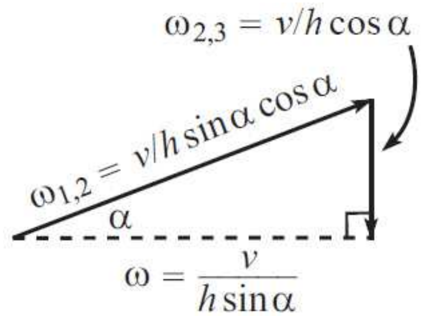
$$|\omega_{2,3}| = \frac{v}{h\cos\alpha}, \tag{9.108}$$

bởi vì điểm P chuyển động với vận tốc v theo một đường tròn bán kính $h\cos\alpha$ xung quanh $\omega_{2,3}$.

Sẽ phải mưu mẹo hơn một chút để tìm $|\omega_{1,2}|$. Từ quan điểm của một người đang quay cùng với S_2, thì chiếc bàn đang quay ngược lại với tần số $|\omega_{2,3}| = v/(h\cos\alpha)$, theo phương trình (9.108). Xét đường tròn của các điểm tiếp xúc trên mặt bàn là các điểm mà đáy của hình nón tiếp xúc với nó. Đường tròn này có bán kính $h/\cos\alpha$, vì vậy một người nào đó đang quay cùng với S_2 sẽ thấy đường tròn này chuyển động ngược lại với vận tốc $|\omega_{2,3}|(h\cos\alpha) = v/\cos^2\alpha$ xung quanh trục thẳng đứng. Bởi vì không có sự trượt, điểm tiếp xúc trên hình nón cũng phải chuyển động với cùng vận tốc này trong S_2 xung quanh trục của hình nón (mà là trục cố định trong S_2). Và bởi vì bán kính của đáy hình nón là r, điều này có nghĩa là hình nón quay với vận tốc góc $v/(r\cos^2\alpha)$ đối với S_2. Do đó, sử dụng $r = h\tan\theta$, chúng ta có

$$|\omega_{1,2}| = \frac{v}{r\cos^2\alpha} = \frac{v}{h\sin\alpha\cos\alpha}. \tag{9.109}$$

Tổng của $\omega_{1,2}$ và $\omega_{2,3}$ được chỉ ra trong Hình 9.78. Vector tổng này có độ lớn là $v/(h\sin\alpha)$, và nó có hướng nằm ngang bởi vì $|\omega_{2,3}|/|\omega_{2,3}| = \sin\alpha$.



Hình 9.78:

NHẬN XÉT: Sự khác nhau giữa các vector $\omega_{1,2}$ trong lời giải thứ hai và thứ ba đến từ thực tế sau. Gọi Q là điểm tiếp xúc trên đáy của hình nón. Xét tỷ số giữa khoảng cách từ Q tới $\omega_{2,3}$ với khoảng cách từ P tới $\omega_{2,3}$. Tỷ số này bằng 1 trong lời giải thứ hai, nhưng bằng $1/\cos^2\alpha$ trong lời giải thứ ba. Điều này suy ra rằng vận tốc chuyển động "ngược lại" của Q đối với P, khi được đo trong hệ quy chiếu S_2, là lớn hơn một hệ số $1/\cos^2\alpha$ trong lời giải thứ ba. Và bởi vì Q có cùng khoảng cách tới $\omega_{1,2}$ trong cả hai trường hợp, chúng ta thấy rằng $\omega_{1,2}$ lớn hơn một hệ số $1/\cos^2\alpha$ trong lời giải thứ ba. ♣

9.4. Định lý trục song song

Xét một trong các số hạng trên đường chéo trong $\mathbf{I}$, ví dụ như $I_{xx} \equiv \int(y^2+z^2)$. Biểu diễn theo các biến mới, số hạng này bằng

$$\begin{aligned} I_{xx} = \int \left((Y+y')^2 + (Z+z')^2\right) &= \int(Y^2+Z^2) + \int(y'^2+z'^2) \\ &= M(Y^2+Z^2) + \int(y'^2+z'^2), \end{aligned} \tag{9.110}$$

như chúng ta mong muốn. Chúng ta đã sử dụng thực tế rằng các số hạng chéo bị triệt tiêu bởi vì, ví dụ như, $\int Yy' = Y\int y' = 0$, do định nghĩa của điểm khối tâm. Một cách tương tự, xét một số hạng nằm ngoài đường chéo trong $\mathbf{I}$, ví dụ như $I_{xy} \equiv -\int xy$. Chúng ta có

$$I_{xy} = -\int(X+x')(Y+y') = -\int XY - \int x'y' = -M(XY) - \int x'y', \tag{9.111}$$

trong đó các số hạng chéo cũng tương tự bị triệt tiêu. Chúng ta do đó thấy rằng tất cả các số hạng trong **I** có dạng như ở trong phương trình (9.19), là điều mà chúng ta muốn chứng minh.

9.5. Một hình trụ thú vị

Do tính đối xứng, các trục chính là trục đối xứng của hình trụ, cùng với bất kỳ đường kính nào trong mặt cắt tròn đi qua điểm khối tâm. Gọi các moment bằng nhau đối với các đường kính này là I. Khi đó theo Định lý 9.5, nếu moment quanh trục đối xứng cũng bằng I, thì tất cả các trục là một trục chính.

Gọi khối lượng của hình trụ là M. Gọi bán kính của nó là R và chiều cao của nó là h. Khi đó moment quanh trục đối xứng là $MR^2/2$. Gọi D là một đường kính đi qua điểm khối tâm. Moment quanh D có thể được tính như sau. Cắt hình trụ thành các đĩa nằm ngang có độ dày là dy. Gọi ρ là khối lượng riêng trên một đơn vị chiều cao (vì vậy $\rho = M/h$). Khối lượng của mỗi đĩa khi đó là ρy, vì vậy moment quanh một đường kính đi qua đĩa là $(\rho dy)R^2/4$ (là kết quả nói chung đối với một đĩa). Do đó, do định lý trục song song, moment của một đĩa ở độ cao y (trong đó $-h/2 \leq y \leq h/2$) quanh D là $(\rho dy)R^2/4 + (\rho dy)y^2$. Do vậy, moment của toàn bộ hình trụ quanh D là

$$I = \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{\rho R^2}{4} + \rho y^2 \right) dy = \frac{\rho R^2 h}{4} + \frac{\rho h^3}{12} = \frac{MR^2}{4} + \frac{Mh^2}{12}. \tag{9.112}$$

Chúng ta muốn moment này bằng $MR^2/2$. Do đó, $h = \sqrt{3}R$.

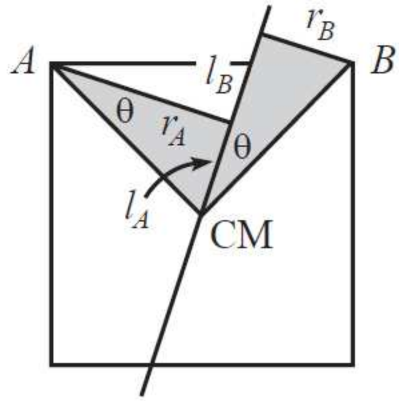
Như là một bài tập, bạn có thể chỉ ra rằng nếu điểm gốc tọa độ được lấy là tâm của một trong các mặt tròn của trụ, thì đáp số sẽ là $h = \sqrt{3}R/2$. Chú ý rằng I trong phương trình (9.112) giống như moment của một đĩa quanh một đường kính cộng với moment của một thanh quanh tâm của nó. Điều này không phải là ngẫu nhiên. Tích phân mà nhận được số hạng $Mh^2/12$ ở đây là giống với tích phân mà chúng ta thực hiện đối với một thanh.

9.6. Hình vuông quay

Gọi hai khối lượng là A và B, như đã chỉ ra trong Hình 9.79. Gọi ℓ_A là khoảng cách dọc theo trục từ điểm khối tâm tới sợi dây của A, và gọi r_A là độ dài của sợi dây của A. Tương tự như vậy đối với B. Lực, F_A, trong sợi dây của A phải được tính đối với gia tốc hướng tâm của A. Do vậy, $F_A = mr_A\omega^2$. Moment lực quanh điểm khối tâm do F_A gây ra do đó là

$$\tau_A = mr_A\ell_A\omega^2. \tag{9.113}$$

Tương tự như vậy, moment lực xung quanh điểm khối tâm do sợi dây của B là $\tau_B = mr_B\ell_B\omega^2$, theo chiều ngược lại. Nhưng hai tam giác đậm màu trong Hình 9.79 là đồng dạng, bởi vì chúng có cùng cạnh huyền và cùng góc θ. Do đó, $\ell_A = r_B$ và $\ell_B = r_A$. Do vậy, $\tau_A = \tau_B$, và các moment lực triệt tiêu nhau. Các moment lực từ hai khối lượng khác tương tự cũng triệt tiêu nhau. Chú



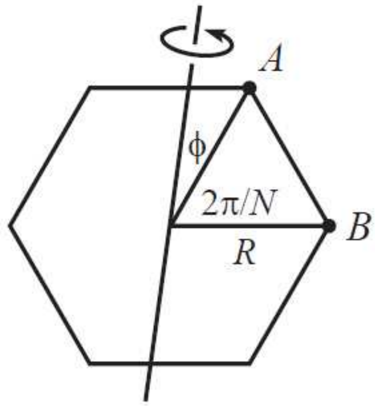
Hình 9.79:

ý rằng một hình vuông đồng chất là được tạo bởi rất nhiều tập các hình vuông các điểm khối lượng này, vì vậy chúng ta chũng đã chỉ ra rằng không cần moment lực nào đối với một hình vuông đồng chất.

NHẬN XÉT: Đối với một đa giác N cạnh các điểm khối lượng, Bài tập 9.8 bên dưới chỉ ra rằng bất cứ trục nào trong mặt phẳng cũng là một trục chính. Hãy chứng minh điều này ở đây bằng cách sử dụng lập luận moment lực ở trên. Chúng ta sẽ sử dụng một mẹo toán học ở đây mà liên quan đến việc viết một hàm lượng giác (một hàm sine) như là phần ảo của một hàm mũ phức. Sử dụng phương trình (9.113), chúng ta thấy rằng moment lực từ khối lượng A trong Hình 9.80 là $\tau_A = m\omega^2R^2\sin\phi\cos\phi$. Tương tự như vậy, moment lực từ khối lượng B là $\tau_B = m\omega^2R^2\sin(\phi+2\pi/N)\cos(\phi+2\pi/N)$, và cứ tiếp tục như vậy. Tổng moment lực quanh điểm khối tâm do đó là

$$\begin{aligned}
\tau &= mR^2\omega^2\sum_{k=0}^{N-1}\sin\left(\phi+\frac{2\pi k}{N}\right)\cos\left(\phi+\frac{2\pi k}{N}\right)\\
&= \frac{mR^2\omega^2}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\sin\left(2\phi+\frac{4\pi k}{N}\right)\\
&= \frac{mR^2\omega^2}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\mathrm{Im}\left(e^{i(2\phi+4\pi k/N)}\right)\\
&= \frac{mR^2\omega^2}{2}\mathrm{Im}\left(e^{2i\phi}\left(1+e^{4\pi i/N}+e^{8\pi i/N}+\ldots+e^{4(N-1)\pi i/N}\right)\right)\\
&= \frac{mR^2\omega^2}{2}\mathrm{Im}\left(e^{2i\phi}\left(\frac{e^{4N\pi i/N}-1}{e^{4\pi i/N}-1}\right)\right)\\
&= 0.
\end{aligned} \tag{9.114}$$

Để nhận được hàng thứ năm, chúng ta đã lấy tổng của một cấp số nhân. Và để nhận được hàng cuối cùng, chúng ta đã sử dụng thực tế là $e^{4\pi i}=1$. Một trường hợp ngoại lệ của kết quả này là khi $N=2$, bởi vì mẫu số của hàng thứ năm là bằng không (nhưng dù sao rất khó để có một đa giác hai cạnh); điều này tương ứng với điều kiện $\theta \neq 180^o$ trong Định lý 9.6.



Hình 9.80:

Chú ý rằng cái mà chúng ta đã thực hiện ở đây là chỉ ra rằng $\sum r_i \ell_i = 0$, mà suy ra được rằng tổng moment lực bằng không (mà là một trong các định nghĩa của một trục chính). Khi sử dụng trục chính đã được chọn, điều này là tương đương với việc chỉ ra rằng $\sum xy = 0$, nghĩa là, chỉ ra rằng các số hạng ngoài đường chéo của tensor quán tính bằng không (mà nó đơn giản là một định nghĩa khác của các trục chính). ♣

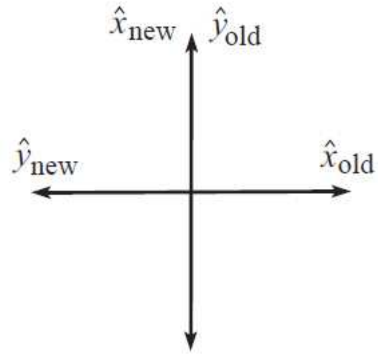
9.7. Sự tồn tại các trục chính của một vật phẳng

Đối với một vật phẳng, tensor quán tính $\mathbf{I}$ có dạng trong phương trình (9.8), với $z = 0$. Do đó, nếu chúng ta có thể tìm một tập các trục sao cho $\int xy = 0$, thì $\mathbf{I}$ sẽ có dạng đường chéo, và chúng ta sẽ tìm được các trục chính của chúng ta. Chúng ta có thể chứng minh, bằng cách sử dụng một lập luận về tính liên tục, rằng một tập các trục như vậy là tồn tại.

Chọn một tập các trục, và viết ra tích phân $\int xy \equiv I_0$. Nếu $I_0 = 0$, thì chúng ta đã xong. Nếu $I_0 \neq 0$, thì quay các trục này một góc $\pi/2$, sao cho trục $\hat{\mathbf{x}}$ mới là trục $\hat{\mathbf{y}}$ cũ, và trục $\hat{\mathbf{y}}$ mới là trục $-\hat{\mathbf{x}}$ cũ (xem Hình 9.81). Viết ra tích phân $\int xy \equiv I_{\pi/2}$ mới. Bởi vì các tọa độ mới và cũ được liên hệ với nhau bởi $x_{\text{new}} = y_{\text{old}}$ và $y_{\text{new}} = -x_{\text{old}}$, chúng ta có $I_{\pi/2} = -I_0$. Do đó, bởi vì $\int xy$ đổi dấu trong quá trình quay (liên tục) của các trục, phải tồn tại một góc nào đó ở giữa sao cho tích phân $\int xy$ bằng không.

9.8. Các tính đối xứng và các trục chính của một vật phẳng

Khi xem xét dạng của tensor quán tính trong phương trình (9.8), chúng ta muốn chỉ ra rằng nếu một vật phẳng có một tính đối xứng dưới một phép quay một góc $\theta \neq \pi$, thì $\int xy = 0$ đối với bất kỳ một tập các trục nào (đi qua gốc tọa độ). Chọn một tập các trục bất kỳ và quay chúng một góc $\theta \neq \pi$. Các hệ tọa độ mới là $x' = (x\cos\theta + y\sin\theta)$ và $y' = (-x\sin\theta + y\cos\theta)$ vì



Hình 9.81:

vậy các số hạng của ma trận mới, khi biểu diễn qua các số hạng của ma trận cũ, là

$$
\begin{aligned}
I'_{xx} &\equiv \int y'^2 = I_{yy}\sin^2\theta + 2I_{xy}\sin\theta\cos\theta + I_{xx}\cos^2\theta,\\
I'_{yy} &\equiv \int x'^2 = I_{yy}\cos^2\theta - 2I_{xy}\sin\theta\cos\theta + I_{xx}\sin^2\theta,\\
I'_{xy} &\equiv -\int x'y' = I_{yy}\sin\theta\cos\theta + I_{xy}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - I_{xx}\sin\theta\cos\theta.
\end{aligned} \tag{9.115}
$$

Nếu vật thể có hình dạng y hệt giống như hình dạng của nó trước phép quay, thì $I'_{xx} = I_{xx}, I'_{yy} = I_{yy}$ và $I'_{xy} = I_{xy}$. Hai phát biểu đầu tiên trong các phát biểu này thực ra là tương đương với nhau (như bạn có thể chỉ ra), vì vậy chúng ta sẽ chỉ sử dụng mệnh đề thứ nhất và thứ ba. Sử dụng phương trình (9.116), cùng với $1 - \cos^2\theta = \sin 2\theta$, hai mệnh đề này cho ta

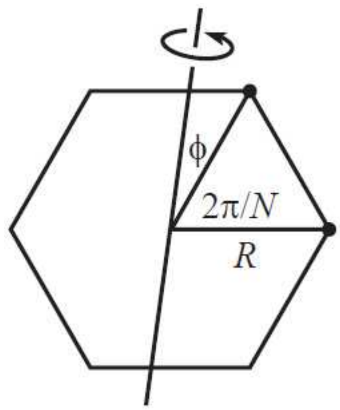
$$
\begin{aligned}
0 &= -I_{xx}\sin^2\theta + 2I_{xy}\sin\theta\cos\theta + I_{yy}\sin^2\theta,\\
0 &= -I_{xx}\sin\theta\cos\theta - 2I_{xy}\sin^2\theta + I_{yy}\sin\theta\cos\theta.
\end{aligned} \tag{9.116}
$$

Nhân phương trình thứ nhất với $\cos\theta$ và phương trình thứ hai với $\sin\theta$, và trừ chúng cho nhau, ta có

$$2I_{xy}\sin\theta = 0. \tag{9.117}$$

Với giả thiết $\theta \neq \pi$ (và tất nhiên $\theta \neq 0$), chúng ta do đó phải có $I_{xy} = 0$. Các trục ban đầu của chúng ta là bất kỳ; do vậy, bất kỳ tập các trục nào (đi qua gốc tọa độ) trong mặt phẳng là một tập các trục chính.

NHẬN XÉT: Nếu một vật thể là bất biến đối với một phép quay một góc θ, thì θ phải có dạng $\theta = 2\pi/N$, với một số nguyên N nào đó (hãy tự thuyết phục mình về điều này). Vì vậy xét mộ đa giác đều N cạnh với "bán kính" R và với các khối lượng chất điểm m đặt tại các đỉnh. Bất kỳ vật nào mà bất biến dưới một phép quay một góc $\theta = 2\pi/N$ có thể được coi là được dựng lên từ các đa giác đều N cạnh mang các khối lượng chất điểm với nhiều kích cỡ khác nhau. Định lý 9.5 suy ra rằng tất cả các trục trong mặt phẳng của một đa giác đều N cạnh đều có cùng moment (hai trục trong định lý này không yêu cầu phải là trực giao). Hãy minh họa điều này một cách tường minh đối với một đa giác đều N cạnh. Phương pháp mà chúng ta sẽ sử dụng ở đây này là tương tự với phương pháp trong phần nhận xét của Bài tập 9.6, ngoại trừ bây giờ chúng ta sẽ viết một hàm lượng giác (một hàm cosine) như là phần thực của một hàm mũ phức. Trong Hình 9.82 khoảng cách từ khối lượng A tới trục là $r_A = R\sin\phi$. Và khoảng cách từ B tới trục là $R_B = R\sin(\phi + 2\pi/N)$, và tiếp tục như vậy đối với các khối lượng khác. Moment quán tính đối với trục do đó là



Hình 9.82:

$$
\begin{aligned}
I_\phi &= mR^2 \sum_{k=0}^{N-1} \sin^2\left(\phi + \frac{2\pi k}{N}\right) \\
&= \frac{mR^2}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \left(1 - \cos\left(2\phi + \frac{4\pi k}{N}\right)\right) \\
&= \frac{NmR^2}{2} - \frac{mR^2}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{Re}\left(e^{i(2\phi + 4\pi k/N)}\right) \\
&= \frac{NmR^2}{2} - \frac{mR^2}{2} \mathrm{Re}\left(e^{2i\phi}\left(1 + e^{4\pi i/N} + e^{8\pi i/N} + \ldots + + e^{4(N-1)\pi i/N}\right)\right) \\
&= \frac{NmR^2}{2} - \frac{mR^2}{2} \mathrm{Re}\left(e^{2i\pi}\left(\frac{e^{4N\pi i/N} - 1}{e^{4\pi i/N} - 1}\right)\right),
\end{aligned}
\tag{9.118}
$$

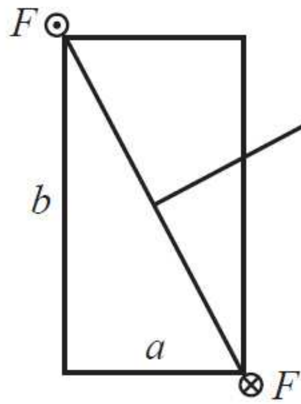
trong đó chúng ta đã lấy tổng cấp số nhân để nhận được hàng cuối cùng. Tử số trong dấu ngoặc đơn bằng $e^{4\pi i} - 1 = 0$. Và nếu $N \neq 2$, mẫu số sẽ không bằng không. Do đó, nếu $N \neq 2$ (mà tương tương với giả thiết $\theta \neq \pi$), chúng ta có

$$I_\phi = \frac{NmR^2}{2}, \tag{9.119}$$

độc lập với ϕ. Kết quả $NmR^2/2$ này đối với giá trị nói chung của tất cả các moment là hợp lý, bởi vì định lý trục vuông góc nói rằng giá trị chung này phải bằng một nửa moment xung quanh trục vuông góc với mặt phẳng, mà bằng NmR^2. ♣

9.9. Tác động vào một hình chữ nhật

Nếu lực có hướng ra ngoài trang giấy tại góc trên bên trái và hướng vào trong trang giấy tại



Hình 9.83:

góc dưới bên phải, thì moment lực $\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ có hướng chỉ lên trên về bên phải, như được chỉ ra trong Hình 9.83, với $\tau \propto (b, a)$. Moment động lượng bằng $\int \tau dt$, vì vậy ngay lập tức sau cú đánh, $\mathbf{L}$ tỷ lệ thuận với (b, a). Nhưng moment động lượng có thể cũng được viết dưới dạng $\mathbf{L} = (I_x\omega_x, I_y\omega_y)$, trong đó $I_x = mb^2/12$ và $I_y = ma^2/12$ là các moment chính. Do đó, chúng ta có

$$(I_x\omega_x, I_y\omega_y) \propto (b, a) \quad \Longrightarrow \quad (\omega_x, \omega_y) \propto \left(\frac{b}{I_x}, \frac{a}{I_y}\right) \propto \left(\frac{b}{b^2}, \frac{a}{a^2}\right) \propto (a, b), \tag{9.120}$$

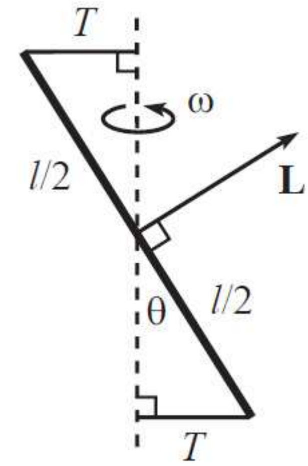
mà là hướng của đường chéo còn lại. Kết quả này kiểm tra trong trường hợp đặc biệt $a = b$, và cũng trong trường hợp giới hạn trong đó một trong hai giá trị a hoặc b là lớn hơn rất nhiều so với giá trị kia. Về cơ bản mà nói, nếu b là lớn hơn rất nhiều so với a, thì việc có giá trị rất lớn này ảnh hưởng nhiều hơn đối với moment quán tính quanh trục x (mà có dạng bậc hai theo chiều dài) hơn là ảnh hưởng đến moment lực theo hướng của trục x (mà có dạng tuyến tính theo chiều dài), vì vậy chỉ có một chút sự quay xung quanh trục x.

9.10. Thanh quay

Moment động lượng đối với điểm khối tâm có thể được tính như sau. Tách ω thành các thành phần của nó dọc theo các trục chính của thanh (mà là các trục song song và vuông góc với thanh). Moment quán tính quanh trục dọc theo thanh là bằng không. Do đó, chỉ có thành phần của ω vuông góc với thanh là liên quan đến việc tính $\mathbf{L}$. Thành phần này bằng $\omega \sin\theta$, và moment quán tính tương ứng với nó là $m\ell^2/12$. Vì vậy, moment động lượng tại bất kỳ thời điểm nào có độ lớn

$$L = \frac{1}{12} m\ell^2 \omega \sin\theta, \tag{9.121}$$

và nó có hướng như được chỉ ra trong Hình 9.84. Đầu của vector $\mathbf{L}$ vẽ ra một đường tròn trong một mặt phẳng nằm ngang với tần số ω. Bán kính của đường tròn này là thành phần nằm ngang



Hình 9.84:

của $\mathbf{L}$, mà có giá trị bằng $L_\perp \equiv L\cos\theta$. Tốc độ thay đổi của $\mathbf{L}$ do đó có độ lớn

$$\left|\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right| = \omega L_\perp = \omega L\cos\theta = \omega\left(\frac{1}{12}m\ell^2\omega\sin\theta\right)\cos\theta, \tag{9.122}$$

và nó có hướng vào trong trang giấy tại thời điểm trong hình vẽ.

Gọi lực căng trong các sợi dây là T. Khi đó moment lực do các sợi dây gây ra là $\tau = 2T(\ell/2)\cos\theta$, có hướng vào trong trang giấy tại thời điểm trong hình vẽ. Do đó, $\tau = d\mathbf{L}/dt$ cho ta

$$Tl\cos\theta = \omega\left(\frac{1}{12}m\ell^2\omega\sin\theta\right)\cos\theta \quad\Longrightarrow\quad T = \frac{1}{12}m\ell\omega^2\sin\theta. \tag{9.123}$$

NHẬN XÉT: Đối với $\theta \to 0$, lực căng này tiến tới không, và điều này là hợp lý. Đối với $\theta \to \pi/2$, nó tiến với giá trị hữu hạn $m\ell\omega^2/12$, mà điều này không hiển nhiên cho lắm. Cánh tay đòn và $|d\mathbf{L}/dt|$ cả hai đều nhỏ trong giới hạn này, và chúng vô tình là vuông góc với nhau khi cả hai cùng tiến về không.

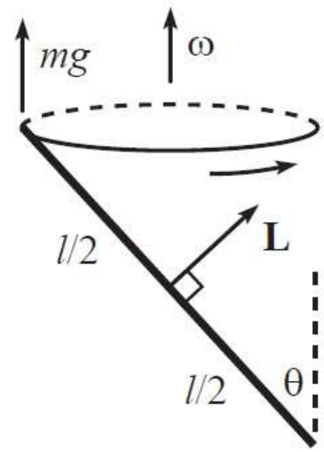
Chú ý rằng nếu thay vào đó chúng ta có một thanh không khối lượng với hai khối lượng bằng nhau $m/2$ tại hai đầu, sao cho moment quán tính bây giờ là $m\ell^2/4$, thì kết quả của chúng ta sẽ là $T = (1/4)m\ell\omega^2\sin\theta$. Điều này là hợp lý nếu chúng ta viết nó dưới dạng $T = (m/2)\cdot(\ell/2)\sin\theta\cdot\omega^2$, bởi vì mỗi lực căng có nhiệm vụ đơn giản là giữ một khối lượng $m/2$ di chuyển trong một đường tròn có bán kính $(\ell/2)\sin\theta$ với tần số ω. Lập luận về lực đơn giản này không có tác dụng đối với thanh ban đầu do các nội lực ở trong thanh. ♣

9.11. Thanh bên dưới một vòng tròn

Như trong Bài tập 9.10, moment động lượng đối với điểm khối tâm có thể được tìm bằng cách tách ω thành các thành phần dọc theo các trục chính của thanh. Lập luận thì cũng giống như vậy, vì vậy moment động lượng tại bất kỳ thời điểm nào có độ lớn

$$L = \frac{1}{12}m\ell^2\omega\sin\theta, \tag{9.124}$$

và nó có hướng như được chỉ ra trong Hình 9.85. Sự thay đổi của **L** đến từ thành phần nằm



Hình 9.85:

ngang của nó. Thành phần này có chiều dài $L\cos\theta$ và di chuyển trong một đường tròn với tần số ω. Do vậy, $|d\mathbf{L}/dt| = \omega L\cos\theta$, và nó có hướng vào trong trang giấy tại thời điểm trong hình vẽ.

Moment lực đối với điểm khối tâm có độ lớn $mg(\ell/2)\sin\theta$, và nó có hướng chỉ vào trong trang giấy tại thời điểm trong hình vẽ. (Moment lực này nảy sinh từ lực theo phương thẳng đứng từ vòng tròn. Không có lực theo phương nằm ngang từ vòng tròn, bởi vì điểm khối tâm không chuyển động.) Do đó, $\tau = d\mathbf{L}/dt$ cho ta

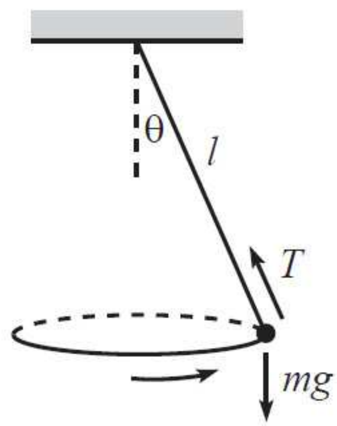
$$\frac{mg\ell\sin\theta}{2} = \omega\left(\frac{m\ell^2\omega\sin\theta}{12}\right)\cos\theta \quad\Longrightarrow\quad \omega = \sqrt{\frac{6g}{l\cos\theta}}. \tag{9.125}$$

NHẬN XÉT:

1. Đối với $\theta \to \pi/2$, giá trị này tiến tới vô cùng, mà điều này là hợp lý. Đối với $\theta \to 0$, nó tiến tới $\sqrt{6g/\ell}$, mà điều này không hiển nhiên chút nào.
2. Chuyển động trong bài tập này sẽ không thể xảy ra nếu đầu dưới của thanh, thay vì đầu trên, trượt dọc theo vòng tròn. Các độ lớn của các đại lượng là giống như trong bài toán ban đầu, nhưng moment lực chỉ theo một hướng không đúng, như bạn có thể kiểm tra. Nhưng hãy xem Bài tập luyện tập 9.45 đối với một cơ cấu có liên quan.
3. Bởi vì điểm giữa của thanh là không chuyển động, bạn có thể bị cám dỗ để coi nửa dưới của thanh như là thanh trong ví dụ của Mục 9.4.2. Nghĩa là, bạn có thể chỉ muốn thay $\ell/2$ vào độ dài trong phương trình (9.38). Tuy nhiên, điều này sẽ không nhận được kết quả trong phương trình (9.125). Sai lầm ở đây là có các nội lực trong thanh mà sinh ra các moment lực. Nếu một khớp quay được đặt tại điểm khối tâm của thanh (nối hai nửa thanh với nhau) trong bài tập này, thì thanh sẽ không còn thẳng được nữa.

4. Nếu bạn thay thanh bằng một sợi dây không khối lượng với hai khối lượng bằng nhau $m/2$ tại hai đầu, thì moment quán tính sẽ là $m\ell^2/4$, và chúng ta nhận được $\omega = \sqrt{2g/(l\cos\theta)}$. Kết quả này thực ra đơn giản là kết quả $\omega = \sqrt{g/[(\ell/2)\cos\theta]}$ đối với một con lắc đơn khối lượng chất điểm quay tròn có chiều dài $\ell/2$ (xem Bài tập 9.12), bởi vì điểm giữa của sợi dây là không di chuyển, và bởi vì sợi dây mềm không thể sinh ra các moment nội lực như đã được đề cập đến trong đoạn trên. ♣

9.12. Con lắc đơn quay tròn



Hình 9.86:

(a) Các lực tác dụng lên khối lượng là trọng lực và lực do thanh tác dụng (lực căng), có hướng dọc theo thanh (xem Hình 9.86).[29] Bởi vì không có gia tốc theo phương thẳng đứng, chúng ta có $T\cos\theta = mg$. Lực không cân bằng theo phương nằm ngang xuất phát từ lực căng do đó là $T\sin\theta = mg\tan\theta$. Lực này được tính cho gia tốc hướng tâm, $m(l\sin\theta)\Omega^2$. Do vậy,

$$\Omega = \sqrt{\frac{g}{l\cos\theta}}. \tag{9.126}$$

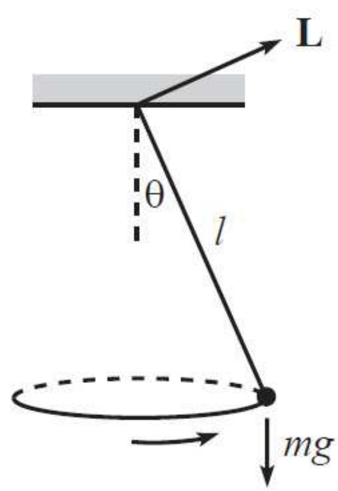
Đối với $\theta \approx 0$, giá trị này sẽ bằng với tần số $\sqrt{g/\ell}$ của một con lắc đơn. Đối với $\theta \approx \pi/2$, nó tiến ra vô cùng, mà điều này là hợp lý. Chú ý rằng θ phải có giá trị nhỏ hơn $\pi/2$ để cho chuyển động tròn có thể xảy ra. (Sự hạn chế này không đúng đối với một con quay tự quay với một khối lượng gắn thêm.)

[29] Lực do thanh tác dụng phải hướng dọc theo thanh bởi vì nó không có khối lượng. Nếu có một lực theo phương tiếp tuyến tác dụng lên khối lượng, thì định luật thứ ba của Newton nói rằng sẽ cũng có một lực theo phương tiếp tuyến tác dụng lên thanh. Lực này khi đó sẽ sinh ra một moment lực khác không lên thanh (đối với khớp quay) và do vậy sẽ sinh ra một gia tốc góc vô hạn, bởi vì không có moment trọng lực tác dụng lên thanh (không khối lượng) để chống lại nó.

(b) Lực duy nhất mà sinh ra một moment lực đối với khớp quay là lực trọng trường, vì vậy moment lực là $\tau = mg\ell \sin\theta$, hướng vào trong trang giấy tại thời điểm chỉ ra trong Hình 9.87.

Tại thời điểm này, khối lượng có vận tốc $(l \sin\theta)\Omega$, hướng vào trong trang giấy. Do đó, $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ có độ lớn $m\ell^2\Omega \sin\theta$ và hướng lên trên về bên phải, như được chỉ ra trong hình vẽ. Đầu của $\mathbf{L}$ vẽ ra một đường tròn có bán kính $L\cos\theta$, với tần số Ω. Do đó, $d\mathbf{L}/dt$ có độ lớn $\Omega L \cos\theta$ và nó hướng vào trong trang giấy. Do vậy, $\tau = d\mathbf{L}/dt$ cho ta $mg\ell \sin\theta = \Omega(m\ell^2\Omega \sin\theta)\cos\theta$, mà nhận được phương trình (9.126).

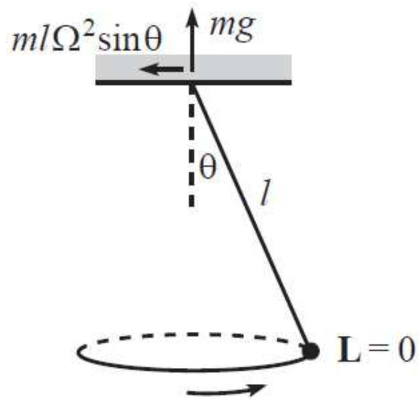
(c) Lực duy nhất mà sinh ra một moment lực đối với khối lượng là lực từ khớp quay, mà có hai thành phần (xem Hình 9.88). Thành phần theo phương thẳng đứng là mg. Đối với khối lượng, lực này sinh ra một moment lực là $mg(l\sin\theta)$, hướng vào trong trang giấy. Cũng có thành phần theo phương nằm ngang, mà để dành cho gia tốc hướng tâm của khối lượng, vì vậy nó bằng $m(l\sin\theta)\Omega^2$. Đối với khối lượng, lực này sinh ra một moment lực có độ lớn $m\ell \sin\theta\Omega^2(l\cos\theta)$, hướng ra ngoài trang giấy.



Hình 9.87:

Đối với khối lượng, không có moment động lượng nào. Do đó, $d\mathbf{L}/dt = 0$ và vì vậy phải không có moment lực nào. Điều này có nghĩa là hai moment lực ở trên phải triệt tiêu nhau, mà điều này cho ta $mg(l\sin\theta) = m\ell\sin\theta\Omega^2(l\cos\theta)$. Điều này cho ta phương trình (9.126).

Trong các bài toán phức tạp hơn bài toán này, thông thường sẽ dễ hơn để giải chúng với điểm khớp quay cố định (nếu có một khớp quay như vậy) là điểm gốc tọa độ, thay vì là điểm khối tâm, bởi vì khi đó bạn không phải lo lắng về các lực phức tạp ở khớp quay sinh ra moment lực.



Hình 9.88:

9.13. Lăn trong một khối hình nón

Các lực tác dụng lên vòng tròn là trọng lực (mg), phản lực (N) từ hình nón, và lực ma sát (F) chỉ theo phương hướng lên trên dọc theo hình nón (hoặc có thể hướng xuống dưới dọc theo hình nón nếu F là âm, nhưng chúng ta sẽ thấy rằng nó không có giá trị âm). Bởi vì tổng lực theo phương thẳng đứng bằng không, chúng ta có

$$N \sin\theta + F \cos\theta = mg. \tag{9.127}$$

Lực theo phương nằm ngang hướng vào trong sẽ sinh ra gia tốc hướng tâm, mà cho ta

$$N \cos\theta - F \sin\theta = m(h \tan\theta)\Omega^2. \tag{9.128}$$

Giải hai phương trình trên để tìm F ta có

$$F = mg\cos\theta - m\Omega^2(h\tan\theta)\sin\theta, \tag{9.129}$$

với chiều hướng lên trên dọc theo hình nón được chọn là chiều dương (đây chỉ là một sự sắp xếp lại phương trình $F = ma$ theo phương dọc theo hình nón). Moment lực tác dụng lên vòng tròn (đối với điểm khối tâm của nó) chỉ do lực F này gây ra, bởi vì trọng lực không sinh ra moment lực, và N có hướng đi qua tâm của vòng tròn (do giả thiết thứ hai của bài toán). Do đó, moment lực có hướng hướng ra ngoài trang giấy với độ lớn

$$\tau = rF = r(mg\cos\theta - m\Omega^2 h\tan\theta\sin\theta). \tag{9.130}$$

Chúng ta bây giờ phải tìm $d\mathbf{L}/dt$. Bởi vì chúng ta đang giả thiết $r \ll h\tan\theta$, tần số của chuyển động quay của vòng tròn (gọi nó là ω) là lớn hơn rất nhiều so với tần số quay tiến động, Ω. Chúng ta do đó sẽ bỏ qua tần số Ω trong khi tìm $\mathbf{L}$. Trong trường hợp xấp xỉ này, $\mathbf{L}$ (đối với điểm khối tâm) có độ lớn $mr^2\omega$, và nó có hướng xuống dưới dọc theo hình nón (đối với chiều của chuyển động được chỉ ra trong Hình 9.45). Thành phần theo phương nằm ngang của **L** có độ lớn là $L_\perp \equiv L\sin\theta$, và nó vẽ ra một đường tròn với tần số Ω. Do đó, $d\mathbf{L}/dt$ có hướng hướng ra ngoài trang giấy với độ lớn

$$\left|\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right| = \Omega L_\perp = \Omega L\sin\theta = \Omega(mr^2\omega)\sin\theta. \tag{9.131}$$

Điều kiện lăn không trượt là $r\omega = (h\tan\theta)\Omega$,[30] mà cho ta $\omega = (h\tan\theta)\Omega/r$. Sử dụng kết quả này trong phương trình (9.131) chúng ta nhận được

$$\left|\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right| = \Omega^2 mrh\tan\theta\sin\theta. \tag{9.132}$$

Cân bằng kết quả này với moment lực trong phương trình (9.130) cho ta

$$\Omega = \frac{1}{\tan\theta}\sqrt{\frac{g}{2h}}. \tag{9.133}$$

NHẬN XÉT: Nếu bạn xét một vật thể với moment quán tính là βmr^2 (chiếc vòng của chúng ta có $\beta = 1$), thì bạn có thể bằng lập luận trên chỉ ra rằng hệ số "2" trong phương trình (9.133) sẽ được thay thế bởi $(1+\beta)$. Điều này có nghĩa là nếu bạn thay vì có một hạt trượt vòng quanh một hình nón không ma sát (mà tương đương với một chiếc vòng có $\beta = 0$), thì tần số trên sẽ là $\sqrt{g/h}/\tan\theta$, như bạn có thể kiểm tra lại bằng cách làm bài toán từ đầu. ♣

9.14. Định lý vợt tennis

QUAY XUNG QUANH $\hat{\mathbf{x}}_1$: Nếu chiếc vợt được quay (gần như) xung quanh trục $\hat{\mathbf{x}}_1$, thì các giá trị ban đầu của ω_2 và ω_3 sẽ nhỏ hơn rất nhiều so với ω_1. Để nhấn mạnh điều này, hãy thay đổi ký hiệu của chúng thành $\omega_2 \to \epsilon_2$ và $\omega_3 \to \epsilon_3$. Khi đó phương trình (9.45) sẽ trở thành (với moment lực bằng không, bởi vì trọng lượng không sinh ra moment lực xung quanh điểm khối tâm)

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{\omega}_1 - A\epsilon_2\epsilon_3, \\ 0 &= \dot{\epsilon}_2 + B\omega_1\epsilon_3, \\ 0 &= \dot{\epsilon}_3 - C\omega_1\epsilon_2, \end{aligned} \tag{9.134}$$

trong đó chúng ta đã định nghĩa (để cho thuận tiện)

$$A \equiv \frac{I_2 - I_3}{I_1}, \quad B \equiv \frac{I_1 - I_3}{I_2}, \quad C \equiv \frac{I_1 - I_2}{I_3}. \tag{9.135}$$

Chú ý rằng A, B, và C tất cả đều có giá trị dương. Thực tế này sẽ rất quan trọng.

[30] Về mặt kỹ thuật thì điều này không phải là hoàn toàn đúng, với lý do là trái đất quay 366 vòng thay vì 365 vòng trong một năm. Nhưng nó đủ để đúng trong trường hợp giới hạn khi r rất nhỏ.

Mục đích của chúng ta ở đây là đi chỉ ra rằng nếu các ϵ có giá trị ban đầu nhỏ, thì chúng vẫn sẽ có giá trị nhỏ. Giả sử rằng chúng là nhỏ (điều này là đúng tại thời điểm ban đầu), phương trình đầu tiên nói rằng $\dot{\omega}_1 \approx 0$, khi lấy xấp xỉ tới bậc nhất của các ϵ. Do đó, chúng ta có thể giả sử rằng ω_1 về cơ bản là hằng số (khi các ϵ là nhỏ). Sau đó lấy đạo hàm của phương trình thứ hai cho ta $0 = \ddot{\epsilon}_2 + B\omega_1\dot{\epsilon}_3$. Thay giá trị của $\dot{\epsilon}_3$ từ phương trình thứ ba vào trong phương trình này cho ta

$$\ddot{\epsilon}_2 = -(BC\omega_1^2)\epsilon_2. \tag{9.136}$$

Bởi vì hệ số âm trong vế phải, phương trình này miêu tả chuyển động dao động tuần hoàn đơn giản. Do đó, ϵ_2 dao động theo hình sine quanh giá trị không. Vì vậy nếu nó bắt đầu có giá trị nhỏ, nó sẽ duy trì giá trị nhỏ. Bằng lập luận tương tự, ϵ_3 cũng vẫn duy trì giá trị nhỏ.

Chúng ta do đó thấy rằng $\omega \approx (\omega_1, 0, 0)$ tại mọi thời điểm, mà nó suy ra rằng $\mathbf{L} \approx (I_1\omega_1, 0, 0)$ tại mọi thời điểm. Nghĩa là, $\mathbf{L}$ luôn luôn có hướng (gần như) chỉ dọc theo trục $\hat{\mathbf{x}}_1$ (là cố định trong hệ quy chiếu của vợt). Nhưng hướng của $\mathbf{L}$ là cố định trong hệ quy chiếu trái đất, bởi vì không có moment lực ở đây. Do đó, hướng của $\hat{\mathbf{x}}_1$ cũng phải (gần như) là cố định trong hệ quy chiếu trái đất. Nói cách khác, chiếc vợt không bị lắc lư.

QUAY XUNG QUANH $\hat{\mathbf{x}}_3$: Việc tính toán trong trường hợp này gần như là y hệt như trên, ngoại trừ việc chỉ số "1" và chỉ số "3" được hoán đổi cho nhau. Chúng ta sẽ thấy rằng nếu ϵ_1 và ϵ_2 có giá trị ban đầu là nhỏ, thì về sau chúng vẫn duy trì giá trị nhỏ.

QUAY XUNG QUANH $\hat{\mathbf{x}}_2$: Nếu chiếc vợt bị quay (gần như) xung quanh trục $\hat{\mathbf{x}}_2$, thì các giá trị ban đầu ϵ_1 và ϵ_3 là nhỏ hơn rất nhiều so với ϵ_2. Như ở phần trên, hãy nhấn mạnh điều này bằng cách ký hiệu lại chúng dưới dạng $\omega_1 \to \epsilon_1$ và $\omega_3 \to \epsilon_3$. Khi đó như ở trên, phương trình (9.45) trở thành

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{\epsilon}_1 - A\omega_2\epsilon_3, \\ 0 &= \dot{\omega}_2 + B\epsilon_1\epsilon_3, \\ 0 &= \dot{\epsilon}_3 - C\omega_2\epsilon_1. \end{aligned} \tag{9.137}$$

Mục đích của chúng ta ở đây là chỉ ra rằng nếu các ϵ ban đầu có giá trị nhỏ, thì chúng về sau sẽ *không* duy trì giá trị nhỏ nữa. Giả sử rằng chúng là nhỏ (điều này là đúng tại thời điểm ban đầu), phương trình thứ hai nói rằng $\dot{\omega}_2 \approx 0$, khi lấy xấp xỉ đến bậc nhất của các ϵ. Vì vậy chúng ta có thể giả thiết rằng ω_2 về cơ bản là hằng số (khi các ϵ là nhỏ). Khi đó lấy đạo hàm phương trình thứ nhất cho ta $0 = \ddot{\epsilon}_1 - A\omega_2\dot{\epsilon}_3$. Thay giá trị của $\dot{\epsilon}_3$ từ phương trình thứ ba vào trong phương trình này cho ta

$$\ddot{\epsilon}_1 = (AC\omega_2^2)\epsilon_1. \tag{9.138}$$

Bởi vì hệ số dương trong vế phải, phương trình này miêu tả một sự tăng trưởng trong chuyển động theo hàm mũ, thay vì một chuyển động dao động. Do đó, ϵ_1 sẽ tăng nhanh chóng từ giá trị nhỏ ban đầu của nó. Vì vậy thậm chí nó ban đầu có giá trị nhỏ, thì nó sẽ trở thành có giá trị lớn. Với lập luận tương tự, ϵ_3 sẽ trở thành có giá trị lớn. Tất nhiên, một khi các ϵ trở nên có giá trị lớn, thì giả thiết của chúng ta về $\dot{\omega}_2$ sẽ không còn đúng nữa. Nhưng một khi các ϵ có giá trị lớn, chúng ta đã chỉ ra điều mà chúng ta muốn.

Chúng ta thấy rằng ω *không* duy trì có giá trị (gần như) bằng $(0, \omega_2, 0)$, điều này suy ra rằng $\mathbf{L}$ *không* duy trì (gần như) bằng $(0, I_2\omega_2, 0)$. Nghĩa là, $\mathbf{L}$ không luôn luôn có hướng (gần như) là chỉ dọc theo trục $\hat{\mathbf{x}}_2$ (là cố định trong hệ quy chiếu chiếc vợt). Nhưng hướng của $\mathbf{L}$ là cố định trong hệ quy chiếu trái đất, bởi vì không có moment lực. Do đó, hướng của $\hat{\mathbf{x}}_2$ phải thay đổi trong hệ quy chiếu trái đất. Nói cách khác, chiếc vợt sẽ lắc lư.

9.15. Các góc của con quay tự do

Biểu diễn qua các trục chính, $\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2, \hat{\mathbf{x}}_3$, ta có

$$\begin{aligned} \omega &= (\omega_1\hat{\mathbf{x}}_1 + \omega_2\hat{\mathbf{x}}_2) + \omega_3\hat{\mathbf{x}}_3, \quad \text{và} \\ \mathbf{L} &= I(\omega_1\hat{\mathbf{x}}_1 + \omega_2\hat{\mathbf{x}}_2) + I_3\omega_3\hat{\mathbf{x}}_3. \end{aligned} \tag{9.139}$$

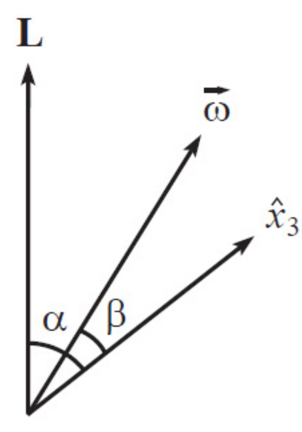
Gọi $\omega_\perp\hat{\omega}_\perp \equiv (\omega_1\hat{\mathbf{x}}_1 + \omega_2\hat{\mathbf{x}}_2)$ là thành phần của ω vuông góc với ω_3. Khi đó ta có

$$\tan\beta = \frac{\omega_\perp}{\omega_3}, \quad \text{và} \quad \tan\alpha = \frac{I\omega_\perp}{I_3\omega_3}. \tag{9.140}$$

Do đó,

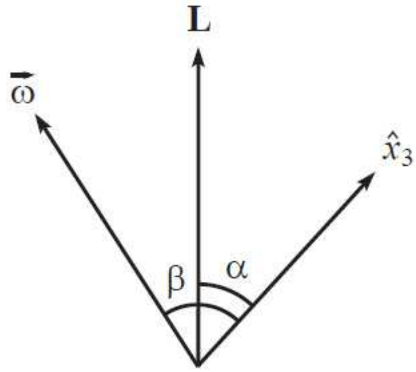
$$\frac{\tan\alpha}{\tan\beta} = \frac{I}{I_3}. \tag{9.141}$$

Nếu $I > I_3$, thì $\alpha > \beta$, và chúng ta có tình huống như được chỉ ra trong Hình 9.89. Một con



Hình 9.89:

quay với tính chất này được gọi là một "con quay dài". Một ví dụ của nó là một quả bóng bầu dục Mỹ hoặc một cái bút chì.

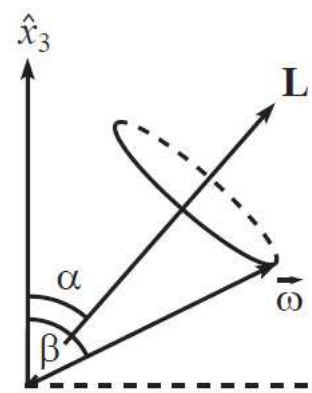


Hình 9.90:

Nếu $I < I_3$, thì $\alpha < \beta$, và chúng ta có tình huống như được chỉ ra trong Hình 9.90. Một con quay với tính chất này được gọi là một "con quay dẹt". Một ví dụ của nó là một đồng xu hoặc một đĩa Frisbee.

9.16. Nằm ở bên trên

Nếu $I < I_3$ (con quay dẹt), thì vector $\hat{\mathbf{x}}_3, \omega$, và $\mathbf{L}$ ban đầu nhìn giống như trong Hình 9.91, với

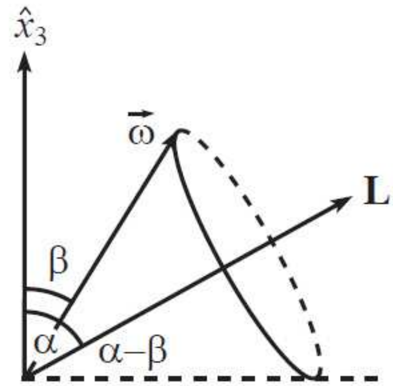


Hình 9.91:

$\mathbf{L}$ nằm giữa $\hat{\mathbf{x}}_3$ và ω. Vector ω vẽ ra một hình nón xung quanh $\mathbf{L}$ như đã được chỉ ra trong hình vẽ, vì vậy nó luôn luôn nằm trên đường nằm ngang (bởi vì nó bắt đầu chuyển động ở vị trí nằm trên đường nằm ngang).

Tuy nhiên, nếu $I > I_3$ (con quay dài), thì vector $\hat{\mathbf{x}}_3, \omega$, và $\mathbf{L}$ ban đầu nhìn giống như trong Hình 9.92, với ω nằm giữa $\hat{\mathbf{x}}_3$ và $\mathbf{L}$. Phụ thuộc vào các giá trị của I/I_3 và $\omega_\perp/\omega_3$ (trong đó $\omega_\perp$ là thành phần của ω vuông góc với $\hat{\mathbf{x}}_3$), hình nón ω có thể nằm trên trục nằm ngang, hoặc nó có thể chúc xuống bên dưới. Chúng ta quan tâm đến trường hợp tới hạn trong đó nó vừa chạm vào trục nằm ngang.

Từ Hình 9.92, nửa góc của hình nón là $\alpha - \beta$, vì vậy nếu hình nón đi xuống trục nằm ngang, thì chúng ta có $\alpha + (\alpha - \beta) = 90°$. Nhưng α và β được cho bởi



Hình 9.92:

$$\tan\beta = \frac{\omega_\perp}{\omega_3}, \quad \text{và} \quad \tan\alpha = \frac{L_\perp}{L_3} = \frac{I\omega_\perp}{I_3\omega_3}. \tag{9.142}$$

Do đó, điều kiện $2\alpha - \beta = 90°$ trở thành

$$2\tan^{-1}\left(\frac{I\omega_\perp}{\omega_3}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega_\perp}{\omega_3}\right) = 90°. \tag{9.143}$$

Với $n \equiv I/I_3$, và $x \equiv \omega_\perp/\omega_3$, điều này dẫn đến

$$\begin{aligned} 2\tan^{-1}(nx) - \tan^{-1}x &= 90° \\ \Longrightarrow \quad \tan\left(2\tan^{-1}(nx)\right) &= \tan\left(90° + \tan^{-1}(x)\right) \\ \Longrightarrow \quad \frac{2nx}{1-n^2x^2} &= -\frac{1}{x} \\ \Longrightarrow \quad n(n-2)x^2 &= 1. \end{aligned} \tag{9.144}$$

Chúng ta thấy rằng nếu $n \leq 2$, sẽ không có nghiệm đối với x. Nhưng nếu $n > 2$, sẽ có một nghiệm. Do đó, kết quả của bài toán là $n = 2$.

NHẬN XÉT: Nếu n chỉ lớn hơn 2 một chút, thì nghiệm của x trong phương trình (9.144) (và vì vậy cả $\omega_\perp$) sẽ có giá trị lớn. Điều này có nghĩa là lực tác động của bạn cần phải lớn, để sinh ra một $\omega_\perp$ lớn.

Có ba trường hợp giới hạn thú vị có thể xảy ra với giới hạn lớn của n, vì vậy hãy liệt kê chúng ra. Đối với ba trường hợp này, hãy vẽ một thanh mảnh đang quay xung quanh trục thẳng đứng x_3 của nó, và sau đó tưởng tượng đập vào đáy của nó với các xung lực khác nhau.

- Nếu $\omega_\perp \ll \omega_3$ và $L_\perp \ll L_3$, thì cả ω và **L** có hướng gần như là thẳng đứng lên trên, vì vậy ω vẽ ra một hình nón rất mảnh xung quanh **L** và nó luôn luôn có phương gần như thẳng đứng. $\hat{\mathbf{x}}_3$ cũng luôn luôn có phương gần như là thẳng đứng.

- Nếu $\omega_\perp \ll \omega_3$ nhưng $L_\perp \gg L_3$ (có thể xảy ra nếu n là đủ lớn), thì ω ban đầu có hướng lên trên gần như là theo phương thẳng đứng, trong khi đó $\mathbf{L}$ có hướng gần như là nằm theo phương ngang. Vì vậy ω vẽ ra một hình nón rất rộng và quay xuống gần như là theo phương thẳng đứng theo chiều âm. $\hat{\mathbf{x}}_3$ cũng vẽ ra một hình nón rất rộng.
- Nếu $\omega_\perp \gg \omega_3$, mà suy ra rằng $L_\perp \gg L_3$, thì cả ω và $\mathbf{L}$ có hướng gần như là nằm ngang, vì vậy ω vẽ ra một hình nón mảnh xung quanh $\mathbf{L}$ và nó luôn luôn có phương gần như nằm ngang. $\hat{\mathbf{x}}_3$ vẫn vẽ ra một hình nón rộng, bởi vì nó ban đầu có phương thẳng đứng (do giả thiết), độc lập với vị trí của ω và $\mathbf{L}$. Chú ý rằng mắt của bạn không thể phân biệt được giữa trường hợp thứ hai và trường hợp thứ ba ở đây, bởi vì trục $\hat{\mathbf{x}}_3$ có chuyển động giống nhau trong cả hai trường hợp này.

♣

9.17. Con quay

1. Để tồn tại các nghiệm thực đối với Ω trong phương trình (9.82), tam thức của phương trình bậc hai phải không âm. Nếu $\theta > \pi/2$ thì $\cos\theta < 0$, vì vậy tam thức này là tự động có giá trị dương, và bất kỳ giá trị nào của ω_3 đều thỏa mãn. Nhưng nếu $\theta < \pi/2$, thì giới hạn dưới của ω_3 là
$$\omega_3 \geqslant \frac{\sqrt{4MIgl\cos\theta}}{I_3} \equiv \tilde{\omega}_3. \qquad (9.145)$$
Trường hợp đặc biệt khi $\theta = \pi/2$ thì cần phải xét một giới hạn; hóa ra rằng chỉ có duy nhất một nghiệm (hữu hạn), như chúng ta sẽ thấy trong phần (b). Chú ý rằng tại giá trị tới hạn của ω_3 trong phương trình (9.145), phương trình (9.82) cho ta
$$\Omega_+ = \Omega_- = \frac{I_3\tilde{\omega}_3}{2I\cos\theta} = \sqrt{\frac{Mgl}{I\cos\theta}} \equiv \Omega_0. \qquad (9.146)$$

2. Bởi vì ω_3 là đại lượng có thứ nguyên, "ω_3 lớn" là một miêu tả không có ý nghĩa. Điều mà chúng ta thực sự muốn nói là phân số trong dấu căn trong phương trình (9.82) là rất nhỏ so với 1. Nghĩa là, $\epsilon \equiv (4MIgl\cos\theta)/(I_3^2\omega_3^2) \ll 1$. Trong trường hợp này, chúng ta có thể sử dụng $\sqrt{1-\epsilon} \approx 1 - \epsilon/2 + \cdots$ để viết
$$\Omega_\pm \approx \frac{I_3\omega_3}{2I\cos\theta}\left(1 \pm \left(1 - \frac{2MIgl\cos\theta}{I_3^2\omega_3^2}\right)\right). \qquad (9.147)$$
Hai nghiệm của Ω khi đó là, được lấy giá trị tới bậc chủ đạo của ω_3 (hoặc nếu không, được lấy tới bậc chủ đạo của ϵ),
$$\Omega_+ \approx \frac{I_3\omega_3}{I\cos\theta}, \quad \text{và} \quad \Omega_- \approx \frac{Mgl}{I_3\omega_3}. \qquad (9.148)$$
Chúng tương ứng được biết đến như là các tần số "nhanh" và "chậm" của chuyển động quay tiến động. Ω_- là kết quả xấp xỉ chúng ta đã tìm trong phương trình (9.77). Nó được

nhận được ở đây với giả thiết $\epsilon \ll 1$, mà là tương đương với

$$\omega_3 \gg \frac{\sqrt{4MIgl\cos\theta}}{I_3} \quad \text{(nghĩa là, } \omega_3 \gg \tilde{\omega}_3\text{)}. \tag{9.149}$$

Do đó, đây là điều kiện của kết quả trong phương trình (9.77) để nó là một xấp xỉ tốt. Nếu I có độ lớn cùng bậc với I_3, sao cho chúng đều có độ lớn cùng bậc với Ml^2 (với giả thiết rằng con quay là một vật thể có hình hạng hợp lý và không có một cái đuôi kỳ dị nào cả), và nếu $\cos\theta$ là có độ lớn bậc 1, thì điều kiện này có thể được viết dưới dạng $\omega_3 \gg \sqrt{g/\ell}$ mà nó là tần số của một con lắc đơn có chiều dài ℓ.

NHẬN XÉT:

1. Nghiệm Ω_+ là một kết quả tương đối ngạc nhiên. Hai đặc điểm kỳ lạ của Ω_+ là nó tăng cùng với ω_3, và nó độc lập với g. Để xem điều gì đang xảy ra với chuyển động quay tiến động này, chú ý rằng Ω_+ là giá trị của Ω mà tạo ra $L_\perp$ trong phương trình (9.79) về cơ bản là bằng không. Vì vậy **L** có hướng chỉ theo phương dọc theo trục thẳng đứng. Tốc độ thay đổi của **L** là tích của một bán kính nằm ngang rất nhỏ (của đường tròn rất bé mà đầu của nó vẽ ra) và một Ω rất lớn (giả sử rằng ω_3 là lớn). Tích của các đại lượng này bằng moment lực "có giá trị trung bình", $Mgl\sin\theta$.

2. Trong trường hợp giới hạn khi ω_3 có giá trị rất lớn, chuyển động tiến động nhanh về cơ bản giống như chuyển động của một con quay tự do, bởi vì **L** ở đây có hướng cơ bản là theo một phương cố định, giống như hướng của nó trong một con quay tự do. Và thực vậy, Ω_+ là độc lập với g. Chính xác hơn, chúng ta có thể thấy rằng giá trị của Ω_+ được cho trong phương trình (9.148) phù hợp với tần số tiến động của con quay tự do, do lập luận sau đây. $I_3\omega_3$ là thành phần của **L** dọc theo trục đối xứng, tạo một góc θ với phương thẳng đứng (mà cơ bản là phương của **L**). Do đó, **L** có độ lớn $L \approx I_3\omega_3/\cos\theta$, mà có nghĩa là chúng ta có thể viết $\Omega_+ \approx L/I$. Đây là tần số quay tiến động của một con quay tự do, được cho trong phương trình (9.55), như được quan sát từ một hệ tọa độ cố định.

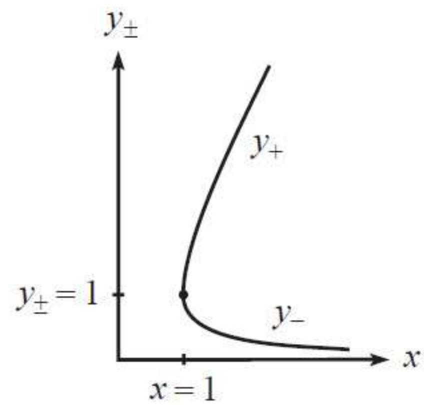
3. Chúng ta có thể vẽ $\Omega_\pm$ trong phương trình (9.82) như là các hàm của ω_3. Với các định nghĩa của $\tilde{\omega}_3$ và Ω_0 trong các phương trình (9.145) và (9.146), chúng ta có thể viết lại phương trình (9.82) dưới dạng

$$\Omega_\pm = \frac{\omega_3\Omega_0}{\tilde{\omega}_3}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{\tilde{\omega}_3^2}{\omega_3^2}}\right). \tag{9.150}$$

Bởi vì sẽ dễ dàng hơn khi làm việc với các đại lượng không thứ nguyên, hãy viết lại phương trình này dưới dạng

$$y_\pm = x \pm \sqrt{x^2 - 1}, \quad \text{trong đó } \; y_\pm \equiv \frac{\Omega_\pm}{\Omega_0}, \quad \text{và} \quad x \equiv \frac{\omega_3}{\tilde{\omega}_3}. \tag{9.151}$$

Một đồ thị sơ lược của $y_\pm$ theo x được chỉ ra trong Hình 9.93. Hình dạng của đồ

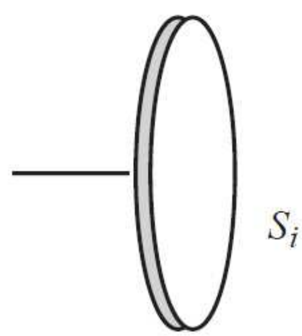


Hình 9.93:

thị này khi x có giá trị lớn được thấy từ phương trình (9.151) có dạng $y_\pm \approx 2x$, và $y_- \approx 1/(2x)$. Bạn có thể chỉ ra rằng hai kết quả này là tương đương với các kết quả trong phương trình (9.148). ♣

9.18. Nhiều con quay

Hệ được tạo bởi N vật thể cứng, mỗi vật thể bao gồm một đĩa và một thanh không khối lượng



Hình 9.94:

gắn chặt vào nó ở mặt bên trái (xem Hình 9.94). Ký hiệu các hệ con này là S_i, với S_1 là hệ con gần cột nhất. Giả sử mỗi đĩa có khối lượng m và moment quán tính I, và giả sử mỗi thanh có chiều dài ℓ. Gọi các vận tốc góc là ω_i. Khi đó moment động lượng của S_i là $L_i = I\omega_i$, và nó có hướng nằm ngang.[31] Gọi tần số cần tìm của chuyển động quay tiến động là Ω. Khi đó $d\mathbf{L_i}/dt$ có độ lớn $L_i\Omega = (I\omega_i)\Omega$ và nó có hướng chỉ vào trong trang giấy tại thời điểm trong Hình 9.49.

Xét moment lực $\tau_\mathbf{i}$ tác dụng lên S_i, quanh điểm khối tâm của nó. Đầu tiên hãy xét S_1. Cột tác dụng một lực hướng lên trên có độ lớn Nmg (lực này là lực giữ cho tất cả các con quay không

[31]Chúng ta đang bỏ qua moment động lượng của chuyển động quay tiến động. Phần này của $\mathbf{L}$ có hướng thẳng đứng (bởi vì các con quay tất cả đều có hướng nằm ngang) và do đó không đổi. Do vậy, phần này không ảnh hưởng đến phương trình $\tau = d\mathbf{L}/dt$.

rơi xuống), vì vậy nó sinh ra một moment lực có độ lớn $Nmg\ell$ (hướng vào trong trang giấy) quanh điểm khối tâm của S_1. Lực hướng xuống dưới từ thanh bên phải không sinh ra moment lực quanh điểm khối tâm, bởi vì nó tác dụng lên điểm khối tâm. Tương tự như vậy, lực trọng trường tác dụng lên S_1 không sinh ra moment lực quanh điểm khối tâm. Do đó, $\tau_{\mathbf{1}} = d\mathbf{L}_1/dt$ cho ta $Nmg\ell = (I\omega_1)\Omega$, và vì vậy

$$\omega_1 = \frac{Nmg\ell}{I\Omega}. \tag{9.152}$$

Bây giờ hãy xét S_2. S_1 tác dụng vào nó một lực có độ lớn $(N-1)mg$ (lực này là lực giữ S_2 đến S_N không rơi xuống), vì vậy nó tác dụng một moment lực có độ lớn $(N-1)mg\ell$ quanh điểm khối tâm của S_2. Cũng như S_1, đây là moment lực duy nhất tác dụng vào S_2. Do đó, $\tau_{\mathbf{2}} = d\mathbf{L}_2/dt$ cho ta $(N-1)mg\ell = (I\omega_2)\Omega$, và vì vậy

$$\omega_2 = \frac{(N-1)mg\ell}{I\Omega}. \tag{9.153}$$

Lập luận tương tự đối với các S_i khác, vì vậy chúng ta có

$$\omega_i = \frac{(N+1-i)mg\ell}{I\Omega}. \tag{9.154}$$

Do đó các ω_i có giá trị theo tỷ lệ

$$\omega_1 : \omega_2 : \cdots : \omega_{N-1} : \omega_{\mathrm{n}} = N : (N-1) : \cdots : 2 : 1. \tag{9.155}$$

Chú ý rằng chúng ta đã cần sử dụng $\tau = d\mathbf{L}/dt$ rất nhiều lần, đối với mỗi điểm khối tâm như là điểm gốc tọa độ. Việc chỉ sử dụng điểm khớp quay trên cột là điểm gốc tọa độ sẽ chỉ cho chúng ta một thông tin, trong khi đó chúng ta cần N thông tin.

NHẬN XÉT: Để kiểm tra lại, chúng ta có thể xác minh rằng các ω ở trên sẽ làm cho $\tau = d\mathbf{L}/dt$ là đúng, trong đó τ và $\mathbf{L}$ là tổng moment lực và moment động lượng đối với điểm khớp quay trên cột. Điểm khối tâm của toàn bộ hệ có khoảng cách là $(N+1)\ell/2$ so với cột, vì vậy moment lực do trọng lực là

$$\tau = Nmg\frac{(N+1)l}{2}. \tag{9.156}$$

Tổng momen động lượng là, sử dụng phương trình (9.154),

$$\begin{aligned} L &= I(\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_{\mathrm{n}}) \\ &= \frac{mg\ell}{\Omega}(N + (N-1) + (N-2) + \cdots + 2 + 1) \\ &= \frac{mg\ell}{\Omega}\left(\frac{N(N+1)}{2}\right). \end{aligned} \tag{9.157}$$

So sánh kết quả này với phương trình (9.156), chúng ta thấy rằng $\tau = L\Omega$, nghĩa là $\tau = |d\mathbf{L}/dt|$.

Chúng ta cũng có thể đặt bài toán này đối với cơ cấu trong đó tất cả các ω_i là bằng nhau (gọi chúng là ω), và mục tiêu là đi tìm các chiều dài của các thanh mà cho phép chuyển động quay tiến động tròn xảy ra với các thanh luôn luôn tạo thành một đường thẳng nằm ngang. Chúng ta có thể sử dụng cùng một lập luận như ở trên, và phương trình (9.154) sẽ có dạng được điều chỉnh như sau

$$\omega = \frac{(N+1-i)mg\ell_i}{I\Omega}, \tag{9.158}$$

trong đó ℓ_i là độ dài của thanh thứ i. Do đó, các ℓ_i có tỷ lệ

$$\ell_1 : \ell_2 : \cdots : \ell_{N-1} : \ell_N = \frac{1}{N} : \frac{1}{N-1} : \cdots : \frac{1}{2} : 1. \tag{9.159}$$

Một lần nữa, chúng ta có thể kiểm tra rằng các ℓ_i này làm cho phương trình $\tau = d\mathbf{L}/dt$ là đúng, trong đó τ và $\mathbf{L}$ là tổng moment lực và moment động lượng đối với khớp quay trên cột. Như là một bài tập, bạn có thể chỉ ra rằng điểm khối tâm vô tình có khoảng cách là ℓ_N so với cột. Vì vậy moment lực do trọng lực là, với việc sử dụng phương trình (9.158) để nhận được ℓ_N,

$$\tau = Nmg\ell_N = Nmg(\omega I\Omega/mg) = NI\omega\Omega. \tag{9.160}$$

Tổng moment động lượng đơn giản là $L = NI\omega$. Vì vậy, $\tau = L\Omega = |d\mathbf{L}/dt|$. Chú ý rằng bởi vì tổng $\sum 1/N$ không hội tụ, nên nó có thể làm cho cơ cấu kéo dài ra xa cột một khoảng cách bất kỳ. ♣

9.19. Con quay có trọng lượng trên một cái bàn không ma sát

Trong Mục 9.7.3, chúng ta đã xem xét τ và $\mathbf{L}$ đối với điểm khớp quay. Các đại lượng như vậy bây giờ không sử dụng được nữa, bởi vì điểm khớp quay là có gia tốc, vì vậy nó sẽ không phải là một sự lựa chọn điểm gốc tọa độ hợp pháp để áp dụng $\tau = d\mathbf{L}/dt$. Chúng ta do đó sẽ xem xét τ và $\mathbf{L}$ đối với điểm khối tâm, mà luôn luôn là sự lựa chọn hợp pháp cho điểm gốc tọa độ để áp dụng $\tau = d\mathbf{L}/dt$.

Với điểm khối tâm là điểm gốc tọa độ của chúng ta, có hai sự thay đổi chúng ta cần làm đối với phần nhận được trong Mục 9.7.3. Đầu tiên, đó là các moment quán tính bây giờ được tính đối với điểm khối tâm, thay vì là đối với điểm khớp quay. I_3 là không đổi, nhưng định lý trục song song cho ta I mới có dạng

$$I' \equiv I - Ml^2. \tag{9.161}$$

Thứ hai, moment lực cũng thay đổi. Lực duy nhất từ mặt bàn không ma sát là phản lực. Nhưng N không nhất thiết phải bằng Mg, bởi vì điểm khối tâm có thể có gia tốc theo chiều thẳng đứng. Phương trình $F = ma$ theo phương thẳng đứng là $N - Mg = M\ddot{y}$, trong đó $y = \ell\cos\theta$. Lấy đạo hàm cấp hai của y, chúng ta nhận được $N = Mg - Ml(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta)$. Moment lực đối với điểm khối tâm do đó có độ lớn

$$\tau = N\ell\sin\theta = Mg\ell\sin\theta - Ml^2\sin\theta(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta), \tag{9.162}$$

và nó có hướng chỉ theo cùng một phương như trong Mục 9.7.3. Kết hợp tất cả lại với nhau, chúng ta thấy rằng phương trình (9.69) là không đổi, phương trình (9.70) có I được thay thế bởi $I' \equiv I - Ml^2$, và phương trình thứ hai của (9.70) cũng có thêm một số hạng mới và trở thành

$$\left(Mgl - Ml^2(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta) + I'\dot{\phi}^2\cos\theta - I_3\omega_3\dot{\phi}\right)\sin\theta = I\ddot{\theta}. \tag{9.163}$$

Chú ý rằng nếu $\dot{\theta} \equiv 0$, sự thay đổi duy nhất cần thiết là sự thay đổi của I.

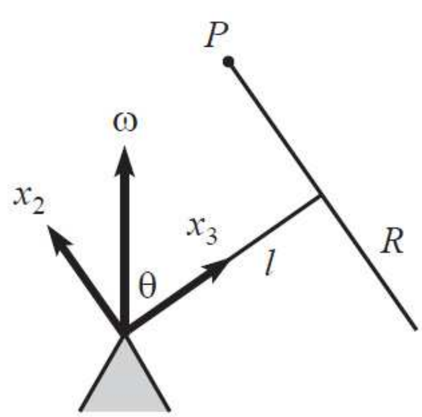
Nếu bạn thích sử dụng phương pháp Lagrange hơn trong Mục 9.7.4, thì I cần phải đổi thành I' như ở trên, và các sự thay đổi khác đến từ động năng trong hàm Lagrange. Chúng ta phải cộng vào động năng của toàn bộ vật thể khi được coi là một khối lượng chất điểm đặt tại điểm khối tâm, bởi vì cho đến bây giờ chúng ta chỉ đưa vào động năng đối với điểm gốc tọa độ mới của chúng ta (điểm khối tâm). Bởi vì bàn là không ma sát, điểm khối tâm chỉ có thể chuyển động theo phương thẳng đứng, vì vậy vận tốc của nó là $\dot{y} = -\ell\dot{\theta}\sin\theta$. Do đó, chúng ta phải cộng thêm số hạng $M(\ell\dot{\theta}\sin\theta)^2/2$ vào hàm Lagrange. Bạn có thể chỉ ra rằng điều này dẫn đến số hạng thêm trong phương trình (9.163).

9.20. Điểm cố định cao nhất

Đối với chuyển động mong muốn với P luôn luôn là điểm cao nhất, điều quan trọng cần chú ý là tất cả các điểm trong con quay chuyển động trong một đường tròn cố định quanh trục $\hat{\mathbf{z}}$. Do đó, ω có hướng thẳng đứng tại mọi thời điểm. Do vậy, nếu Ω là tần số của chuyển động quay tiến động, chúng ta có $\omega = \Omega\hat{\mathbf{z}}$.

Một cách khác để thấy ω có hướng theo phương thẳng đứng là xem xét mọi thứ trong hệ tọa độ đang quay với vận tốc góc $\Omega\hat{\mathbf{z}}$. Trong hệ tọa độ này, con quay không chuyển động. Nó thậm chí là không tự quay quanh nó, bởi vì điểm P luôn luôn là điểm cao nhất. Theo ngôn ngữ của Hình 9.30, chúng ta do đó có $\omega' = 0$, vì vậy $\omega = \Omega\hat{\mathbf{z}} + \omega'\hat{\mathbf{x}}_3 = \Omega\hat{\mathbf{z}}$.

Các moment chính là (với điểm khớp quay là điểm gốc tọa độ; xem Hình 9.95)



Hình 9.95:

$$I_3 = \frac{MR^2}{2}, \quad \text{và} \quad I \equiv I_1 = I_2 = Ml^2 + \frac{MR^2}{4}, \tag{9.164}$$

trong đó chúng ta đã sử dụng định lý trục song song trong việc tìm I. Các thành phần của ω dọc theo các trục chính là $\omega_3 = \Omega\cos\theta$ và $\omega_2 = \Omega\sin\theta$. Do đó (với việc biểu diễn mọi thứ theo các moment tổng quát, I_3 và I, tại thời điểm này),

$$\mathbf{L} = I_3\Omega\cos\theta\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{3} + I\Omega\sin\theta\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{2}. \tag{9.165}$$

Thành phần nằm ngang của $\mathbf{L}$ khi đó là $L_\perp = (I_3\Omega\cos\theta)\sin\theta - (I\Omega\sin\theta)\cos\theta$, vì vậy $d\mathbf{L}/dt$ có độ lớn

$$\left|\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right| = L_\perp\Omega = \Omega^2\sin\theta\cos\theta(I_3 - I), \tag{9.166}$$

và nó có hướng vào trong trang giấy (hoặc là ra ngoài trang giấy, nếu đại lượng này là âm). Đại lượng này phải bằng moment lực, mà có độ lớn $|\tau| = Mg\ell\sin\theta$ và nó hướng vào trong trang giấy. Do đó,

$$\Omega = \sqrt{\frac{Mgl}{(I_3 - I)\cos\theta}}. \tag{9.167}$$

Chúng ta thấy rằng đối với một con quay đối xứng nói chung, chuyển động quay tiến động mong muốn (trong đó một "mặt" luôn hướng lên trên) là có thể chỉ xảy ra nếu tích $(I_3 - I)\cos\theta$ lớn hơn không. Nghĩa là,

$$\begin{aligned} \theta < \pi/2 \quad &\Longrightarrow \quad I_3 > I, \\ \theta > \pi/2 \quad &\Longrightarrow \quad I_3 < I. \end{aligned} \tag{9.168}$$

Đối với bài toán hiện tại, I_3 và I được cho trong phương trình (9.164), vì vậy chúng ta tìm được

$$\Omega = \sqrt{\frac{4gl}{(R^2 - 4l^2)\cos\theta}}. \tag{9.169}$$

Điều kiện cần để cho chuyển động như thế này tồn tại do đó là $R > 2l$ nếu $\theta < \pi/2$, hoặc $R < 2l$ nếu $\theta > \pi/2$.

NHẬN XÉT:

1. Về mặt trực giác thì rõ ràng là Ω phải trở lên rất lớn khi $\theta \to \pi/2$, mặc dù nó về mặt trực giác không rõ ràng tý nào rằng chuyển động như vậy tồn tại đối với các góc gần $\pi/2$.
2. Nếu $\theta > \pi/2$ và $R = 0$, chúng ta đơn giản là có chuyển động của con lắc đơn quay tròn đã được thảo luận trong Bài tập 9.12. Và thực vậy, khi $R = 0$, kết quả trong phương trình (9.169) giảm về thành $\Omega = \sqrt{g/\ell\cos\alpha}$, trong đó $\alpha \equiv \pi - \theta$, phù hợp với kết quả trong phương trình (9.126).

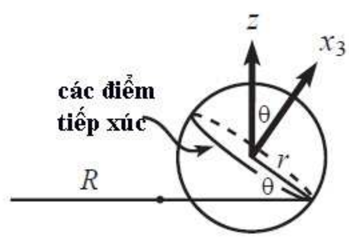
3. Ω tiến đến một hằng số khác không khi $\theta \to 0$ hoặc $\theta \to \pi$ (phụ thuộc vào dấu của $I_2 - I$), mà không hoàn toàn hiển nhiên chút nào.

4. Nếu cả R và ℓ được kéo dài bởi cùng một hệ số, phương trình (9.169) chỉ ra rằng Ω sẽ giảm. Điều này cũng có thể nhận được bằng phương pháp phân tích thứ nguyên.

5. Giả sử rằng $\theta < \pi/2$ (trường hợp $\theta > \pi/2$ có thể được thực hiện theo một cách tương tự), điều kiện $I_3 > I$ có thể được hiểu theo cách như sau. Nếu $I_3 = I$, thì $\mathbf{L} \propto \omega$, vì vậy $\mathbf{L}$ có hướng theo phương thẳng đứng dọc theo ω. Nếu $I_3 > I$, thì $\mathbf{L}$ sẽ chỉ theo hướng ở đâu đó về bên phải của trục z (tại thời điểm trong Hình 9.95). Điều này có nghĩa rằng đầu của $\mathbf{L}$ đang chuyển động vào trong trang giấy, cùng với con quay. Đây là điều chúng ta cần, bởi vì τ hướng vào trong trang giấy. Tuy nhiên, nếu $I_3 < I$, thì $\mathbf{L}$ có hướng ở đâu đó bên trái trục z, vì vậy $d\mathbf{L}/dt$ hướng ra ngoài trang giấy, và do vậy không thể bằng τ. ♣

9.21. Quả bóng rổ trên vành tròn

Giả sử rằng chuyển động quay tiến động là ngược chiều kim đồng hồ khi được quan sát từ trên



Hình 9.96:

xuống, như được chỉ ra trong Hình 9.52. Hãy xem xét mọi thứ trong hệ tọa độ có tâm của vành tròn là điểm gốc tọa độ của nó và quay với vận tốc góc $\Omega\hat{\mathbf{z}}$. Trong hệ tọa độ này, tâm của quả bóng là đứng yên, và vành tròn quay quanh tâm của nó với vận tốc góc Ω. Nếu các điểm tiếp xúc tạo thành một hình tròn lớn trên quả bóng, quả bóng phải đang quay tròn quanh trục $\hat{\mathbf{x}}_3$ (theo chiều âm) như được chỉ ra trong Hình 9.96. Gọi tần số của sự tự quay này là ω' (theo ngôn ngữ của Hình 9.30). Khi đó điều kiện không trượt nói rằng $\omega' r = \Omega R$ và vì vậy $\omega' = \Omega R/r$. Do đó, tổng vận tốc góc của quả bóng đối với hệ quy chiếu trái đất là

$$\omega = \Omega\hat{\mathbf{z}} - \omega'\hat{\mathbf{x}}_3 = \Omega\hat{\mathbf{z}} - (R/r)\Omega\hat{\mathbf{x}}_3. \tag{9.170}$$

Chúng ta hãy chọn tâm của quả bóng là điểm gốc tọa độ để đi tính τ và $\mathbf{L}$. Khi đó tất cả các trục trong quả bóng là một trục chính với moment quán tính $I = (2/3)mr^2$. Moment động lượng do đó là

$$\mathbf{L} = I\omega = I\Omega\hat{\mathbf{z}} - I(R/r)\Omega\hat{\mathbf{x}}_3. \tag{9.171}$$

Chỉ có số hạng chứa $\hat{\mathbf{x}}_3$ là có thành phần nằm ngang đóng góp vào trong $d\mathbf{L}/dt$. Thành phần này có độ dài $L_\perp = I(R/r)\Omega\sin\theta$. Do đó $d\mathbf{L}/dt$ có độ lớn

$$\left|\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right| = \Omega L_\perp = \frac{2}{3}\Omega^2 mrR\sin\theta, \tag{9.172}$$

và nó có hướng chỉ ra ngoài trang giấy.

Moment lực (đối với tâm của quả bóng) đến từ lực tại điểm tiếp xúc. Có hai thành phần của lực này. Thành phần thẳng đứng là mg, và thành phần nằm ngang là $m(R - r\cos\theta)\Omega^2$ (có hướng sang trái), bởi vì tâm của quả bóng chuyển động theo một đường tròn có bán kính $(R - r\cos\theta)$. Moment lực do đó có độ lớn

$$|\tau| = mg(r\cos\theta) - m(R - r\cos\theta)\Omega^2(r\sin\theta), \tag{9.173}$$

với chiều hướng ra ngoài trang giấy là chiều dương. Cân bằng $|\tau|$ này với $|d\mathbf{L}/dt|$ trong phương trình (9.172) cho ta

$$\Omega^2 = \frac{g}{\frac{5}{3}R\tan\theta - r\sin\theta}. \tag{9.174}$$

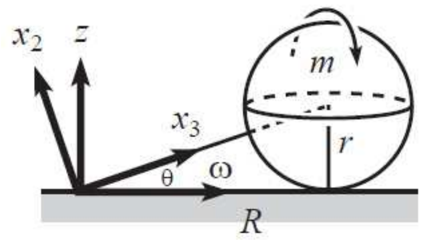
NHẬN XÉT:

1. $\Omega \to \infty$ khi $\theta \to 0$, và điều này là hợp lý. Và $\Omega \to 0$ khi $\theta \to \pi/2$, và nó cũng hợp lý.
2. $\Omega \to \infty$ khi $R = (3/5)r\cos\theta$. Nhưng điều này không mang ý nghĩa vật lý, bởi vì chúng ta phải có $R > r\cos\theta$ để cho cạnh phía bên kia của vành tròn không chạm vào quả bóng.
3. Bạn cũng có thể làm bài toán này đối với trường hợp trong đó các điểm tiếp xúc vẽ ra một đường tròn không phải là một đường tròn lớn (ví dụ như, một đường tròn nghiêng một góc θ bên dưới đường tròn lớn). Biểu thức của moment lực trong phương trình (9.173) là không đổi, nhưng giá trị của ω' và góc của trục $\hat{\mathbf{x}}_3$ cả hai đều thay đổi, vì vậy phương trình (9.172) sẽ bị thay đổi. Nếu bạn muốn thử làm việc này, bạn có thể chỉ ra rằng (với việc thực hiện một chút tính toán) là nếu $R \gg r$ và nếu bạn muốn quả bóng di chuyển xung quanh vành tròn một cách rất nhanh, thì β phải bằng $\tan^{-1}((5/2)\tan\theta)$. Giá trị này là lớn hơn θ, vì vậy đường tròn các điểm tiếp xúc thực ra là nằm bên dưới đường nằm ngang. ♣

9.22. Một cây kẹo lăn

Chúng ta đầu tiên phải tìm vector vận tốc góc ω. Giả sử rằng chuyển động quay tiến động là theo chiều kim đồng hồ khi được quan sát từ phía trên, như được chỉ ra trong Hình 9.53. Chúng ta sẽ đi chứng minh rằng ω có hướng nằm ngang hướng về bên phải (tại thời điểm được chỉ ra trong Hình 9.97), với độ lớn $(R/r)\Omega$. Điều này có thể được thấy theo hai cách.

Cách đầu tiên là công nhận rằng chúng ta về cơ bản là có tình huống giống như tình huống trong cơ cấu "Hình nón lăn" của Bài tập 9.3 (tưởng tượng rằng hình cầu là một quả bóng bằng



Hình 9.97:

kem trong một hình nón có đỉnh của nó đặt tại đầu bên trái của thanh). Điểm tiếp xúc trên hình cầu với mặt đất tức thời là đang đứng yên (điều kiện lăn không trượt), vì vậy ω phải đi qua điểm này. Nhưng ω cũng phải đi qua đầu bên trái của thanh, bởi vì điểm đó cũng đang đứng yên. Do đó, ω phải có phương nằm ngang. Để đi tìm độ lớn của nó, chú ý rằng tâm của hình cầu di chuyển với vận tốc ΩR. Nhưng bởi vì tâm này cũng có thể được coi là tức thời đang chuyển động với tần số ω trong một đường tròn có bán kính r xung quanh trục nằm ngang, chúng ta có $\omega r = \Omega R$. Do đó, $\omega = (R/r)\Omega$.

Cách thứ hai là đi viết ω dưới dạng $\omega = -\Omega\hat{\mathbf{z}} + \omega'\hat{\mathbf{x}}$ (theo ngôn ngữ của Hình 9.30), trong đó ω' là tần số của chuyển động quay tròn khi được quan sát bởi một người đang quay xung quanh trục $\hat{\mathbf{z}}$ (âm) với tần số Ω. Các điểm tiếp xúc tạo thành một đường tròn có bán kính R trên mặt đất. Nhưng chúng cũng tạo một đường tròn có bán kính $r\cos\theta$ trên hình cầu, trong đó θ là góc giữa thanh và mặt đất (đường tròn này là đường tròn các điểm tại đó hình nón bằng kem được đề cập ở trên tiếp xúc với hình cầu). Điều kiện lăn không trượt khi đó suy ra rằng $\Omega R = \omega'(r\cos\theta)$. Do đó $\omega' = \Omega R/(r\cos\theta)$, và vì vậy

$$\omega = -\Omega\hat{\mathbf{z}} + \omega'\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{3} = -\Omega\hat{\mathbf{z}} + \left(\frac{\Omega R}{r\cos\theta}\right)(\cos\theta\hat{\mathbf{x}} + \sin\theta\hat{\mathbf{z}}) = (R/r)\Omega\hat{\mathbf{x}}, \tag{9.175}$$

trong đó chúng ta đã sử dụng $\tan\theta = r/R$.

Bây giờ hãy đi tính phản lực. Chọn điểm khớp quay là điểm gốc tọa độ. Các trục chính khi đó là $\hat{\mathbf{x}}_3$ dọc theo thanh, cùng với hai trục bất kỳ vuông góc với thanh. Chọn $\hat{\mathbf{x}}_2$ nằm trong mặt phẳng của trang giấy (xem Hình 9.97). Khi đó các thành phần của ω trên các trục chính là

$$\omega_3 = (R/r)\Omega\cos\theta, \quad \text{và} \quad \omega_2 = -(R/r)\Omega\sin\theta. \tag{9.176}$$

Các moment chính là

$$I_3 = (2/5)mr^2, \quad \text{và} \quad I_2 = (2/5)mr^2 + m(r^2 + R^2), \tag{9.177}$$

trong đó chúng ta đã sử dụng định lý trục song song. Moment động lượng là $\mathbf{L} = I_3\omega_3\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{3} + I_2\omega_2\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{2}$, vì vậy thành phần nằm ngang của nó có độ dài $L_\perp = I_3\omega_3\cos\theta - I_2\omega_2\sin\theta$. Do đó, độ lớn của

$d\mathbf{L}/dt$ là

$$\begin{aligned}\left|\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right| = \Omega L_\perp &= \Omega(I_3\omega_3\cos\theta - I_2\omega_2\sin\theta) \\ &= \Omega\bigg[\left(\frac{2}{5}mr^2\right)\left(\frac{R}{r}\Omega\cos\theta\right)\cos\theta \\ &\quad -\left(\frac{2}{5}mr^2 + m(r^2+R^2)\right)\left(-\frac{R}{r}\Omega\sin\theta\right)\sin\theta\bigg] \\ &= \frac{\Omega^2 mR}{r}\left(\frac{2}{5}r^2 + (r^2+R^2)\sin^2\theta\right) \\ &= \frac{7}{5}mrR\Omega^2. \end{aligned} \tag{9.178}$$

trong đó chúng ta đã sử dụng $\sin\theta = r/\sqrt{r^2+R^2}$. Chiều của $d\mathbf{L}/dt$ là hướng ra ngoài trang giấy.

Moment lực (đối với điểm khớp quay) là do lực trọng trường tác dụng lên điểm khối tâm, cùng với phản lực N tác dụng lên điểm tiếp xúc. (Bất cứ lực ma sát theo phương ngang nào mà vô tình tồn tại tại điểm tiếp xúc đều sinh ra moment lực bằng không đối với điểm khớp quay.) Do đó, τ có hướng chỉ ra ngoài trang giấy với độ lớn $|\tau| = (N - mg)R$. Cân bằng giá trị này với $|d\mathbf{L}/dt|$ trong phương trình (9.178) cho ta

$$N = mg + \frac{7}{5}mr\Omega^2. \tag{9.179}$$

Giá trị này có tính chất rất thú vị là nó độc lập với R, và do vậy cũng độc lập với θ. Tính chất độc lập này có là do cả hai $|\tau|$ và $|d\mathbf{L}/dt|$ đều tỷ lệ với R, là một thực tế mà sẽ dễ thấy hơn thông qua lập luận trong phần nhận xét đầu tiên dưới đây.

NHẬN XÉT:

1. Thực ra có một cách nhanh hơn để đi tính $d\mathbf{L}/dt$ trong phương trình (9.178). Tại một thời điểm đã cho, hình cầu đang quay quanh trục nằm ngang x với tần số $\omega = (R/r)\Omega$. Moment quán tính quanh trục này là $I_x = (7/5)mr^2$, từ định lý trục song song. Do đó, thành phần nằm ngang của $\mathbf{L}$ có độ lớn là $L_x = I_x\omega = (7/5)mrR\Omega$. Nhân giá trị này với tần số (là Ω) mà $\mathbf{L}$ đang quay xung quanh trục z cho kết quả đối với $|d\mathbf{L}/dt|$ trong phương trình (9.178). Cũng có một thành phần theo phương thẳng đứng của $\mathbf{L}$ đối với khớp quay, nhưng thành phần này không đổi, vì vậy nó không tham gia vào $d\mathbf{L}/dt$. (Thành phần thẳng đứng này vô tình bằng $-mR^2\Omega$. Điều này có thể nhận được bằng cách nhận ra rằng hình cầu cư xử giống như một khối lượng chất điểm đối với mục đích hiện tại, hoặc bằng cách sử dụng tensor quán tính đối với điểm khớp quay, hoặc bằng cách tính $L_z = I_3\omega_3\sin\theta + I_2\omega_2\cos\theta$.)

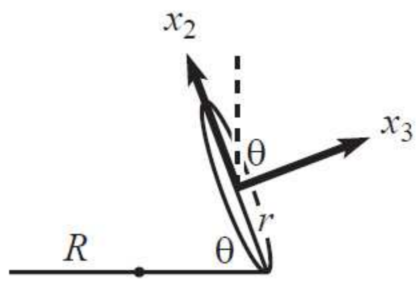
2. Điểm khớp quay phải cung cấp một lực hướng xuống dưới $N - mg = (7/5)mr\Omega^2$, để làm cho tổng lực theo phương thẳng đứng tác dụng lên thanh kẹo bằng không. Kết

quả này là lớn hơn một chút so với kết quả $mr\Omega^2$ đối với cơ cấu "Thanh kẹo trượt" trong Bài tập luyện tập 9.53.

3. Tổng của các lực nằm ngang tại điểm khớp quay và tại điểm tiếp xúc phải bằng lực hướng tâm cần thiết có độ lớn $mR\Omega^2$. Nhưng sẽ không thể để nói làm cách nào mà lực này được bị chia tách ra, mà không được cho thêm thông tin. ♣

9.23. Đồng xu lăn

Chọn điểm khối tâm là điểm gốc tọa độ. Các trục chính khi đó là $\hat{\mathbf{x}}_2$ và $\hat{\mathbf{x}}_3$ (như được chỉ ra



Hình 9.98:

trong Hình 9.98), cùng với $\hat{\mathbf{x}}_1$ đang chỉ vào trong trang giấy. Giả sử rằng chuyển động quay tiến động là theo chiều ngược chiều kim đồng hồ khi được quan sát từ phía trên, như được chỉ ra trong Hình 9.54. Hãy xem xét mọi thứ trong hệ quy chiếu mà có tâm của đường tròn các điểm tiếp xúc trên mặt đặt là điểm gốc tọa độ của nó, và nó đang quay với vận tốc góc $\Omega\hat{\mathbf{z}}$. Trong hệ quy chiếu này, điểm khối tâm là nằm yên, và đồng xu quay với tần số ω' (theo ngôn ngữ của Hình 9.30) quanh chiều âm của trục $\hat{\mathbf{x}}_3$. Điều kiện lăn không trượt khi đó nói rằng $\omega' r = \Omega R$ và vì vậy $\omega' = \Omega R/r$. Do đó, tổng vận tốc góc của đồng xu đối với hệ quy chiếu trái đất là

$$\omega = \Omega\hat{\mathbf{z}} - \omega'\hat{\mathbf{x}}_3 = \Omega\hat{\mathbf{z}} - (R/r)\Omega\hat{\mathbf{x}}_3. \quad (9.180)$$

Nhưng $\hat{\mathbf{z}} = \sin\theta\hat{\mathbf{x}}_2 + \cos\theta\hat{\mathbf{x}}_3$, vì vậy chúng ta có thể viết ω biểu diễn qua các trục chính dưới dạng

$$\omega = \Omega\sin\theta\hat{\mathbf{x}}_2 - \Omega\left(\frac{R}{r} - \cos\theta\right)\hat{\mathbf{x}}_3. \quad (9.181)$$

Các moment chính là

$$I_3 = (1/2)mr^2, \quad \text{và} \quad I_2 = (1/4)mr^2. \quad (9.182)$$

Moment động lượng là $\mathbf{L} = I_2\omega_2\hat{\mathbf{x}}_2 + I_3\omega_3\hat{\mathbf{x}}_3$, vì vậy thành phần nằm ngang của nó có độ dài $L_\perp = I_2\omega_2\cos\theta - I_3\omega_3\sin\theta$, với chiều hướng về bên trái được chọn là chiều dương. Do đó, độ lớn của $d\mathbf{L}/dt$ là

$$\begin{aligned}\left|\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right| &= \Omega L_\perp \\ &= \Omega(I_2\omega_2\cos\theta - I_3\omega_3\sin\theta) \\ &= \Omega\left[\left(\frac{1}{4}mr^2\right)(\Omega\sin\theta)\cos\theta - \left(\frac{1}{2}mr^2\right)(-\Omega(R/r-\cos\theta))\sin\theta\right] \\ &= \frac{1}{4}mr\Omega^2\sin\theta(2R - r\cos\theta), \end{aligned} \tag{9.183}$$

và nó là một đại lượng dương tương ứng với trường hợp $d\mathbf{L}/dt$ đang hướng ra ngoài trang giấy (tại thời điểm đã cho trong hình vẽ).

Moment lực (đối với điểm khối tâm) là do lực tại điểm tiếp xúc. Có hai thành phần của lực này. Thành phần thẳng đứng là mg, và thành phần nằm ngang là $m(R - r\cos\theta)\Omega^2$ hướng sang trái, bởi vì điểm khối tâm chuyển động trong một đường tròn có bán kính $(R - r\cos\theta)$. Do đó moment lực có độ lớn

$$|\tau| = mg(r\cos\theta) - m(R - r\cos\theta)\Omega^2(r\sin\theta), \tag{9.184}$$

với chiều hướng ra ngoài trang giấy là chiều dương. Cân bằng $|\tau|$ này với $|d\mathbf{L}/dt|$ trong phương trình (9.183) cho ta

$$\Omega^2 = \frac{g}{\frac{3}{2}R\tan\theta - \frac{5}{4}\sin\theta}. \tag{9.185}$$

Vế phải phương trình này phải có giá trị dương nếu muốn một nghiệm của Ω tồn tại. Do đó, điều kiện để cho chuyển động chúng ta mong muốn có thể xảy ra là

$$R > \frac{5}{6}r\cos\theta. \tag{9.186}$$

NHẬN XÉT:

1. Với $\theta \to \pi/2$, phương trình (9.185) cho ta $\Omega \to 0$, và nó phải như vậy. Và đối với $\theta \to 0$, chúng ta nhận được $\Omega \to \infty$, và điều này cũng hợp lý.

2. Với $r\cos\theta > R > (5/6)r\cos\theta$, điểm khối tâm của đồng xu nằm về *bên trái* tâm của đường tròn các điểm tiếp xúc (tại thời điểm trong hình vẽ). Lực hướng tâm, $m(R - r\cos\theta)\Omega^2$, do đó là âm (mà có nghĩa là nó hướng ra ngoài theo phương của bán kính, về bên phải), nhưng chuyển động vẫn có thể xảy ra. Khi R có giá trị tiến gần tới $(5/6)r\cos\theta$, tần số Ω sẽ tiến ra vô cùng, mà có nghĩa là lực theo phương bán kính hướng ra ngoài cũng tiến ra vô cùng. Hệ số ma sát giữa đồng xu và mặt đất do đó phải tương ứng rất lớn.

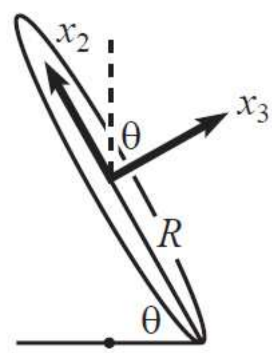
3. Chúng ta có thể xét một đồng xu tổng quát hơn, với khối lượng riêng của nó chỉ phụ thuộc vào khoảng cách tới tâm của nó, và I_3 của nó bằng βmr^2. Ví dụ như, một đồng xu đồng chất có $\beta = 1/2$, và một đồng xu có tất cả khối lượng của nó nằm trên cạnh

có $\beta = 1$. Theo định lý trục đối xứng, $I_1 = I_2 = (1/2)\beta m r^2$, bạn có thể chỉ ra rằng các phương pháp trên nhận được

$$\Omega^2 = \frac{g}{(1+\beta)R\tan\theta - (1+\beta/2)r\sin\theta} \quad \Longrightarrow \quad R > \left(\frac{1+\beta/2}{1+\beta}\right) r\cos\theta. \qquad (9.187)$$

Khi giá trị của β càng lớn, thì cận dưới của R càng nhỏ. Nhưng thậm chí là nếu $\beta \to \infty$ (hãy tưởng tượng các nan hoa rất dài được gắn vào đồng xu dọc theo phương bán kính, và bỏ mặt đất đi ngoại trừ vành tròn các điểm tiếp xúc, vì vậy đồng xu sẽ không bị chuyển động vào trong), R vẫn không thể nhỏ hơn $(r/2)\cos\theta$. ♣

9.24. Đồng xu lắc lư



Hình 9.99:

(a) Chọn điểm khối tâm là điểm gốc tọa độ. Các trục chính khi đó là $\hat{\mathbf{x}}_2$ và $\hat{\mathbf{x}}_3$ (như đã chỉ ra trong Hình 9.99), cùng với $\hat{\mathbf{x}}_1$ có hướng vào trong trang giấy. Giả sử rằng chuyển động quay tiến động là ngược chiều kim đồng hồ khi được quan sát từ bên trên, và đã được chỉ ra trong Hình 9.55. Xét cơ cấu trong hệ quy chiếu đang quay với vận tốc góc $\Omega\hat{\mathbf{z}}$. Trong hệ quy chiếu này, vị trí của các điểm tiếp xúc là nằm yên, và đồng xu quay với tần số ω' (theo ngôn ngữ của Hình 9.30) xung quanh chiều âm của trục $\hat{\mathbf{x}}_3$. Bán kính của đường tròn các điểm tiếp xúc trên mặt bàn là $R\cos\theta$. Do đó, điều kiện lăn không trượt nói rằng $\omega' R = \Omega(R\cos\theta)$, và vì vậy $\omega' = \Omega\cos\theta$. Do vậy, tổng vận tốc góc của đồng xu đối với hệ quy chiếu trái đất là

$$\omega = \Omega\hat{\mathbf{z}} - \omega'\hat{\mathbf{x}}_3 = \Omega(\sin\theta\hat{\mathbf{x}}_2 + \cos\theta\hat{\mathbf{x}}_3) - (\Omega\cos\theta)\hat{\mathbf{x}}_3 = \Omega\sin\theta\hat{\mathbf{x}}_2. \qquad (9.188)$$

Nhìn lại, thì nó là hợp lý khi ω phải có hướng theo phương của $\hat{\mathbf{x}}_2$. Cả điểm khối tâm và điểm tiếp xúc tức thời trên đồng xu đều đứng yên, vì vậy ω phải nằm dọc theo đường thẳng chứa hai điểm này, nghĩa là dọc phương của trục $\hat{\mathbf{x}}_2$.

(b) Moment chính quanh trục $\hat{\mathbf{x}}_2$ là $I = mR^2/4$. Moment động lượng là $\mathbf{L} = I\omega_2\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{2}$, vì vậy thành phần nằm ngang của nó có độ dài $L_\perp = L\cos\theta = (I\omega_2)\cos\theta$. Do đó, $d\mathbf{L}/dt$ có độ lớn

$$\left|\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right| = \Omega L_\perp = \Omega\left(\frac{mR^2}{4}\right)(\Omega\sin\theta)\cos\theta, \tag{9.189}$$

và nó có hướng ra ngoài trang giấy.

Moment lực (đối với điểm khối tâm) là do phản lực tại điểm tiếp xúc gây ra. Phản lực này về cơ bản là bằng mg, bởi vì điểm khối tâm được giả thiết là rơi rất chậm. Chú ý rằng không có lực ma sát hướng sang hai bên tại điểm tiếp xúc, bởi vì điểm khối tâm về cơ bản là không chuyển động. Moment lực do đó có độ lớn

$$|\tau| = mgR\cos\theta, \tag{9.190}$$

và nó có hướng ra ngoài trang giấy. Cân bằng $|\tau|$ này với $|d\mathbf{L}/dt|$ trong phương trình (9.189) cho ta

$$\Omega = 2\sqrt{\frac{g}{R\sin\theta}}. \tag{9.191}$$

NHẬN XÉT:

(a) $\Omega \to \infty$ khi $\theta \to 0$. Điều này sẽ rõ ràng nếu bạn làm thí nghiệm; điểm tiếp xúc di chuyển rất nhanh quanh đường tròn.

(b) $\Omega \to 2\sqrt{g/R}$ khi $\theta \to \pi/2$, và điều này không hiển nhiên cho lắm. Trong trường hợp này, $\mathbf{L}$ có hướng chỉ theo phương gần như thẳng đứng, và nó vẽ ra một hình nón nhỏ xíu bởi một moment lực rất nhỏ. Trong giới hạn $\theta \to \pi/2$ này, Ω cũng là tần số mà mặt phẳng của đồng xu quay xung quanh trục thẳng đứng. Nếu bạn quay một đồng xu rất nhanh quanh một đường kính thẳng đứng, nó ban đầu trải qua một chuyển động quay thuần túy chỉ với một điểm tiếp xúc. Nhưng sau đó nó dần dần mất năng lượng do ma sát, cho đến khi tần số quay giảm dần đến $2\sqrt{g/R}$, mà tại thời điểm này nó bắt đầu lắc lư (chúng ta đang giả sử rằng đồng xu là rất mảnh, sao cho nó không thể cân bằng trên cạnh của nó). Trong trường hợp mà đồng xu là một đồng hai nhăm cent của Mỹ (với $R \approx 0.012m$), tần số tới hạn này $2\sqrt{g/R}$ sẽ bằng $\Omega \approx 57$ rad/s, mà tương ứng với khoảng 9 Hz.

(c) Kết quả trong phương trình (9.191) là một trường hợp đặc biệt của kết quả trong phương trình (9.185) của Bài tập 9.23. Điểm khối tâm của đồng xu trong Bài tập 9.23 là đứng yên nếu $R = r\cos\theta$. Thay giá trị này vào trong phương trình (9.185) cho ta $\Omega^2 = 4g/(r\sin\theta)$, phù hợp với phương trình (9.191), bởi vì r là bán kính của đồng xu trong Bài tập 9.23. ♣

(c) Xét một vòng xoay của điểm tiếp xúc quanh trục z. Bởi vì bán kính của đường trên mặt bàn là $R\cos\theta$, điểm tiếp xúc sẽ di chuyển một khoảng $2\pi R\cos\theta$ quanh đồng xu trong khoảng thời gian này. Do vậy, điểm tiếp xúc mới trên đồng xu cách một khoảng cách là $2\pi R - 2\pi R\cos\theta$ so với điểm tiếp xúc ban đầu. Đồng xu do đó có vẻ như là đã quay một phân số $(1-\cos\theta)$ của một vòng tròn trong khoảng thời gian này. Tần với mà bạn sẽ nhìn thấy nó quay do đó là

$$(1-\cos\theta)\Omega = 2(1-\cos\theta)\sqrt{\frac{g}{R\sin\theta}}. \qquad (9.192)$$

NHẬN XÉT:

1. Nếu $\theta \approx \pi/2$, thì tần số của chuyển động quay của Abe về cơ bản là bằng với Ω. Điều này là hợp lý, bởi vì đỉnh đầu của Abe sẽ, ví dụ như, luôn luôn gần đỉnh của đồng xu, và điểm này sẽ vẽ ra một đường tròn nhỏ quanh trục z, với tần số gần như là giống tần số của điểm tiếp xúc.

2. Với $\theta \to 0$, Abe dường như là quay với tần số $\theta^{3/2}\sqrt{g/R}$ (sử dụng $\sin\theta \approx \theta$ và $\cos\theta \approx 1-\theta^2/2$). Do đó, mặc dù điểm tiếp xúc chuyển động vô cùng nhanh trong trường hợp giới hạn này, nhưng chúng ta sẽ thấy Abe đang quay rất chậm, như bạn có thể kiểm tra lại điều này bằng thực nghiệm.

3. Tất cả các kết quả đối với các tần số trong bài toán này phải được nhân với $\sqrt{g/R}$, do việc phân tích thứ nguyên. Nhưng dù nếu hệ số nhân là bằng không, vô cùng, hay là một giá trị nào đó ở giữa, thì nó không hoàn toàn rõ ràng chút nào.

4. Một kết quả sai đối với tần số quay của Abe (khi được quan sát từ phía trên) là nó bằng với thành phần thẳng đứng của ω, mà có giá trị là $\omega_z = \omega\sin\theta = (\Omega\sin\theta)\sin\theta = 2(\sin\theta)^{2/3}\sqrt{g/R}$. Giá trị này không bằng với kết quả trong phương trình (9.192). (Nó sẽ bằng kết quả đó tại $\theta = \pi/2$ nhưng sẽ khác một hệ số 2 đối với $\theta \to 0$.) Đáp số này là không chính xác bởi vì đơn giản là không có lý do gì tại sao thành phần thẳng đứng của ω phải bằng tần số của sự quay tròn của, ví dụ như, mũi của Abe, xung quanh trục thẳng đứng. Ví dụ, tại các thời điểm khi ω đi qua điểm của cái mũi này, thì cái mũi sẽ không chuyển động, vì vậy nó chắc chắn không thể được miêu tả như là đang chuyển động xung quanh trục thẳng đứng với tần số $\omega_z = \omega\sin\theta$. Kết quả trong phương trình (9.192) là một dạng giá trị trung bình của tần số của chuyển động quay tròn. Thậm chí bất kỳ điểm cho trước nào trên đồng xu cũng không trải qua một chuyển động tròn đều, mắt của bạn sẽ nhìn đồng xu về cơ bản là đang quay đều nói chung. ♣

9.25. Các điểm lùi của chương động

(a) Bởi vì cả $\dot\phi$ và $\dot\theta$ là các hàm liên tục theo thời gian, chúng ta phải có $\dot\phi = \dot\theta = 0$ tại một điểm góc. Nếu không, hoặc là $d\theta/d\phi = \dot\theta/\dot\phi$ hoặc $d\phi/d\theta = \dot\phi/\dot\theta$ sẽ được xác định tại điểm góc. Giả sử điểm góc xảy ra tại $t = t_0$. Khi đó phương trình thứ hai của (9.92) cho ta $\sin(\omega_{\mathrm{n}} t_0) = 0$.

Do đó, $\cos(\omega_n t_0) = \pm 1$, và phương trình đầu tiên của (9.92) cho ta

$$\Delta\Omega = \mp\Omega_S, \tag{9.193}$$

như mong muốn. Chú ý rằng nếu $\cos(\omega_n t_0) = 1$ thì $\Delta\Omega = -\Omega_S$, vì vậy phương trình (9.91) nói rằng điểm góc xảy ra tại giá trị nhỏ nhất của θ, nghĩa là, tại điểm cao nhất của chuyển động của con quay. Và nếu $\cos(\omega_n t_0) = -1$ thì $\Delta\Omega = \Omega_S$, vì vậy phương trình (9.91) một lần nữa nói rằng điểm góc xảy ra tại điểm cao nhất của chuyển động của con quay. Những kết quả này là phù hợp với các đồ thị $\Delta\Omega = \pm\Omega_S$ trong Hình 9.38.

(b) Để chỉ ra rằng những điểm góc này là những điểm lùi, chúng ta sẽ chỉ ra rằng độ dốc của đồ thị của θ đối với ϕ là vô hạn tại mỗi bên của điểm góc. Nghĩa là, chúng ta sẽ chỉ ra rằng $d\theta/d\phi = \dot{\theta}/\dot{\phi} = \pm\infty$. Xét trường hợp trong đó $\cos(\omega_n t_0) = 1$ và $\Delta\Omega = -\Omega_S$ (trường hợp $\cos(\omega_n t_0) = -1$ được tiến hành một cách tương tự). Với $\Delta\Omega = -\Omega_S$, phương trình (9.92) cho ta

$$\frac{\dot{\theta}}{\dot{\phi}} = \frac{\sin\theta_0 \sin\omega_n t}{1 - \cos\omega_n t}. \tag{9.194}$$

Gọi $t = t_0 + \epsilon$. Sử dụng $\cos(\omega_n t_0) = 1$ và $\sin(\omega_n t_0) = 0$, và khai triển phương trình (9.194) đến bậc nhỏ nhất của ϵ, chúng ta tìm được

$$\frac{\dot{\theta}}{\dot{\phi}} = \frac{\sin\theta_0(\omega_n\epsilon)}{\omega_n^2\epsilon^2/2} = \frac{2\sin\theta_0}{\omega_n\epsilon}. \tag{9.195}$$

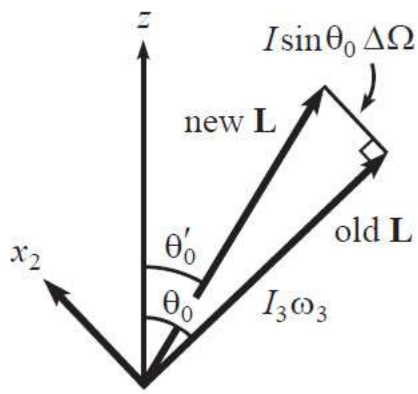
Với ϵ vô cùng nhỏ, giá trị này đổi từ $-\infty$ thành $+\infty$ khi ϵ đi qua điểm không. Điểm mấu chốt ở đây là mặc dù cả $\dot{\theta}$ và $\dot{\phi}$ đều tiến tới không, $\dot{\phi}$ tiến tới không theo dạng bậc hai, trong khi đó $\dot{\theta}$ chỉ tiến tới không theo dạng bậc nhất.

9.26. Các đường tròn chương động

(a) Trong giới hạn $\omega_3 \gg \Omega_S$, **L** ban đầu có hướng về cơ bản là dọc theo hướng của x_3 với độ lớn là $I_3\omega_3$. Vì vậy nó tạo một góc về cơ bản là bằng θ_0 với trục z thẳng đứng. Bây giờ xét một cú hích rất nhanh. Nếu $\dot{\phi}$ (mà là vận tốc góc quanh trục z thẳng đứng) bất ngờ tăng lên một giá trị $\Delta\Omega$, thì nó tương ứng với một sự tăng lên bất ngờ của vận tốc góc quanh trục x_2 một giá trị $\sin\theta_0\Delta\Omega$ (xem Hình 9.100). Cú hích do đó sinh ra một thành phần moment động lượng (đối với điểm khớp quay) có độ lớn $I\sin\theta_0\Delta\Omega$ theo chiều x_2. Vì vậy từ Hình 9.100, góc mà **L** mới tạo với trục z là (sử dụng $\Delta\Omega \ll \omega_3$)

$$\theta_0' \approx \theta_0 - \frac{I\sin\theta_0\Delta\Omega}{I_3\omega_3} = \theta_0 - \frac{\sin\theta\Delta\Omega}{\omega_n}, \tag{9.196}$$

trong đó chúng ta đã sử dụng định nghĩa của ω_n từ phương trình (9.86). Chúng ta thấy rằng ảnh hưởng của cú hích là làm cho **L** thay đổi nhanh chóng giá trị θ của nó (bởi một



Hình 9.100:

đại lượng nhỏ, do chúng ta đang giả thiết $\omega_3 \gg \Delta\Omega$). Giá trị của ϕ không thay đổi một cách tức thời, bởi vì ngay sau cú hích trục x_3 thực ra vẫn ở vị trị trước của nó, bởi vì nó không có thời gian để chuyển động.

(b) Sau khi cú hích kết thúc, $\mathbf{L}$ sẽ vẽ ra một hình nón xung quanh trục z với tốc độ xấp xỉ bằng tốc độ trước đó, là Ω_S. (Không có đại lượng liên quan nào trong $\tau = d\mathbf{L}/dt$ thay đổi nhiều từ trường hợp quay tròn tiến động ban đầu, vì vậy tần số quay tiến động về cơ bản là như cũ.) Vì vậy $\mathbf{L}$ mới có các tọa độ (ϕ, θ) của nó được cho bởi

$$(\phi(t), \theta(t))_\mathbf{L} = \left(\Omega_\mathrm{S} t, \theta_0 - \frac{\sin\theta_0 \Delta\Omega}{\omega_\mathrm{n}}\right). \tag{9.197}$$

Chúng ta đang giả sử rằng Ω_S là rất nhỏ, vì vậy nếu bạn muốn, bạn có thể bỏ qua số hạng Ω_S và chỉ coi $\mathbf{L}$ là cố định, ít nhất là trong thang thời gian của các chương động (xem nhận xét bên dưới). Nhưng số hạng này dù sao cũng sẽ bị triệt tiêu trong việc viết ra phương trình sau đây. Xét phương trình (9.91), chúng ta thấy rằng các tọa độ của điểm khối tâm đối với $\mathbf{L}$ là

$$(\phi(t), \theta(t))_{\mathrm{CM}-\mathbf{L}} = \left(\left(\frac{\Delta\Omega}{\omega_\mathrm{n}}\right)\sin\omega_\mathrm{n} t, \left(\frac{\Delta\Omega}{\omega_\mathrm{n}}\sin\theta_0\right)\cos\omega_\mathrm{n} t\right). \tag{9.198}$$

Hệ số $\sin\theta_0$ trong $\phi(t)$ chính xác là điều cần thiết đối với điểm khối tâm để vẽ ra một đường tròn quanh $\mathbf{L}$, bởi vì một sự thay đổi của ϕ tương ứng với một thay đổi không gian $\ell\Delta\phi\sin\theta_0$ của điểm khối tâm, trong khi đó một sự thay đổi của θ tương ứng với một thay đổi không gian $\ell\Delta\theta$ của điểm khối tâm.

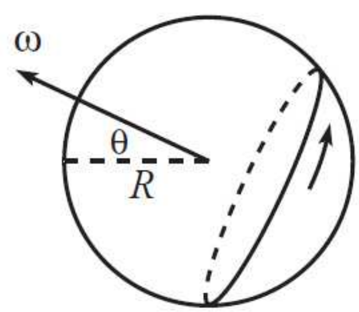
Bây giờ hãy đi xem điều này liên quan đến một con quay tự do như thế nào. Với $\omega_\mathrm{n} \gg \Omega_\mathrm{S}$, khoảng thời gian mà $\mathbf{L}$ thay đổi do moment của lực trọng trường (là $1/\Omega_\mathrm{S}$) là rất dài so với khoảng thời gian của chương động (là $1/\omega_\mathrm{n}$). Do đó, bởi vì $\mathbf{L}$ về cơ bản là đứng yên trong khoảng thời gian của $1/\omega_\mathrm{n}$, những ảnh hưởng của trọng lực là không đáng kể trong khoảng thời gian này. Do vậy, hệ sẽ cư xử giống như một con quay tự do. Vì vậy hãy đi kiểm tra rằng các kết quả ở đây thực ra là phù hợp với các kết quả từ Mục 9.6.2.

Phương trình (9.55) trong Mục 9.6.2 nói rằng tần số quay tiến động của $\hat{\mathbf{x}}_3$ quanh $\mathbf{L}$ đối với một con quay tự do là L/I. Nhưng tần số của quay tiến động của $\hat{\mathbf{x}}_3$ quanh $\mathbf{L}$ trong bài toán này là ω_n, vì vậy nó phải bằng L/I. Và thực vậy, L về cơ bản là bằng $I_3\omega_3$, vì vậy $\omega_n \equiv I_3\omega_3/I = L/I$. Do đó, trong những khoảng thời gian ngắn (đủ ngắn sao cho $\mathbf{L}$ không chuyển động nhiều), một con quay đang quay chương động với $\omega_3 \gg \Delta\Omega \gg \Omega_S$ sẽ trông rất giống một con quay tự do.

NHẬN XÉT: Chúng ta cần điều kiện $\Delta\Omega \gg \Omega_S$ sao cho chuyển động chương động nhìn đại khái là giống các đường tròn (nghĩa là, giống đồ thị trên cùng trong Hình 9.38, chứ không phải là các đồ thị khác). Yêu cầu này có thể thấy được bằng lập luận sau. Thời gian của một chu kỳ của chuyển động chương động là $2\pi/\omega_n$. Từ phương trình (9.91), $\phi(t)$ tăng một lượng $\Delta\phi = 2\pi\Omega_S/\omega_n$ trong khoảng thời gian này. Và cũng từ phương trình (9.91), đường kính d của "đường tròn" dọc theo trục ϕ đại thể là bằng $d = 2\Delta\Omega/\omega_n$. Chuyên động nhìn xấp xỉ là giống một đường tròn nếu $d \gg \Delta\phi$, nghĩa là, nếu $\Delta\Omega \gg \Omega_S$. ♣

9.27. Lăn không trượt

Có, thực ra là có những cách khác. Không nhất thiết để cho các điểm tiếp xúc tạo thanh một

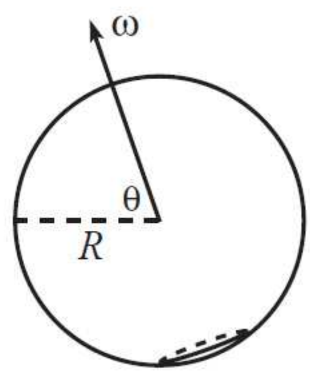


Hình 9.101:

đường tròn lớn. Chúng có thể tạo thành một vòng tròn nghiêng nhỏ hơn, như được chỉ ra trong Hình 9.101. Trong trường hợp này vector vận tốc góc có hướng chỉ về bên trái. Thực sự là không có sự trượt xảy ra ở đây, và quả bóng sẽ lăn thẳng. Bạn có thể tự thuyết phục mình về điều này theo cách sau đây. Tưởng tượng quả bóng đang lơ lửng và đang quay trong không gian với tâm của nó đứng yên. Tại mọi thời điểm, điểm tại đáy của quả bóng là đang chuyển động ra ngoài trang giấy; tập các điểm như thế này là một đường tròn nghiêng trong Hình 9.101. Gọi vận tốc của điểm đáy tức thời là v, và bây giờ tưởng tượng lấy một tờ giấy nằm ngang và trượt nó ra ngoài trang giấy với vận tốc không đổi v, ngay bên dưới quả bóng, hầu như chỉ vừa đủ chạm nó. Bởi vì đây là vận tốc bằng với vận tốc của điểm dưới cùng của quả bóng (mà là điểm tiếp xúc, bởi vì nó ở dưới đáy quả bóng), sẽ không có sự trượt giữa quả bóng và tờ giấy. Cuối cùng, nếu chúng ta chuyển tới hệ quy chiếu của tờ giấy, chúng ta sẽ có chuyển động mong muốn của quả bóng lăn mà không trượt trên một bề mặt phẳng.

Nếu θ là góc mà ω tạo với phương nằm ngang, thì bán kính của đường tròn tiếp xúc sẽ là $R\cos\theta$. Vận tốc dài của quả bóng do đó sẽ là $\omega(R\cos\theta)$. Nếu bạn muốn, bạn có thể nghĩ về giá trị này có dạng $(\omega\cos\theta)R$. Nghĩa là, chỉ có thành phần nằm ngang của ω dẫn đến chuyển động tịnh tiến của quả bóng. Thành phần thẳng đứng đơn giản mang lại một chuyển động tự quay xung quanh đường kính thẳng đứng. Nếu θ tiến đến 90^o, thì đường tròn tiếp xúc là rất nhỏ (xem Hình 9.102), vì vậy vận tốc của quả bóng là rất nhỏ (đối với ω đã cho).

Trong thực tế, diện tích tiếp xúc giữa quả bóng và bề mặt phẳng không phải là một điểm lý tưởng, vì vậy nếu đường tròn tiếp xúc không phải là một đường tròn lớn, thì sẽ không thể tránh được sự trượt tại những điểm gần điểm dưới đáy quả bóng. Đường tròn tiếp xúc càng nhỏ, thì càng dễ trượt hơn, bởi vì sự trượt nảy sinh từ chuyển động xoắn xung quanh đường kính thẳng đứng, mà đến từ thành phần thẳng đứng của ω. Nếu bạn lấy một quả bóng thực sự và lăn nó với một ω nghiêng, bạn sẽ thấy rằng chuyển động lăn đó sẽ càng ồn ào khi ω bị nghiêng nhiều hơn. Cái mà bạn nghe thấy là sự trượt do vùng tiếp xúc bị mở rộng ra. Nhưng trong một thế giới lý tưởng (hoặc có thể trong một rãnh bóng bowling, là một xấp xỉ hợp lý của nó), một ω nghiêng sẽ không gây ra tiếng động.



Hình 9.102:

9.28. Lăn thẳng?

Một cách trực giác, sẽ khá là rõ ràng là quả cầu không thể đổi hướng, nhưng sẽ phải hơi mẹo mực một chút để chứng minh điều này. Chúng ta có thể lập luận một cách định tính như sau. Giả sử rằng có một lực ma sát khác không tại điểm tiếp xúc. (Phản lực không liên quan gì ở đây, bởi vì nó không sinh ra moment lực đối với tâm quả cầu, bởi vì điểm tiếp xúc luôn luôn nằm ngay bên dưới tâm này. Đây là điều đặc biệt của quả cầu.) Khi đó quả cầu có gia tốc theo hướng của lực này. Tuy nhiên, bạn có thể chỉ ra với quy tắc bàn tay phải rằng lực này sinh ra một moment lực mà làm cho moment động lượng thay đổi theo một cách mà tương ứng với việc gia tốc quả cầu theo chiều *ngược* với hướng của lực ma sát (với giả thiết rằng quả cầu là đang lăn không trượt). Do đó đây là một điều mâu thuẫn, trừ khi lực ma sát là bằng không.

Bây giờ hãy lập luận một cách chặt chẽ hơn. Gọi vận tốc góc của quả cầu là ω, mà có thể chỉ theo hướng chéo nếu các điểm tiếp xúc không tạo thành một đường tròn lớn trên quả cầu. Điều kiện lăn không trượt nói rằng vận tốc tâm của quả cầu là

$$\mathbf{v} = \omega \times (R\hat{\mathbf{z}}). \tag{9.199}$$

Momen động lượng của quả cầu là

$$\mathbf{L} = I\omega. \tag{9.200}$$

Lực ma sát (nếu tồn tại) từ mặt đất tại điểm tiếp xúc làm thay đổi cả động lượng và moment động lượng. $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ cho ta

$$\mathbf{F} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt}. \tag{9.201}$$

Và $\tau = d\mathbf{L}/dt$ (đối với tâm quả cầu) cho ta

$$(-R\hat{\mathbf{z}}) \times \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}, \tag{9.202}$$

bởi vì lực được tác dụng tại vị trí $-R\hat{\mathbf{z}}$ đối với khối tâm. Chúng ta bây giờ sẽ chỉ ra rằng bốn phương trình trước suy ra rằng $\dot{\omega} = 0$. Từ phương trình (9.199), điều này khi đó suy ra rằng $\dot{\mathbf{v}} = 0$, như chúng ta mong muốn.

Các phương trình (9.199) và (9.201) cho ta $\mathbf{F} = m\dot{\omega} \times (R\hat{\mathbf{z}})$. Thay $\mathbf{F}$ này, cùng với $\mathbf{L}$ từ phương trình (9.200), vào trong phương trình (9.202) khi đó cho ta

$$(-R\hat{\mathbf{z}}) \times (m\dot{\omega} \times (R\hat{\mathbf{z}})) = I\dot{\omega}. \tag{9.203}$$

Vector $\dot{\omega}$ phải nằm trong mặt phẳng nằm ngang, bởi vì nó bằng tích có hướng của hai vector, một trong hai vector này là vector $\hat{\mathbf{z}}$ thẳng đứng. Điều này suy ra rằng (như bạn có thể kiểm tra) $\hat{\mathbf{z}} \times (\dot{\omega} \times \hat{\mathbf{z}}) = \dot{\omega}$. Do đó, phương trình (9.203) cho ta

$$-mR^2\dot{\omega} = \frac{2}{5}mR^2\dot{\omega}, \tag{9.204}$$

và vì vậy $\dot{\omega} = 0$, là điều mà chúng ta mong muốn chỉ ra.

9.29. Quả bóng trên tờ giấy

Cách làm của chúng ta sẽ là viết ra, và sau đó cân bằng, hai biểu thức đối với sự thay đổi moment động lượng của quả bóng, đối với tâm của nó. Biểu thức đầu tiên đến từ những ảnh hưởng của lực ma sát tác dụng lên quả bóng. Biểu thức thứ hai đến từ việc xem xét dạng tổng quát của chuyển động ban đầu và chuyển động về sau.

Để viết ra biểu thức đầu tiên đối với $\Delta\mathbf{L}$, chú ý rằng phản lực không sinh ra moment lực, vì vậy chúng ta có thể bỏ qua nó. Lực ma sát, $\mathbf{F}$, từ tờ giấy làm thay đổi cả $\mathbf{p}$ và $\mathbf{L}$ bởi

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{p} &= \int \mathbf{F}dt \\ \Delta\mathbf{L} &= \int \tau dt = \int (-R\hat{\mathbf{z}}) \times \mathbf{F}dt = (-R\hat{\mathbf{z}}) \times \int \mathbf{F}dt. \end{aligned} \tag{9.205}$$

Cả hai tích phân này đều được lấy trên toàn bộ thời gian trượt trên tờ giấy, mà có thể bao gồm cả thời gian trên mặt bàn sau khi quả bóng rời tờ giấy. Trong hàng thứ hai ở trên, chúng ta đã sử dụng thực tế rằng lực ma sát luôn luôn tác dụng tại cùng một vị trí, là $(-R\hat{\mathbf{z}})$, đối với tâm của quả bóng. Hai phương trình trên cho ta

$$\Delta\mathbf{L} = (-R\hat{\mathbf{z}}) \times \Delta\mathbf{p}. \tag{9.206}$$

Để viết ra biểu thức thứ hai đối với $\Delta\mathbf{L}$, hãy kiểm tra $\mathbf{L}_\perp$ (thành phần nằm ngang của $\mathbf{L}$)[32] liên quan như thế nào tới $\mathbf{p}$ khi quả bóng đang lăn không trượt, mà là điều xảy ra cả trước và sau khi quả bóng chuyển động trên tờ giấy. Khi quả bóng không trượt, chúng ta có tình huống được chỉ ra trong Hình 9.103 (với giả thiết rằng quả bóng là đang lăn về bên phải). Các độ lớn của $\mathbf{p}$ và $\mathbf{L}_\perp$ được cho bởi

$$\begin{aligned} p &= mv, \\ L_\perp &= I\omega_\perp = \frac{2}{5}mR^2\omega_\perp = \frac{2}{5}Rm(R\omega_\perp) = \frac{2}{5}Rmv = \frac{2}{5}Rp, \end{aligned} \tag{9.207}$$

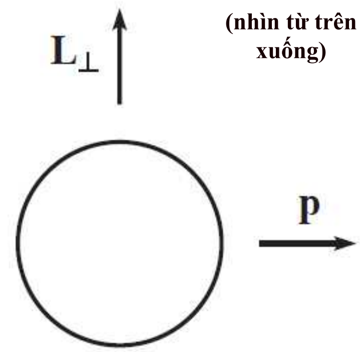
trong đó chúng ta đã sử dụng điều kiện lăn không trượt, $v = R\omega_\perp$. (Giá trị thực $I = (2/5)mR^2$ đối với một quả cầu đặc không quan trọng đối với kết quả cuối cùng.) Chúng ta bây giờ có thể kết hợp các hướng của $\mathbf{L}_\perp$ và $\mathbf{p}$ trong Hình 9.103 với mối liên hệ vô hướng $L_\perp = (2/5)Rp$ ở trên để viết

$$\mathbf{L}_\perp = \frac{2}{5}R\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{p}, \tag{9.208}$$

với $\hat{\mathbf{z}}$ trong đó $\hat{\mathbf{z}}$ có hướng chỉ ra ngoài trang giấy. Bởi vì mối liên hệ này là đúng đối với cả trường hợp ban đầu và về sau, nó cũng phải đúng đối với các hiệu của $\mathbf{L}_\perp$ và $\mathbf{p}$. Nghĩa là,

$$\Delta\mathbf{L}_\perp = \frac{2}{5}R\hat{\mathbf{z}} \times \Delta\mathbf{p}. \tag{9.209}$$

[32]Thành phần thẳng đứng của $\mathbf{L}$ (mà khác không chỉ khi ω có thành phần theo phương thẳng đứng, mà là trường hợp nếu các điểm tiếp xúc không tạo thành một đường tròn lớn trên quả bóng) là hằng số, bởi vì moment lực từ lực ma sát chỉ sinh ra một moment lực nằm ngang. Chúng ta do đó có thể bỏ qua nó, bởi vì chúng ta chỉ quan tâm đến $\Delta\mathbf{L}$.



Hình 9.103:

Nhưng $\Delta\mathbf{L}_\perp = \Delta\mathbf{L}$ bởi vì thành phần thẳng đứng của $\mathbf{L}$ không thay đổi, vì vậy các phương trình (9.206) và (9.209) cho ta

$$(-R\hat{\mathbf{z}}) \times \Delta\mathbf{p} = \frac{2}{5}R\hat{\mathbf{z}} \times \Delta\mathbf{p} \Longrightarrow 0 = \hat{\mathbf{z}} \times \Delta\mathbf{p}. \tag{9.210}$$

Có ba cách để tích có hướng này bằng không:

- $\Delta\mathbf{p}$ là song song với $\hat{\mathbf{z}}$. Nhưng điều này không xảy ra, bởi vì $\Delta\mathbf{p}$ nằm trong mặt phẳng nằm ngang.
- $\hat{\mathbf{z}} = 0$. Không đúng.
- $\Delta\mathbf{p} = 0$. Đây là khả năng duy nhất, vì vậy nó phải đúng. Do đó, $\Delta\mathbf{v} = 0$, là điều mà chúng ta đã muốn chỉ ra.

Chú ý rằng đường thẳng chuyển động về cuối có thể bị dịch chuyển sang bên cạnh so với đường thẳng chuyển động ban đầu. Nhưng cái mà chúng ta đã chỉ ra là đường thẳng cuối là song song với đường thẳng chuyển động ban đầu, và vận tốc là không đổi.

NHẬN XÉT:

1. Như đã được phát biểu trong bài toán, sẽ không vấn đề gì nếu bạn di chuyển tờ giấy bằng cách giật mạnh nó, sao cho quả bóng trượt trên nó. Chúng ta không giả thiết gì về bản chất của lực ma sát trong lập luận phía trên. Và chúng ta đã sử dụng điều kiện lăn không trượt chỉ tại các thời điểm chuyển động ban đầu và về sau. Phần chuyển động ở giữa là bất kỳ.
2. Như là một trường hợp đặc biệt, nếu bạn bắt đầu với một quả bóng nằm yên trên một mảnh giấy, thì dù bạn chọn cách nào đi chăng nữa để kéo tờ giấy (theo phương ngang) ra khỏi bên dưới quả bóng, thì quả bóng cuối cùng vẫn đứng yên. Vị trí sau đó của quả bóng hầu như chắc chắn là sẽ khác với vị trí ban đầu của nó, nhưng quả bóng sẽ đứng yên không phụ thuộc vào vị trí về sau của nó.

3. Bạn được khuyến khích để kiểm tra những tuyên bố điên rồ này là sự thật bằng cách làm thực nghiệm. Hãy chắc chắn rằng tờ giấy không bị nhăn, bởi vì một tờ giấy bị nhăn sẽ cho phép một lực tác dụng lên một điểm khác điểm tiếp xúc. Và một quả bóng tất nhiên càng cứng càng tốt, bởi vì vùng tiếp xúc sẽ giống như là một điểm hơn. ♣

9.30. Quả bóng trên một bề mặt có thể quay được

Gọi vận tốc góc của bề mặt quay là $\Omega\hat{\mathbf{z}}$, và gọi vận tốc góc của quả bóng (đối với hệ quy chiếu trái đất) là ω, mà có thể chỉ theo hướng chéo nếu các điểm tiếp xúc không tạo thành một đường tròn lớn trên quả bóng. Nếu quả bóng ở tại vị trí $\mathbf{r}$ (đối với hệ quy chiếu trái đất), thì vận tốc điểm khối tâm của nó (đối với hệ quy chiếu trái đất) có thể được phân tách thành vận tốc của mặt xoay (tại vị trí $\mathbf{r}$) cộng với vận tốc của quả bóng đối với mặt xoay. Điều kiện lăn không trượt nói rằng vận tốc sau là $\omega \times (a\hat{\mathbf{z}})$, trong đó a là bán kính của quả bóng.[33] Vận tốc của quả bóng đối với hệ quy chiếu trái đất do đó là

$$\mathbf{v} = (\Omega\hat{\mathbf{z}}) \times \mathbf{r} + \omega \times (a\hat{\mathbf{z}}). \tag{9.211}$$

Một điểm quan trọng là việc nhận ra trong bài toán này lực ma sát từ mặt xoay là nguyên nhân làm thay đổi cả động lượng và moment động lượng của quả bóng. Nói riêng, $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ cho ta

$$\mathbf{F} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt}. \tag{9.212}$$

Và moment động lượng của quả bóng là $\mathbf{L} = I\omega$, vì vậy $\tau = d\mathbf{L}/dt$ (đối với tâm của quả bóng) cho ta

$$(-a\hat{\mathbf{z}}) \times \mathbf{F} = I\frac{d\omega}{dt}, \tag{9.213}$$

bởi vì lực tác dụng tại vị trí $-a\hat{\mathbf{z}}$ đối với tâm của quả bóng.

Chúng ta bây giờ sử dụng ba phương trình ở trên để minh họa rằng quả bóng sẽ trải qua chuyển động tròn. Mục tiêu của chúng ta sẽ là viết ra một phương trình có dạng,

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \Omega'\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{v}, \tag{9.214}$$

bởi vì phương trình này miêu tả chuyển động tròn với tần số Ω' (sẽ được xác định sau).[34] Chúng ta sẽ triệt tiêu $\mathbf{F}$ đầu tiên, rồi sau đó là ω. Thay biểu thức của $\mathbf{F}$ từ phương trình (9.212) vào

[33] Vận tốc đối với mặt xoay thực ra là $\omega_t \times (a\hat{\mathbf{z}})$, trong đó ω_t là vận tốc góc trong hệ tọa độ mặt xoay. Nhưng ω_t đơn giản là khác so với ω một lượng là vận tốc góc của mặt xoay, mà nó bằng $\Omega\hat{\mathbf{z}}$. Điều này suy ra rằng $\omega_t \times (a\hat{\mathbf{z}}) = \omega \times (a\hat{\mathbf{z}})$

[34] Phương trình (9.214) miêu tả chuyển động tròn bởi vì nó suy ra rằng vận tốc $\mathbf{v}$ có độ lớn không đổi (bởi vì sự thay đổi của $\mathbf{v}$ là vuông góc với $\mathbf{v}$), và do vậy hướng của $\mathbf{v}$ thay đổi với tốc độ góc hằng số Ω'. Đường cong duy nhất với những tính chất này là một đường tròn. Nếu bạn muốn minh họa bằng toán học nhiều hơn, bạn có thể tích phân phương trình (9.214) để nhận được $\mathbf{v} = \Omega'\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{r} + \mathbf{C}$, mà có thể được

trong phương trình (9.213) cho ta

$$(-a\hat{\mathbf{z}}) \times \left(m\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right) = I\frac{d\omega}{dt} \Longrightarrow \frac{d\omega}{dt} = -\left(\frac{am}{I}\right)\hat{\mathbf{z}} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \tag{9.215}$$

Lấy đạo hàm phương trình (9.211) ta có

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \Omega\hat{\mathbf{z}} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{d\omega}{dt} \times (a\hat{\mathbf{z}}). \\ &= \Omega\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{v} - \left(\left(\frac{am}{I}\right)\hat{\mathbf{z}} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt}\right) \times (a\hat{\mathbf{z}}). \end{aligned} \tag{9.216}$$

Bởi vì chúng ta biết rằng vector $d\mathbf{v}/dt$ nằm trong mặt phẳng nằm ngang, nên sẽ dễ dàng tính tích có hướng trong số hạng thứ hai ở đây (hoặc chỉ sử dụng đồng nhất thức $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})\mathbf{A})$) để nhận được

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \Omega\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{v} - \left(\frac{ma^2}{I}\right)\frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \left(\frac{\Omega}{1 + (ma^2/I)}\right)\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{v}. \tag{9.217}$$

Với một hình cầu đồng nhất, $I = (2/5)ma^2$, vì vậy chúng ta nhận được

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \left(\frac{2}{7}\Omega\right)\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{v}. \tag{9.218}$$

Do đó, theo phương trình (9.214), chúng ta thấy rằng quả bóng trải qua chuyển động tròn, với một tần số bằng 2/7 lần tần số của mặt xoay. Chú ý rằng kết quả này đối với tần số không phụ thuộc vào các điều kiện đầu. Để biết thêm một sự mở rộng bài toán này, hãy xem Weltner (1987) và các phần tham khảo trong đó.

NHẬN XÉT:

1. Việc lấy tích phân phương trình (9.218) từ thời điểm ban đầu tới một thời điểm nào đó về sau cho ta

$$\mathbf{v} - \mathbf{v}_0 = \left(\frac{2}{7}\Omega\right)\hat{\mathbf{z}} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \tag{9.219}$$

Phương trình này có thể được viết (như bạn có thể kiểm tra) dưới dạng nhiều thông tin hơn,

$$\mathbf{v} = \left(\frac{2}{7}\Omega\right)\hat{\mathbf{z}} \times \left(\mathbf{r} - \left(\mathbf{r}_0 + \frac{7}{2\Omega}(\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{v}_0)\right)\right). \tag{9.220}$$

Phương trình này miêu tả chuyển động tròn, với tâm được đặt tại điểm,

$$\mathbf{r}_c = \mathbf{r}_0 + \frac{7}{2\Omega}(\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{v}_0), \tag{9.221}$$

và với bán kính,

$$R = |\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_c| = \frac{7}{2\Omega}|\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{v}_0| = \frac{7v_0}{2\Omega}. \tag{9.222}$$

---

viết dưới dạng $d\mathbf{r}/dt = \Omega'\hat{\mathbf{z}} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_c)$, mà suy ra rằng $d(\mathbf{r} - \mathbf{r}_c)/dt = \Omega'\hat{\mathbf{z}} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_c)$, mà có nghĩa là độ dài của $\mathbf{r} - \mathbf{r}_c$ không đổi (bởi vì sự thay đổi của nó là vuông góc với chính nó). Và bởi vì những sự thay đổi cũng bị ràng buộc là vuông góc với $\hat{\mathbf{z}}$, chúng ta phải có một đường tròn nằm ngang.

2. Có một vài trường hợp đặc biệt cần xem xét:

   - Nếu $v_0 = 0$ (nghĩa là, nếu chuyển động tự quay của quả bóng chính xác cân bằng với chuyển động quay tròn của mặt xoay, sao cho điểm khối tâm của quả bóng là đứng yên trong hệ quy chiếu trái đất), thì $R = 0$ và quả bóng sẽ vẫn ở vị trí như cũ, như nó phải như vậy.
   - Nếu quả bóng ban đầu không quay, và chỉ chuyển động cùng với bàn xoay, thì $v_0 = \Omega r_0$. Bán kính của đường tròn do đó là $R = (7/2)r_0$, và tâm của nó có vị trị tại, từ phương trình (9.221),

$$\mathbf{r}_c = \mathbf{r}_0 + \frac{7}{2\Omega}(-\Omega\mathbf{r}_0) = -\frac{5\mathbf{r}_0}{2}. \tag{9.223}$$

     Điểm nằm trên đường tròn đối xứng với vị trí ban đầu theo phương đường kính do đó nằm cách một khoảng $r_c + R = (5/2)r_0 + (7/2)r_0 = 6r_0$ so với tâm của mặt xoay.
   - Nếu chúng ta muốn tâm của đường tròn là tâm của bàn xoay, thì phương trình (9.221) nói rằng chúng ta cần $(7/2\Omega)\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{v}_0 = \mathbf{r}_0$. Điều này suy ra rằng $\mathbf{v}_0$ có độ lớn $v_0 = (2/7)\Omega r_0$ và có hướng theo phương tiếp tuyến cùng với hướng chuyển động của bàn xoay. Nghĩa là, quả bóng chuyển động với vận tốc bằng 2/7 lần vận tốc của điểm nằm trên mặt xoay ngay bên dưới quả bóng.

3. Thực tế tần số $(2/7)\Omega$ là một bội số hữu tỷ của Ω có nghĩa là quả bóng cuối cùng sẽ quay trở lại cùng một vị trí trên mặt xoay. Trong hệ quy chiếu trái đất, quả bóng vẽ ra hai đường tròn trong khoảng thời gian mặt xoay quay được bảy vòng. Từ quan sát của một người trên mặt xoay, quả bóng "chuyển động xoắn ốc" vòng quanh năm lần trước khi quay lại vị trí ban đầu.

4. Nếu chúng ta xem xét một quả bóng với moment quán tính $I = \beta ma^2$ (vì vậy một hình cầu đồng chất có $\beta = 2/5$), thì phương trình (9.217) chỉ ra rằng hệ số "2/7" trong phương trình (9.218) sẽ được thay thế bởi "$\beta/(1+\beta)$". Nếu một quả bóng có hầu hết khối lượng của nó tập trung tại tâm của nó (sao cho $\beta \to 0$), thì tần số của chuyển động tròn sẽ tiến về 0, và bán kính tiến ra ∞ (miễn là $v_0 \neq 0$). ♣

Chương 10

Hệ quy chiếu không quán tính

Định luật Newton chỉ đúng trong hệ quy chiếu quán tính. Tuy nhiên, có rất nhiều hệ quy chiếu không quán tính (tức là hệ quy chiếu có gia tốc) mà ta cần phải xem xét, ví dụ như thang máy, các khớp quay tròn, ... Liệu có thể có cách nào đó thay đổi định luật Newton sao cho nó vẫn đúng trong hệ quy chiếu không quán tính, hay là chúng ta phải từ bỏ toàn bộ công thức $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$? Thực tế chúng ta có thể vẫn giữ nguyên công thức $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ bằng cách đưa ra khái niệm về lực ảo. Đây là những lực mà một người trên hệ quy chiếu không quán tính nghĩ là chúng tồn tại. Nếu người đó áp dụng công thức $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ và tính đến các lực mới này thì sẽ thu được câu trả lời đúng đối với gia tốc $\mathbf{a}$ khi đo đối với hệ quy chiếu của người đó.

Để tính toán định lượng về tất cả vấn đề này, chúng ta phải bỏ ra một chút thời gian tìm hiểu về các tọa độ (và đạo hàm của chúng) trong một hệ quy chiếu không quán tính liên kết với một hệ quy chiếu quán tính. Nhưng trước khi đi vào vấn đề đó, ta xem xét một ví dụ đơn giản để minh họa những ý tưởng cơ bản về lực ảo.

Ví dụ (Người trên một con tàu): Tưởng tượng rằng bạn đang đứng trên một con tàu đang tăng tốc sang phải với gia tốc a. Nếu bạn giữ nguyên tại một vị trí trên tàu thì phải có một lực ma sát giữa sàn tàu và chân của bạn với độ lớn $F_f = ma$ hướng về bên phải. Một người nào đó đứng trong hệ quy chiếu quán tính của mặt đất giải thích đơn giản tình huống này như sau: "Lực ma sát F_f bằng ma là nguyên nhân gây ra gia tốc a của bạn."

Bạn giải thích tình huống này như thế nào trong hệ quy chiếu của con tàu? Giả sử rằng không có bất cứ cửa sổ nào, do đó tất cả những gì bạn nhìn thấy chỉ là ở bên trong con tàu. Như chúng ta sẽ chỉ ra trong phương trình (10.11) dưới đây, ta sẽ nhận thấy một lực ảo tịnh tiến, $F_{trans} = -ma$, hướng về bên trái. Do đó bạn có thể giải thích tình huống này như sau: "Trong hệ quy chiếu của tôi (hệ quy chiếu gắn với con tàu), lực ma sát $F_f = ma$ hướng về bên phải tôi sẽ loại bỏ hoàn toàn lực bí ẩn $F_{trans} = -ma$ hướng về bên trái của tôi, kết quả là gia tốc bằng không trong hệ quy chiếu của tôi."

Tất nhiên, nếu như sàn tàu là không ma sát do đó sẽ không có lực tại chân của bạn thì bạn sẽ nói rằng lực tĩnh tác dụng lên bạn là $F_{trans} = ma$, hướng về bên trái. Do đó bạn sẽ tăng tốc với gia tốc a về bên trái đối với hệ quy chiếu của bạn (con tàu). Nói một cách khác, bạn sẽ đứng yên (hoặc di chuyển với vận tốc không đổi nếu như tại thời điểm đầu bạn đã di chuyển) đối với hệ quy chiếu quán tính của mặt đất, điều này là khá hiển nhiên đối với một người nào đó đứng trên mặt đất.

Trong trường hợp lực ma sát tại chân của bạn là khác không, nhưng không đủ lớn để cân bằng với toàn bộ lực $F_{trans} = -ma$ bạn sẽ bị tăng tốc hướng về phía sau của con tàu (trong hệ quy chiếu của tàu) với gia tốc nhỏ hơn gia tốc a. Sự di chuyển không mong muốn này sẽ tiếp tục cho đến khi bạn điều chỉnh chân hoặc tay của bạn để cân bằng với tất cả các lực F_{trans}.

Bây giờ chúng ta sẽ thành lập công thức lực ảo trong trường hợp tổng quát nhất. Nhiệm vụ chính ở đây là thiết lập mối liên hệ của các tọa độ trong một hệ quy chiếu không quán tính với các tọa độ trong hệ quy chiếu quán tính, do đó yêu cầu một số biến đổi về mặt toán học.

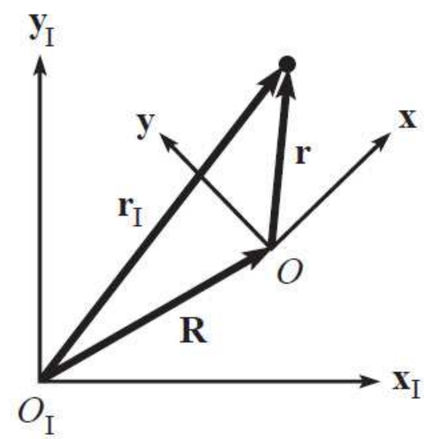
10.1 Mối liên hệ của các tọa độ

Xét một hệ tọa độ quán tính với các trục $\hat{\mathbf{x}}_I, \hat{\mathbf{y}}_I, \hat{\mathbf{z}}_I$ và một hệ tọa độ khác (có thể có gia tốc) với các trục $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$. Các trục thứ hai này được phép di chuyển một cách tùy ý đối với hệ quán tính. Có nghĩa là, gốc có thể chịu gia tốc và các trục có thể quay (đây là trường hợp chuyển động tổng quát nhất có thể như chúng ta đã biết trong Mục 9.1. Các trục này có thể được xem xét như là các hàm của các trục quán tính.

Giả sử O_I và O là các gốc của hai hệ tọa độ trên, vectơ từ O_I đến O là $\mathbf{R}$, vectơ từ O_I đến phần tử cho trước là $\mathbf{r}_I$ và vectơ từ O đến điểm đó là $\mathbf{r}$. Hình 10.1 biểu diễn trong trường hợp hai chiều. Ta có

$$\mathbf{r}_I = \mathbf{R} + \mathbf{r} \tag{10.1}$$

Các vectơ này tồn tại độc lập với bất kỳ hệ tọa độ cụ thể nào, nhưng đối với các tọa độ



Hình 10.1:

đã định nghĩa chúng ta có thể viết

$$
\begin{aligned}
\mathbf{R} &= X\hat{\mathbf{x}}_I + Y\hat{\mathbf{y}}_I + Z\hat{\mathbf{z}}_I, \\
\mathbf{r}_I &= x_I\hat{\mathbf{x}}_I + y_I\hat{\mathbf{y}}_I + z_I\hat{\mathbf{z}}_I, \\
\mathbf{r} &= x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}
\end{aligned} \tag{10.2}
$$

Để đơn giản và rõ ràng, ta sẽ chọn viết $\mathbf{R}$ và $\mathbf{r}_1$ dưới dạng các tọa độ của hệ quy chiếu quán tính, và $\mathbf{r}$ dưới dạng các tọa độ của hệ quy chiếu không quán tính. Nếu muốn, phương trình (10.1) có thể viết lại như sau

$$x_I\hat{\mathbf{x}}_I + y_I\hat{\mathbf{y}}_I + z_I\hat{\mathbf{z}}_I = (X\hat{\mathbf{x}}_I + Y\hat{\mathbf{y}}_I + Z\hat{\mathbf{z}}_I) + (x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}) \tag{10.3}$$

Mục đích của chúng ta là lấy đạo hàm cấp hai theo thời gian của phương trình (10.1) và sau đó biểu diễn kết quả dưới dạng $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Đạo hàm cấp hai của $\mathbf{r}_I$ là gia tốc của phần tử đang xét đối với hệ quán tính, do đó theo định luật II Newton ta có $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}_I$. Đạo hàm cấp hai của $\mathbf{R}$ là gia tốc của gốc tọa độ hệ chuyển động. Đạo hàm cấp hai của $\mathbf{r}$ là phần phức tạp hơn. Bởi vì dạng của nó trong phương trình (10.2), sự thay đổi của $\mathbf{r}$ có thể diễn ra bởi hai yếu tố. Đầu tiên, các tọa độ (x, y, z) của $\mathbf{r}$ đo đối với các trục chuyển động có thể thay đổi. Và thứ hai, các trục $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$ tự nó cũng có thể thay đổi. Điểm xác định bởi vectơ $\mathbf{r}$ đó không phải chỉ đơn thuần là bộ ba tọa độ sắp thứ tự (x, y, z). Nó phải là toàn bộ công thức $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$. Do đó kể cả khi (x, y, z) là cố định, có nghĩa rằng $\mathbf{r}$ không thay đổi đối với hệ chuyển động, $\mathbf{r}$ vẫn có thể thay đổi đối với hệ quán tính nếu như các trục $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$ chuyển động. Chúng ta sẽ tính toán chính xác về vấn đề này.

Tính toán $d^2\mathbf{r}/dt^2$

Chúng ta sẽ mô tả cụ thể mục đích của chúng ta ở đây. Ta muốn thu được $d^2\mathbf{r}/dt^2$ dưới dạng các tọa độ của hệ quy chiếu *không quán tính* bởi vì chúng ta muốn có thể tính toán toàn bộ dưới dạng các tọa độ này sao cho một người trong hệ quy chiếu không quán tính có thể viết phương trình $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ chỉ bằng các tọa độ của người đó mà không cần xem xét đến hệ quy chiếu quán tính ở bên dưới. Đối với hệ quy chiếu *quán tính*, $d^2\mathbf{r}/dt^2$ chỉ đơn giản là $d^2(\mathbf{r}_I - \mathbf{R})/dt^2$, nhưng điều này không cung cấp thêm cho chúng ta điều gì.

Việc lấy đạo hàm sau đây thực hiện đối với trường hợp vectơ tổng quát $\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} + A_z\hat{\mathbf{z}}$ trong hệ quy chiếu chuyển động chứ không cần thiết chỉ là vectơ chỉ vị trí. Do đó ta sẽ làm việc với vectơ $\mathbf{A}$ tổng quát và đồng nhất $\mathbf{A} = \mathbf{r}$ khi thu được kết quả. Để lấy đạo hàm d/dt của $\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} + A_z\hat{\mathbf{z}}$ chúng ta sử dụng quy tắc lấy đạo hàm của hàm tích và thu được

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \left(\frac{dA_x}{dt}\hat{\mathbf{x}} + \frac{dA_y}{dt}\hat{\mathbf{y}} + \frac{dA_z}{dt}\hat{\mathbf{z}}\right) + \left(A_x\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} + A_y\frac{d\hat{\mathbf{y}}}{dt} + A_z\frac{d\hat{\mathbf{z}}}{dt}\right). \tag{10.4}$$

Tất nhiên, quy tắc lấy đạo hàm của hàm tích cũng có thể áp dụng được với các vectơ. Chúng ta chỉ đơn giản là khai triển $(A_x + dA_x)(\hat{\mathbf{x}} + d\hat{\mathbf{x}}) - A_x\hat{\mathbf{x}}$ tới bậc xấp xỉ thứ nhất. Chú ý rằng mặc dù chúng ta đã biểu diễn vectơ $\mathbf{A}$ dưới dạng các vectơ tọa độ của hệ quy chiếu chuyển động nhưng đạo hàm toàn phần $d\mathbf{A}/dt$ phải được tính đối với hệ quán tính. Như đã đề cập ở trên, đạo hàm toàn phần của $\mathbf{A}$ đến từ hai yếu tố, cụ thể là hai nhóm đại lượng trong phương trình (10.4). Nhóm đầu tiên là sự thay đổi của $\mathbf{A}$ đối với hệ quy chiếu chuyển động. Chúng ta sẽ ký hiệu đại lượng này là $\delta\mathbf{A}/\delta t$.

Nhóm thứ hai xuất hiện là do các trục tọa độ chuyển động. Chúng chuyển động như thế nào? Chúng ta đã tách ra phần chuyển động của gốc hệ không quán tính bằng cách đưa vào vectơ $\mathbf{R}$, do đó phần còn lại là một sự quay quanh trục $\boldsymbol{\omega}$ nào đó qua gốc này (xem định lý 9.1). Trục $\boldsymbol{\omega}$ có thể thay đổi theo thời gian nhưng tại bất kỳ thời điểm tức thời nào chỉ có duy nhất một trục quay của hệ. Thực tế rằng trục thay đổi liên quan trong việc tìm đạo hàm cấp hai của $\mathbf{r}$ chứ không phải là đạo hàm cấp một.

Chúng ta thấy trong định lý 9.2 rằng một vectơ $\mathbf{B}$ có chiều dài cố định (các vectơ đơn vị của các tọa độ ở đây quả thực là có chiều dài cố định) và quay với vận tốc góc $\boldsymbol{\omega} \equiv \omega\hat{\boldsymbol{\omega}}$ sẽ thay đổi với tốc độ $d\mathbf{B}/dt = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{B}$. Cụ thể, $d\hat{\mathbf{x}}/dt = \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{x}}, \ldots$. Do đó trong phương trình (10.4), đại lượng $A_x(d\hat{\mathbf{x}}/dt)$ bằng với $A_x(\boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{x}}) = \boldsymbol{\omega} \times (A_x\hat{\mathbf{x}})$. Tương tự cho các đại lượng y và z. Kết hợp chúng lại dẫn đến $\boldsymbol{\omega} \times (A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} + A_z\hat{\mathbf{z}})$, đây chính là $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}$. Do đó, phương trình (10.4) trở thành

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\delta \mathbf{A}}{\delta t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A} \tag{10.5}$$

Điều này phù hợp với kết quả thu được trong phương trình (9.41) của Mục 9.5. Chúng ta sẽ đưa ra chứng minh tương tự ở đây nhưng ít chặt chẽ về mặt toán học hơn.

Ta tiếp tục lấy đạo hàm lần nữa. Sử dụng quy tắc lấy đạo hàm của hàm tích, đạo hàm theo thời gian của phương trình (10.5) sẽ là

$$\frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta \mathbf{A}}{\delta t}\right) + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{A} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{A}}{dt} \tag{10.6}$$

Áp dụng phương trình (10.5) đối với đại lượng đầu tiên bên vế phải (với $\delta\mathbf{A}/\delta t$ thay vì $\mathbf{A}$), và thay phương trình (10.5) vào đại lượng thứ ba sẽ dẫn đến

$$\begin{aligned} \frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2} &= \left(\frac{\delta^2\mathbf{A}}{\delta t^2} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{\delta \mathbf{A}}{\delta t}\right) + \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{A}\right) + \boldsymbol{\omega} \times \left(\frac{\delta \mathbf{A}}{\delta t} + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A})\right) \\ &= \frac{\delta^2\mathbf{A}}{\delta t^2} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{\delta \mathbf{A}}{\delta t} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{A} \end{aligned} \tag{10.7}$$

Đến lúc này chúng ta sẽ đặt $\mathbf{A} = \mathbf{r}$, điều này đưa đến

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{a} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} \tag{10.8}$$

ở đó $\mathbf{r}, \mathbf{v} \equiv \delta\mathbf{r}/\delta t$ và $\mathbf{a} \equiv \delta^2\mathbf{r}/\delta t^2$ là vị trí, vận tốc và gia tốc của phần tử đối với hệ quy chiếu không quán tính. Nói một cách khác, nếu hệ quy chiếu không quán tính bị bao quanh trong một cái hộp kín, và nếu có một người bên trong cái hộp đó vẽ hệ tọa độ kẻ ô trên sàn thì người đó có thể đo được $\mathbf{r}, \mathbf{v}$ và $\mathbf{a}$ mà không cần quan tâm đến những gì diễn ra trong thế giới bên ngoài (giả sử rằng người đó có thể tùy ý sử dụng một chiếc đồng hồ).

Bạn có thể băn khoăn rằng $\mathbf{r}, \mathbf{v}$ và $\mathbf{a}$ bên vế phải của phương trình (10.8) được xác định bởi người nào đó trong hệ quy chiếu quay tròn trong khi $d^2\mathbf{r}/dt^2$ bên vế phải đo bởi người trong hệ quy chiếu quán tính. Nhưng sự khác nhau hiển nhiên này là vấn đề không cần phải tranh cãi bởi vì phương trình (10.8) là một sự trình bày về các vectơ, và các vectơ này tồn tại độc lập đối với các hệ tọa độ dùng để mô tả chúng. Ví dụ một vectơ $\mathbf{a}$ với chiều xác định (chẳng hạn hướng về sao Thiên Lang) và độ lớn cho trước là độc lập với bất cứ sự lựa chọn các tọa độ nào để mô tả nó.

10.2 Các lực ảo

Từ phương trình (10.1) ta có

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2\mathbf{r}_I}{dt^2} - \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} \tag{10.9}$$

Chúng ta có thể đồng nhất phương trình này với biểu thức của $d^2\mathbf{r}/dt^2$ trong phương trình (10.8), và sau đó nhân với khối lượng m của phần tử. Chú ý rằng $m(d^2\mathbf{r}_I/dt^2)$ là lực $\mathbf{F}$ tác dụng lên phần tử ($\mathbf{F}$ có thể là trọng lực, phản lực, lực ma sát, sức căng, ...), ta có thể giải đối với $m\mathbf{a}$ để thu được

$$\begin{aligned} m\mathbf{a} &= \mathbf{F} - m\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} - m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) - 2m\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v} - m\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\mathbf{r} \\ &\equiv \mathbf{F} + \mathbf{F}_{translation} + \mathbf{F}_{centrifugal} + \mathbf{F}_{Coriolis} + \mathbf{F}_{azimuthal} \end{aligned} \tag{10.10}$$

ở đó các lực ảo được định nghĩa như sau

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{trans} &\equiv -m\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}, \\ \mathbf{F}_{cent} &\equiv -m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}), \\ \mathbf{F}_{cor} &\equiv -2m\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}, \\ \mathbf{F}_{az} &\equiv -m\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\mathbf{r} \end{aligned} \tag{10.11}$$

Chúng ta mạn phép gọi những đại lượng này là lực bởi vì vế trái của phương trình (10.10) là $m\mathbf{a}$, ở đó $\mathbf{a}$ được xác định bởi người nào đó trong hệ quy chiếu không quán tính. Người này do đó sẽ có khả năng giải thích vế phải như là lực ảnh hưởng nào đó. Nói cách khác, nếu một người trong hệ quy chiếu không quán tính muốn xác định $m\mathbf{a}$ thì người đó đơn giản chỉ cần lấy lực thực sự $\mathbf{F}$, và sau đó thêm vào tất cả các đại lượng khác bên vế phải của phương trình (10.10), cái mà người đó sau đó sẽ giải thích khá hợp lý như là các lực (trong hệ quy chiếu của người ấy). Người đó sẽ xem xét phương trình (10.10) như là một phát biểu $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ dưới dạng

$$m\mathbf{a} = \sum \mathbf{F}_{acc} \tag{10.12}$$

ở đó $\mathbf{F}_{acc}$ đại diện tất cả các lực thực và ảo trong hệ quy chiếu không quán tính. Thực ra tất cả những gì chúng ta đã làm là chuyển một vài số hạng sang vế bên kia của một phương trình và giải thích lại kết quả. Ba số hạng cuối bên vế phải của phương trình (10.8) chỉ đơn giản là các phần khác nhau của gia tốc. Nhưng nếu ta chuyển chúng sang vế trái và giải đối với $\mathbf{a}$, chúng ta có thể giải thích chúng (sau khi nhân vào m) như là các lực trong phương trình (10.10).

Tất nhiên, các số hạng thêm trong phương trình (10.10) không phải là các lực thực sự. Chỉ có các thành phần của $\mathbf{F}$ là các lực thực sự trong bài toán (và chúng là các lực thực sự trong bất kỳ hệ quy chiếu nào). Tất cả những điều chúng ta muốn nói ở đây đó là nếu một người bạn của chúng ta trong hệ quy chiếu chuyển động giả sử rằng các số hạng thêm nói trên là các lực thực, và nếu cô ta bổ sung thêm chúng vào với $\mathbf{F}$ thì cô ấy sẽ thu được câu trả lời đúng cho $m\mathbf{a}$ khi tính toán trong hệ quy chiếu của cô ta.

Ví dụ xét một cái hộp (cách xa các vật khác, nằm bên ngoài không gian chẳng hạn) tăng tốc với gia tốc $g = 10m/s^2$ theo một chiều nào đó. Một người trong hộp cảm thấy một lực ảo $\mathbf{F}_{trans} = mg$ hướng xuống sàn. Tất cả những gì cô ấy biết là cô ấy đang ở trong một cái hộp trên bề mặt của trái đất. Nếu cô ấy tiến hành các thí nghiệm khác nhau dưới giả thiết này, các kết quả thu được sẽ luôn luôn như cô ấy chờ đợi. Thực tế đáng ngạc nhiên là không có thí nghiệm cục bộ nào có thể phân biệt giữa lực ảo trong hộp gia tốc và lực trọng trường thực trên bề mặt trái đất, đây là điều dẫn Einstein tới "Nguyên lý tương đương" và "Thuyết tương đối tổng quát" của ông ta (chúng ta sẽ nói đến trong Chương 14). Các lực ảo này có ý nghĩa hơn nhiều so với tưởng tượng của bạn.

Chú ý rằng khi thêm vào tổng của tất cả các lực thực $\mathbf{F}$, sẽ có hai loại khác nhau của các đại lượng bên vế phải của phương trình (10.10). Các đại lượng $\mathbf{r}$ và $\mathbf{v}$ được đo bởi người trong hệ quy chiếu không quán tính, chúng phụ thuộc vào phần tử đang xét chuyển động như thế nào. Nhưng $d^2\mathbf{R}/dt^2$ và $\boldsymbol{\omega}$ là các đặc tính của hệ quy chiếu. Nói chung, người bên trong cần đưa ra các giá trị của chúng mặc dù có thể người ấy tìm ra chúng bằng bao nhiêu trong một số trường hợp đặc biệt nào đó (xem bài tập 10.9).

Bây giờ chúng ta xem xét chi tiết vào mỗi thành phần của các lực ảo. Lực quán tính tịnh tiến và quán tính lực ly tâm hoàn toàn đơn giản để có thể hiểu được. Lực quán tính Coriolis khó hơn một chút. Và lực quán tính góc phương vị có thể dễ, có thể khó hoàn toàn phụ thuộc vào $\boldsymbol{\omega}$ thay đổi như thế nào.

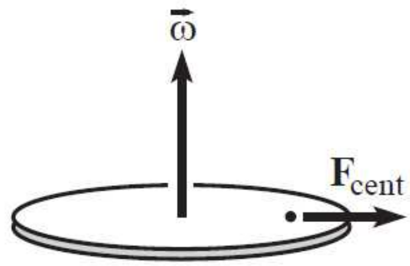
10.2.1 Lực quán tính tịnh tiến: $-md^2\mathbf{R}/dt^2$

Đây là lực ảo trực quan nhất. Chúng ta đã thảo luận về lực này ở ví dụ về con tàu trong phần giới thiệu của chương này. Nếu $\mathbf{R}$ là vị trí của con tàu thì $\mathbf{F}_{trans} = -md^2\mathbf{R}/dt^2$ là lực ảo tịnh tiến mà bạn sẽ cảm thấy khi ở trong hệ quy chiếu không quán tính.

10.2.2 Lực quán tính ly tâm: $-m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$

Lực này liên quan chặt chẽ với gia tốc hướng tâm $mv^2/r = mr\omega^2$ như quan sát của người trong hệ quy chiếu quán tính.

Ví dụ (Người đứng trên một chiếc đĩa quay tròn): Xét một người đứng yên không di chuyển đối với đĩa với khoảng cách tới tâm là r. Giả sử đĩa quay tròn trong mặt phẳng xy với vận tốc góc $\boldsymbol{\omega} = \omega\hat{\mathbf{z}}$ (xem hình 10.2). Lực quán tính ly tâm cảm nhận bởi người đó sẽ như thế nào?



Hình 10.2:

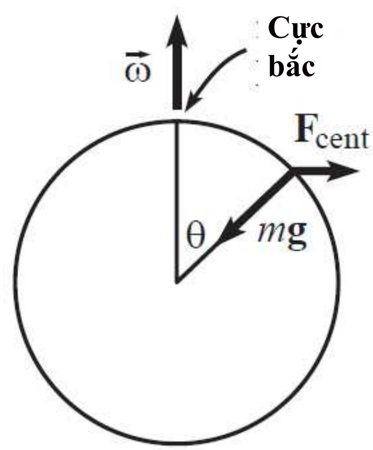
Lời giải: $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ có độ lớn ωr và hướng theo chiều tiếp tuyến theo hướng chuyển động. Do đó, $m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ có độ lớn $mr\omega^2$ và hướng theo chiều bán kính vào trong. Do đó, lực quán tính ly tâm $-m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ có độ lớn $mr\omega^2$ và hướng theo chiều bán kính ra bên ngoài.

NHẬN XÉT: Nếu người đó không di chuyển đối với đĩa, và nếu $\boldsymbol{\omega}$ là hằng số thì lực quán tính ly tâm là lực ảo duy nhất khác không trong phương trình (10.10). Vì người đó không tăng tốc với hệ quy chiếu quay tròn của người ấy nên lực tổng (đo trong hệ quy chiếu của người đó) phải bằng không. Các lực trong hệ quy chiếu của người đó là: (1) trọng lực hướng xuống dưới, (2) phản lực pháp tuyến hướng lên trên (lực này cân bằng với trọng lực), (3) lực ma sát tại chân của người đó hướng vào trong và (4) lực quán tính ly tâm hướng ra bên ngoài. Chúng ta kết luận rằng hai lực sau cùng này phải cân bằng với nhau. Do đó lực ma sát phải hướng vào trong với độ lớn $mr\omega^2$.

Người nào đó đứng trên mặt đất sẽ chỉ quan sát thấy ba lực đầu tiên trong các lực này, do đó lực tổng không phải bằng không. Và đúng là như vậy, có một gia tốc hướng tâm, $v^2/r = r\omega^2$ sinh ra do lực ma sát. Kết luận: trong hệ quy chiếu quán tính, lực ma sát tồn tại và sinh ra một gia tốc hướng tâm. Trong hệ quy chiếu quay tròn, lực ma sát tồn tại để cân bằng với lực quán tính ly tâm bí ẩn mới để dẫn đến gia tốc bằng không. ♣

Ví dụ (Trọng lực hiệu dụng, $m\mathbf{g}_{eff}$): Xét một người đứng yên trên bề mặt trái đất tại góc cực θ; theo cách ta định nghĩa nó, θ bằng $\pi/2$ trừ đi góc vĩ độ. Trong hệ quy chiếu quay tròn của trái đất, người đó cảm thấy có một lực quán tính ly tâm (hướng ra xa từ trục) thêm vào lực hấp dẫn, $m\mathbf{g}$; xem hình 10.3, mặc dù hình vẽ này có thể gây hiểu nhầm một chút nào đó như phần giải thích trong nhận xét đầu tiên bên dưới. Chú ý rằng chúng ta đang sử dụng $\mathbf{g}$ để ký hiệu gia tốc sinh ra chỉ do một mình lực hấp dẫn. Đây không phải là giá trị của g mà người ta đo được như chúng ta sẽ thấy ngay sau đây.

Tổng của lực hấp dẫn và lực quán tính ly tâm (đó là lực mà con người nghĩ là trọng

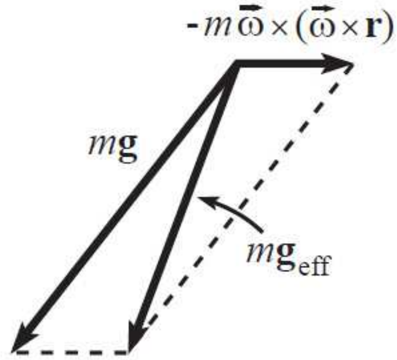


Hình 10.3:

lực) không hướng theo chiều bán kính, trừ khi người đó đứng tại xích đạo hoặc tại một cực. Chúng ta sẽ định nghĩa tổng này là $m\mathbf{g}_{eff}$. Để tính toán $m\mathbf{g}_{eff}$, chúng ta phải xác định $\mathbf{F}_{cent} = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$. Đại lượng $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ có độ lớn $R\omega sin\theta$, trong đó R là bán kính của trái đất, và hướng theo chiều tiếp tuyến dọc đường tròn vĩ độ bán kính $Rsin\theta$. Do đó $-m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ hướng ra ngoài trục quay với độ lớn $mR\omega^2$, đó là kết quả chúng ta đòi hỏi đối với vật nào đó di chuyển với vận tốc góc ω trên một vòng tròn bán kính $Rsin\theta$. Do đó, lực trọng trường hiệu dụng,

$$m\mathbf{g}_{eff} \equiv m(\mathbf{g} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})) \tag{10.13}$$

hướng hơi lệch về phía chiều cực nam (đối với người nào đó đứng trên bắc bán cầu), như chỉ ra trong hình 10.4. Độ lớn của phần hiệu chỉnh, $mR\omega^2$ là khá nhỏ khi so với g. Sử dụng $\omega \approx 7.3 \cdot 10^{-5} s^{-1}$ (đó là một vòng quay mỗi ngày, tức là 2π rad mỗi 86400 giây) và $R \approx 6.4 \cdot 10^6 m$, chúng ta tính được $R\omega^2 \approx 0.03 m/s^2$. Do đó, phần hiệu chỉnh đối với g là khoảng 0.3% tại xích đạo (nhưng bằng không tại các cực).



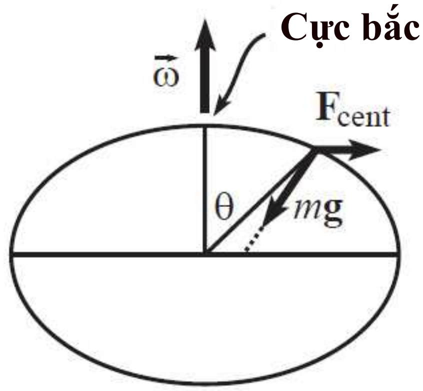
Hình 10.4:

Tuy nhiên, kết quả này không hàm ý rằng giá trị của g_{eff} tại xích đạo là nhỏ hơn 0.3% so với tại các cực, bởi vì giá trị của g tự nó (cái mà chúng ta định nghĩa là gia tốc sinh ra chỉ do lực hấp dẫn) đã biến đổi trên khắp bề mặt của trái đất do hình dạng hình cầu không hoàn hảo của chính trái đất. (Nó cũng do không nhất quán về tỷ lệ tại nơi đo do sự thay đổi về mật độ và độ cao so với mặt nước biển). Khi ảnh hưởng của lực ly tâm cộng với ảnh hưởng của sự méo mó bề mặt trái đất, kết quả thu được sẽ là g_{eff} nhỏ hơn khoảng 0.5% tại xích đạo; xem Iona (1978).

NHẬN XÉT:

1. Chúng ta thấy ở trên rằng tổng của lực hấp dẫn và lực quán tính ly tâm không hướng theo bán kính. Có hai lý do cho điều này. Đầu tiên, như ta vừa thấy đó là với giả thiết (dường như là khá nhiển nhiên) rằng lực hấp dẫn của trái đất là hướng tâm thì lực quán tính ly tâm là nguyên nhân gây ra tổng của chúng không hướng tâm. Lý do thứ hai là lực hấp dẫn của trái đất thực sự cũng không phải là lực hướng tâm; chỗ phồng lên ở xích đạo là nguyên nhân gây ra lực hấp dẫn hướng hơi lệch so với tâm trái đất (trừ tại xích đạo hoặc tại cực). Điều này là có thể tin được bởi vì khối lượng thêm tại phần gần với chỗ phồng ra sẽ dẫn đến sự thay đổi chiều của lực hấp dẫn. Một bức tranh phóng đại tình huống như vậy được chỉ ra trong hình 10.5. Kết quả của $\mathbf{g}$ không hướng tâm đó là trọng lực thực sự còn hướng xa chiều bán kính hơn mong đợi. Điều đó hóa ra rằng ảnh hưởng của $\mathbf{g}$ không hướng tâm đối với chiều của $\mathbf{g}_{eff}$ là tương đối tương đương với ảnh hưởng của lực quán tính ly tâm.

   Do đó có một ảnh hưởng phản hồi: Sự quay của trái đất là nguyên nhân gây ra việc $\mathbf{g}_{\text{eff}}$ hướng ra xa bán kính, điều này gây ra sự phồng lên của trái đất (bởi vì bề mặt trung bình của trái đất là vuông góc với $\mathbf{g}_{eff}$), sự phồng lên này lại gây ra $\mathbf{g}_{eff}$ hướng ra xa thêm một ít so với bán kính, sự hướng ra xa bán kính này lại là nguyên nhân làm cho trái đất phồng thêm một chút, và cứ thế tiếp tục. Bài tập 10.12 phát triển vài chi tiết của vấn đề này, nhưng xem Mohazzabi và James (2000) để tìm hiểu kỹ



Hình 10.5:

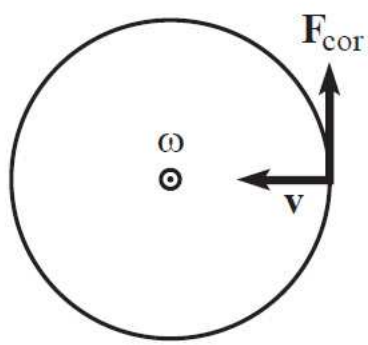
hơn.

2. Trong việc xây dựng các tòa nhà và các vấn đề kỹ thuật tương tự, là $\mathbf{g}_{eff}$ chứ không phải là $\mathbf{g}$ được dùng để xác định chiều hướng lên trên mà theo đó tòa nhà sẽ hướng theo. Người ta sẽ không quan tâm đến chiều chính xác của lực hấp dẫn và tâm của trái đất. Một quả lắc thẳng đứng treo trên đỉnh của tòa nhà phải hướng thẳng chính xác xuống đáy. Cả quả lắc và tòa nhà sẽ hướng theo chiều sai khác khá nhỏ với cả bán kính và $\mathbf{g}$, nhưng điều này là không quan trọng.
3. Nếu bạn nhìn vào một bảng và tìm giá trị của gia tốc sinh ra do trọng lực ở Boston, hãy nhớ rằng số đó là giá trị của g_{eff} chứ không phải là giá trị của g (cái mà chỉ mô tả lực hấp dẫn theo thuật ngữ của chúng ta). Theo cách thức mà chúng ta định nghĩa, giá trị g là gia tốc mà mọi thứ sẽ rơi xuống nếu như trái đất có hình dạng hoàn hảo nhưng vì một lý do nào đó sẽ ngừng quay. Do đó giá trị chính xác của g thường là không cần thiết. ♣

10.2.3 Lực quán tính Coriolis: $-2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$

Trong khi lực quán tính ly tâm là một khái niệm hết sức trực quan (chắn chắn tất cả chúng ta đã từng đi vòng tròn quanh một góc đường nào đó trên một chiếc ô tô), thì điều tương tự không thể dùng để nói về lực quán tính Coriolis. Lực này đòi hỏi một vectơ vận tốc khác không $\mathbf{v}$ gắn liền với hệ quy chiếu không quán tính và mọi người thông thường không chuyển động với một vận tốc $\mathbf{v}$ xác định đối với xe của họ trong khi chiếc xe đang chạy vòng tròn quanh góc đường. Để có thể cảm nhận được lực này chúng ta sẽ xem xét hai trường hợp đặc biệt sau đây.

Trường hợp 1(Di chuyển dọc bán kính của một chiếc đĩa quay tròn): Một chiếc đĩa quay ngược chiều kim đồng hồ với vận tốc góc không đổi ω. Giả sử có một người đi bộ hướng vào trong dọc theo bán kính của đĩa (tưởng tượng rằng có một vạch kẻ vẽ trên đĩa; người đó sẽ di chuyển theo đường kẻ này) với vận tốc v so với đĩa tại bán kính r. Vectơ vận tốc góc $\boldsymbol{\omega}$ hướng ra ngoài trang sách này, trong đó chúng ta biểu thị chiều hướng ra ngoài trong hình 10.6 bằng một vòng tròn nhỏ với một chấm bên trong.



Hình 10.6:

NHẬN XÉT: Nhận xét này có thể là khá cầu kỳ, nhưng dù sao tôi vẫn phải nói nó. Chiều quay thỉnh thoảng được ký hiệu bởi một mũi tên cong hướng tiếp tuyến dọc theo chu vi của đĩa tròn. Nhưng điều này về mặt kỹ thuật là không chính xác bởi vì nó hàm ý rằng đĩa tròn đang quay trong hệ quy chiếu quay tròn, điều đó không đúng; nó đứng yên trong hệ quy chiếu đó. Và người ta hiểu rằng hình 10.6 được vẽ thực tế trong hệ quy chiếu quay, và không phải hệ quy chiếu quán tính bởi vì nó bao gồm một lực ảo, lực mà không xuất hiện trong hệ quy chiếu quán tính. (Nếu bạn muốn vẽ thứ gì đó trong hệ quy chiếu quán tính thì bạn không cần vẽ bất cứ lực ảo nào, và vận tốc **v** sẽ có thành phần tiếp tuyến, ít nhất là trong mô hình này.) ♣

Lực quán tính Coriolis, $-2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$ hướng tiếp tuyến theo chiều chuyển động của đĩa tròn, cụ thể là bên phải của người trên đĩa tròn của chúng ta. Nó có độ lớn

$$F_{cor} = 2m\omega v \tag{10.14}$$

Người đó sẽ phải chống lại lực này bằng lực ma sát tiếp tuyến với độ lớn $2m\omega v$ (đặt tại chân của anh ta), sao cho anh ấy có thể tiếp tục đi trên đường bán kính ban đầu. Chú ý rằng trường hợp này cũng có lực quán tính ly tâm, lực này được chống lại bởi lực ma sát hướng tâm tại chân của người đó. Tuy nhiên ảnh hưởng này sẽ không quan trọng ở đây.

Tại sao lực quán tính Coriolis tồn tại? Nó tồn tại sao cho hợp lực ma sát thay đổi moment động lượng của người đó (đo trong hệ quy chiếu quán tính) bằng một cách thích hợp theo công thức $\tau = dL/dt$. Để xem xét điều này, lấy d/dt của $L = mr^2\omega$, trong đó ω là vận tốc góc của người đó đối với hệ quy chiếu quán tính, nó cũng đồng thời là vận tốc góc của đĩa tròn. Sử dụng $dr/dt = -v$, ta có

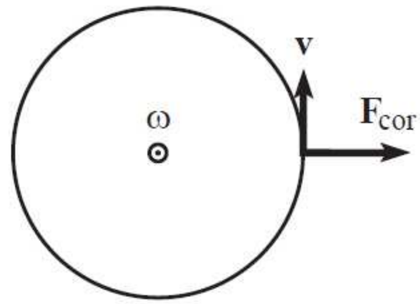
$$\frac{dL}{dt} = -2mr\omega v + mr^2(d\omega/dt) \tag{10.15}$$

Nhưng $d\omega/dt = 0$, bởi vì người đó giữ việc di chuyển trên đường bán kính, và chúng ta giả thiết rằng đĩa tròn được bố trí sao cho có thể giữ được vận tốc góc ω không đổi. Phương trình (10.15) sẽ đưa đến $dL/dt = -2mr\omega v$. Do đó L (đối với hệ quy chiếu quán tính) của người đó thay đổi với tốc độ $-(2m\omega v)r$. Đây đơn giản là bán kính nhân với lực ma sát tiếp tuyến đặt vào đĩa tròn. Nói cách khác, nó là moment quay tác dụng vào người.

NHẬN XÉT: Điều gì sẽ xảy ra nếu người đó không sử dụng lực ma sát tiếp tuyến tại chân của anh ta? Khi đó lực quán tính Coriolis $2m\omega v$ sinh ra gia tốc tiếp tuyến $2\omega v$ trong hệ quy chiếu quay, và do đó cũng trong hệ quy chiếu quán tính (ban đầu, trước khi chiều của chuyển động trong hệ quy chiếu quay có cơ hội thay đổi), bởi vì các hệ quy chiếu liên hệ với nhau bởi một hằng số ω. Gia tốc này tồn tại về bản chất là để giữ moment động lượng của người (đối với hệ quy chiếu quán tính) không đổi. (Nó là hằng số trong ví dụ này, bởi vì không có các lực tiếp tuyến trong hệ quy chiếu quán tính.) Để thấy rằng gia tốc tiếp tuyến này là phù hợp với sự bảo toàn moment động lượng, đặt $dL/dt = 0$ trong phương trình (10.15) để thu được $2\omega v = r(d\omega/dt)$ (đây là ω của người đó đang thay đổi). Vế phải của biểu thức trên là định nghĩa của gia tốc tiếp tuyến. Do đó, ta nói rằng L được giữ cố định khi $2\omega v$ là gia tốc tiếp tuyến (đối với trường hợp này trong đó vận tốc hướng tâm là v). ♣

Trường hợp 2 (Người di chuyển theo hướng tiếp tuyến trên một đĩa tròn): Bây giờ ta xem xét một người đi bộ theo hướng tiếp tuyến trên một đĩa tròn theo chiều chuyển động của đĩa, với vận tốc v (đối với đĩa) tại bán kính hằng số r (xem hình 10.7). Lực quán tính Coriolis $-2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$ hướng theo bán kính ra ngoài với độ lớn $2m\omega v$. Giả sử rằng người đó sử dụng lực ma sát cần thiết để tiếp tục di chuyển tại bán kính r.

Có một cách đơn giản để thấy được tại sao lực $2m\omega v$ hướng ra ngoài này tồn tại.



Hình 10.7:

Ký hiệu $V \equiv \omega r$ là vận tốc của một điểm trên đĩa tròn tại bán kính r, như quan sát của người bên ngoài. Nếu một người di chuyển theo hướng tiếp tuyến (cùng theo một chiều khi quay) với vận tốc v đối với đĩa tròn thì vận tốc của anh ta theo quan sát của người bên ngoài sẽ là $V + v$. Người quan sát bên ngoài do đó sẽ thấy một người đi bộ trên một vòng tròn bán kính r với vận tốc $V + v$. Gia tốc của người đó đối với hệ quy chiếu trên mặt đất do đó sẽ là $(V + v)^2/r$. Gia tốc này phải bị sinh ra bởi lực ma sát hướng vào trong tại chân của người đó, cho nên

$$F_{friction} = \frac{m(V+v)^2}{r} = \frac{mV^2}{r} + \frac{2mVv}{r} + \frac{mv^2}{r} \tag{10.16}$$

Lực ma sát này là như nhau trong mọi hệ quy chiếu. Khi đó người trên đĩa tròn sẽ giải thích như thế nào đối với ba đại lượng của lực ma sát hướng vào trong ở phương trình (10.16) Đại lượng đầu tiên cân bằng với lực quán tính ly tâm hướng ra ngoái sinh ra do sự quay tròn của đĩa, đây là điều mà anh ta luôn luôn cảm thấy. Đại lượng thứ ba là lực hướng vào trong mà chân của anh ta phải chịu nếu anh ta đi bộ quanh vòng tròn bán kính r với vận tốc v, đây chính xác là điều anh ta đang làm trong hệ quy chiếu quay này. Đại lượng giữa là lực ma sát hướng vào trong thêm vào mà anh ta phải chịu để cân bằng với lực quán tính Coriolis hướng ra ngoài $2m\omega v$ (sử dụng $V \equiv \omega r$). Nói một cách tương đương, người ở trên đĩa tròn sẽ miêu tả phương trình $F = ma$ dưới dạng (chọn chiều bán kính hướng vào trong là chiều dương)

$$\begin{aligned} m\frac{v^2}{r} &= \frac{m(V+v)^2}{r} - \frac{mV^2}{r} - \frac{2mVv}{r} \\ \Longrightarrow m\mathbf{a} &= \mathbf{F}_{friction} + \mathbf{F}_{cent} + \mathbf{F}_{cor} \end{aligned} \tag{10.17}$$

Chúng ta thấy rằng lực tổng mà anh ta cảm thấy quả thực bằng với ma của anh ta, trong đó a được xác định đối với hệ quy chiếu quay. Về mặt vật lý, sự khác nhau giữa lời giải thích của phương trình (10.16) và (10.17) là sự tồn tại của lực ma sát trong hệ quy chiếu quay. Về mặt toán học, sự khác nhau đó đơn giản chỉ là sự sắp xếp lại của các số hạng.

Đối với hai trường hợp đặc biệt ở trên, mọi thứ không phải là quá rõ ràng nhưng đó là cách thức mà chúng xảy ra. Chú ý rằng không quan trọng là chiều bạn di chuyển trên đĩa tròn là như thế nào, lực quán tính Coriolis luôn luôn hướng theo chiều vuông góc với sự di chuyển của bạn. Nó có thể hướng về bên phải hoặc bên trái của bạn tùy thuộc vào chiều quay của đĩa tròn. Nhưng với $\boldsymbol{\omega}$ cho trước, bạn sẽ không thể tránh khỏi bị tác dụng bởi lực theo một phương tương đối không đổi.

Bây giờ chúng ta sẽ xem xét thêm một số ví dụ nữa...

Ví dụ (Quả bóng rơi): Một quả bóng rơi từ độ cao h, tại góc cực θ (đo hướng xuống từ cực bắc). Hỏi bóng bị lệch về phía đông bao xa theo khoảng thời gian nó chạm đất?

Lời giải: Góc giữa $\boldsymbol{\omega}$ và $\mathbf{v}$ là $\pi - \theta$, do đó lực quán tính Coriolis $-2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$ hướng thẳng về phía đông với độ lớn $2m\omega v \sin\theta$, trong đó $v = gt$ là vận tốc tại thời điểm t (t chạy từ 0 đến giá trị hay dùng $\sqrt{2h/g}$).[1] Chú ý rằng quả bóng bị chệch về phía đông, độc lập với bán cầu của nó. Gia tốc hướng về phía đông tại thời điểm t do đó sẽ là $2\omega gt$. Tích phân lên ta thu được vận tốc hướng về phía đông (với giá trị vận tốc ban đầu bằng 0) là $v_{east} = \omega g t^2 \sin\theta$. Tích phân lên lần nữa ta thu được độ lệch về phía đông (với giá trị độ lệch ban đầu bằng 0) là $d_{east} = \omega g t^3 \sin\theta/3$. Thay $t = \sqrt{2h/g}$ vào ta thu được

$$d_{east} = \frac{2\omega h \sin\theta}{3}\sqrt{\frac{2h}{g}} \tag{10.18}$$

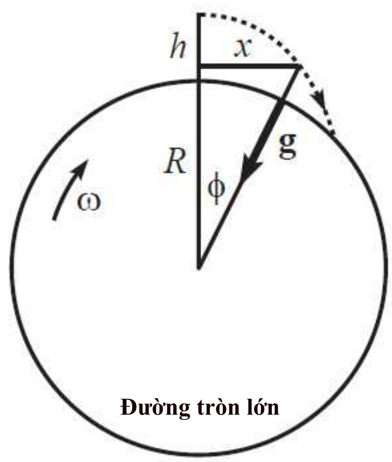
Tần số của sự quay tròn của trái đất là $\omega \approx 7.3 \cdot 10^{-5} s^{-1}$, do đó ví dụ nếu ta lấy $\theta = \pi/2$ và $h = 100m$ thì chúng ta sẽ có $d_{east} \approx 2cm$.

NHẬN XÉT: Chúng ta cũng có thể giải bài toán này bằng cách sử dụng hệ quy chiếu quán tính; xem Stirling (1983). Hình 10.8 chỉ ra mô hình trong đó một quả bóng bị rơi từ tháp

[1] Về mặt kỹ thuật, $v = gt$ là không hoàn toàn chính xác. Do lực quán tính Coriolis, quả bóng sẽ có một thành phần vận tốc khá nhỏ hướng về phía đông (đây là vấn đề của bài toán này). Thành phần này sau đó sẽ sinh ra lực quán tính Coriolis bậc hai ảnh hưởng lên vận tốc thẳng đứng (xem bài tập 10.21). Nhưng chúng ta có thể bỏ qua ảnh hưởng nhỏ đó trong bài toán này. Đồng thời chúng ta cũng muốn thay thế g_{eff} cho g, nhưng bất kỳ sự mập mờ nào trong việc này đều có ảnh hưởng không đáng kể.

có chiều cao h đặt tại xích đạo (quan sát này là từ cực nam). Trái đất đang quay tròn trong hệ quy chiếu quán tính, do đó tốc độ hướng sang ngang ban đầu của quả bóng, $(R+h)\omega$, là lớn hơn so với tốc độ hướng sang ngang của đáy tháp, $R\omega$. Đây là nguyên nhân cơ bản của độ lệch về hướng đông.

Tuy nhiên, sau khi quả bóng đã di chuyển sang bên phải, lực trọng trường tác dụng lên nó

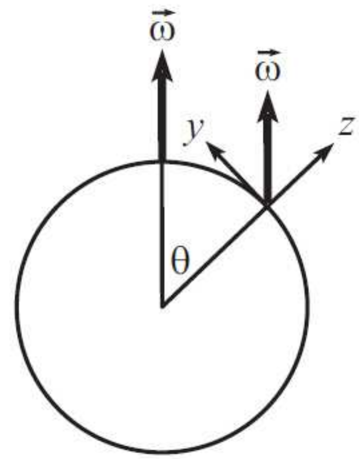


Hình 10.8:

sẽ có thành phần hướng sang bên trái, khi đó thành phần này sẽ làm chậm lại tốc độ hướng sang ngang. Nếu quả bóng đã di chuyển được một khoảng cách x về bên phải thì thành phần hướng về bên trái của trọng lực bằng với $g\sin\phi \approx g(x/R)$. Bây giờ, để dẫn tới bước tiếp theo ta có $x = R\omega t$, do đó gia tốc hướng sang ngang của quả bóng là $a = -g(R\omega t/R) = -\omega g t$. Tích phân biểu thức này và sử dụng tốc độ ban đầu $(R+h)\omega$ ta sẽ thu được tốc độ hướng sang phải là $(R+h)\omega - \omega g t^2/2$. Tích phân thêm một lần nữa dẫn đến khoảng cách hướng sang bên phải là $(R+h)\omega t - \omega g t^3$. Trừ đi vị trí hướng sang bên phải của đáy tháp (cụ thể là $R\omega t$), và sử dụng $t \approx \sqrt{2h/g}$ (bỏ qua ảnh hưởng của bậc cao hơn như độ cong của trái đất và sự thay đổi của g theo độ cao), chúng ta thu được độ lệch hướng sang phía đông là $\omega h\sqrt{2h/g}(1-1/3) = (2/3)\omega h\sqrt{2h/g}$ so với đáy của tháp. Nếu quả bóng rơi tại góc cực θ thay vì tại xích đạo thì chỉ có sự thay đổi là tất cả các tốc độ bị giảm đi bởi thừa số $\sin\theta$, do đó chúng ta thu được kết quả như trong phương trình (10.18). ♣

Ví dụ (Con lắc Foucault): Đây là một ví dụ kinh điển về hệ quả của lực quán tính Coriolis. Nó cũng chỉ ra chắc chắn rằng trái đất quay tròn. Ý tưởng cơ bản đó là do sự quay của trái đất, mặt phẳng dao động của con lắc sẽ quay rất chậm, với một tần số có thể đo được. Trong trường hợp đặc biệt khi con lắc đặt tại một trong hai cực thì sự quay này dễ dàng hiểu được. Xem xét tại cực bắc. Một người quan sát bên ngoài, lơ lửng trên cực bắc và xem trái đất quay, xem mặt phẳng của con lắc cố định (đối với các ngôi sao ở xa) trong khi trái đất quay ngược chiều kim đồng hồ ở dưới nó.[2] Do đó, đối với người quan sát trên trái đất, mặt phẳng của con lắc quay cùng chiều kim đồng hồ (nhìn từ phía trên). Tần số của sự quay này tất nhiên là tần số của sự quay của trái đất, do đó người quan sát trên trái đất thấy rằng mặt phẳng con lắc quay một vòng mỗi ngày.

Điều gì sẽ xảy ra nếu con lắc không đặt tại một trong hai cực? Tần số là như thế



Hình 10.9:

nào? Giả sử con lắc đặt tại vị trí góc cực θ. Chúng ta sẽ tính toán xấp xỉ trong đó vận tốc của quả lắc là nằm ngang (đối với bề mặt trái đất). Đây là giả thiết cần thiết và có thể chấp nhận được nếu như độ dài dây treo con lắc là rất dài; sự chính xác do quả lắc nâng lên hoặc hạ xuống có thể bỏ qua. Lực quán tính Coriolis $-2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$ hướng theo chiều nào đó rất phức tạp, nhưng may mắn là chúng ta chỉ cần quan tâm đến thành phần nằm trong mặt phẳng ngang (đó là mặt phẳng của mặt đất). Thành phần thẳng đứng chỉ để thay đổi thành phần trọng lực và do đó có thể bỏ qua. Mặc dù tần số của con lắc phụ thuộc vào g, nhưng sự thay đổi của kết quả là rất nhỏ. Với các chú ý này, chúng ta sẽ tách $\boldsymbol{\omega}$ thành hai thành phần, thành phần thẳng đứng và thành phần nằm ngang trong hệ tọa độ đặt tại con lắc. Từ hình vẽ 10.9, chúng ta thấy rằng

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \cos\theta \hat{\mathbf{z}} + \omega \sin\theta \hat{\mathbf{y}} \tag{10.19}$$

[2]Giả sử rằng tại đầu treo con lắc là không có ma sát, do đó nó không thể sinh ra moment xoắn đối với mặt phẳng của con lắc.

Chúng ta sẽ bỏ qua thành phần y bởi vì nó sinh ra một lực quán tính Coriolis theo chiều z, lý do là vì $\mathbf{v}$ nằm trong mặt phẳng ngang xy. Do đó đối với mục đích của chúng ta, $\boldsymbol{\omega}$ bản chất là bằng với $\omega\cos\theta\hat{\mathbf{z}}$. Từ quan điểm này, bài toán tìm tần số của mặt phẳng con lắc có thể thực hiện theo một số cách. Ở đây chúng ta sẽ đưa ra hai cách giải.

Cách giải đầu tiên (Cách tinh tế): Thành phần nằm ngang của lực quán tính Coriolis có độ lớn

$$F_{cor}^{horiz} = |-2m(\omega\cos\theta\hat{\mathbf{z}})\times\mathbf{v}| = 2m(\omega\cos\theta)v \tag{10.20}$$

và nó vuông góc với $\mathbf{v}(t)$. Do đó, khi mà chỉ quan tâm đến con lắc, nó được đặt tại cực bắc của một hình tinh có tên là Terra Costhetica mà có tần số quay là $\omega\cos\theta$.[3] Nhưng như ta đã thấy ở phía trên, tần số mặt phẳng của con lắc Foucault đặt tại cực bắc của một hành tinh như vậy đơn giản chỉ là

$$\omega_F = \omega\cos\theta \tag{10.21}$$

theo chiều kim đồng hồ. Dẫn đến đó là đáp số của chúng ta.

Cách giải thứ hai (Trong hệ quy chiếu của con lắc): Chúng ta hãy tính toán trong hệ quy chiếu của mặt phẳng mà con lắc Foucault chuyển động. Mục đích của chúng ta là tìm tốc độ chuyển động của hệ quy chiếu này. Đối với hệ quy chiếu cố định trên trái đất (với các trục $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}$ và $\hat{\mathbf{z}}$ như đã nói tới ở trên), chúng ta biết rằng mặt phẳng này quay với tần số $\omega_F = -\omega\hat{\mathbf{z}}$ nếu chúng ta đứng tại cực bắc ($\theta = 0$) và với tần số $\omega_F = 0$ nếu chúng ta đứng tại xích đạo ($\theta = \pi/2$). Do đó chúng ta có thể đoán rằng kết quả tổng quát sẽ là $\omega_F = -\omega\cos\theta\hat{\mathbf{z}}$, và chúng ta sẽ chỉ ra điều đó ngay bây giờ.

Tính toán trong hệ quy chiếu của mặt phẳng con lắc là khá hiệu quả bởi vì chúng ta có thể lợi dụng thực tế rằng con lắc không chịu ảnh hưởng của lực ngang trong hệ quy chiếu này, bởi vì nếu ngược lại nó sẽ di ra khỏi mặt phẳng này (đây là điều không thể, theo định nghĩa). Hệ quy chiếu cố định trên trái đất quay với tần số $\boldsymbol{\omega} = \omega\cos\theta\hat{\mathbf{z}} + \omega\sin\theta\hat{\mathbf{y}}$ đối với hệ quy chiếu quán tính. Mặt phẳng của con lắc quay

[3] Như đã nói ở phần trên, mô hình này không chính xác tuyệt đối giống như trên hành tinh mới. Đồng thời cũng có thêm thành phần thẳng đứng của lực quán tính Coriolis đối với con lắc trên trái đất, nhưng ảnh hưởng này có thể bỏ qua.

với tần số $\boldsymbol{\omega}_F = \omega_F \hat{\mathbf{z}}$ đối với hệ quy chiếu trái đất. Dẫn đến vận tốc góc của hệ quy chiếu con lắc đối với hệ quy chiếu quán tính sẽ là

$$\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}_F = (\omega \cos\theta + \omega_F)\hat{\mathbf{z}} + \omega \sin\theta \hat{\mathbf{y}} \tag{10.22}$$

Để tìm thành phần ngang của lực quán tính Coriolis trong hệ quy chiếu quay, chúng ta chỉ cần quan tâm đến thành phần $\hat{\mathbf{z}}$ của tần số này. Lực quán tính Coriolis ngang do đó sẽ có độ lớn $2m(\omega\cos\theta + \omega_F)v$. Nhưng trong hệ quy chiếu của con lắc, phải không có thành phần lực ngang, do đó thành phần này phải bằng không. Dẫn đến,

$$\omega_F = -\omega\cos\theta \tag{10.23}$$

Điều này phù hợp với phương trình (10.21), ở đó chúng ta đã mô tả độ lớn của ω_F.

10.2.4 Lực quán tính góc phương vị: $-m(d\boldsymbol{\omega}/dt) \times \mathbf{r}$

Trong phần này, chúng ta sẽ chỉ xét một số trường hợp đơn giản và trực quan ở đó $\boldsymbol{\omega}$ chỉ thay đổi về độ lớn chứ không thay đổi về chiều (trường hợp phức tạp hơn chúng ta sẽ xét trong bài tập 10.10). Lực quán tính góc phương vị khi đó có thể được viết như sau

$$\mathbf{F}_{az} = -m\dot{\omega}\hat{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} \tag{10.24}$$

Lực này dễ dàng hiểu được bằng cách xem xét một người đứng yên đối với đĩa quay tròn. Nếu đĩa tròn tăng tốc thì người đó sẽ phải cảm thấy một lực ma sát tiếp tuyến tại chân của anh ta nếu anh ta cố gắng giữ cố định trên đĩa tròn. Lực ma sát này bằng với ma_{tan}, trong đó $a_{tan} = r\dot{\omega}$ là gia tốc tiếp tuyến đo trong hệ quy chiếu mặt đất. Nhưng từ quan sát của người trong hệ quy chiếu quay, anh ta đang không di chuyển, do đó phải có lực bí ẩn khác nào đó cân bằng với lực ma sát này. Đây chính là lực quán tính góc phương vị. Một cách định lượng, khi $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ trực giao với $\mathbf{r}$, chúng ta có $|\hat{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}| = r$, do đó lực quán tính góc phương vị trong phương trình (10.24) sẽ có độ lớn $mr\dot{\omega}$. Giá trị này bằng với độ lớn của lực ma sát như chúng ta mong muốn.

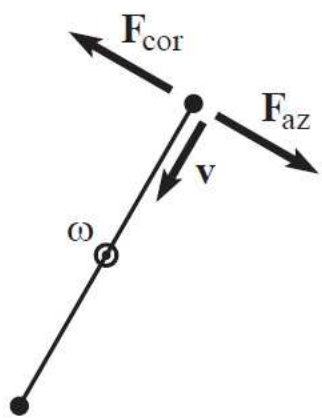
Chính xác là chúng ta có gì ở đây có ảnh hưởng tương tự như chúng ta đã có đối với lực quán tính tịnh tiến trên con tàu tăng tốc. Nếu sàn tàu tăng tốc dưới chân bạn thì bạn chịu một lực ma sát nếu bạn không muốn bị ném ra phía sau đối với sàn tàu. Nếu bạn nhắm mắt lại và bỏ qua lực quán tính ly tâm thì bạn không thể nói rằng bạn đang ở trên một con tàu tăng tốc đều hoặc trên một đĩa quay tròn tăng tốc đều. Cả lực quán tính tịnh tiến và quán tính góc phương vị đều sinh ra từ gia tốc của sàn tàu. (Như vậy đối với vấn đề đó, lực quán tính góc phương vị là cái chúng ta tìm kiếm.)

Chúng ta cũng có thể quan sát mọi thứ dưới dạng các đại lượng quay tròn thay cho gia tốc tuyến tính a_{tan} phía trên. Nếu đĩa tròn tăng tốc thì một moment quay sẽ tác dụng lên người đó nếu anh ta giữ cố định trên đĩa tròn, bởi vì moment động lượng của anh ấy trong hệ quy chiếu cố định sẽ tăng lên. Do đó, anh ta phải cảm thấy lực ma sát tại chân của anh ta. Chúng ta hãy chỉ ra lực ma sát này, nó sinh ra sự thay đổi đối với moment động lượng của người đó trong hệ quy chiếu cố định, chính xác là cân bằng với lực quán tính góc phương vị trong hệ quy chiếu quay, do đó dẫn đến lực tổng bằng không trong hệ quy chiếu quay. Do $L = mr^2\omega$, chúng ta có $dL/dt = mr^2\dot{\omega}$ (giả sử rằng r cố định). Và bởi vì $dL/dt = \tau = rF$, ta thấy rằng lực ma sát đòi hỏi sẽ là $F = mr\dot{\omega}$. Và như chúng ta đã thấy trong phần trên, khi $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ vuông góc với $\mathbf{r}$, lực quán tính góc phương vị trong phương trình (10.24) cũng bằng $mr\dot{\omega}$, ngược với chiều chuyển động của đĩa tròn. Do đó lực tiếp tuyến trong hệ quy chiếu quay quả thực được cân bằng. Điều này về cơ bản giống như tính toán của chúng ta phía trên nhưng thêm thừa số r trong phương trình $\tau = dL/dt$.

Ví dụ (Vận động viên trượt băng quay tròn): Tất cả chúng ta đã từng xem vận động viên trượt băng tăng vận tốc góc của họ bằng cách co tay của họ gần với thân người. Điều này có thể hiểu được dưới dạng moment động lượng; một moment quán tính nhỏ hơn đòi hỏi một vận tốc ω lớn hơn để giữ L không đổi. Nhưng chúng ta sẽ phân tích tình huống này dưới dạng các lực ảo. Chúng ta sẽ lý tưởng hóa mọi thứ bằng cách giả sử khối lượng của vận động viên tập trung tại các đầu của cánh tay không khối lượng gắn vào cơ thể không khối lượng.[4] Giả sử các cánh tay có tổng khối lượng m và chúng được kéo thẳng.

Quan sát mọi thứ trong hệ quy chiếu của vận động viên (quay với vận tốc ω), định nghĩa bởi mặt phẳng thẳng đứng chứa các cánh tay. Điều cốt yếu để hiểu rõ ở đây đó là vận động viên luôn luôn giữ đứng yên trong hệ quy chiếu của vận động viên (thực ra đây là một thực tế được nhắc lại, nhưng cần thiết). Do đó, vận động viên phải cảm thấy lực tiếp tuyến tổng bằng không trong hệ quy chiếu của người ấy, bởi vì ngược lại thì người đó sẽ tăng tốc đối với hệ quy chiếu đó. Các cánh tay của người đó được kéo bởi một lực cơ bắp chống lại lực quán tính ly tâm, nhưng có thể không có lực tiếp tuyến tổng tác dụng trên các cánh tay trong hệ quy chiếu của vận động viên theo định nghĩa.

[4]Điều này nhắc tôi nhớ tới câu nói đùa về con bò hình cầu



Hình 10.10:

Các lực tiếp tuyến trong hệ quy chiếu của vận động viên là gì? Giả sử cánh tay được vẽ với vận tốc v (xem hình 10.10). Khi đó có một lực quán tính Coriolis (với chiều giống như chiều quay) có độ lớn $2m\omega v$. Cũng có một lực quán tính góc phương vị với độ lớn $mr\dot{\omega}$ (có chiều ngược lại với chiều quay như bạn có thể kiểm tra). Bởi vì lực tiếp tuyến tổng bằng không trong hệ quy chiếu của vận động viên, chúng ta phải có

$$2m\omega v = mr\dot{\omega} \tag{10.25}$$

Mối quan hệ này có chính xác hay không? Chúng ta xem xét các thứ trong hệ quy chiếu mặt đất. Tổng moment động lượng của các cánh tay trong hệ quy chiếu mặt đất là hằng số. Do đó, $d(mr^2\omega)/dt = 0$. Lấy đạo hàm và sử dụng $dr/dt \equiv -v$ sẽ dẫn đến phương trình (10.25).

Một lời khuyên về việc sử dụng các lực ảo: Quyết định hệ quy chiếu nào bạn sẽ làm việc (hệ quy chiếu quán tính hay là hệ quy chiếu không quán tính), và sau đó gắn bó với nó. Lỗi thường hay mắc phải là làm việc một phần với một hệ quy chiếu này và một phần với hệ quy chiếu kia mà không hiểu rõ về nó. Ví dụ, bạn có thể tính đến một lực quán tính ly tâm tác dụng vào người nào đó ngồi yên trên đĩa tròn, nhưng sau đó lại cũng bắt cô ấy phải chịu một gia tốc hướng tâm. Điều này là không đúng. Trong hệ quy chiếu quán tính, có một gia tốc hướng tâm (sinh ra do lực ma sát) và không có lực quán tính ly tâm. Trong hệ quy chiếu quay, có một lực quán tính ly tâm (cân bằng với lực ma sát) nhưng không có gia tốc hướng tâm (bởi vì người đó ngồi yên đối với đĩa tròn). Một cách ngắn gọn, nếu bạn đã từng đề cập tới các từ "ly tâm" hoặc "Coriolis", . . . thì bạn tốt hơn là nên làm việc trong một hệ không quán tính.

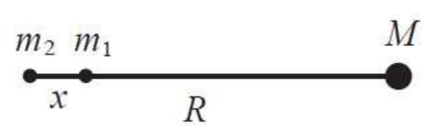
10.3 Thủy triều

Thủy triều trên trái đất tồn tại bởi vì lực hấp dẫn từ một khối lượng điểm (hoặc một khối lượng hình cầu, cụ thể là mặt trăng hoặc mặt trời) là không đồng nhất; chiều của lực không giống nhau (các lực nằm đồng quy về gốc), và độ lớn cũng không là hằng số (nó giảm giống như $1/r^2$). Trên trái đất các ảnh hưởng này là nguyên nhân các đại dương phình ra quanh trái đất, sinh ra hiện tượng thủy triều mà chúng ta có thể quan sát thấy. Nghiên cứu về thủy triều phần nào đó hữu ích bởi vì thủy triều là hiện tượng rất thực tế trên trái đất, và phần nào đó bởi vì phân tích sau đây sẽ đưa đến cho chúng ta một cách sử dụng các lực ảo và cách xấp xỉ bằng chuỗi Taylor. Trước khi nghiên cứu trường hợp tổng quát của các lực thủy triều, chúng ta hãy xem xét hai trường hợp đặc biệt.

Lực thủy triều theo chiều dọc

Để tách ảnh hưởng của thủy triều, chúng ta xem xét một mô hình hơi giả tạo một chút thay vì hệ trái đất - mặt trời hoặc trái đất mặt trăng (cuối cùng chúng ta sẽ tính toán đối với các hệ này). Xét ba khối lượng trên một đường thẳng như chỉ ra trong hình 10.11. Khối lượng M bên phải là rất lớn và sinh ra lực hấp dẫn tác dụng lên m_1 và m_2. Nhưng m_1 và m_2 là đủ nhỏ sao cho chúng gần như không tác dụng lực hấp dẫn lẫn nhau. Hơn nữa giả sử rằng $m_2 \gg m_1$. Gọi R là khoảng cách từ M đến m_2, và x là khoảng cách từ m_1 đến m_2. Giả sử $x \ll R$.

Các khối lượng m_1 và m_2 tăng tốc thẳng vào trong hướng đến M. Trong hệ quy chiếu



Hình 10.11:

không quán tính của m_2, có những lực nào tác dụng lên m_1? Để trả lời câu hỏi này, chúng ta phải thêm lực quán tính tịnh tiến tác dụng lên m_1 (lực này hướng sang bên trái) vào cùng với lực hấp dẫn thực sự tác dụng vào m_1 (lực này hướng sang phải). Do đó, trong hệ quy chiếu không quán tính của m_2, tổng lực tác dụng lên m_1 sẽ là

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{net} = \mathbf{F}_{grav} + \mathbf{F}_{trans} &= \frac{GMm_1}{(R-x)^2}\hat{\mathbf{x}} - m_1 a_2 \hat{\mathbf{x}} \\ &= \frac{GMm_1}{(R-x)^2}\hat{\mathbf{x}} - \frac{GMm_1}{R^2}\hat{\mathbf{x}} \end{aligned} \tag{10.26}$$

Điều này tương đương với phát biểu rằng trong hệ quy chiếu gắn với m_2 ta có m_1 chuyển động với gia tốc

$$\frac{F_{net}}{m_1} = \frac{GM}{(R-x)^2} - \frac{GM}{R^2} = a_1 - a_2 \tag{10.27}$$

gia tốc này có vẻ hơi khác so với mong đợi mang tính trực quan của bạn. Sử dụng $x \ll R$ để lấy xấp xỉ phù hợp trong phương trình (10.26), ta có

$$\begin{aligned} F_{net} &\approx \frac{GMm_1}{R^2 - 2Rx} - \frac{GMm_1}{R^2} = \frac{GMm_1}{R^2}\left(\frac{1}{1-2x/R} - 1\right) \\ &\approx \frac{GMm_1}{R^2}\left((1+2x/R) - 1\right) = \frac{2GMm_1 x}{R^3} \end{aligned} \tag{10.28}$$

Tất nhiên đây đơn giản chỉ là x nhân với đạo hàm của lực hấp dẫn. Nó hướng về bên phải, do đó ảnh hưởng của nó tăng khi tăng khoảng cách giữa các khối lượng.

Nếu bạn chuyển động cùng với m_2, và nếu như có một chiếc hộp đen bao phủ m_1 và m_2 thì coi như bạn có thể ở trong một chiếc hộp đen trôi tự do ngoài không gian (theo thuyết tương đối của Einstein sẽ nói đến trong Chương 14). Nhưng nếu bạn trôi tự do ngoài không gian, và nếu bạn nhìn m_1 chuyển động ra xa bạn với gia tốc $F_{net}/m_1 = 2GMx/R^3$ thì bạn sẽ kết luận một cách tự nhiên rằng trong hệ quy chiếu của bạn, phải có một lực bí ẩn

$$"F_{tidal}" \equiv F_{net} = \frac{2GMm_1 x}{R^3} \tag{10.29}$$

kéo m_1 ra xa bạn. Lực này được gọi là lực thủy triều bởi vì nó là nguyên nhân gây ra thủy triều như chúng ta sẽ thấy chi tiết dưới đây. Chú ý rằng lực thủy triều là tuyến tính đối với khoảng cách x và tỷ lệ nghịch với hàm mũ bậc ba của khoảng cách đến khối lượng M. Nếu x là âm, tức là m_1 nằm bên trái của m_2, thì lực thủy triều là âm, nghĩa là m_1 tăng tốc về bên trái ra xa bạn. Do đó ảnh hưởng của lực thủy triều theo chiều dọc là làm tăng khoảng cách giữa các khối lượng, độc lập với dấu của x.

Nếu bạn muốn giữ m_1 đứng yên đối với bạn thì bạn phải buộc chặt nó lại bằng một sợi dây, và sức căng của sợi dây khi đó sẽ là $2GMm_1x/R^3$.[5] Bất kỳ thí nghiệm nào bạn thực hiện bên ngoài hộp đen sẽ chỉ ra rằng có một lực kéo m_1 ra xa bạn. Lực thực sự tác dụng lên m_1 chỉ có lực hấp dẫn từ M và bằng $GMm1/(R-x)^2$, nhưng bởi vì M truyền cho m_2 gia tốc gần như giống với gia tốc của m_1 nên bạn chỉ nhận được giá trị F_{tidal} nhỏ trong phương trình (10.29). Nó quả thực là nhỏ bởi vì nó là lực hấp dẫn thực sự nhân với

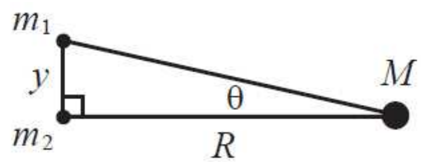
[5] Sức căng trong sợi dây sẽ không ảnh hưởng tới gia tốc của m_2 bởi vì m_2 được giả thiết rất lớn so với m_1. Do đó hệ quy chiếu không quán tính của chúng ta vẫn định nghĩa như thế với gia tốc là $a_2 = GM/R^2$. Đây là chỗ mà giả thiết $m_2 \gg m_1$ được sử dụng.

đại lượng $2x/R \ll 1$.

Lực thủy triều theo chiều ngang

Bây giờ chúng ta sẽ xem xét mô hình như chỉ ra trong hình 10.12, với m_2 đặt tại góc của tam giác vuông có $y \ll R$. Các khối lượng m_1 và m_2 tăng tốc thẳng vào trong hướng tới M. Trong hệ quy chiếu không quán tính của m_2, những lực nào tác dụng lên m_1? Giống như phần trên, chúng ta phải thêm đối với m_1 lực quán tính tịnh tiến (hướng về bên trái) vào lực hấp dẫn thực sự tác dụng lên m_1 (hướng về bên phải và hơi hướng xuống).

Tuy nhiên trong trường hợp này, các độ lớn của gia tốc hấp dẫn của m_1 và m_2 về cơ bản



Hình 10.12:

là bằng nhau, bởi vì chúng đều là khoảng cách R từ khối lượng M, bỏ qua ảnh hưởng của bậc hai của y/R (theo định lý Pitago). Còn chiều của chúng chỉ khác nhau đến bậc nhất của y/R. Do đó trong hệ quy chiếu không quán tính của m_2, lực tổng (lực mà chúng ta sẽ gọi là lực thủy triều từ bây giờ) tác dụng lên m_1 là

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{tidal} = \mathbf{F}_{grav} + \mathbf{F}_{trans} &\approx \frac{GMm_1}{R^2}(\cos\theta\hat{\mathbf{x}} - \sin\theta\hat{\mathbf{y}}) - \frac{GMm_1}{R^2}\hat{\mathbf{x}} \\ &\approx \frac{GMm_1}{R^2}(-\sin\theta\hat{\mathbf{y}}) \approx -\frac{GMm_1 y}{R^3}\hat{\mathbf{y}} \qquad (10.30)\end{aligned}$$

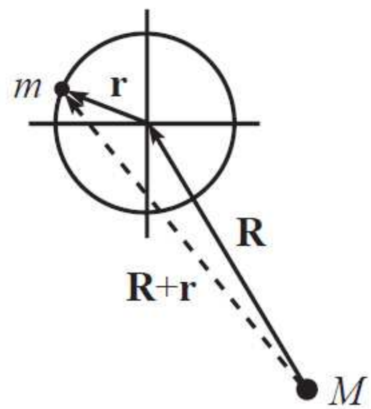
ở đó chúng ta đã sử dụng $\cos\theta \approx 1$ và $\sin\theta \approx y/R$. Hiệu số này đơn giản chỉ có thành phần y của lực tác dụng lên m_1, đây là điều bạn mong muốn. Nó hướng dọc theo đường nối các khối lượng và ảnh hưởng của nó sẽ kéo các khối lượng lại gần nhau. Như trong trường hợp lực thủy triều theo chiều dọc, lực thủy triều theo chiều ngang là tuyến tính đối với khoảng cách giữa hai khối lượng và tỷ lệ nghịch với mũ ba của khoảng cách tới khối lượng M.

Lực thủy triều tổng quát

Bây giờ chúng ta sẽ tính toán lực thủy triều tác dụng lên một khối lượng m đặt tại điểm bất kỳ trên một vòng tròn bán kính r (ví dụ, vòng tròn này có thể biểu diễn mặt cắt ngang của trái đất), do khối lượng M đặt tại vectơ $-\mathbf{R}$ nên vectơ từ M đến m sẽ là $\mathbf{R}+\mathbf{r}$;

xem hình 10.13. Chúng ta sẽ tính toán lực thủy triều liên quan đến tâm của vòng tròn này. Tức là chúng ta sẽ tìm lực tổng tác dụng vào m trong hệ quy chiếu không quán tính có gốc là tâm của vòng tròn. Như thường lệ, giả sử rằng $r \ll R$. Và đối với trường hợp này chúng ta hãy bỏ qua bất kỳ sự di chuyển cong nào của vòng tròn quanh M (mặc dù nó chỉ ra rằng dù sao đi nữa đây không phải là liên quan đến thủy triều; xem nhận xét thứ ba dưới đây), do đó vòng tròn chỉ tăng tốc thẳng hướng vào trong tới M.

Lực trọng trường tác dụng vào m có thể viết thành $\mathbf{F}_{grav} = -GMm(\mathbf{R}+\mathbf{m})/|\mathbf{R}+\mathbf{r}|^3$.



Hình 10.13:

Số mũ bậc ba ở mẫu số bởi vì vectơ trên tử số chứa lũy thừa bậc một của khoảng cách. Như ở trên, thêm vào lực quán tính tịnh tiến sinh ra do gia tốc của tâm vòng tròn (gia tốc này độc lập với bất cứ khối lượng nào chúng ta đặt ở đó) dẫn đến một lực thủy triều như sau

$$\frac{\mathbf{F}_{tidal}(\mathbf{r})}{GMm} = \frac{-(\mathbf{R}+\mathbf{r})}{|\mathbf{R}+\mathbf{r}|^3} - \frac{-\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3} \tag{10.31}$$

Đây là biểu thức chính xác của lực thủy triều. Tuy nhiên, nó nói chung là không sử dụng được.[6] Do đó chúng ta sẽ xấp xỉ phương trình (10.31) và chuyển nó về dạng không chính xác lắm về mặt toán học (tất nhiên là xấp xỉ sẽ hội tụ) nhưng lại dễ dàng áp dụng hơn nhiều. Điều đầu tiên chúng ta cần viết lại đại lượng $|\mathbf{R}+\mathbf{r}|$. Ta có (sử dụng $r \ll R$ và bỏ qua các số hạng bậc cao)

$$\begin{aligned} |\mathbf{R}+\mathbf{r}| = \sqrt{(\mathbf{R}+\mathbf{r})\cdot(\mathbf{R}+\mathbf{r})} &= \sqrt{R^2+r^2+2\mathbf{R}\cdot\mathbf{r}} \\ &\approx R\sqrt{1+2\mathbf{R}\cdot\mathbf{r}/R^2} \\ &\approx R\left(1+\frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{r}}{R^2}\right). \end{aligned} \tag{10.32}$$

[6]Điều này nhắc tôi nhớ lại câu chuyện vui về hai người lạc trong quả khí cầu

Do đó (lại sử dụng $r \ll R$)

$$\frac{\mathbf{F}_{tidal}(\mathbf{r})}{GMm} \approx -\frac{\mathbf{R}+\mathbf{r}}{R^3(1+\mathbf{R}\cdot\mathbf{r}/R^2)^3} + \frac{\mathbf{R}}{R^3}$$
$$\approx -\frac{\mathbf{R}+\mathbf{r}}{R^3(1+3\mathbf{R}\cdot\mathbf{r}/R^2)} + \frac{\mathbf{R}}{R^3}$$
$$\approx -\frac{\mathbf{R}+\mathbf{r}}{R^3}\left(1-\frac{3\mathbf{R}\cdot\mathbf{r}}{R^2}\right). \quad (10.33)$$

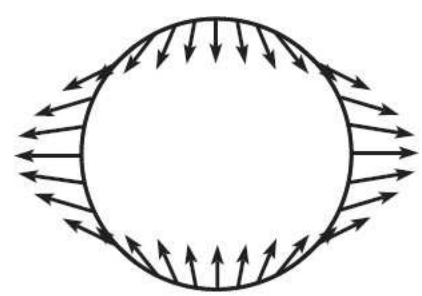
Ký hiệu $\hat{\mathbf{R}} \equiv \mathbf{R}/R$, phương trình trên cuối cùng sẽ có dạng đơn giản như sau (một lần nữa lại sử dụng $r \ll R$)

$$\mathbf{F}_{tidal}(\mathbf{r}) \approx \frac{GMm}{R^3}(3\hat{\mathbf{R}}(\hat{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{r}) - \mathbf{r}) \quad (10.34)$$

Đây là công thức tổng quát đối với lực thủy triều. Chúng ta có thể làm nó thành dạng đơn giản hơn nếu như chúng ta để M nằm trên trục x dương, lúc đó chúng ta có thể sắp xếp với một chiều quay của các trục. Khi đó chúng ta có $\hat{\mathbf{R}} = -\hat{\mathbf{x}}$, và do đó $\hat{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{r} = -x$. Phương trình (10.34) do đó chỉ cho chúng ta thấy rằng lực thủy triều tác dụng lên khối lượng m tại vị trí $\mathbf{r} \equiv (x, y)$, do khối lượng M ở vị trí $(R, 0)$, bằng với

$$\mathbf{F}_{tidal}(x, y) \approx \frac{GMm}{R^3}(3x\hat{\mathbf{x}} - (x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}})) = \frac{GMm}{R^3}(2x, -y) \quad (10.35)$$

Phương trình này sẽ suy biến về các trường hợp lực theo chiều dọc và lực theo chiều



Hình 10.14:

ngang đã xét ở phần trên. Các lực thủy triều tại các điểm khác nhau trên vòng tròn được chỉ ra như trên hình 10.14. Bởi vì mô hình của chúng ta với M trên trục x là bất biến đối với sự quay quanh trục x nên hình ảnh các lực này cũng là bất biến. Và bởi vì sự đối xứng giữa bên trái và bên phải, nên hình ảnh sẽ tương tự nếu M đặt tại phần âm của trục x.

Thế năng của lực thủy triều trong phương trình (10.35) là tỷ lệ với $-x^2 + y^2/2$, bởi vì giá trị âm của gradient của nó là vectơ $(2x, -y)$. Sử dụng $x = r\cos\theta$ và $y = r\sin\theta$, thế năng có thể viết lại như sau

$$V_{tidal}(r,\theta) \approx \frac{GMmr^2}{2R^3}(-2\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \frac{GMmr^2}{2R^3}(1 - 3\cos^2\theta) \qquad (10.36)$$

Nếu trái đất là một thể rắn tuyệt đối thì lực thủy triều sẽ không có ảnh hưởng đến nó. Nhưng nước ở các đại dương có thể tự do chuyển động, do đó nó làm phồng lên dọc đường thẳng nối trái đất với mặt trăng cũng như đường thẳng nối trái đất và mặt trời. Nó đồng thời cũng kéo vào và tạo thành một chỗ trũng xuống dọc chiều ngang hướng tới mặt trăng và mặt trời.[7] Chúng ta sẽ thấy dưới đây rằng ảnh hưởng của mặt trăng là khoảng gấp đôi ảnh hưởng của mặt trời. Khi trái đất quay dưới chỗ phình ra và chỗ lõm vào, một người trên trái đất thấy chúng quay theo chiều khác đối với trái đất. Từ hình 10.14 chúng ta thấy rằng điều này sinh ra hai thủy triều cao và hai thủy triều thấp mỗi ngày.[8] Nó không thực sự chính xác là hai lần mỗi ngày bởi vì mặt trăng còn di chuyển quanh trái đất. Nhưng sự di chuyển này là rất chậm, mất khoảng một tháng, do đó đây là sự xấp xỉ có lý khi cho rằng mặt trăng gần như là đứng yên.

Chú ý rằng đây không phải là trường hợp mặt trăng đẩy nước đi về phía bên kia của trái đất. Nó kéo lượng nước đó; chỉ có điều nó làm điều đó một cách yếu hơn nó kéo phần cứng của trái đất. Với thủy triều, lực không phải là vấn đề, mà là sự khác nhau của lực. Thủy triều là một ảnh hưởng mang tính chất so sánh. Một em bé đang chơi đùa với một cái xẻng và một cái xô trên bãi biển sẽ có thể chơi tiếp cho đến khi trái đất quay tới một điểm khi mà bãi biển đi vào vùng mà ở đó mặt trăng kéo nước đủ nhiều hơn (hoặc ít hơn) so với nó kéo phần cứng của trái đất.

NHẬN XÉT:

1. Xét một khối lượng trên bề mặt của trái đất. Tất nhiên rằng lực hấp dẫn do mặt trời tác dụng lên nó là lớn hơn nhiều so với lực hấp dẫn do mặt trăng gây ra, nhưng ngược lại lực thủy triều từ mặt trời lại yếu hơn khá nhiều so với mặt trăng. Một cách định

[7] Thực sự có một ảnh hưởng khi trái đất quay do mọi thứ biến đổi phức tạp, dẫn đến chỗ phồng ra không hướng trực tiếp vào mặt trăng và mặt trời. Nhưng chúng ta không cần lo lắng về điều đó ở đây.

[8] Chúng ta đã làm không chính xác nhưng có sự xấp xỉ hợp lý và thuận tiện rằng mặt trăng nằm trên mặt phẳng xích đạo của trái đất. Nếu bạn giải bài toán một cách chính xác bằng cách tính đến vị trí của mặt trăng đối với xích đạo thì bạn sẽ tìm ra rằng có một bộ phận của thủy triều (được biết với cái tên là nhật triều) có chu kỳ là một ngày, thêm vào nữa chúng ta sẽ tìm thấy phần (bán nhật triều) với chu kỳ nửa ngày. Xem Horsfield (1976). Nếu bạn muốn tự mình tìm ra được kết quả này, một gợi ý rằng bạn cần sử dụng phương trình (10.36) và phương trình (B.7)

lượng, tỷ số của các lực hấp dẫn là

$$\frac{F_S}{F_M} = \left(\frac{GM_S}{R_{E,S}^2}\right) \Big/ \left(\frac{GM_M}{R_{E,M}^2}\right) = \frac{5.9 \cdot 10^{-3} m/s^2}{3.3 \cdot 10^{-5} m/s^2} \approx 175. \tag{10.37}$$

Và tỷ số của các lực thủy triều là

$$\frac{F_{t,S}}{F_{t,M}} = \left(\frac{GM_S}{R_{E,S}^3}\right) \Big/ \left(\frac{GM_M}{R_{E,M}^3}\right) = \frac{3.9 \cdot 10^{-14} s^{-2}}{8.7 \cdot 10^{-14} s^{-2}} \approx 0.45. \tag{10.38}$$

Do phụ thuộc vào vị trí tương đối của mặt trời và mặt trăng đối với trái đất, các ảnh hưởng thủy triều của chúng có thể tăng thêm (khi ba vật thể này cùng nằm trên một đường thẳng, trường hợp này gọi là thủy triều "lò xo"), hoặc chúng có thể giảm đi một phần (khi mặt trời và mặt trăng tạo thành một góc 90° trên bầu trời; hiện tượng này gọi là thủy triều "thấp").

2. Phương trình (10.38) chỉ ra rằng ảnh hưởng của thủy triều mặt trăng là gấp khoảng hai lần so với mặt trời. Điều này dẫn đến một kết luận thú vị tiếp theo về tỷ trọng của mặt trăng và mặt trời. Lực thủy triều từ mặt trăng tỷ lệ với

$$\left(\frac{GM_M}{R_{E,M}^3}\right) = \left(\frac{G(\frac{4}{3}\pi r_M^3)\rho_M}{R_{E,M}^3}\right) \propto \rho_M \left(\frac{r_M}{R_{E,M}}\right)^3 \approx \rho_M \theta_M^3 \tag{10.39}$$

trong đó θ_M là một nửa độ lớn góc của mặt trăng trên bầu trời. Tương tự như vậy đối với lực thủy triều của mặt trời. Có điều chú ý rằng độ lớn góc của mặt trời và mặt trăng về cơ bản là bằng nhau như bạn có thể thấy bằng cách nhìn vào chúng (tốt nhất là trong trường hợp nhìn mặt trời, và qua lớp sương mù dày nào đó), hoặc bằng cách chú ý rằng nhật thực toàn phần rất hiếm khi xảy ra. Do đó, kết hợp phương trình (10.38) và (10.39) chúng ta thấy rằng tỷ trọng của mặt trăng là gấp khoảng hai lần tỷ trọng của mặt trời. Cũng đáng chú ý rằng, ít nhất là trong trường hợp xấp xỉ, bạn có thể xác định một cách thực nghiệm tỷ số mật độ của hai vật thể không gian đó bằng cách bỏ ra vài tuần trên bãi biển.

3. Có một ảnh hưởng mà chúng ta đã che giấu, nhưng may thay nó không có ảnh hưởng nhiều lắm. Trong phân tích trên đây, chúng ta rút ra lực thủy triều bằng cách trừ đi lực tịnh tiến ảo từ lực hấp dẫn. Nhưng trong trường hợp thực tế của trái đất, lực ảo thường được hiểu là lực quán tính ly tâm bởi vì trái đất quay quanh hệ tọa độ khối tâm trái đất - mặt trăng, và hệ tọa độ khối tâm này lại quay quanh mặt trời. Và tất nhiên trái đất lại còn tự quay quanh trục của nó. Do đó về cơ bản, có rất nhiều sự quay tiếp diễn nhau.

   Bây giờ, bởi vì lực quán tính ly tâm (từ tổng hợp của các sự quay trên) phụ thuộc vào vị trí, do đó có sự khác nhau giữa lực quán tính ly tâm tại tâm của trái đất và tại những điểm trên bề mặt. Sự khác nhau này liệu có tham gia vào việc tính toán lực tĩnh trong hệ quy chiếu không quán tính với gốc tọa độ là tâm của trái đất hay không? Câu trả lời là cũng có thể có mà cũng có thể là không.

Có rất nhiều cách để phân tích chuyển động của trái đất, nhưng đối với mục đích hiện tại chúng ta sẽ trình bày cách hiệu quả nhất ngay sau đây. Sự di chuyển của bất kỳ vật thể nào đều có thể mô tả như là tổng sự tịnh tiến của hệ quy chiếu không quay (ví dụ ghế ngồi trên vòng đu quay) cộng với sự quay quanh một điểm trong hệ quy chiếu đó (ghế trên một vòng đu quay loại cũ sẽ không có bất kỳ sự quay nào như vậy, nhưng ghế trên loại vòng đu quay rùng rợn hiện đại hơn trong các công viên giải trí thì chắc chắn có).

Chuyển động đầu tiên trong hai chuyển động này giải thích sự di chuyển của trái đất như là toàn bộ sự chuyển động quanh khối tâm trái đất - mặt trăng và cũng giải thích di chuyển của khối tâm này quanh mặt trời.[9] Lực ảo có liên quan ở đây chỉ có lực lực quán tính tịnh tiến (tại bất kỳ thời điểm tức thời nào của chuyển động này, mọi điểm trên trái đất đều có cùng vectơ gia tốc, do đó chúng ra không cần quan tâm đến sự quay), và lực tịnh tiến này là lực chúng ta đã dùng trong tính toán ở phần trên đối với lực thủy triều.[10] Chuyển động thứ hai trong hai chuyển động trên giải thích sự quay của trái đất quanh trục của chính nó. Điều này tất nhiên tạo thành một lực quán tính ly tâm khác nhau giữa tâm của trái đất và một điểm trên bề mặt, tuy nhiên sự khác nhau này không ảnh hưởng đến thủy triều; nó chỉ ảnh hưởng đến sự phồng đồng nhất của trái đất tại xích đạo. Bởi vì lực là đồng nhất, nó không làm cho nước chuyển động, do đó nó không có bất kỳ ảnh hưởng nào đến thủy triều.

Như vậy câu trả lời cho câu hỏi trên đây là: Có, bởi vì sự khác nhau này thực sự có ảnh hưởng đến lực tĩnh. Nhưng không, bởi vì nó không ảnh hưởng đến thủy triều, đây mới là điều chúng ta quan tâm đến ở đây.

Nếu bạn tính toán với các số thực, bạn sẽ thấy rằng lực quán tính ly tâm chiếm ưu thế hoàn toàn so với lực thủy triều. Điều này phù hợp với thực tế rằng chỗ phồng ở xích đạo cao tới hàng kilômét, trong khi đó thủy triều thường chỉ cao có vài mét. Nhưng ở trên đây chúng ta thấy rằng lực quán tính ly tâm không ảnh hưởng đến thủy triều bởi vì nó là đồng nhất quanh trái đất. Mặt khác, lực thủy triều có hình dạng không đồng nhất như trong hình 10.14. Do đó chỗ phồng dạng quả bóng nó tạo ra xung quanh liên quan tới trái đất khi trái đất quay. Tóm lại: đối với lực thủy triều (cái mà chúng ta định nghĩa là lực sinh ra thủy triều), chúng ta không cần quan tâm đến toàn bộ sự sai khác lực giữa một điểm trên trái đất vào tâm của nó, mà chúng

[9]Tưởng tượng rằng có thể nắm lấy trái đất bằng một cánh tay rất lớn và đẩy nó vòng quanh nhưng chú ý là không xoắn tay bạn lại, do đó một điểm cho trước trên trái đất luôn luôn có quỹ đạo cố định nếu nhìn từ một ngôi sao nào đó trên bầu trời.

[10]Nếu bạn muốn quan tâm đến sự di chuyển tròn khi bạn đẩy trái đất chuyển động tròn quanh mặt trời mà không xoắn tay bạn thì bạn quả thực có thể quan sát thấy mọi điểm trên trái đất chuyển động thành một vòng tròn. Nhưng tất cả các vòng tròn này có cùng bạn kính nhưng chúng có các tâm phân nhánh. Do đó tất cả các lực quán tính ly tâm là giống nhau (trong cả độ lớn và chiều), do đó không có sự khác nhau khi xem xét chúng.

ta chỉ cần quan tâm đến một phần trong sự sai khác này, đó là sự thay đổi dưới các sự quay của trái đất. ♣

10.4 Bài tập

Mục 10.2: Các lực ảo

10.1. Định nghĩa như thế nào? *

Bạn đang trôi lềnh bềnh trên một khinh khí cầu, ở trạng thái nghỉ đối với trái đất. Hãy đưa ra ba định nghĩa hợp lý mà đối với chúng điểm trên mặt đất quả thực là ở "bên dưới" bạn.

10.2. Nhảy xa với $\mathbf{g}_{\mathbf{eff}}$ *

Nếu một vận động viên nhảy xa có thể nhảy được $8m$ ở bắc cực, thì anh ta có thể nhảy được bao xa ở xích đạo? Giả sử rằng g_{eff} ở xích đạo nhỏ hơn 0.5% so với ở bắc cực (mặc dù điều này chỉ xấp xỉ). Bỏ qua ảnh hưởng của sức cản của gió, nhiệt độ và đường chạy được là từ băng.

10.3. $\mathbf{g}_{\mathbf{eff}}$ so với g *

Đối với góc θ nào (tính từ bắc cực) thì góc giữa $\mathbf{g}_{eff}$ và $\mathbf{g}$ là lớn nhất?

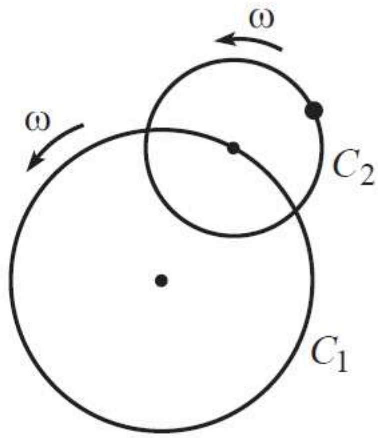
10.4. Các vòng tròn chuyển động *

(a) Cho hai vòng tròn C_1 và C_2 trong một mặt phẳng, mỗi vòng tròn quay với tần số ω đối với hệ quy chiếu quán tính. Tâm của C_1 cố định trong hệ quy chiếu quán tính, và tâm của C_2 cố định trên C_1 như trên hình 10.15. Một khối lượng được gắn cố định trên C_2. Vị trí của khối lượng đối với tâm của C_1 là $\mathbf{R}(t)$. Tìm các lực ảo tác dụng lên khối lượng?

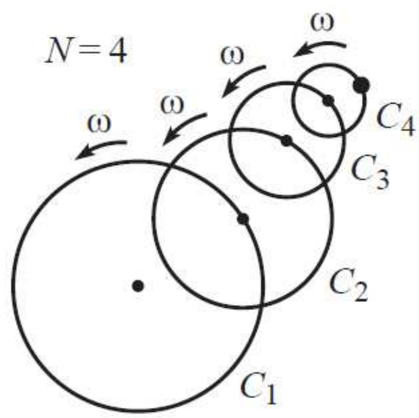
(b) Cho N vòng tròn C_i trong một mặt phẳng, mỗi vòng tròn quay với tần số ω đối với hệ quy chiếu quán tính. Tâm của C_1 cố định đối với hệ quy chiếu quán tính, và tâm của C_i cố định trên C_{i-1} (với $i = 2, \ldots, N$) như trong hình 10.16. Một khối lượng được gắn cố định trên C_N. Vị trí của khối lượng đối với tâm của C_1 là $\mathbf{R}(t)$. Tìm các lực ảo tác dụng lên khối lượng?

10.5. Khối lượng trên một bàn quay *

Một khối lượng đứng yên đối với hệ quy chiếu quán tính, trong khi đó một bàn không



Hình 10.15:



Hình 10.16:

ma sát quay tròn bên dưới nó. Tần số quay của bàn là ω, và khối lượng đặt tại vị trí bán kính r. Trong hệ quy chiếu của bàn, tìm các lực tác dụng lên khối lượng và kiểm tra rằng $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.

10.6. Khối lượng được giải phóng *

Một khối lượng bị chốt bulông vào một bàn quay không ma sát, tần số quay là ω, và khối lượng đặt tại vị trí bán kính a. Sau đó khối lượng được giải phóng. Quan sát từ hệ quy chiếu quán tính, nó di chuyển trên một đường thẳng. Trong hệ quy chiếu quay, khối lượng sẽ di chuyển trên đường nào? Xác định $r(t)$ và $\theta(t)$, trong đó θ là góc đối với bán kính ban đầu, khi đo trong hệ quy chiếu quay. Giải bài toán bằng cách sử dụng hệ quy chiếu quán tính. (Bài tập 10.25 liên quan đến phần khó hơn của việc tính toán trong hệ quy chiếu quay.)

10.7. Vòng tròn Coriolis *

Một quả bóng khúc côn cầu trượt với vận tốc v trên mặt băng không ma sát. Bề mặt băng vuông góc với $\mathbf{g}_{eff}$ tại tất cả các điểm. Chỉ ra rằng quả bóng sẽ di chuyển trên một đường tròn khi quan sát từ hệ quy chiếu quay của trái đất. Bán kính của đường tròn này là bao nhiêu? Tần số của chuyển động là bao nhiêu? Giả sử rằng bán kính của đường tròn là rất nhỏ so với bán kính của trái đất.

10.8. $\tau = dL/dt$ **

Trong Mục 8.4.3 chúng ta đã tìm ra ba điều kiện để $\sum \tau_i^{ext} = d\mathbf{L}/dt$. Tìm lại ba điều kiện này bằng việc hoàn toàn chỉ sử dụng hệ quy chiếu không quán tính thích hợp. Giống như Mục 8.4.3, giả sử rằng hệ quy chiếu không quay (do đó chỉ có gốc tọa độ là có gia tốc).

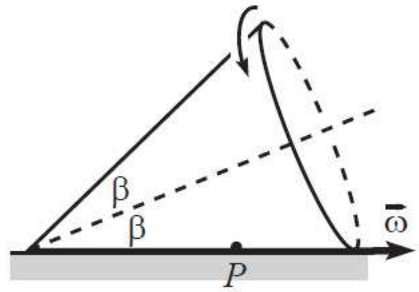
10.9. Xác định hệ quy chiếu của bạn **

Tưởng tượng rằng bạn đang ở trên một đĩa quay khổng lồ, với $\boldsymbol{\omega}$ vuông góc với đĩa tại tâm của nó. Giả sử bạn biết rằng tâm của đĩa là cố định và không có lực nào tác dụng lên bất cứ thứ gì trên đĩa (ngoại trừ trọng lực hướng xuống sẽ cân bằng với phản lực pháp tuyến). Giả thiết $\boldsymbol{\omega}$ chỉ thay đổi độ lớn, và tốc độ thay đổi này là hằng số. Bạn có thể xác định ω và $d\omega/dt$ cũng như vị trí của tâm đĩa bằng cách chỉ thực hiện thí nghiệm trong hệ quy chiếu quay được không?

10.10. Thay đổi chiều của $\boldsymbol{\omega}$ ***

Xét một trường hợp đặc biệt khi $\boldsymbol{\omega}$ của hệ quy chiếu chỉ thay đổi chiều (không thay đổi độ lớn). Cụ thể, xét một hình nón quay trên bàn, đây là một ví dụ tự nhiên của trường hợp trên. Chọn gốc tọa độ của hệ quy chiếu hình nón là đỉnh của nó. Điểm này được giữ cố định đối với hệ quy chiếu quán tính. Vận tốc góc tức thời ω của hình nón hướng dọc theo đường sinh tiếp xúc với bàn của nó, bởi vì đây là những điểm đứng yên tức thời. Đường thẳng này quay quanh gốc tọa độ. Gọi tần số của chuyển động quay này là Ω.

Để tách riêng lực quán tính góc phương vị, ta vẽ một điểm trên bề mặt của hình nón (gọi điểm này là P), và xem xét thời điểm khi P nằm trên $\boldsymbol{\omega}$ tức thời (xem hình 10.17). Từ phương trình (10.11) chúng ta thấy rằng sẽ không có lực lực quán tính ly tâm (bởi vì P nằm trên $\boldsymbol{\omega}$), không có lực quán tính Coriolis (bởi vì P không di chuyển đối với hệ quy chiếu hình nón), và cũng không có lực quán tính tịnh tiến (vì đỉnh của hình nón là cố định). Còn lại lực ảo chỉ có lực quán tính góc phương vị, và nó tồn tại là do thực tế là $\boldsymbol{\omega}$ thay đổi. Nói một cách tương đương, nó sinh ra từ thực tế là P chuyển động có gia tốc đối với bàn.



Hình 10.17:

(a) Tìm gia tốc của P.

(b) Sử dụng phương trình (10.11) để tính lực quán tính góc phương vị tác dụng trên khối lượng m đặt tại P, và chỉ ra rằng kết quả là phù hợp với gia tốc mà bạn đã tìm ở câu (a).

10.11. Tháo dây ****

Một bánh xe bán kính R được đặt nằm ngang trên một mặt bàn. Một sợi dây không khối lượng với một đầu buộc vào vành của bánh xe và quấn theo chiều kim đồng hồ quanh bánh xe với số vòng đủ lớn. Khi sợi dây quấn xong quanh bánh xe, một khối lượng điểm m được gắn vào đầu tự do của dây và được dính bằng keo vào bánh xe. Sau đó bánh xe quay với vận tốc góc không đổi ω. Tại một thời điểm nào đó, keo dính trên khối lượng bị vỡ, và khối lượng cũng như sợi dây tháo ra từ từ (với tốc độ của bánh xe ω được giữ không đổi bằng một động cơ nếu cần thiết). Chỉ ra rằng độ dài của dây bị tháo tăng với tốc độ không đổi $R\omega$ đối với cả chiều quay theo chiều kim đồng hồ và ngược chiều kim đồng hồ của ω (trường hợp ngược chiều kim đồng hồ đòi hỏi phải giải bài toán một cách khéo léo hơn.)

10.12. Hình dạng của trái đất ****

Trái đất hơi phồng ở xích đạo, nguyên nhân là do lực quán tính ly tâm trong hệ quy chiếu quay của trái đất. Mục đích của bài tập này là tìm hình dạng của trái đất, đầu tiên là không chính xác, sau đó là chính xác.

(a) Phương pháp không chính xác thường dùng là giả sử rằng trọng lực của trái đất (không phải là hình cầu hoàn hảo) hướng vào tâm, và sau đó tính mặt đẳng thế (kết hợp cả trọng lực và lực quán tính ly tâm). Chỉ ra rằng phương pháp này dẫn đến một bề mặt có độ cao (đối với một trái đất hình cầu có cùng thể tích) được cho bởi

$$h(\theta) = R\left(\frac{R\omega^2}{6g}\right)(3\sin^2\theta - 2) \tag{10.40}$$

trong đó θ là góc cực (góc tính từ bắc cực), và R là bán kính trái đất.

(b) Phương pháp trên đây là không chính xác bởi vì sự méo mó của trái đất sẽ gây ra lực hấp dẫn không hướng vào tâm của trái đất (ngoại trừ tại xích đạo và tại các cực). Sự nghiêng này trong chiều của lực khi đó sẽ thay đổi độ dốc của mặt đẳng thế, và nó chỉ ra rằng (mặc dù điều này không hiển nhiên lắm) ảnh hưởng này có cùng bậc như độ dốc của bề mặt tìm được trong câu (a). Nhiệm vụ của bạn: Giả sử rằng mật độ của trái đất là hằng số,[11] và độ cao chính xác đó lấy dưới dạng của hằng số f nào đó nhân với kết quả tìm được trong câu (a),[12] chỉ ra rằng $f = 5/2$.[13] Thực hiện việc này bằng cách đòi hỏi rằng thế năng tại cực bằng với thế năng tại xích đạo. Hãy cảm thấy thoải mái khi tính toán bằng số.

10.13. Độ lệch về hướng nam ****

Một quả bóng được thả rơi từ độ cao h (nhỏ so với bán kính của trái đất) tại góc cực θ. Giả sử (một cách không chính xác) rằng trái đất là một hình cầu hoàn hảo. Chỉ ra rằng một ảnh hưởng Coriolis bậc hai sẽ dẫn đến một độ lệch về hướng nam (trong bắc bán cầu) bằng $(2/3)(\omega^2 h^2/g)\sin\theta\cos\theta$.[14]

Hóa ra rằng độ lệch thực tế về hướng nam là lớn hơn công thức trên đây; nó bằng $4(\omega^2 h^2/g)\sin\theta\cos\theta$. Do đó hình như có những ảnh hưởng khác trong quá trình tính toán

[11] Điều này không đúng sự thật nhưng rất khó để giải khi mật độ không phải là hằng số, kể cả khi chúng ta giả sử biết được mật độ là một hàm của bán kính.

[12] Dữ liệu vệ tinh chỉ ra rằng hình dạng tổng quát cho bởi phương trình (10.40) cơ bản là đúng, chỉ cần thêm tối đa một hằng số nào đó. Tôi không thể nghĩ thêm được một phương pháp lý thuyết dễ hiểu nào để xác minh giả thuyết rằng hình dạng có dạng này, do đó chúng ta hãy chấp nhận nó. Nó vẫn là một bài toán hay.

[13] Nếu Δh là hiệu số giữa bán kính tại xích đạo và bán kính tại cực thì thừa số 5/2 sẽ dẫn đến Δh không chính xác khoảng $11km$ (như bạn có thể chỉ ra) trong phương trình (10.40) trở thành khoảng $28km$, đây là giá trị hợp lý có thể chấp nhận được, nó gần với giá trị quan sát thực tế là $21.5km$. Sự không thống nhất ở đây sinh ra do thực tế rằng mật độ của trái đất không phải là hằng số; nó giảm đối với bán kính.

[14] Lúc này chúng ta có ý rằng ảnh hưởng Coriolis là nguyên nhân gây ra quả bóng rơi xuống một điểm xa hơn về phía nam mà ở đó một quả lắc thẳng đứng (treo vào nơi mà quả bóng bắt đầu rơi) chạm vào mặt đất. Đo độ lệch này đối với điểm trên mặt đất dọc theo bán kính tới điểm rơi là việc không khả thi, bởi vì không có cách nào biết được chính xác tâm trái đất nằm ở đâu.

này. Nhiệm vụ chính của bài tập này là chỉ ra thừa số 2/3 đổi thành thừa số 4 như thế nào. Tiếp theo, chúng ta sẽ giữ lại số hạng đến bậc ω^2 (hoặc trong kỹ thuật là $\omega^2 R/g$) và bậc h/R. Cũng như vậy, sẽ dễ dàng tính được khoảng cách về hướng nam đối với điểm trên mặt đất dọc theo bán kính tới điểm rơi; gọi điểm này là P. Nhưng mục đích cuối cùng của chúng ta là sẽ xác định khoảng cách về phía nam đối với một con lắc treo thẳng đứng.

(a) Chỉ ra rằng khoảng cách giữa con lắc thẳng đứng và P là $(\omega^2 Rh/g)\sin\theta\cos\theta(1-h/R)$.

(b) Thực tế là lực hấp dẫn giảm với độ cao do đó quả bóng sẽ mất nhiều thời gian hơn so với đại lượng chuẩn $\sqrt{2h/g}$ để chạm đất. Chỉ ra rằng thời gian này bằng $\sqrt{2h/g}(1+5h/6R)$.

(c) Gọi y là độ cao trên mặt đất và z là khoảng cách về phía nam từ đường bán kính tới điểm rơi. Chỉ ra rằng lực quán tính ly tâm sinh ra một gia tốc hướng về phía nam từ đường bán kính bằng $\ddot{z} = \omega^2(R+y)\sin\theta\cos\theta$.

(d) Chỉ ra rằng lực hấp dẫn sinh ra một gia tốc hướng về phía nam hướng ngược lại đường bán kính bằng $\ddot{z} = -g(z/R)$.

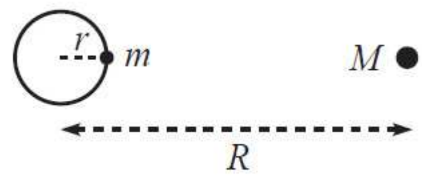
(e) Kết hợp phần (b), (c), và (d) để chỉ ra rằng lực quán tính ly tâm và lực hấp dẫn dẫn đến độ lệch về hướng nam từ điểm P bằng $(\omega^2 Rh/g)\sin\theta\cos\theta(1+7h/3R)$. Thêm vào ảnh hưởng Coriolis phía trên và trừ đi vị trí của con lắc thẳng đứng, chúng ta sẽ nhanh chóng thu được thừa số 4 như mong muốn. (Bài toán này dựa trên Belorizky và Sivardiere (1987).)

Mục 10.3: Thủy triều

10.14. Một hạt chuyển động trên vòng **

Một hạt khối lượng m được giữ để di chuyển trên một vòng không ma sát bán kính r đặt tại vị trí với khoảng cách R so với một vật có khối lượng M. Giả sử rằng $R \gg r$, và giả sử M là rất lớn so với khối lượng của vòng, đồng thời khối lượng của vòng lại rất lớn so với khối lượng m của hạt.

(a) Nếu vòng được giữ cố định và hạt được giải phóng từ một điểm sát với điểm gần nhất về bên phải, như chỉ ra trong hình 10.18, tần số của dao động nhỏ là bao nhiêu?



Hình 10.18:

(b) Nếu vòng được giải phóng và hạt xuất phát từ một điểm sát với điểm gần nhất về bên phải, tần số của dao động nhỏ là bao nhiêu? Giả sử rằng bạn nắm lấy M và di chuyển nó sang bên phải để giữ khoảng cách R giữa nó và vòng. (Tỷ lệ thời gian của dao động hóa ra cùng bậc với tỷ lệ thời gian của vòng chạm tới M nếu M được giữ cố định.)

10.15. Sự tiến động của các phân điểm ***

Bởi vì trái đất phồng lên ở xích đạo, và bởi vì trục quay của nó nghiêng đối với mặt phẳng hoàng đạo (mặt phẳng chứa mặt trời và gần như hoàn toàn mặt trăng), các lực thủy triều từ mặt trời và mặt trăng sinh ra một moment đối với trái đất, moment này gây ra việc trục quay của trái đất tiến động. Tốc độ của sự tiến động này là rất chậm; chu kỳ là khoảng 26 000 năm. Rút ra (một cách xấp xỉ) kết quả này bằng cách sau đây.[15] Chúng ta sẽ thực hiện một vài xấp xỉ thô ở đây, nhưng mục đích của chúng ta là đơn giản hóa để có thể hiểu một cách trực quan những gì đang diễn ra, và thu được một câu trả lời hợp lý. Giả sử rằng: (1) trục của trái đất nghiêng 23° so với mặt phẳng hoàng đạo; (2) chỗ phồng lên ở xích đạo có thể xấp xỉ bởi hai khối lượng điểm nằm trên xích đạo tại điểm cao nhất và thấp nhất đối với mặt phẳng hoàng đạo; (3) khối lượng của mỗi điểm hiệu dụng này đến từ một phần đất trên trái đất với một một diện tích r^2, trong đó r là bán kính của trái đất (đây chỉ là sự phỏng đoán); (4) phần đất này về cơ bản có độ cao không đổi $h \approx 21km$, đây là hiệu số giữa bán kính trái đất tại xích đạo và bán kính tại cực; (5) mật độ khối lượng của phần đất là xấp xỉ với mật độ trung bình của trái đất (điều này không đúng thực tế); (6) trái đất dành một nửa thời gian của nó là mùa hè/mùa đông, và một nửa thời gian là mùa xuân/mùa thu; (7) ảnh hưởng của thủy triều mặt trăng là gấp hai lần ảnh hưởng thủy triều của mặt trời. Giá trị số của các hằng số khác nhau có

[15] Có thể nhận được kết quả này khi tính đến hình dạng chính xác của trái đất, tuy nhiên điều này rất phức tạp. Ngoài ra cũng có thể tìm ra nó dưới dạng một xấp xỉ tốt bằng cách coi chỗ phồng lên ở xích đạo trái đất như là một vòng mảnh có khối lượng ở xích đạo, nhưng điều này cũng rắc rối. Do đó chúng ta sẽ sử dụng mô hình đơn giản hóa là khối lượng điểm, điều này vẫn sẽ mang lại kết quả khá tin cậy.

thể tìm thấy trong Phụ lục J.

10.5 Bài tập luyện tập

Mục 10.2: Các lực ảo

10.16. Sự xoáy trong ống dẫn nước *

Có phải lực quán tính Coriolis là nguyên nhân gây ra sự xoáy mà bạn thường quan sát thấy khi nước chảy xuống trong ống? Tức là có phải nước xoáy theo những chiều khác nhau ở bắc bán cầu và nam bán cầu? Một lý luận về thứ tự của độ lớn là đủ giải thích vấn đề này. Xem Shapiro (1962) cho việc thảo luận sâu hơn về vấn đề này.

10.17. Độ lớn của $\mathbf{g}_{\text{eff}}$ *

Xét (không có thật) một hành tinh hình cầu hoàn hảo quay tròn có giá trị g là hằng số ở khắp nơi trên bề mặt của nó. Độ lớn của $\mathbf{g}_{eff}$ như là hàm của θ là bao nhiêu? Đưa ra câu trả lời của bạn cho sự hiệu chỉnh bậc nhất đối với ω.

10.18. Dao động ngang tại xích đạo *

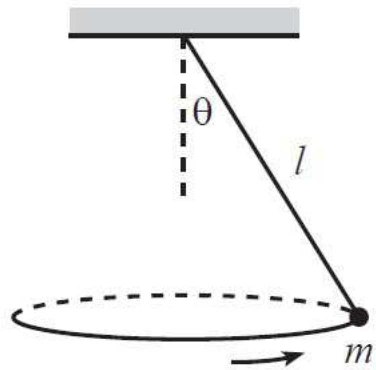
Xét (không có thật) một hành tinh hình cầu hoàn hảo có giá trị g là hằng số ở khắp nơi trên bề mặt của nó. Một hạt nằm trên sợi dây không ma sát hướng bắc nam ngang xích đạo. Sợi dây có dạng một cung tròn; tất cả các điểm có cùng khoảng cách tới tâm của trái đất. Hạt được thả từ trạng thái nghỉ, một khoảng cách ngắn từ xích đạo. Bởi vì $\mathbf{g}_{eff}$ không hướng trực tiếp vào tâm của trái đất, hạt sẽ hướng vào xích đạo và bị dao động. Tần số của sự dao động này là bao nhiêu?

10.19. Con lắc tròn *

Xét một con lắc tròn khối lượng m và độ dài l như trong hình 10.19. Khối lượng quay quanh trên một vòng tròn nằm ngang với sợi dây (không khối lượng) luôn tạo với phương thẳng đứng góc θ. Tìm vận tốc góc ω của khối lượng. Giải bài toán này bằng cách:

(a) Sử dụng hệ quy chiếu quán tính. Vẽ sơ đồ tất cả các lực tác dụng vào khối lượng, và sau đó sử dụng phương trình $F = ma$ theo chiều ngang và chiều thẳng đứng.

(b) Sử dụng hệ quy chiếu quay của con lắc. Vẽ sơ đồ tất cả các lực tác dụng vào khối lượng, và sau đó sử dụng phương trình $F = ma$ theo chiều ngang và chiều thẳng đứng



Hình 10.19:

10.20. Một thùng nước quay tròn **

Một thùng nước thẳng đứng quay tròn với tần số ω quanh trục đối xứng thẳng đứng của nó. Khi nước trong thùng đạt trạng thái cân bằng đối với thùng, tìm hình dạng của mặt nước.

10.21. Sự hiệu chỉnh đối với trọng lực **

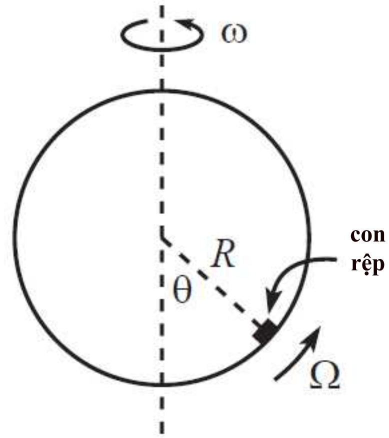
Một khối lượng rơi từ một điểm phía trên đường xích đạo. Xét thời điểm khi vật đã rơi được một đoạn là d. Nếu chúng ta chỉ xét lực quán tính ly tâm thì bạn có thể nhanh chóng chỉ ra rằng hiệu chỉnh đối với g_{eff} tại điểm này (liên quan đến điểm bắt đầu rơi) là tăng lên một lượng $\omega^2 d$. Tuy nhiên đồng thời cũng có thêm một ảnh hưởng Coriolis bậc hai. Tổng của các sự hiệu chỉnh này là bao nhiêu?[16]

10.22. Một con bọ di chuyển trên vòng **

Một vòng bán kính R quay tròn với vận tốc góc không đổi ω quanh một đường kính của nó như trong hình 10.20. Một con bọ nhỏ di chuyển với vận tốc góc không đổi Ω quanh chiếc vòng. Gọi $\mathbf{F}$ là tổng các lực mà chiếc vòng tác dụng vào con bọ khi con bọ ở tại vị trí góc θ, và gọi $F_\perp$ là thành phần của $\mathbf{F}$ vuông góc với mặt phẳng của vòng. Tìm $F_\perp$ theo hai cách (bỏ qua trọng lực trong bài toán này):

(a) Tính toán trong hệ quy chiếu quán tính: Tại vị trí góc θ, tìm tốc độ thay đổi của moment động lượng của con bọ quanh trục quay, và sau đó xét moment trên con bọ.

[16]Giá trị của g cũng thay đổi theo độ cao và điều này dẫn đến g_{eff} tăng lên một lượng $g(2d/R)$. Bạn có thể chỉ ra rằng đại lượng này là lớn hơn nhiều so với ảnh hưởng của lực quán tính ly tâm và Coriolis nói tới ở trên.



Hình 10.20:

(b) Tính toán trong hệ quy chiếu quay của vòng: Tại vị trí góc θ, tìm lực ảo có liên quan, và sau đó tính đến nó.

10.23. Phản lực pháp tuyến lớn nhất **

Một vòng tròn không ma sát bán kính R quay với vận tốc góc ω không đổi quanh một đường kính của nó. Một hạt nằm trên vòng tròn ban đầu ở tại vị trí đường kính này và sau đó được truyền cho một tác động rất nhỏ để chuyển động. Gọi $\mathbf{N}$ là tổng các lực mà vòng tròn tác dụng lên hạt, và $N_\perp$ là thành phần của $\mathbf{N}$ vuông góc với mặt phẳng của vòng. Hỏi $N_\perp$ lớn nhất tại đâu? Độ lớn của $\mathbf{N}$ như là hàm của vị trí là như thế nào? (Bỏ qua trọng lực trong bài toán này.)

10.24. Tên lửa và lực quán tính Coriolis **

Tại góc cực θ, một quả tên lửa được phóng lên về phía đông tại một góc nghiêng α so với mặt đất.Tìm độ lệch về phía tây và phía nam sinh ra do lực quán tính Coriolis. Biểu diễn theo θ, góc α_{max} nào sẽ dẫn đến tổng khoảng cách của độ lệch là lớn nhất? α_{max} bằng bao nhiêu khi θ bằng 60°, 45° và (xấp xỉ) 0°? Khi giá trị của θ lớn hơn 60° thì sao?

10.25. Chuyển động tự do của hạt **

Một hạt trượt trên một bàn không ma sát quay ngược chiều kim đồng hồ với tần số không đổi ω. Khi quan sát trong một hệ quy chiếu quán tính, hạt chỉ đơn giản là di chuyển trên một đường thẳng. Nhưng trong hệ quy chiếu quay của bàn, chỉ ra rằng phương trình $F = ma$ sẽ có dạng,

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \omega^2 x + 2\omega\dot{y},\\ \ddot{y} &= \omega^2 y - 2\omega\dot{x},\end{aligned} \tag{10.41}$$

và kiểm tra rằng nghiệm của hệ phương trình vi phân này là[17]

$$\begin{aligned} x(t) =& (A+Bt)cos\omega t + (C+Dt)sin\omega t \\ y(t) =& -(A+Bt)sin\omega t + (C+Dt)cos\omega t. \end{aligned} \tag{10.42}$$

10.26. Đồng tiền trên bàn quay ***

Một đồng tiền đứng thẳng đứng tại một điểm bất kỳ trên một bàn quay tròn, và quay (không trượt) với một vận tốc góc nào đó sao cho tâm của nó không chuyển động trong hệ quy chiếu quán tính. Trong hệ quy chiếu của bàn quay, đồng tiền quay trên một đường tròn với cùng tần số như của bàn quay. Trong hệ quy chiếu của bàn quay, chỉ ra rằng

1. $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$, và
2. $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{L}/dt$ (Gợi ý: Coriolis).

10.27. Sự tiến động quan sát từ hệ quy chiếu quay ***

Xét một con quay có dạng là một bánh xe có tất cả khối lượng của nó tập trung ở trên vành. Một cần không khối lượng (vuông góc với mặt phẳng bánh xe) liên kết với khối tâm của bánh xe bằng chốt. Các điều kiện ban đầu được thiết lập sao cho con quay bị tiến động, với cần luôn luôn nằm ngang. Trong cách miêu tả của hình 9.30, chúng ta có thể viết vận tốc góc của con quay là $\boldsymbol{\omega} = \Omega\hat{\mathbf{z}} + \omega'\hat{\mathbf{x}}_3$ (trong đó $\hat{\mathbf{x}}_3$ là phương ngang trong trường hợp này).

Xét một vật trong hệ quy chiếu quay tròn quanh trục $\hat{\mathbf{z}}$ với vận tốc góc Ω. Trong hệ quy chiếu này, con quay có vận tốc góc ω' quanh trục đối xứng "cố định" của nó. Do đó, trong hệ quy chiếu này chúng ta phải có $\boldsymbol{\tau} = 0$, bởi vì $\mathbf{L}$ là hằng số. Kiểm ra rõ ràng rằng $\boldsymbol{\tau} = 0$ (tính toán đối với chốt) trong hệ quy chiếu quay này (bạn sẽ cần tìm mối liên hệ giữa ω' và Ω). Nói một cách khác, chỉ ra rằng moment sinh ra do trọng lực là cân bằng với moment sinh ra do lực Coriolis (bạn có thể nhanh chóng chỉ ra rằng lực quán tính ly tâm không sinh ra moment tĩnh).

Mục 10.3: Thủy triều

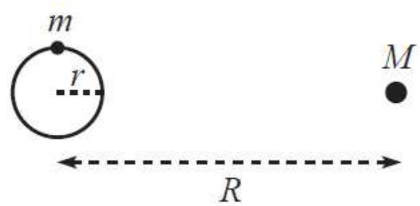
[17]Nếu bạn muốn, bạn có thể tìm ra các nghiệm này trong Chương 4 bằng cách đoán nghiệm dạng mũ của phương trình $F = ma$. Bạn sẽ tìm ra rằng có nghiệm suy biến, nghiệm này dẫn đến xuất hiện đại lượng dạng $(A + Bt)$ mà chúng ta thấy trong trường hợp cản tới hạn trong Mục 4.3.

10.28. Lực tiếp tuyến lớn nhất *

Tại góc nào so với phương ngang thì thành phần tiếp tuyến của lực thủy triều trong phương trình (10.35) là lớn nhất?

10.29. Một hạt chuyển động trên vòng **

Một hạt khối lượng m được giữ để di chuyển trên một vòng không ma sát bán kính r đặt tại vị trí với khoảng cách R so với một vật có khối lượng M. Giả sử rằng $R \gg r$, và giả sử M là rất lớn so với khối lượng của vòng, đồng thời khối lượng của vòng lại rất lớn so với khối lượng m của hạt.



Hình 10.21:

(a) Nếu vòng được giữ cố định và hạt được giải phóng từ điểm trên cùng như trong hình 10.21 thì tốc độ của hạt sẽ là bao nhiêu khi nó đi qua điểm gần nhất về bên phải của vòng?

(b) Nếu vòng được tự do và hạt bắt đầu tại điểm hơi lệch về bên phải của điểm trên cùng thì tốc độ của nó đối với vòng là bao nhiêu khi nó đi qua điểm gần nhất về bên phải của vòng? Giả sử rằng bạn nắm lấy M và di chuyển nó về bên phải để giữ khoảng cách R tới vòng.

10.30. Chuyển động quanh hành tinh **

Một hạt có khối lượng m được giữ để di chuyển trên một vòng không ma sát bán kính r, vòng chuyển động quỹ đạo quanh hành tinh có khối lượng M với khoảng cách R từ nó. Các điều kiện đầu được thiết lập sao cho mặt phẳng của vòng luôn vuông góc với đường thẳng nối nó và hành tinh. Giả sử $R \gg r$ và khối lượng của vòng là lớn hơn rất nhiều so với khối lượng của m. Vẽ các đường thẳng lực trong hệ quy chiếu của vòng (giống như trong hình 10.14). Nếu hạt được giải phóng từ một điểm sát với điểm đằng trước của vòng thì tần số của dao động nhỏ là bao nhiêu?

10.31. Giới hạn Roche **

Một viên đá hình cầu nhỏ bao phủ bởi cát rơi xuyên tâm vào một hành tinh. Gọi bán kính của hành tinh là R và mật độ khối lượng của nó là ρ_p, và gọi mật độ khối lượng của viên đá là ρ_r. Hóa ra rằng khi viên đá tiến đến một vị trí đủ gần đối với hành tinh thì lực thủy triều bóc lớp cát trên viên đá sẽ lớn hơn lực hấp dẫn của viên đá đối với lớp cát. Khoảng cách tới hạn này được gọi là giới hạn Roche.[18] Chỉ ra rằng giới hạn Roche được cho bởi (chú ý tới sự không phụ thuộc vào bán kính của viên đá)

$$d = R\left(\frac{2\rho_p}{\rho_r}\right)^{1/3}. \qquad (10.43)$$

10.32. Giới hạn Roche với sự quay **

Nếu một vật thể chuyển động quanh một hành tinh với quỹ đạo không phải là hình tròn (ví dụ như ghế của vòng đu quay) thì giới hạn Roche là giống như trường hợp vật thể rơi xuyên tâm trong bài tập trước (như bạn có thể chỉ ra). Tuy nhiên, chỉ ra rằng nếu một vật thể chuyển động quỹ đạo quanh một hành tinh theo cách như vậy sao cho có một mặt luôn hướng về phía hành tinh thì giới hạn Roche được cho bởi

$$d = R\left(\frac{3\rho_p}{\rho_r}\right)^{1/3}. \qquad (10.44)$$

10.6 Lời giải

10.1. Định nghĩa như thế nào?

Thực tế có ít nhất bốn định nghĩa có thể cho điểm ở "bên dưới" bạn trên mặt đất: (1) điểm nằm dọc trên đường thẳng giữa bạn và tâm trái đất, (2) điểm nằm dọc theo hướng lực hấp dẫn của trái đất, (3) điểm mà tại đó một quả lắc thẳng treo ở trạng thái nghỉ (đó là điểm nằm dọc theo chiều lực trọng trường hiệu dụng), và (4) điểm ở đó một vật rơi chạm vào mặt đất.

Định nghĩa thứ ba là định nghĩa hợp lý nhất, bởi vì nó định nghĩa chiều hướng lên trên theo đó các tòa nhà được xây dựng. Tại bất kỳ cách đánh giá nào thì định nghĩa thứ ba và định nghĩa thứ tư là các định nghĩa mà bạn có thể thực hành được. Định nghĩa thứ ba khác với định nghĩa thứ hai là do lực quán tính ly tâm, lực này làm $\mathbf{g}_{eff}$ hướng hơi lệch về phía nam (ở bắc bán cầu) so với gia tốc trọng trường $\mathbf{g}$. Thêm vào đó định nghĩa thứ ba khác với định nghĩa thứ nhất do thực tế rằng $\mathbf{g}$ không hướng vào tâm (xem nhận xét đầu tiên tại phần cuối của Mục 10.2.2). Và nó khác định nghĩa thứ tư do lực quán tính Coriolis, lực này làm cho một vật rơi sẽ bị hơi lệch

[18] Giới hạn Roche đưa ra khoảng cách bán kính mà tại đó các vật thể liên kết lỏng lẻo không thể liên kết thành một khối. Mặt trăng của chúng ta (là một khối cầu của đá và cát) nằm bên ngoài giới hạn Roche của trái đất. Nhưng các vòng của Sao Thổ (chứa các phần tử băng lỏng lẻo) nằm trong giới hạn Roche của nó.

về phía đông. Chú ý rằng tất cả bốn định nghĩa trên là tương đương với nhau tại các cực. Và ba định nghĩa đầu tiên tương đương với nhau tại xích đạo.

10.2. Nhảy xa với $\mathbf{g_{eff}}$

Giả sử vận động viên nhảy với vận tốc v tại góc θ. Thời gian tới điểm cao nhất của chuyển động cho bởi $g_{eff}(t/2) = v\sin\theta$, do đó tổng thời gian là $t = 2v\sin\theta/g_{eff}$. Dẫn đến khoảng cách di chuyển sẽ là

$$d = v_x t = vt\cos\theta = \frac{2v^2\sin\theta\cos\theta}{g_{eff}} = \frac{v^2\sin 2\theta}{g_{eff}} \tag{10.45}$$

Biểu thức này lớn nhất khi $\theta = \pi/4$ như chúng ta đã biết rất rõ. Do đó chúng ta thấy rằng $d \propto 1/g_{eff}$. Lấy $g_{eff} \approx 10$ m/s^2 tại bắc cực và $g_{eff} \approx (10 - 0.05)$ m/s^2 tại xích đạo, chúng ta thấy rằng nhảy tại xích đạo xa xấp xỉ gấp 1.005 lần nhảy tại bắc cực. Do đó vận động viên nhảy xa tăng thêm được khoảng bốn cm. Nhưng điều này sẽ bị xóa bỏ hoàn toàn bởi thậm chí một cơn gió nhỏ nhất.

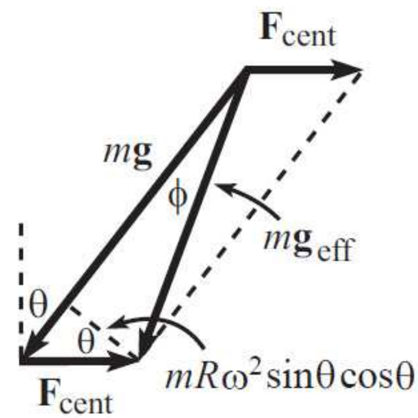
NHẬN XÉT: Đối với vận động viên nhảy xa, góc tối ưu khi giậm nhảy rõ ràng không phải là $\pi/4$. Việc thay đổi chiều đột ngột từ phương ngang tới một góc lớn như vậy sẽ đòi hỏi việc giảm đáng kể vận tốc. Góc tối ưu do đó phải là một góc nào đó nhỏ hơn $\pi/4$. Nhưng điều này không thay đổi kết quả tổng quát của chúng ta là $d \propto 1/g_{eff}$ (theo phân tích ở trên). Tuy nhiên chúng ta cũng giả sử rằng khối tâm của vận động viên nhảy xa bắt đầu và kết thúc tại cùng độ cao, điều này là không đúng sự thật trong nhảy xa; khối tâm sẽ thấp hơn tại vị trí kết thúc. Điều này thực tế thay đổi kết quả $d \propto 1/g_{eff}$. Nhưng sử dụng kết quả từ Bài tập 3.17, chúng ta thấy rằng ảnh hưởng này là nhỏ (sử dụng giá trị $h \approx 1$ m và $v \approx 10$ m/s). ♣

10.3. $\mathbf{g_{eff}}$ so với g

Các lực $m\mathbf{g}$ và $\mathbf{F}_{cent}$ được miêu tả trong hình 10.22. Độ lớn của $\mathbf{F}_{cent}$ là $mR\omega^2\sin\theta$, do đó thành phần của $\mathbf{F}_{cent}$ vuông góc với $m\mathbf{g}$ là $mR\omega^2\sin\theta\cos\theta = mR\omega^2(\sin 2\theta)/2$. Đối với $\mathbf{F}_{cent}$ nhỏ, cực đại hóa góc giữa $\mathbf{g}_{eff}$ và $\mathbf{g}$ là tương đương với việc cực đại hóa thành phần vuông góc này. Do đó, chúng ta thu được góc lớn nhất khi $\sin 2\theta = 1 \Longrightarrow \theta = \pi/4$. Góc lớn nhất này là

$$\phi \approx \tan\phi \approx (mR\omega^2(\sin\pi/2)/2)/mg = R\omega^2/2g \approx 1.7\cdot 10^{-3} \tag{10.46}$$

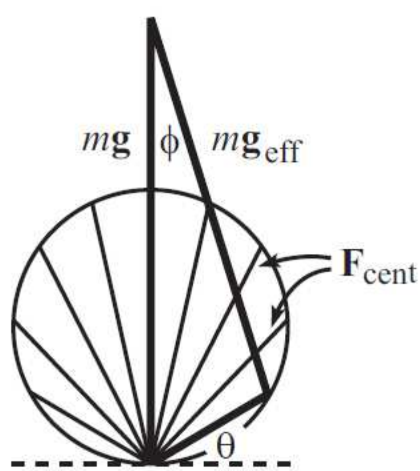
Nó là khoảng 0.1°.Bởi vì trái đất phồng lên ở xích đạo do đó khoảng cách từ trục không phải chính xác là $R\sin\theta$, góc của $\mathbf{g}$ không phải chính xác là θ (xem nhận xét đầu tiên tại phần cuối của Mục 10.2.2); và độ lớn của $\mathbf{g}$ không chính xác là hằng số trên khắp bề mặt của trái đất. Nhưng các ảnh hưởng này có thể bỏ qua, và góc tối ưu θ về cơ bản vẫn là $\pi/4$.



Hình 10.22:

NHẬN XÉT: Lời giải trên đây là lời giải xấp xỉ và nó chỉ phù hợp khi độ lớn của $\mathbf{F}_{cent}$ là nhỏ hơn rất nhiều so với mg. Bây giờ chúng ta sẽ đưa ra lời giải chính xác, đây là lời giải phù hợp ngay cả khi giá trị của $\mathbf{F}_{cent}$ là lớn khi so với mg, nhưng nó chỉ đúng trong trường hợp lý tưởng khi hành tinh là một hình cầu hoàn hảo, cho dù là nó đang quay. Không có hành tinh nào trong thực tế có dạng hình cầu bởi vì chúng không phải là vật rắn tuyệt đối. Nhưng bạn có thể tưởng tượng đó là một khối đá hình cầu đủ lớn.

Để giải bài toán này chính xác, chúng ta có thể chia $\mathbf{F}_{cent}$ thành các phần song song và



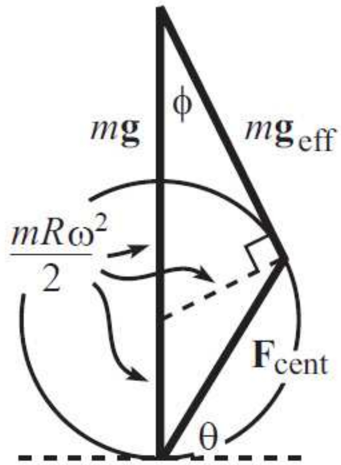
Hình 10.23:

vuông góc với $\mathbf{g}$ và sử dụng thành phần song song thêm vào với thành phần vuông góc như chúng ta đã sử dụng ở trên. Nếu ϕ là góc giữa $\mathbf{g}_{eff}$ và $\mathbf{g}$ thì từ hình 10.22 chúng ta có

$$\tan\phi = \frac{mR\omega^2 \sin\theta\cos\theta}{mg - mR\omega^2 \sin^2\theta}. \tag{10.47}$$

Chúng ta có thể tìm giá trị lớn nhất của ϕ bằng cách lấy đạo hàm. Nhưng ta cần cẩn thận nếu $R\omega^2 > g$ vì trong trường hợp này ϕ lớn nhất không có nghĩa là $\tan\phi$ lớn nhất. Bạn có thể tự mình giải bài toán theo cách này, ở đây để thay thế chúng ta sẽ đưa ra lời giải hình học thú vị sau đây.

Trong hình 10.23, vẽ vectơ $\mathbf{F}_{cent}$ khi θ thay đổi, liên quan với $m\mathbf{g}$ (do đó chúng ta chọn



Hình 10.24:

$m\mathbf{g}$ luôn hướng thẳng đứng trong hình vẽ này, trái ngược với $\mathbf{F}_{cent}$ luôn nằm ngang trong hình 10.22). Bởi vì độ dài của vectơ $\mathbf{F}_{cent}$ là tỷ lệ với $\sin\theta$ nên bạn có thể thấy rằng đầu của vectơ $\mathbf{F}_{cent}$ tạo thành một đường tròn. Do đó giá trị lớn nhất của ϕ đạt được khi $\mathbf{g}_{eff}$ hướng tiếp tuyến với vòng tròn này như trong hình 10.24. Tại trường hợp giới hạn khi $g \gg R\omega^2$ (đó là trường hợp một đường tròn nhỏ), chúng ta muốn tiếp điểm là điểm xa nhất về bên phải của đường tròn, do đó giá trị lớn nhất của ϕ đạt được khi $\theta = \pi/4$, trong trường hợp này $\phi \approx \sin\phi \approx (R\omega^2/2)/g$ như ta đã tìm thấy trong phần trên. Nhưng trong trường hợp tổng quát, hình 10.24 chỉ ra rằng giá trị lớn nhất của ϕ được cho bởi

$$\sin\phi_{max} = \frac{\frac{1}{2}mR\omega^2}{mg - \frac{1}{2}mR\omega^2}. \tag{10.48}$$

Tại trường hợp giới hạn khi ω nhỏ, giá trị này xấp xỉ $R\omega^2/2g$ như ở trên. Chú ý rằng lập luận này chỉ đúng nếu $R\omega^2 < g$. Trong trường hợp $R\omega^2 > g$ (đó là khi vòng tròn mở rộng về phía trên qua vectơ $m\mathbf{g}$), giá trị lớn nhất của ϕ đơn giản là π, và nó đạt được khi $\theta = \pi/2$. ♣

10.4. Các vòng tròn chuyển động

(a) Lực ảo $\mathbf{F}_f$ tác dụng lên khối lượng gồm hai thành phần là $\mathbf{F}_{cent}$ và $\mathbf{F}_{trans}$ bởi vì tâm của C_2 chuyển động. Do đó lực ảo sẽ là

$$\mathbf{F}_f = m\omega^2\mathbf{r}_2 + \mathbf{F}_{trans}, \tag{10.49}$$

trong đó $\mathbf{r}_2$ là vị trí của khối lượng trong hệ quy chiếu của C_2. Nhưng $\mathbf{F}_{trans}$ sinh ra do gia tốc của tâm C_2 bằng với lực quán tính ly tâm chịu bởi một điểm trên C_1. Do đó,

$$\mathbf{F}_{trans} = m\omega^2\mathbf{r}_1, \tag{10.50}$$

trong đó $\mathbf{r}_1$ là vị trí của tâm C_2 trong hệ quy chiếu của C_1. Thay biểu thức này vào phương trình (10.49) dẫn đến

$$\mathbf{F}_f = m\omega^2(\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1) = m\omega^2\mathbf{R}(t). \tag{10.51}$$

(b) Lực ảo $\mathbf{F}_f$ tác dụng trên khối lượng gồm hai thành phần là $\mathbf{F}_{cent}$ và $\mathbf{F}_{trans}$ bởi vì tâm của vòng tròn thứ N chuyển động. Do đó lực ảo là

$$\mathbf{F}_f = m\omega^2\mathbf{r}_N + \mathbf{F}_{trans,N}, \tag{10.52}$$

trong đó $\mathbf{r}_N$ là vị trí của khối lượng trong hệ quy chiếu của C_N.Nhưng $\mathbf{F}_{trans,N}$ bằng lực quán tính ly tâm chịu bởi một điểm trên vòng tròn thứ $(N-1)$ cộng thêm lực quán tính tịnh tiến do sự chuyển động của tâm vòng tròn thứ $(N-1)$. Do đó,

$$\mathbf{F}_{trans,N} = m\omega^2\mathbf{r}_{N-1} + \mathbf{F}_{trans,N-1}. \tag{10.53}$$

Thay biểu thức này vào phương trình (10.52) và sau đó tính toán đại lượng $\mathbf{F}_{trans,i}$ theo cách tương tự dẫn đến

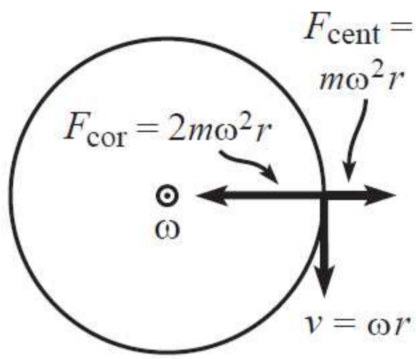
$$\mathbf{F}_f = m\omega^2(\mathbf{r}_N + \mathbf{r}_{N-1} + \cdots + \mathbf{r}_1) = m\omega^2\mathbf{R}(t). \tag{10.54}$$

Biểu thức này rất đơn giản với $\mathbf{F}_{cent}$ tuyến tính đối với $\mathbf{R}$.

NHẬN XÉT: Ta có một cách rất đơn giản để thu được kết quả $\mathbf{F}_f = m\omega^2\mathbf{R}(t)$ như sau đây. Bởi vì tất cả các vòng tròn đều quay với cùng vận tốc ω, do đó tất cả chúng cũng có thể gắn vào cùng nhau. Một mô hình vật rắn như vậy quả thực sinh ra cùng vận tốc ω đối với tất cả các vòng tròn, ví dụ như trường hợp mặt trăng quay một vòng quanh trục của nó và đồng thời cũng quay một vòng quanh trái đất, do đó dẫn đến việc một mặt luôn hướng về phía trái đất. Hiển nhiên rằng khối lượng đơn giản là di chuyển trên một vòng tròn bán với tần số ω sinh ra lực quán tính ly tâm $m\omega^2\mathbf{R}(t)$. Và thêm nữa chúng ta thấy rằng độ lớn của $\mathbf{R}(t)$ là hằng số. ♣

10.5. Khối lượng trên một bàn quay

Trong hệ quy chiếu quán tính, tổng các lực tác dụng lên khối lượng bằng 0 bởi vì nó ở trạng thái nghỉ. (Phản lực pháp tuyến cân bằng với trọng lực). Nhưng trong hệ quy chiếu quay, khối lượng



Hình 10.25:

chuyển động trên một đường tròn bán kính r với tần số ω. Do đó vận tốc của nó là $v = \omega t$. Dẫn đến trong hệ quy chiếu quay phải có một lực $mv^2/r = m\omega^2 r$ hướng vào trong để giải thích cho thành phần gia tốc hướng tâm. Và quả thực, khối lượng chịu một lực quán tính ly tâm $m\omega^2 r$ hướng ra ngoài và lực quán tính Coriolis $2m\omega v = 2m\omega^2 r$ hướng vào trong, và tổng của chúng là lực mà chúng ta mong muốn (xem hình 10.25)

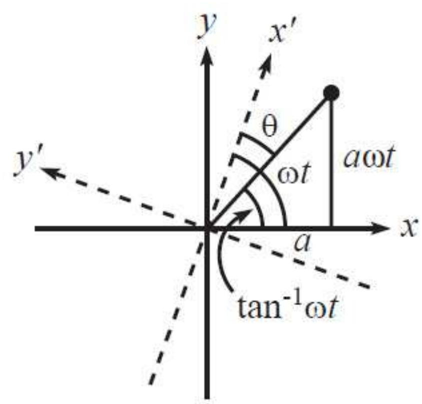
> NHẬN XÉT: Lực tổng hướng vào trong trong bài toán này có hơi khác với lực tác dụng trên một người chuyển động trên một đường tròn bán kính r với tần số ω trong hệ quy chiếu quán tính. Ví dụ nếu một vận động viên trượt băng duy trì quỹ đạo tròn thì cô ấy phải sử dụng các cơ để duy trì vị trí của thân mình so với cánh tay của cô ấy, và đầu của cô ấy đối với thân mình,... Nhưng nếu một người thay thế khối lượng trong bài toán đang xét thì cô ấy không cần bất kỳ nỗ lực chuyên nghiệp nào để giữ cơ thể của cô ấy di chuyển trên một đường tròn (điều này là dễ hiểu khi quan sát từ hệ quy chiếu quán tính), bởi vì mỗi điểm trên cơ thể cô ấy về bản chất là di chuyển cùng tốc độ và bán kính, và do đó sẽ chịu cùng lực quán tính ly tâm và lực quán tính Coriolis. Do đó cô ấy không thực sự chịu lực tổng $m\omega^2 r$, giống như một người nào đó không phải chịu trọng lực khi rơi tự do mà không bị cản bởi không khí bởi vì trọng lực tác động lên mỗi phần của khối lượng theo cách giống hệt nhau. (Như đã đề cập ở trang 7, lực giống trọng lực này dẫn Einstein đến Nguyên lý tương đương của ông ấy). ♣

10.6. Khối lượng được giải phóng

Gọi x' và y' là trục của hệ quy chiếu quay trùng với trục x và y của hệ quy chiếu quán tính tại thời điểm khối lượng được giải phóng ($t = 0$). Giả sử ban đầu khối lượng ở trên trục x'. Sau khoảng thời gian t, cơ hệ ở trạng thái như trong hình 10.26. Tốc độ của khối lượng là $v = a\omega$, do đó nó sẽ di chuyển được một khoảng cách $a\omega t$. Dẫn đến góc giữa vectơ của khối lượng và trục x của hệ quy chiếu quán tính là $\tan^{-1}\omega t$, với chiều dương ngược chiều kim đồng hồ. Do đó, góc giữa vectơ của khối lượng và trục quay x' sẽ là

$$\theta(t) = -(wt - \tan^{-1}\omega t) \tag{10.55}$$

Và bán kính là



Hình 10.26:

$$r(t) = a\sqrt{1+\omega^2 t^2}. \tag{10.56}$$

Đối với trường hợp t lớn, ta có $r(t) \approx a\omega t$ và $\theta(t) \approx -wt + \pi/2$, điều này là có ý nghĩa bởi vì khối lượng đạt tới góc $\pi/2$ của hệ quy chiếu quán tính.

10.7. Vòng tròn Coriolis

Bằng cách xây dựng mặt băng như giả thiết (với bề mặt trực giao với $\mathbf{g}_{eff}$ tại tất cả các điểm), phản lực pháp tuyến của bề mặt băng sẽ cân bằng với ảnh hưởng của lực hấp dẫn và lực quán tính ly tâm trong hệ quy chiếu quay của trái đất. Do đó chúng ta chỉ cần quan tâm đến lực quán tính Coriolis $-2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$.

Gọi góc từ bắc cực là θ. Chúng ta giả thiết rằng vòng tròn là đủ nhỏ sao cho θ về cơ bản là hằng số suốt quá trình chuyển động. Thành phần của lực quán tính Coriolis hướng theo phương ngang, dọc bề mặt băng sẽ có độ lớn $f = 2mv(\omega\cos\theta)$ và vuông góc với chiều di chuyển. (Thành phần thẳng đứng của lực Coriolis, sinh ra từ thành phần $\boldsymbol{\omega}$ hướng dọc bề mặt, đơn giản chỉ thay đổi theo phản lực pháp tuyến.) Bởi vì lực này vuông góc với chiều di chuyển, v không thay đổi. Do đó, $f = 2mv\omega\cos\theta$ là hằng số. Nhưng một lực hằng số vuông góc với sự di chuyển của phần tử sẽ sinh ra quỹ đạo hình tròn.[19] Bán kính của vòng tròn này cho bởi

$$2mv\cos\theta = \frac{mv^2}{r} \quad \Longrightarrow \quad r = \frac{v}{2\omega\cos\theta}. \tag{10.57}$$

[19]Nếu bạn muốn tìm hiểu thêm biến đổi toán học về điều này, bạn có thể xem chú thích 34 trong Chương 9.

Tần số của chuyển động tròn là

$$\omega' = \frac{v}{r} = 2\omega\cos\theta \tag{10.58}$$

Để có hình dung về bán kính của đường tròn này, bạn có thể chỉ ra (sử dụng $\omega \approx 7.3 \cdot 10^{-5}$ s^{-1}) rằng $r \approx 10$ km khi $v = 1$ m/s và $\theta = 45°$. Thậm chí một lực ma sát rất nhỏ cũng có thể làm ảnh hưởng này không thể nhìn thấy được. Trong trường hợp đặc biệt $\theta \approx \pi/2$ (đó là trường hợp gần xích đạo), thành phần lực quán tính Coriolis dọc bề mặt có thể bỏ qua, do đó r rất lớn và ω' tiến tới 0.

NHẬN XÉT: Trong trường hợp giới hạn $\theta \approx 0$ (đó là trường hợp gần bắc cực), lực quán tính Coriolis về cơ bản là hướng dọc bề mặt. Các phương trình ở trên đưa đến $r \approx v/(2\omega)$, và $\omega' \approx 2\omega$. Đối với trường hợp đặc biệt khi tâm của vòng tròn ở tại bắc cực, kết quả $\omega' \approx 2\omega$ dường như là không chính xác bởi vì bạn có thể muốn nói rằng chuyển động tròn sẽ đạt được bằng cách quả khúc côn cầu giữ không di chuyển trong hệ quy chiếu quán tính, trong khi trái đất quay bên dưới nó (do đó dẫn đến $\omega' = \omega$). Sai lầm của lập luận này đó là trái đất không phải hình cầu, $\mathbf{g}_{eff}$ không hướng xuyên tâm. Nếu quả bóng khúc côn cầu bắt đầu chuyển động từ trạng thái đứng yên trong hệ quy chiếu quán tính thì nó sẽ đi về phía bắc cực do thành phần lực hấp dẫn dọc mặt "mức" không hình cầu của trái đất. Để không trôi về cực, quả bóng cần phải chuyển động với tần số ω (đối với hệ quy chiếu quán tính) theo chiều ngược[20] với chiều quay của trái đất. Lý do cho điều này đó là trong hệ quy chiếu quay của quả bóng, quả bóng chịu cùng lực quán tính ly tâm mà nó sẽ phải chịu nếu nó ở trạng thái nghỉ trong hệ quy chiếu của trái đất quay cùng với nó, bởi vì hai hệ quy chiếu này có cùng độ lớn của ω; chiều của $\boldsymbol{\omega}$ hướng ngược nhau nhưng điều này không ảnh hưởng đến lực ly tâm. Do đó, quả bóng khúc côn cầu ở cùng giá trị góc θ trên mặt "mức", giống y nguyên như quả bóng ở trạng thái nghỉ trên trái đất. Vận tốc góc của quả bóng khúc côn cầu đối với trái đất do đó sẽ là $(-\omega) - (\omega) = -2\omega$, trong đó dấu trừ biểu hiện chiều ngược lại. ♣

10.8. $\tau = dL/dt$ ⋆

Gọi $\mathbf{r}'_i$ là vectơ vị trí trong hệ quy chiếu không quán tính. (Dưới dạng các đại lượng trong Mục 8.4.3, $\mathbf{r}'_i$ bằng $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0$.) Tổng động lượng của một vật trong hệ quy chiếu không quán tính là

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}'_i. \tag{10.59}$$

[20]Tất nhiên, quả bóng cũng có thể chuyển động với tần số ω theo cùng chiều với chiều quay của trái đất. Nhưng trong trường hợp này quả bóng chỉ đơn giản là ở một chỗ trên trái đất

Do đó,

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{L}}{dt} &= \sum_i \dot{\mathbf{r}}'_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}'_i + \sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i \ddot{\mathbf{r}}'_i \\ &= 0 + \sum_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i^{total} \\ &= \sum_i \mathbf{r}'_i \times (\mathbf{F}_i^{real,ext} + \mathbf{F}_i^{real,int} + \mathbf{F}_i^{fictitious}).\end{aligned} \tag{10.60}$$

Số hạng đầu tiên, $\sum \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i^{real,ext}$, bằng với tổng moment ngoài đối với gốc của hệ quy chiếu không quán tính như mong muốn. Số hạng thứ hai, $\sum \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i^{real,int}$, bằng với moment tổng của các lực trong, số hạng này sẽ bằng không với lý do giống như trong Mục 8.4.3. Số hạng thứ ba, $\sum \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i^{fictitious}$, là phần đòi hỏi kéo léo hơn. Bởi vì hệ quy chiếu không quay, chúng ta chỉ có lực ảo tịnh tiến. Do đó số hạng này bằng với

$$\sum \mathbf{r}'_i \times (-m_i \ddot{\mathbf{r}}_0) = -\sum m_i \mathbf{r}'_i \times \ddot{\mathbf{r}}_0 = -M\mathbf{r}'_{CM} \times \ddot{\mathbf{r}}_0 \tag{10.61}$$

trong đó $\mathbf{r}'_{CM}$ là vị trí của khối tâm vật rắn trong hệ quy chiếu không quán tính, và $\mathbf{r}_0$ là vị trí của gốc hệ quy chiếu không quán tính đối với hệ quy chiếu quán tính. Kết quả này phù hợp với số hạng thứ hai trong phương trình (8.45), ở đó $\mathbf{r}'_{CM}$ được viết dưới dạng $\mathbf{R} - \mathbf{r}_0$. Do đó, ba điều kiện để số hạng thứ ba triệt tiêu là: (1) $\mathbf{r}'_{CM} = 0$, đó là khối tâm nằm tại gốc của hệ quy chiếu không quán tính. Lực ảo tịnh tiến tác động giống như lực hấp dẫn, do đó liên quan đến moment thì lực tịnh tiến chỉ tác động tại khối tâm. Dẫn đến, nếu khối tâm đặt tại gốc tọa độ thì lực tịnh tiến không có cánh tay đòn, do đó không sinh ra moment. (2) $\ddot{\mathbf{r}}_0 = 0$, tức là gốc tọa độ không có gia tốc, do đó không có lực tịnh tiến. (3) $\mathbf{r}'_{CM}$ song song với $\ddot{\mathbf{r}}_0$. Điều này có nghĩa là nếu lực tịnh tiến được xem như là một lực hấp dẫn thì khối tâm nằm ngay bên trên hoặc bên dưới gốc tọa độ. Do đó sẽ không có cánh tay đòn và dẫn đến không có moment.

Nếu hệ quy chiếu vừa tịnh tiến và vừa quay thì trong trường hợp tổng quát sẽ có moment từ các lực quán tính ly tâm, quán tính Coriolis và quán tính góc phương vị, ngay cả khi chọn khối tâm là gốc tọa độ. Điều này là đúng bởi vì các lực ảo liên quan đến $\mathbf{r}$ (hoặc $\dot{\mathbf{r}}$), điều này dẫn đến moment không phải là tuyến tính đối với $\mathbf{r}$ (bởi vì đã có $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$). Khi đó, điều này có nghĩa là vectơ vị trí $\mathbf{r}'_{CM}$ không sinh ra trong tính toán $d\mathbf{L}/dt$ như trong phương trình (10.61).

10.9. Xác định hệ quy chiếu của bạn

Vâng. Bạn có thể xác định ω và $d\omega/dt$ như sau đây. Đo đồng thời lực tác dụng lên khối lượng m ở trạng thái nghỉ tại vị trí $\mathbf{r}_1$ và $\mathbf{r}_2$. Lực quán tính ly tâm và quán tính góc phương vị là các lực có liên quan, do đó hiệu số của các lực tại hai vị trí là

$$\Delta\mathbf{F} \equiv \mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2 = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)) - m\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \tag{10.62}$$

Sử dụng tính chất là tích có hướng của hai vectơ vuông góc với từng vectơ, chúng ta thấy rằng độ lớn của các thành phần của $\Delta\mathbf{F}$ song song và vuông góc với $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ là $F_{\parallel} = m\omega^2 \mid \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \mid$ và $F_{\perp} = m(d\omega/dt) \mid \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \mid$. Do đó ta có

$$\omega = \sqrt{\frac{F_{\parallel}}{m \mid \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \mid}}, \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{F_{\perp}}{m \mid \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \mid}. \tag{10.63}$$

Các biểu thức này đưa đến ω và $d\omega/dt$ dưới dạng các đại lượng đo được. Chú ý rằng chúng ta cần đo lực tại hai điểm ở đây. Đo lực $-m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - m(d\omega/dt) \times \mathbf{r}$ tại chỉ một điểm $\mathbf{r}$ không mang lại cho chúng ta bất cứ điều gì, bởi vì chúng ta vẫn chưa biết gốc tọa độ ở đâu, do đó chúng ta không biết được giá trị của $\mathbf{r}$. Nhưng với hai điểm, hiệu số $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ là độc lập đối với gốc tọa độ.

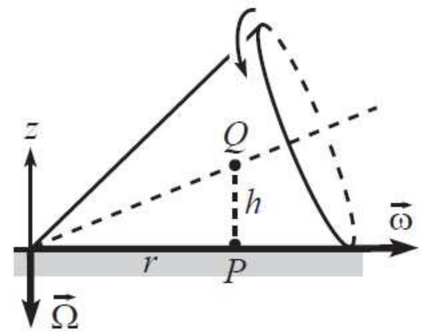
Nếu bạn muốn, bạn có thể kiểm tra kết quả đối với ω bằng cách tìm hiệu số giữa các lực trên hai vật tại cùng một vị trí, một vật ở trạng thái nghỉ và vật kia chuyển động với vận tốc $\mathbf{v}$. Bởi vì giá trị của $\mathbf{r}$ là giống nhau, do đó chỉ còn thành phần Coriolis tồn tại trong hiệu số này. Điều này dẫn đến $\omega = \mid \Delta\mathbf{F} \mid /(2mv)$.

Để tìm tâm của đĩa, đo lực tác dụng lên phần tử tại vị trí cho trước. Chia lực này thành phần trực giao trong tỷ số của $d\omega/dt$ đối với ω^2, bằng cách vẽ một đường thẳng tạo một góc $\tan^{-1}((d\omega/dt)/\omega^2)$ đối với lực này. Đường thẳng này hướng sang trái hoặc hướng sang phải lực phụ thuộc vào vectơ $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ trên là nằm bên phải hoặc bên trái của vectơ $\Delta\mathbf{F}$. Đường thẳng này chứa thành phần tỷ lệ với ω^2, đây là thành phần hướng tâm. Do đó đường thẳng này sẽ đi qua tâm của đĩa. Dẫn đến nếu chúng ta lặp lại quá trình với phần tử tại vị trí khác (không nằm trên đường thẳng này) và vẽ đường thẳng tương tự thì giao điểm của hai đường thẳng sẽ là tâm của đĩa.

> NHẬN XÉT: Nếu chúng ta bỏ sự hạn chế rằng không có bất kỳ lực thực nào thì không thể xác định được ba đại lượng mong muốn, bởi vì một người nào đó khẳng định rằng ω, $d\omega/dt$ và vị trí của tâm đĩa là khác với những gì bạn tìm ra, và sau đó anh ta cũng có thể nói rằng có một số (được sắp xếp) lực thực can thiệp vào để làm lực tổng như những gì bạn quan sát thấy. ♣

10.10. Thay đổi chiều của ω

(a) Gọi Q là điểm trên trục của hình nón ở ngay phía trên P, và gọi chiều cao của nó phía trên P là h (xem hình 10.27). Xét vị trí sau thời gian t vô cùng nhỏ. Gọi P' là điểm bây giờ ở ngay dưới Q (xem hình 10.28). Vận tốc góc của hình nón là ω, do đó Q chuyển động theo phương ngang với vận tốc $v_Q = \omega h$. Dẫn đến, trong khoảng thời gian t vô cùng nhỏ, Q di



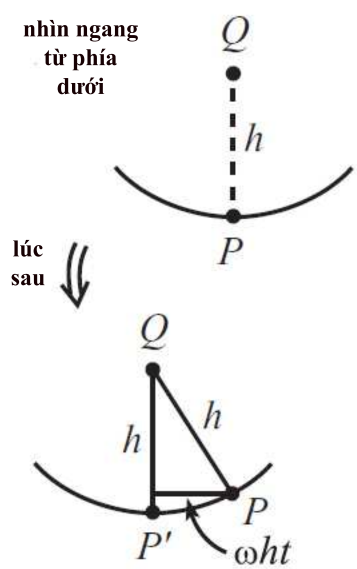
Hình 10.27:

chuyển sang bên cạnh một đoạn ωht.

Khoảng cách ωht này cũng là (về bản chất) khoảng cách theo phương ngang giữa P và P'. Do đó, sau khi biến đổi hình học dẫn đến P bây giờ có độ cao

$$y(t) = h - \sqrt{h^2 - (\omega ht)^2} = h - h\sqrt{1 - (\omega t)^2} \approx \frac{(\omega t)^2 h}{2} = \frac{1}{2}(\omega^2 h)t^2 \tag{10.64}$$

ở phía trên mặt bàn. Bởi vì P bắt đầu chuyển động trên bàn với vận tốc bằng không, điều này có nghĩa rằng P phải chịu gia tốc $\omega^2 h$ theo chiều thẳng đứng. Do đó một khối lượng m đặt tại P phải chịu một lực thực (phản lực pháp tuyến hoặc một lực nào đó tương tự) là $F_P = m\omega^2 h$ với chiều hướng lên trên, nếu nó được giữ không di chuyển đối với hình nón.



Hình 10.28:

(b) Tần số Ω của sự tiến động (tần số này chỉ ra $\boldsymbol{\omega}$ quay quanh gốc nhanh hay chậm) bằng vận tốc của Q chia cho r, trong đó r là khoảng cách từ Q đến trục z (đó chính là bán kính của vòng tròn mà Q chuyển động). Do đó, $\boldsymbol{\Omega}$ có độ lớn $v_Q/r = \omega h/r$, và nó hướng theo chiều

$-\hat{\mathbf{z}}$ đối với trường hợp như trong hình 10.27. Dẫn đến $d\boldsymbol{\omega}/dt = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\omega}$ có độ lớn $\omega^2 h/r$, và nó hướng ra ngoài trang sách trong hình 10.27 (hoặc sang bên trái trong hình 10.28). Do đó, $\mathbf{F}_{az} = -m(d\boldsymbol{\omega}/dt) \times \mathbf{r}$ có độ lớn $m\omega^2 h$, và nó hướng theo chiều $-\hat{\mathbf{z}}$.

Một người có khối lượng m tại P do đó sẽ giải thích tình huống này như sau: "Tôi không có gia tốc đối với hình nón. Do đó, tổng lực tác dụng lên tôi trong hệ quy chiếu hình nón phải bằng không. Và quả thật, phản lực pháp tuyến F_P hướng lên trên của hình nón với độ lớn $m\omega^2 h$ là cân bằng với lực bí ẩn hướng xuống dưới F_{az} cũng có độ lớn $m\omega^2 h$."

Chú ý rằng lực quán tính góc phương vị vẫn có ảnh hưởng giống như lực quán tính tịnh tiến, lực quán tính ly tâm và trường hợp đơn giản hơn của lực quán tính góc phương vị đã được đề cập tới trong Mục 10.2.4. Trong tất cả các trường hợp này, "mặt đất" là chuyển động, do đó bạn sẽ cảm thấy giống như bạn đang lao nhanh theo chiều ngược lại đối với hệ quy chiếu không quán tính.

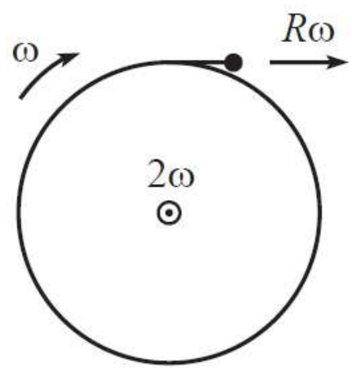
10.11. Tháo dây

Xét theo chiều kim đồng hồ. Trường hợp này dễ dàng giải bằng cách sử dụng hệ quy chiếu quán tính. Sau khi keo bị vỡ, khối lượng chuyển động trên đường thẳng tiếp tuyến, bởi vì dây không thể có lực ngang trừ khi khối lượng đã rẽ ra từ đường thẳng này, điều này là không thể. Tốc độ mà khối lượng bắt đầu chuyển động trên đường thẳng này (khi keo bị vỡ) là $R\omega$. Và nó tiếp tục chuyển động tại tốc độ này bởi vì vận tốc góc của bánh xe cho phép dây tháo ra ở tốc độ $R\omega$, đây chính xác là tốc độ cần tìm. Chú ý rằng sợi dây có sức căng bằng không ở trong nó, do đó không có sự đột ngột nào trong quá trình tháo dây.

Ngược chiều kim đồng hồ thì khó hơn, bởi vì chuyển động tuyến tính đơn giản không phù hợp với sự hạn chế của khối lượng buộc vào dây. Bây giờ sẽ có sức căng trong sợi dây, và khối lượng phải chịu chuyển động xoắn ốc, tất nhiên là điều này làm mọi thứ trở lên khó khăn hơn. Có thể giải bài toán bằng phương trình $F = ma$ hoặc cũng có thể sử dụng phương pháp Lagrange. Nhưng ở đây chúng ta sẽ giải bằng cách sử dụng lý luận khéo léo trong hệ quy chiếu quay. Phần khó khăn trong cách làm này là việc chọn hệ quy chiếu quay nào để sử dụng. Hệ quy chiếu hay dùng nhất là hệ quy chiếu quay của bánh xe, nhưng trong trường hợp này thì hệ quy chiếu này không quá hiệu quả bởi vì khối lượng phải chịu chuyển động xoắn ốc, chuyển động rất khó để nghiên cứu (tuy nhiên có thể xem nhận xét thứ tư ở dưới đây). Sẽ tốt hơn khi chúng ta tìm được một hệ quy chiếu mà trong đó khối lượng chỉ chịu một loại chuyển động đơn giản. Do đó nếu chúng ta xét một hệ quy chiếu quay ngược chiều kim đồng hồ với vận tốc góc 2ω thay vì ω thì mọi thứ sẽ trở thành đơn giản hơn.

Ý tưởng tổng quát sẽ được chỉ ra sau đây. Trong hệ quy chiếu mới quay ngược chiều kim đồng hồ với vận tốc góc 2ω, bánh xe sẽ quay cùng chiều kim đồng hồ với vận tốc góc ω. Do đó, nếu không có thứ gì giống như các lực ảo thì chúng ta sẽ có tình huống giống hệt như trường hợp cùng chiều kim đồng hồ mà chúng ta đã giải ở trên, do đó bài toán sẽ được giải quyết. Tuy nhiên, điều không may ở đây đó là sự tồn tại của các lực ảo. Và do đó nếu không có bất kỳ sự triệt tiêu kỳ diệu nào thì các lực này sẽ dẫn đến một lực ngang, lực ngang này sẽ gây ra điểm tiếp xúc của dây di chuyển theo cách này hay cách khác và dẫn đến độ dài của dây bị tháo tăng với tốc độ khác với $R\omega$. Tuy nhiên điều may mắn ở đây là sự triệt tiêu kỳ diệu như vậy quả thực là xảy ra. Chúng ta sẽ xem xét tại sao lại như vậy?

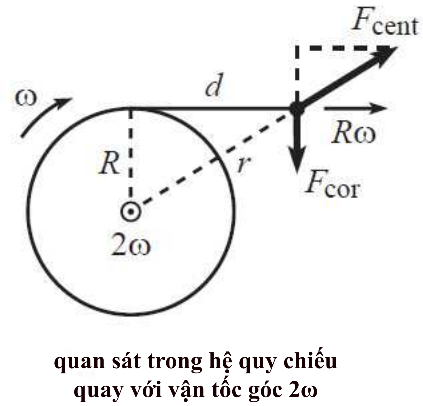
Trong hệ quy chiếu quay ngược chiều kim đồng hồ với vận tốc góc 2ω, xét thời điểm ngay sau



Hình 10.29:

khi khối lượng rời khỏi bánh xe như trong hình 10.29. Vận tốc của khối lượng tại thời điểm này là $v = R\omega$ hướng về bên phải. Có những lực nào tác dụng lên khối lượng? Có thể đó là lực căng của dây (lực căng này bằng không tại lúc bắt đầu, sau đó tăng như chúng ta sẽ thấy sau đây), và sau đó là lực quán tính ly tâm và lực quán tính Coriolis. Lực quán tính ly tâm ban đầu (ngay khi keo bị vỡ) hướng xuyên tâm lên trên với độ lớn $mR(2\omega)^2 = 4mR\omega^2$. Lực quán tính Coriolis (như bạn có thể kiểm tra) ban đầu hướng xuống dưới với độ lớn $2m(2\omega)v = 2m(2\omega)(R\omega) = 4mR\omega^2$. Hai lực này cân bằng, do đó khối lượng sẽ không phải chịu lực ngang, dẫn đến nó tiếp tục chuyển động trên một đường thẳng sang bên phải.

Khoảng thời gian sau đó thì sao? Giả sử (mang tính quy nạp) rằng khối lượng vẫn ở trên đường thẳng xác định bởi chuyển động ban đầu của nó, và chuyển động với vận tốc $R\omega$. Lực quán tính Coriolis vẫn hướng xuống dưới với độ lớn $4mR\omega^2$. Và lực quán tính ly tâm hướng xuyên tâm ra ngoài với độ lớn $mr(2\omega)^2$, trong đó r là bán kính đang xét như trong hình 10.30. Thành phần thẳng đứng của lực này tìm được bằng cách nhân thêm R/r, do đó chúng ta lại thu được thành phần thẳng đứng hướng lên trên là $4mR\omega^2$. Do đó thành phần này cân bằng với lực quán



Hình 10.30:

tính Coriolis, và chúng ta lại thu được kết quả giống như trường hợp không có lực ngang. Do đó chúng ta thấy rằng nếu khối lượng hiện thời chuyển động trên một đường thẳng xác định bởi chuyển động ban đầu của nó thì nó sẽ tiếp tục di chuyển trên đường thẳng đó. Và do nó ban đầu đã di chuyển trên đường thẳng này theo giả thiết, nên chúng ta có thể thấy một cách quy nạp rằng chuyển động trên đường thẳng này sẽ diễn ra ở tất cả các thời điểm như chúng ta muốn chỉ ra. Chú ý rằng thành phần theo phương ngang của lực quán tính ly tâm phải cân bằng với lực căng của dây (bởi vì dây là không dãn), do đó lực căng là khác không trong trường hợp này, trái ngược với trường hợp cùng chiều kim đồng hồ ở phía trên. Vì sợi dây luôn luôn căng nên vận tốc của khối lượng xác định bởi vận tốc mà bánh xe quay, điều này có nghĩa là vận tốc của khối lượng luôn luôn là $R\omega$ trong hệ quy chiếu này. Do đó tốc độ của sự tăng độ dài dây bị tháo là $R\omega$ (trong bất kỳ hệ quy chiếu nào).

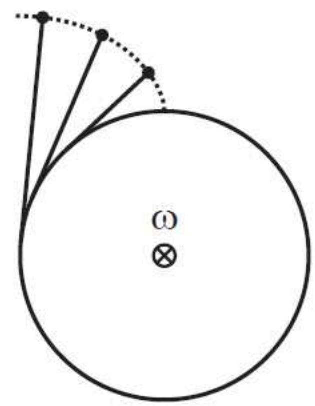
NHẬN XÉT:

1. Lực căng bằng với thành phần theo chiều dọc của lực quán tính ly tâm. Thành phần này thu được bằng cách nhân lực quán tính ly tâm với d/r, trong đó d là độ dài đoạn dây bị tháo. Do đó lực căng của dây bằng $4md\omega^2$, và dẫn đến nó tăng tuyến tính đối với d.

2. Ngay cả khi sợi dây có khối lượng và kể cả mật độ khối lượng thay đổi thì độ dài dây bị tháo vẫn tăng với tốc độ $R\omega$ bởi vì những lý luận ở trên có thể sử dụng với bất kỳ trường hợp nào của sợi dây. Kết quả này khá ngạc nhiên bởi vì khi quan sát trong hệ quy chiếu quán tính thì không hiển nhiên rằng một sợi dây có khối lượng lại giữ theo một đường thẳng.

3. Nếu chúng ta không được biết trước trong giả thiết của bài toán rằng độ dài của đoạn dây bị tháo tăng với tốc độ $R\omega$ thì tất nhiên là bài toán sẽ trở lên khó hơn. Với tất cả

những gì chúng ta biết, tốc độ có thể sẽ không phải là hằng số. Ngoài việc có được sự phán đoán may mắn rằng tốc độ là $R\omega$ thì chúng ta phải giải bài toán bằng phương trình $F = ma$ hoặc bằng phương pháp Lagrange. Phương pháp trước đòi hỏi phải khá là khéo léo, nhưng phương pháp sau cũng không phải là một giải pháp quá tồi.



Hình 10.31:

4. Thực tế có một cách giải khác cho trường hợp ngược chiều kim đồng hồ hay hơn cách giải mà chúng ta đã đưa ra trong phần trên. Cách giải này như sau. Đầu tiên xét trường hợp đơn giản hơn là trường hợp cùng chiều kim đồng hồ, và nhìn vào sơ đồ trong hệ quy chiếu quay của bánh xe. Trong trường hợp này, lực quán tính ly tâm và quán tính Coriolis cùng làm cho khối lượng chuyển động theo hình xoắn ốc ngược lại, thời điểm ban đầu được cho trong hình 10.31. Chúng ta biết trong lý luận ở phía trên rằng trong hệ quy chiếu quán tính sợi dây không sinh ra lực trong suốt quá trình chuyển động nhưng trong thực tế thì nó lại được giữ thẳng. Và tốc độ của sự thay đổi độ dài đoạn dây bị tháo là $R\omega$.

   Bây giờ xét trường hợp khó hơn là trường hợp ngược chiều kim đồng hồ trong hệ quy chiếu quay của bánh xe. Điều khác biệt ở đây so với trường hợp cùng chiều kim đồng hồ chỉ là vectơ $\boldsymbol{\omega}$ thay đổi chiều, bây giờ nó hướng ra ngoài trang sách. Do đó lực quán tính ly tâm vẫn là hàm của $\mathbf{r}$ như vậy, nhưng lực quán tính Coriolis đổi dấu, như là một hàm của $\mathbf{v}$. Tuy nhiên chỉ có lực quán tính ly tâm là lực hoạt động tác dụng lên khối lượng (bởi vì lực quán tính Coriolis và lực căng của dây là vuông góc với vận tốc), do đó khối lượng cuối cùng sẽ chuyển động với cùng vận tốc như là một hàm của $\mathbf{r}$ giống như trong trường hợp cùng chiều kim đồng hồ. Sợi dây làm cho khối lượng di chuyển dọc quỹ đạo giống như trường hợp cùng chiều kim đồng hồ (bởi vì sợi dây là thẳng trong cả hai trường hợp), và chỉ có ảnh hưởng của lực quán tính Coriolis là làm tăng lực căng của sợi dây. Do đó chuyển động sẽ giống hệt (giống quỹ đạo, giống vận tốc như là một hàm của $\mathbf{r}$), dẫn đến tốc độ thay đổi của độ dài đoạn dây bị tháo lại là $R\omega$. ♣

10.12. Hình dạng của trái đất

(a) Hàm thế năng từ tổng của lực hấp dẫn và lực quán tính ly tâm phải là hằng số dọc bề mặt. Nếu không, một mảnh của trái đất sẽ muốn di chuyển dọc theo bề mặt, mà có nghĩa rằng chúng ta không có bề mặt chính xác lúc bắt đầu.

Nếu x là khoảng cách từ trục trái đất thì lực quán tính ly tâm sẽ là $F_c = m\omega^2 x$ hướng ra bên ngoài. Hàm thế năng đối với lực này là $V_c = -m\omega^2 x^2/2$, sai khác thêm một hằng số bất kỳ. Với giải thiết rằng sự méo mó của trái đất không làm thay đổi lực hấp dẫn (điều này là không đúng như chúng ta sẽ thấy dưới đây), thế năng của trọng lực là mgh, trong đó chúng ta đã chọn bất kỳ mặt gốc thế năng hình cầu ứng với $h = 0$. Điều kiện cân bằng thế năng do đó sẽ là

$$mgh - \frac{m\omega^2 x^2}{2} = C \tag{10.65}$$

trong đó C là một hằng số xác định. Sử dụng $x = r\sin\theta$, chúng ta thu được

$$h = \frac{\omega^2 r^2 \sin^2\theta}{2g} + B \tag{10.66}$$

với $B \equiv C/(mg)$ là một hằng số khác. Chúng ta có thể thay thế r ở đây bằng bán kính của trái đất R, bỏ qua sai số.

Tùy thuộc vào hằng số B là như thế nào, phương trình này mô tả toàn bộ mối liên hệ của các bề mặt. Ta có thể xác định giá trị chính xác của B bằng cách yêu cầu rằng thể tích của trái đất méo mó là bằng với thể tích trái đất có hình dạng hình cầu hoàn hảo nếu bỏ đi lực quán tính ly tâm. Điều này tương đương với việc yêu cầu rằng tích phân của h trên bề mặt của trái đất bằng không. Tích phân của $(a\sin^2\theta + b)$ trên bề mặt của trái đất là (việc tích tích phân này rất dễ dàng nếu chúng ta viết $\sin^2\theta$ là $1-\cos^2\theta$)

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi (a(1-\cos^2\theta)+b)2\pi R^2\sin\theta d\theta &= \int_0^\pi (-a\cos^2\theta + (a+b))2\pi R^2 \sin\theta d\theta \\
&= 2\pi R^2 \left(\frac{a\cos^3\theta}{3} - (a+b)\cos\theta\right)\Bigg|_0^\pi \\
&= 2\pi R^2\left(-\frac{2a}{3} + 2(a+b)\right).
\end{aligned} \tag{10.67}$$

Do đó, chúng ta cần $b = -(2/3)a$ để tích phân này bằng không. Thay kết quả này vào phương trình (10.66) chúng ta thu được kết quả như mong muốn

$$h = R\left(\frac{R\omega^2}{6g}\right)(3\sin^2\theta - 2). \tag{10.68}$$

(b) Để thuận tiện, ký hiệu chiều cao chính xác $h \equiv \beta(3\sin^2\theta - 2)$, với $\beta \equiv fR(R\omega^2/6g)$, trong đó f là phân số mong muốn.

Xét trái đất như là sự chồng chất của hình cầu $h = 0$ cộng với ảnh hưởng của vỏ có khối lượng dương hoặc âm, phụ thuộc vào dấu của h tại vị trí cho trước. Thế năng của khối lượng m tại một điểm cho trước trên bề mặt của trái đất méo mó là tổng các thế năng do: (1) trọng lực từ hình cầu, (2) lực quán tính ly tâm và (3) trọng lực từ vỏ. Từ phương trình (10.68), sự đóng góp chuẩn mgh từ (1) tại cực và xích đạo về bản chất lần lượt là $mg\beta(-2)$ và $mg\beta(1)$. Sự đóng góp từ (2) tại cực và xích đạo lần lượt là 0 và $-m\omega^2R^2/2$. Sự đóng góp từ (3) đòi hỏi khéo léo hơn. Chúng ta cần tính tích phân $-\int GmdM/l$, trong đó dM chạy khắp vỏ, và l là khoảng cách từ m đến mỗi phần tử dM. Khối lượng của từng phần tử nhỏ trong vỏ là

$$dM = \rho dV = \rho h dA = \rho\beta(3\sin^2\theta - 2)(Rd\theta)(R\sin\theta d\phi). \tag{10.69}$$

Khoảng cách từ bắc cực tới một điểm ở góc cực θ là $l = 2R\sin(\theta/2) = R\sqrt{2(1-\cos\theta)}$. Sử dụng định lý Pitago, khoảng cách từ một điểm trên xích đạo $(R, 0, 0)$ tới một điểm ở góc cực θ có dạng tổng quát $(R\sin\theta\cos\phi, R\sin\theta\sin\phi, R\cos\theta)$ là $l = R\sqrt{2(1-\sin\theta\cos\phi)}$. Yêu cầu rằng tổng thế năng tại bắc cực bằng với tổng thế năng ở xích đạo sẽ dẫn đến

$$\begin{aligned} &mg\beta(-2) + 0 - \int_0^\pi\int_0^{2\pi} \frac{GM\cdot\rho\beta(3\sin^2\theta-2)(Rd\theta)(R\sin\theta d\phi)}{R\sqrt{2(1-\cos\theta)}} \\ &= mg\beta(1) - \frac{m\omega^2R^2}{2} - \int_0^\pi\int_0^{2\pi}\frac{Gm\cdot\rho\beta(3\sin^2\theta-2)(Rd\theta)(R\sin\theta d\phi)}{R\sqrt{2(1-\sin\theta\cos\phi)}}. \end{aligned} \tag{10.70}$$

Đặt $\beta \equiv fR(R\omega^2/6g)$, và sử dụng

$$g \equiv \frac{GM_E}{R^2} = \frac{G(4\pi R^3\rho/3)}{R^2} \quad\Longrightarrow\quad G_\rho = \frac{3g}{4\pi R}, \tag{10.71}$$

chúng ta có thể viết phương trình (10.70) như sau

$$\begin{aligned} \frac{m\omega^2R^2}{2} = 3mgfR\left(\frac{R\omega^2}{6g}\right) - \int_0^\pi\int_0^{2\pi}\left(\frac{3g}{4\pi R}\right)mfR\left(\frac{R\omega^2}{6g}\right)(3\sin^2\theta-2)(Rd\theta)(R\sin\theta d\phi) \\ \times\left(\frac{1}{R\sqrt{2(1-\sin\theta\cos\phi)}} - \frac{1}{R\sqrt{2(1-\cos\theta)}}\right) \end{aligned} \tag{10.72}$$

Sau khi giản ước các thừa số chúng, cuối cùng chúng ta thu được

$$1 = f - f\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\frac{(3\sin^2\theta-2)\sin\theta}{4\sqrt{2}\pi}\times\left(\frac{1}{\sqrt{1-\sin\theta\cos\phi}} - \frac{1}{\sqrt{1-\cos\theta}}\right)d\phi d\theta. \tag{10.73}$$

Tính toán tích phân này bằng phương pháp số sẽ thu được kết quả là 0.6, điều này dẫn đến $f = 5/2$ như mong muốn.

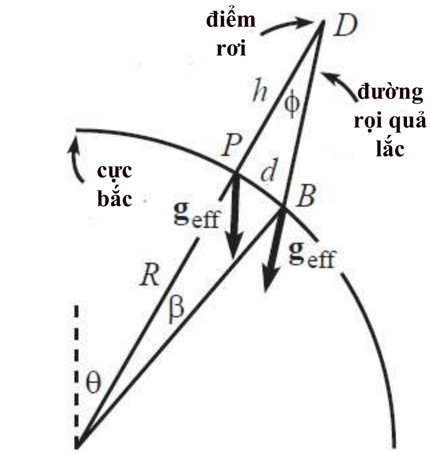
NHẬN XÉT: Kết quả $f = 5/2$ dẫn đến hiệu số giữa bán kính tại cực và bán kính tại xích đạo là $\Delta h = (5/2)(R^2\omega^2/6g)(3) \approx 28\ 000$ m $= 28$ km. Thực tế rằng kết quả này lớn hơn giá trị chính xác 21.5 km bởi vì lý do sau đây. Nếu tất cả khối lượng của trái đất tập trung ở tâm thì sự hơi méo mó của vỏ ở bề mặt sẽ không có ảnh hưởng đối với thế năng bởi vì nó không có khối lượng. Do đó tính toán đơn giản ở phần (a) thực tế sẽ là đúng, và Δh là khoảng 11 km. Nhưng thực tế mật độ của trái đất giảm đối với bán kính, có nghĩa là mật độ sẽ nằm ở đâu đó giữa trường hợp khối lượng tập trung và trường hợp khối lượng phân bố đều. Giá trị thực tế của Δh do đó sẽ nằm ở đâu đó giữa các giá trị Δh tương ứng là 11 km và 28 km. Và quả thực nó là 21.5 km. ♣

10.13. Độ lệch về hướng nam

Lực quán tính Coriolis là $2m\omega v$ về hướng tây. Nhưng $v \approx gt$, do đó gia tốc về hướng tây là $2\omega gt \sin\theta$. Tích phân giá trị này dẫn đến vận tốc về hướng tây là $\omega gt^2 \sin\theta$. Tốc độ về hướng tây này sinh ra lực quán tính Coriolis theo chiều hướng ra xa trục của trái đất, do đó gia tốc theo chiều này là $2\omega(\omega gt^2 \sin\theta)$. Thành phần của gia tốc này dọc bề mặt của trái đất (đó là hướng về phía nam) là $2\omega^2 gt^2 \sin\theta\cos\theta$. Tích phân biểu thức này thu được vận tốc hướng nam là $(2/3)\omega^2 gt^3 \sin\theta\cos\theta$. Tích phân thêm lần nữa chúng ta thu được độ lệch về phía nam là $(1/6)\omega^2 gt^4 \sin\theta\cos\theta$. Nhưng $gt^2/2 \approx h \Longrightarrow t^2 \approx 2h/g$. Do đó độ lệch về phía nam do lực quán tính Coriolis là $(2/3)(\omega^2 h^2/g)\sin\theta\cos\theta$.

Bây giờ là phần còn lại của bài toán này. Để chính xác chúng ta sẽ định nghĩa θ là góc cực tại điểm P trên đường bán kính tới điểm rơi. Tuy nhiên chúng ta sẽ vẫn thu được kết quả giống như cũ nếu ta định nghĩa θ là góc cực tại vị trí của con lắc thẳng đứng, bởi vì hiệu số giữa hai góc này là cùng bậc với ω^2 (bởi vì nó sinh ra do sự đóng góp của lực quán tính ly tâm vào trọng lực hiệu dụng). Và hiệu số này sinh ra một ảnh hưởng có thể bỏ qua cùng bậc với ω^4 trong kết quả $4(\omega^2 h^2/g)\sin\theta\cos\theta$, bởi vì biểu thức này đã chứa thừa số ω^2.

(a) Tại điểm P, độ lớn của $\mathbf{F}_{cent}$ là $m\omega^2 R\sin\theta$, do đó (sử dụng hình 10.22 trong cách giải bài tập 10.3) thành phần của $\mathbf{F}_{cent}$ vuông góc với $m\mathbf{g}$ sẽ là $F_{cent}^{\perp} = m\omega^2 R\sin\theta\cos\theta$. Góc mà $\mathbf{g}_{eff}$ tạo với bán kính tại P do đó sẽ bằng $F_{cent}^{\perp}/mg = (\omega^2 R/g)\sin\theta\cos\theta$. Tuy nhiên, chiều của đường thẳng con lắc thẳng đứng được xác định bởi vectơ $\mathbf{g}_{eff}$ tại vị trí con lắc thẳng đứng (gọi điểm này là B), và *không* được xác định tại P; xem hình 10.32. Bây giờ, góc mà chúng ta cần tìm giữa $\mathbf{g}_{eff}$ và $\mathbf{g}$ (đó là bán kính) tại P là bằng với góc giữa $\mathbf{g}_{eff}$ và $\mathbf{g}$ tại B (sai khác ít nhất là cũng bậc với ω^2 như lý luận trong phần trước). Do đó, bởi vì vectơ $\mathbf{g}$ tại B là nghiêng một góc β (như chỉ ra) đối với vectơ $\mathbf{g}$ tại P, chúng ta thấy rằng $\mathbf{g}_{eff}$ tại B tạo một góc $\phi = (\omega^2 R/g)\sin\theta\cos\theta - \beta$ đối với bán kính tại P. Góc β cho bởi d/R,



Hình 10.32:

trong đó d là khoảng cách giữa P và B. Do đó trong tam giác DPB, mối liên hệ $d \approx h\phi$ sẽ dẫn đến

$$\begin{aligned} d &\approx h\left((\omega^2 R/g)\sin\theta\cos\theta - d/R\right) \\ \Longrightarrow \quad d &\approx \frac{h(\omega^2 R/g)\sin\theta\cos\theta}{1+h/R} \\ &\approx \frac{\omega^2 Rh}{g}\sin\theta\cos\theta\left(1-\frac{h}{R}\right). \end{aligned} \tag{10.74}$$

(b) Gia tốc trọng trường tại độ cao y phía trên trái đất là

$$\frac{GM}{(R+y)^2} \approx \frac{GM}{R^2(1+2y/R)} \approx \frac{GM}{R^2}\left(1-\frac{2y}{R}\right) \equiv g\left(1-\frac{2y}{R}\right). \tag{10.75}$$

(Đây cũng là các sự hiệu chỉnh do các lực quán tính ly tâm và quán tính Coriolis, nhưng chúng được bỏ qua; xem bài tập 10.21). Do đó, chúng ta có $\ddot{y} = -g(1-2y/R)$. Viết $\ddot{y}$ thành vdv/dy, và tách biến sau đó tích phân dẫn đến

$$\begin{aligned} \int_0^v &= -\int_h^y g\left(1-\frac{2y}{R}\right)dy \\ \Longrightarrow \quad v &= -\sqrt{2g(h-y)-(2g/R)(h^2-y^2)} \\ &\approx -\sqrt{2g(h-y)}\left(1-\frac{h+y}{2R}\right). \end{aligned} \tag{10.76}$$

Sử dụng $v \equiv dy/dt$, và tách biến sau đó tích phân ta có

$$\int_0^T \approx -\int_h^0 \frac{dy}{\sqrt{2g(h-y)}\left(1-\frac{h+y}{2R}\right)} \approx -\int_h^0 \frac{1+\frac{h+y}{2R}}{\sqrt{2g(h-y)}}dy. \tag{10.77}$$

Bạn có thể chỉ ra rằng số "1" ở đây đưa ra thời gian bậc đầu tiên của $\sqrt{2h/g}$. Thời gian thêm đến từ các số hạng khác, điều này dẫn đến (với $z \equiv y/h$)

$$\Delta t = -\frac{1}{2R\sqrt{2g}}\int_h^0 \frac{h+y}{\sqrt{h-y}}dy = -\frac{h\sqrt{h}}{2R\sqrt{2g}}\int_1^0 \frac{1+z}{\sqrt{1-z}}dz. \tag{10.78}$$

Tính tích phân này và chúng ta sẽ thu được

$$\Delta t = \frac{h\sqrt{h}}{2R\sqrt{2g}} \cdot \frac{2}{3}(5+z)\sqrt{1-z}\Big|_1^0 = \sqrt{\frac{2h}{g}}\left(\frac{5h}{6R}\right). \tag{10.79}$$

Do đó thời gian tổng cộng là $\sqrt{2h/g}(1+5h/6R)$, đây là kết quả chúng ta muốn chỉ ra.

(c) Tại độ cao y, khoảng cách đến tâm của trái đất là $R+y$. Do đó từ lý luận về $F_{cent}^{\perp}$ trong phần (a) ta sẽ có gia tốc theo chiều hướng nam là $\ddot{z} = \omega^2(R+y)\sin\theta\cos\theta$.

(d) Nếu quả bóng cách một khoảng z từ đường thẳng bán kính đi qua P (gọi đường thẳng này là L) thì đường thẳng bán kính tới quả bóng sẽ tạo một góc xấp xỉ là z/R đối với L. Thành phần của trọng lực tác dụng lên quả bóng vuông góc với L do đó sẽ là $\ddot{z} = -g(z/R)$, trong đó dấu trừ biểu thị theo hướng L (đó là hướng bắc).

(e) Phần (c) và (d) dẫn đến

$$\ddot{z} = \omega^2(R+y)\sin\theta\cos\theta - g(z/R). \tag{10.80}$$

Số hạng R ở đây chiếm ảnh hưởng lớn, do đó đối với bậc đầu tiên chúng ta có $\ddot{z} = \omega^2 R\sin\theta\cos\theta \implies z \approx (\omega^2 R\sin\theta\cos\theta)t^2/2$. Cũng như vậy, đối với bậc đầu tiên, $y \approx h - gt^2/2$. Thay các giá trị này của z và y vào phương trình (10.80) thu được

$$\begin{aligned} \ddot{z} &= \omega^2\sin\theta\cos\theta\left(R + \left(h - \frac{gt^2}{2}\right) - \frac{gt^2}{2}\right) \\ \implies z &= \omega^2\sin\theta\cos\theta\left(\frac{Rt^2}{2} + \left(\frac{ht^2}{2} - \frac{gt^4}{24}\right) - \frac{gt^4}{24}\right). \end{aligned} \tag{10.81}$$

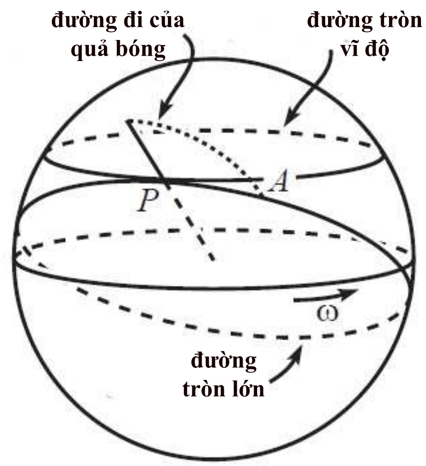
Thay thời gian tổng $t = \sqrt{2h/g}(1+5h/6R)$ dẫn đến, đối với bậc đầu tiên, một giá trị tổng z bằng

$$\begin{aligned} z &= \omega^2\sin\theta\cos\theta\left(\frac{R}{2}\cdot\frac{2h}{g}\left(1+\frac{5h}{3R}\right) + \left(\frac{h}{2}\cdot\frac{2h}{g} - \frac{g}{24}\cdot\frac{4h^2}{g^2}\right) - \frac{g}{24}\cdot\frac{4h^2}{g^2}\right) \\ &= \frac{\omega^2 Rh}{g}\sin\theta\cos\theta\left(1 + \frac{h}{R}\left(\frac{5}{3}+\frac{5}{6}-\frac{1}{6}\right)\right) \\ &= \frac{\omega^2 Rh}{g}\sin\theta\cos\theta\left(1+\frac{7h}{3R}\right). \end{aligned} \tag{10.82}$$

Khi chúng ta bỏ đi vị trí của con lắc thẳng đứng trong phương trình (10.74), các đại lượng đầu tỷ lệ với R được bỏ qua. Khi đó thêm vào kết quả Coriolis dẫn đến tổng độ lệch về phía nam (đối với con lắc thẳng đứng) bằng

$$\frac{\omega^2 h^2}{g}\sin\theta\cos\theta\left(\frac{7}{3} - (-1) + \frac{2}{3}\right) = \frac{4\omega^2 h^2}{g}\sin\theta\cos\theta, \tag{10.83}$$

như chúng ta muốn chỉ ra. Từ dòng thứ ba trong phương trình (10.82), chúng ta thấy rằng kết quả 7/3 có thể chia thành 5/3 do thời gian thêm của quả bóng chạm đất do sự giảm

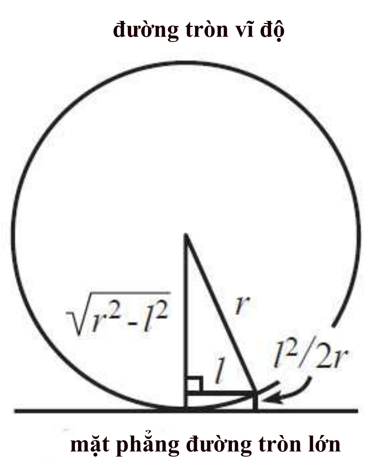


Hình 10.33:

của trọng lực theo độ cao, 5/6 đến từ sự phụ thuộc của lực quán tính ly tâm vào độ cao, và $-1/6$ đến từ thành phần hơi lệch về phía bắc của lực trọng trường.

NHẬN XÉT: Chúng ta cũng có thể giải bài toán này bằng cách sử dụng một hệ quy chiếu quán tính. Trong hệ quy chiếu này, quả bóng có sự di chuyển ban đầu sang ngang do sự quay của trái đất, và sự chuyển động này gây ra việc quả bóng di chuyển với quỹ đạo như trong hình 10.33. Bởi vì chỉ có trọng lực tác dụng lên quả bóng nên quỹ đạo của nó nằm trong mặt phẳng xác định bởi vectơ vận tốc đầu và bán kính của nó. Giao điểm của mặt phẳng này và bề mặt của trái đất là đường tròn lớn như đã chỉ ra, và quả bóng chạm vào trái đất tại một điểm A trên vòng tròn lớn này.

Khoảng cách l mà quả bóng di chuyển dọc đường tròn lớn về cơ bản là bằng khoảng cách



Hình 10.34:

nó di chuyển theo chiều hướng về phía đông (đó là dọc đường tròn vĩ độ). Khoảng cách phía đông này bằng với khoảng cách mà điểm P quay do sự quay của trái đất, cộng thêm độ lệch đông Coriolis d_{cor} mà chúng ta tìm thấy trong phương trình (10.18). (Khi làm việc trong hệ quy chiếu quán tính, giả sử rằng chúng ta tìm thấy độ lệch này bằng phương pháp cho trong nhận xét sau phương trình (10.18)). Do đó chúng ta có $l \approx R\sin\theta\omega t + d_{cor}$. Nhiệm vụ bây giờ là đi xác định khoảng cách giữa A và vòng tròn vĩ độ qua P. Khoảng cách này sẽ bằng kết quả trong phương trình (10.82) cộng thêm độ lệch Coriolis về phía nam. (Sau đó chúng ta sẽ trừ đi khoảng cách từ con lắc thẳng đứng tới P, cho trong phương trình (10.74), như chúng ta đã làm ở phần trên.)[21] Nhiệm vụ này tương đương với việc trả lời câu hỏi: Nếu một vòng tròn có bán kính $r = R\sin\theta$ (vòng tròn vĩ độ) nằm trên một mặt phẳng (mặt phẳng của vòng tròn lớn) và bị nghiêng một góc θ đối với pháp tuyến của mặt phẳng, hỏi một điểm trên vòng tròn với một tọa độ "x" bằng l (với $l \ll r$) đi được bao xa trên mặt phẳng? Sử dụng chuỗi xấp xỉ Taylor đối với độ dài $\sqrt{r^2 - l^2}$ trong tam giác vuông trong hình 10.34, chúng ta thấy rằng nếu vòng tròn vuông góc với mặt phẳng thì khoảng cách mong muốn là $l^2/2r$. Vòng tròn nghiêng một góc θ đơn giản là thêm thừa số $\cos\theta$, do đó khoảng cách là $(l^2/2r)\cos\theta = (l^2/2R\sin\theta)\cos\theta$.

Sử dụng thời gian chuyển động thu được ở trên trong phần (b) và d_{cor} từ phương trình (10.18), chúng ta thu được độ lệch về phía nam đối với P bằng (bỏ qua đại lượng bậc cao hơn)

$$\begin{aligned} z &= \frac{l^2\cos\theta}{2R\sin\theta} \\ &= \frac{(R\sin\theta\,\omega t + d_{cor})^2\cos\theta}{2R\sin\theta} \\ &\approx R\omega^2\sin\theta\cos\theta t^2/2 + \omega d_{cor}\cos\theta\, t \\ &\approx \frac{R\omega^2\sin\theta\cos\theta}{2}\cdot\frac{2h}{g}\left(1+\frac{5h}{3R}\right) + \omega\left(\frac{2\omega h\sin\theta}{3}\sqrt{\frac{2h}{g}}\right)\cos\theta\sqrt{\frac{2h}{g}} \\ &\approx \frac{\omega^2 Rh}{g}\sin\theta\cos\theta\left(1+\frac{h}{R}\left(\frac{5}{3}+\frac{4}{3}\right)\right). \end{aligned} \tag{10.84}$$

Như mong đợi của chúng ta, thừa số 9/3 ở đây bằng 7/3 từ phương trình (10.82) cộng thêm 2/3 từ độ lệch Coriolis về phía nam. Trừ đi vị trí của con lắc thẳng đứng cho trong phương trình (10.74) sẽ dẫn đến độ lệch về phía nam như mong muốn đối với con lắc thẳng đứng $(4\omega^2h^2/g)\sin\theta\cos\theta$. ♣

10.14. Một hạt chuyển động trên vòng

(a) Lực hấp dẫn tác dụng lên hạt về bản chất là bằng $GMm/(R-r)^2$, hướng sang bên trái. Nhưng xấp xỉ đối với bậc đầu tiên, chúng ta có thể bỏ qua đại lượng r ở đây. Nếu hạt ở tại ví trí góc θ so với phương ngang thì chúng ta cần nhân lực ngang này với $\sin\theta \approx \theta$ để thu

[21] Nếu bạn muốn, bạn có thể tìm ra khoảng cách từ quả lắc tới P bằng cách sử dụng hệ quy chiếu quán tính để giữ thống nhất cách giải trong bài tập này. Số hạng dạng $m\omega^2R$ mà chúng ta tìm thấy trong phần (a) ở trên đơn giản là biểu thị ra qua gia tốc hướng tâm thay vì lực quán tính ly tâm.

được thành phần lực dọc theo vòng. Do đó, phương trình $F = ma$ dọc theo vòng là

$$-\frac{GMm\theta}{R^2} = mr\ddot{\theta} \quad \Longrightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{GM}{rR^2}}. \tag{10.85}$$

Đây là chỉ kết quả thường gặp $\sqrt{g/r}$, tuy nhiên ẩn dưới dạng khác.

(b) Từ phương trình (10.35), lực thủy triều là $(GMm/R^3)(2x, -y)$. Lực dọc theo vòng không chỉ đến từ thành phần ngang của lực thủy triều (khi nhân với trừ $\sin\theta$), mà còn từ thành phần thẳng đứng (khi nhân với $\cos\theta$). Do đó lực dọc vòng là (sử dụng $x = r\cos\theta$ và $y = r\sin\theta$)

$$\frac{GMm}{R^3}\left(2(r\cos\theta)(-\sin\theta) + (-r\sin\theta)\cos\theta\right) = -\frac{GMm}{R^3}(3r\sin\theta\cos\theta). \tag{10.86}$$

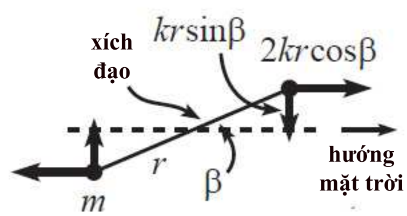
Sử dụng $\sin\theta \approx \theta$ và $\cos\theta \approx 1$, phương trình $F = ma$ dọc theo vòng sẽ là

$$-frac3GMmr\theta R^3 = mr\ddot{\theta} \quad \Longrightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{3GM}{R^3}}. \tag{10.87}$$

Chú ý rằng kết quả này là độc lập với r. Nó nhỏ hơn kết quả trong phần (a) bởi một thừa số $\sqrt{3r/R}$.

10.15. Sự tiến động của các phân điểm

Chúng ta sẽ tính toán ảnh hưởng của mặt trời, và sau đó nhân thêm với 3 để thu được toàn



Hình 10.35:

bộ ảnh hưởng tổng thể, bởi vì ảnh hưởng của mặt trăng là gấp hai lần ảnh hưởng của mặt trời. Xét trường hợp khi trái đất trong mùa hè hoặc mùa đông. Từ phương trình (10.35), lực thủy triều tác dụng lên khối lượng m là $(GM_S m/R^3)(2x, -y)$. Cả hai thành phần đều có liên quan ở đây, do đó lực thủy triều tác dụng lên hai khối lượng được chỉ ra như trong hình 10.35, trong đó r là bán kính trái đất, và $k \equiv GM_S m/R^3$. moment do các lực này sinh ra có độ lớn

$$2\left(2kr\cos\beta(r\sin\beta) + kr\sin\beta(r\cos\beta)\right) = 6kr^2\sin\beta\cos\beta, \tag{10.88}$$

và nó hướng vào trong trang sách. Đối với trường hợp khi trái đất trong mùa xuân hoặc mùa thu (đó là khi mặt trời ở vị trí của mũi của bạn khi bạn nhìn hình 10.35), sẽ không có moment, bởi vì thành phần lực dọc trục của thủy triều là bằng không và thành phần lực ngang hướng theo bán kính. Mỗi trường hợp mùa hè/mùa đông và mùa xuân/mùa thu thích hợp với một nửa thời gian (giả thiết 6), do đó moment trung bình theo thời gian là

$$\bar{\tau}_{sun} = \frac{1}{2}(6kr^2 \sin\beta\cos\beta + 0) = 3kr^2 \sin\beta\cos\beta. \tag{10.89}$$

Thêm vào ảnh hưởng của mặt trăng dẫn đến tổng moment trung bình

$$\bar{\tau}_{total} = 9kr^2 \sin\beta\cos\beta = \frac{9GM_S mr^2 \sin\beta\cos\beta}{R^3}. \tag{10.90}$$

moment động lượng của trái đất là $I_3\omega_3$. Thành phần "ngang" của moment này là $I_3\omega_3 \sin\beta$, do đó $|d\mathbf{L}/dt| = \Omega I_3\omega_3 \sin\beta$, trong đó Ω là tần số của sự tiến động. Đồng nhất biểu thức này với moment dẫn đến

$$\Omega = \frac{9GM_S mr^2 \cos\beta}{R^3 I_3\omega_3}. \tag{10.91}$$

Nhưng từ giả thiết 3, 4 và 5, chúng ta có $m = \rho r^2 h$, trong đó ρ là mật độ trung bình của trái đất. Và $I_3 = (2/5)(4\pi r^3\rho/3)r^2 = (8\pi/15)\rho r^5$, do đó[22]

$$\Omega = \frac{9GM_S(\rho r^2 h)r^2\cos\beta}{R^3(8\pi\rho r^5/15)\omega_3} = \frac{135GM_S h\cos\beta}{8\pi r R^3\omega_3}. \tag{10.92}$$

Thay các giá trị số vào chúng ta thu được

$$\Omega = \frac{135(6.67\cdot 10^{-11}\ \text{m}^3/\text{kg s}^2)(2\cdot 10^{30}\ \text{kg})(21\cdot 10^3\ \text{m})\cos 23°}{8\pi(6.4\cdot 10^6\ \text{m})(1.5\cdot 10^{11}\ \text{m})^3(7.3\cdot 10^{-5}\ \text{s}^{-1})} \approx 8.8\cdot 10^{-12}\ s^{-1}$$

$$\Longrightarrow T = \frac{2\pi}{\Omega} \approx \frac{2\pi}{8.8\cdot 10^{-12}\ \text{s}^{-1}} \approx 7.1\cdot 10^{11}\ \text{s} \approx 23\ 000\ \text{năm}. \tag{10.93}$$

Kết quả này thực sự rất tốt. Chúng ta đúng là không mong đợi rằng nó có thể gần kết quả 26 000 năm đến như vậy khi xét đến sự các sự xấp xỉ khác nhau mà chúng ta đã thực hiện. Nhưng chúng ta mong muốn kết quả thu được sai khác trong vòng một thừa số, có thể là 5 hoặc số khác tương tự như vậy bởi vì các sự xấp xỉ của chúng ta có thể đã bỏ đi rất nhiều thứ. Dù sao đi nữa, phương trình (10.92) ít nhất cũng đã đưa ra một sự phụ thuộc chính xác vào các hệ số khác nhau. Chú ý rằng phương trình (10.40) chỉ ra $h \propto r^2\omega_3^2/g$. Sử dụng điều này cùng với $g = G(4\pi r^3\rho_E/3)/r^2$ trong phương trình (10.92), và bỏ qua tất cả các thừa số bằng số, dẫn đến $\Omega \propto \omega_3 M_S/(\rho_E R^3) \propto \omega_3(M_S/M_C)$, trong đó M_C là khối lượng của một vật thể khổng lồ có mật độ bằng mật độ của trái đất và có bán kính bằng khoảng cách giữa trái đất và mặt trời. (Mối liên hệ này cũng đúng nếu chúng ta xét mặt trăng thay cho mặt trời.)

[22]Khối lượng m thực tế là nhỏ hơn giá trị này, bởi vì mật độ của vỏ trái đất nhỏ hơn mật độ của phần trong của nó. Nhưng I_3 thực tế cũng nhỏ hơn giá trị ở trên do lõi của trái đất có mật độ lớn hơn phần bên ngoài của nó. Các ảnh hưởng này với một mức độ nào đó sẽ cân bằng với nhau bởi vì m xuất hiện trong tử số và I_3 xuất hiện ở mẫu số. Nhưng dù sao chúng ta cũng chỉ tính toán ở mức xấp xỉ.

NHẬN XÉT: Điều thú vị rằng thời gian $T = 26\,000$ năm là đủ lớn để chúng ta xem như sự quay của trục trái đất về cơ bản là hằng số, nhưng cũng đủ nhỏ để có một ảnh hưởng dễ nhận thấy qua các thời đại. Ngôi sao mà chúng ta thấy về phía bắc ngày nay là khác so với ngôi sao phía bắc mà một người nào đó nhìn thấy cách đây 2000 năm. Và các dấu hiệu của đường hoàng đạo mà chúng ta thấy hiện nay bị thay đổi một vị trí xấp xỉ khi so sánh với nó cách đây 2000 năm. Cái tên "sự tiến động của các phân điểm" đến từ thực tế rằng nếu bạn xét ví dụ một thiên hà ở rất xa mà mặt trời hướng tới khi trái đất ở vị trí điểm xuân phân, và nếu bạn xét một thiên hà tương tự cách đây 13 000 năm thì hai thiên hà này sẽ ở hai chiều đối diện đối với trái đất trong vũ trụ. ♣

Chương 11

Thuyết tương đối (Động học)

Bây giờ chúng ta sẽ đến với lý thuyết tương đối của Einstein. Đây là thời điểm mà chúng ta sẽ nhận ra rằng mọi thứ mà ta đã thực hiện cho đến lúc này trong cuốn sách là không chính xác lắm. Tất nhiên, có lẽ chúng ta nên dùng từ "không hoàn hảo" thì có vẻ thích hợp hơn. Điểm quan trọng để hiểu rõ ở đây đó là vật lý của Newton là một trường hợp giới hạn của một lý thuyết tương đối chính xác hơn. Các định luật vật lý của Newton rất hoàn hảo khi vận tốc mà chúng ta xét là nhỏ hơn rất nhiều so với vận tốc của ánh sáng (vận tốc ánh sáng là khoảng $3 \cdot 10^8$ m/s). Sẽ là hơi ngớ ngẩn khi sử dụng lý thuyết tương đối để giải một bài toán liên quan đến độ dài quỹ đạo của một quả bóng. Nhưng khi bài toán liên quan đến vận tốc lớn, hoặc bài toán ở đó yêu cầu độ chính xác bậc cao hơn thì chúng ta phải sử dụng lý thuyết tương đối.[1] Đây là chủ đề trong phần còn lại của cuốn sách này.

Lý thuyết tương đối chắc chắn là một trong những chủ đề thú vị và được nói đến nhiều nhất trong vật lý. Nó nổi tiếng bởi vì những tính "nghịch lý" của nó, điều này dẫn đến khá nhiều tranh luận. Tuy nhiên, cuối cùng thực sự là không có gì mâu thuẫn cả. Lý thuyết tương đối là hợp lý và tính đúng đắn đã được kiểm chứng bằng các thí nghiệm, và toàn bộ vấn đề ở đây thực sự là khá dễ hiểu, miễn là bạn kiên nhẫn và giữ bình tĩnh trong quá trình tìm hiểu.

[1]Bạn không nên cảm thấy quá buồn khi bỏ ra khá nhiều thời gian để học về một lý thuyết lại chỉ là một trường hợp giới hạn của lý thuyết khác tổng quát hơn, bởi vì bây giờ bạn sẽ làm lại điều đó một lần nữa. Lý thuyết tương đối cũng là một trường hợp của một lý thuyết khác tổng quát hơn (lý thuyết trường lượng tử). Và tương tự như vậy, lý thuyết trường lượng tử là trường hợp giới hạn của lý thuyết khác (lý thuyết dây). Và tương tự như vậy…tất nhiên đó là ý tưởng bạn sẽ hiểu được. Và có thể việc tìm ra các lý thuyết tổng quát hơn cứ thế tiếp diễn.

Lý thuyết tương đối dựa trên các tiên đề đã biết. Một trong số đó là hầu hết mọi người thấy hơi khác thường rằng vận tốc của ánh sáng có cùng giá trị trong bất kỳ hệ quy chiếu quán tính nào (đó là hệ quy chiếu không có gia tốc). Vận tốc này là lớn hơn rất nhiều so với vận tốc của các vật thể thông thường, do đó hầu hết các hệ quả của lý thuyết mới này là không dễ nhận thấy. Nếu chúng ta sống ở một thế giới giống hệt với thế giới của chúng ta chỉ trừ một điều là vận tốc ánh sáng là 50 mph thì các hệ quả của lý thuyết tương đối sẽ có mặt ở khắp nơi. Chúng ta sẽ không phải suy nghĩ cẩn thận về sự giãn nở thời gian, sự co độ dài, ...

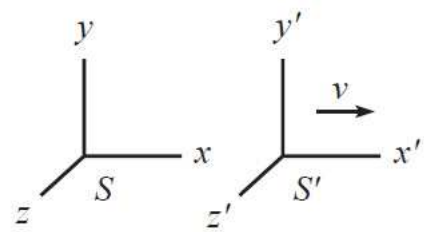
Tôi đã tổng hợp một lượng lớn các câu hỏi và các sự "nghịch lý" trong phần bài tập và bài tập luyện tập. Khi giải quyết các vấn đề này, hãy chắc chắn là theo đuổi hoàn thành đến cùng, và không nên nói, "Tôi có thể hoàn thành bài toán này nếu tôi muốn, nhưng tôi đã hoàn thành rất nhiều bài toán tương tự như vậy, do đó tôi sẽ không quan tâm thêm nữa", bởi vì bản chất của sự nghịch lý có thể chứa đựng trong các bài toán như thế, và bạn sẽ làm lỡ mất cơ hội chứng kiến tất cả các sự thú vị ẩn chứa trong đó.

Có hai chủ đề chính trong lý thuyết tương đối. Một chủ đề là lý thuyết tương đối hẹp (không liên quan đến trọng lực) và chủ đề còn lại là lý thuyết tương đối tổng quát (liên quan đến trọng lực). Chúng ta chủ yếu sẽ đề cập tới chủ đề đầu tiên, nhưng Chương 14 sẽ chứa một vài vấn đề của chủ đề thứ hai. Thuyết tương đối hẹp có thể chia thành hai phần, động học và động lực học. Phần động học đề cập tới độ dài, thời gian, vận tốc,... Nó chỉ liên quan tới các tọa độ không gian và thời gian của một phần tử trừu tượng chứ không liên quan đến khối lượng, lực, năng lượng, động lượng,... Tuy nhiên, phần động lực học sẽ đề cập tới các đại lượng này. Trong Chương này, chúng ta sẽ nói về phần động học. Chương 12 sẽ nói về phần động lực học. Hầu hết các nghịch lý thú vị sẽ rơi vào phần động học, do đó Chương này sẽ dài hơn Chương sau. Trong Chương 13, chúng ta sẽ giới thiệu về vector bốn chiều, nó liên hệ chặt chẽ các vấn đề trong Chương 11 và Chương 12 lại với nhau.

11.1 Sự chuyển động

Mặc dù hiển nhiên rằng sự thiên tài đã đưa Einstein tới lý thuyết tương đối của ông, nhưng không phải tự nhiên mà Einstein lại đưa ra thuyết tương đối. Nhiều vấn đề diễn ra trong vật lý ở thế kỷ mười chín đã dẫn tới là hình như có vấn đề nào đó là không chính xác. Đã có rất nhiều nỗ lực của nhiều nhà khoa học nhằm giải thích các vấn đề rắc rối mới phát sinh, và ít nhất đã có một vài nghiên cứu được thực hiện để tiến tới một lý thuyết chính xác. Nhưng Einstein là người đầu tiên mà cuối cùng đã thống nhất được mọi thứ vào cùng nhau, và ông đã làm điều đó bằng một phương pháp mà dẫn đến các hệ quả vượt xa các lĩnh vực cụ thể mà mọi người đang cố gắng tìm hiểu. Quả thực, lý thuyết của ông đã đưa ra những ý tưởng mới lần đầu tiên về không gian và thời gian. Nhưng trước khi tìm hiểu phần chính của lý thuyết này, chúng ta hãy xem xét hai vấn đề chủ yếu của vật lý cuối thế kỷ mười chín.[2]

11.1.1 Phép biến đổi Galileo. Phương trình Maxwell



Hình 11.1:

Tưởng tượng rằng chúng ta đang đứng trên mặt đất và quan sát một con tàu chuyển động với vận tốc không đổi v theo chiều x. Giả sử hệ quy chiếu của con tàu là S' và hệ quy chiếu của mặt đất là S như chỉ ra trong hình 11.1. Xét hai sự kiện xảy ra trên con tàu.Ví dụ một người vỗ tay, và một người khác dậm chân xuống sàn. Nếu khoảng cách không gian và thời gian giữa hai sự kiện này trong hệ quy chiếu của con tàu là $\Delta x'$ và $\Delta t'$, thì khoảng cách không gian và thời gian, Δx và Δt, trong hệ quy chiếu của mặt đất sẽ là bao nhiêu? Bỏ qua những gì chúng ta sẽ học về thuyết tương đối trong Chương này, câu trả lời là "hiển nhiên" (Tất nhiên, sự hiển nhiên đó phần nào không chính xác như chúng ta sẽ thấy trong Mục 11.4.1). Khoảng cách thời gian, Δt, là giống như trên con tàu, do đó chúng ta có $\Delta t = \Delta t'$. Chúng ta biết từ kinh nghiệm thông thường rằng sẽ không có điều gì lạ xảy ra với thời gian. Khi bạn thấy mọi người đi ra khỏi ga tàu, họ sẽ chẳng bao giờ cố gắng chỉnh lại đồng hồ của họ đối với đồng hồ đặt trên mặt đất.

Khoảng cách không gian thì thú vị hơn một chút, nhưng vẫn không có gì là quá phức

[2]Nếu bạn không thể đợi để tìm hiểu về các tiên đề và các kết quả của thuyết tương đối hẹp thì bạn có thể chuyển sang Mục 11.2. Mục này có thể bỏ qua trong lần đọc đầu tiên.

tạp. Con tàu đang chuyển động, do đó mọi thứ ở trên nó (cụ thể là hai sự kiện) sẽ bị mang theo với vận tốc v suốt khoảng thời gian $\Delta t'$ giữa hai sự kiện. Do đó chúng ta có $\Delta x = \Delta x' + v\Delta t'$. Trong trường hợp đặc biệt, nếu hai sự kiện xảy ra tại cùng một vị trí trên con tàu (tức là $\Delta x' = 0$) thì chúng ta có $\Delta x = v\Delta t'$. Điều này khá mang tính trực quan bởi vì vị trí trên con tàu mà tại đó các sự kiện xảy ra chỉ đơn giản là di chuyển một khoảng cách $v\Delta t$ trong khoảng thời gian mà sự kiện thứ hai xảy ra. Do đó biến đổi Galileo sẽ là

$$\begin{aligned} \Delta x &= \Delta x' + v\Delta t' \\ \Delta t &= \Delta t' \end{aligned} \tag{11.1}$$

Tất nhiên là không có gì đặc biệt xảy ra theo chiều y và chiều z, do đó chúng ta có $\Delta y = \Delta y'$ và $\Delta z = \Delta z'$.

Nguyên lý bất biến Galileo nói rằng các định luật vật lý là bất biến dưới phép biến đổi Galileo ở bên trên. Hoặc dưới dạng khác, nó nói rằng các định luật vật lý giữ nguyên trong mọi hệ quy chiếu quán tính.[3] Điều này là khá đáng tin. Ví dụ định luật hai của Newton là đúng trong mọi hệ quy chiếu quán tính, bởi vì vận tốc tương đối không đổi giữa hai hệ quy chiếu bất kỳ nói lên rằng gia tốc của một phần tử cho trước là giống nhau trong mọi hệ quy chiếu.

NHẬN XÉT: Chú ý rằng phép biến đổi Galileo là không đối xứng giữa x và t. Đây không phải là một điều quá tồi tệ, nhưng nó chỉ ra rằng thực tế đây là một vấn đề trong thuyết tương đối hẹp, trong đó không gian và thời gian được đề cập tới một cách cân bằng hơn. Chúng ta sẽ tìm thấy điều này trong Mục 11.4.1 trong đó phép biến đổi Galileo được thay thế bằng phép biến đổi Lorentz (ít nhất là trong thế giới mà chúng ta đang sống), và phép biến đổi Lorentz quả thực là đối xứng đối với x và t (thêm thừa số vận tốc của ánh sáng c). Cũng chú ý rằng phương trình (11.1) chỉ đề cập tới hiệu số của x và t giữa hai sự kiện chứ không phải là giá trị trong hệ tọa độ của chúng. Giá trị các tọa độ của một sự kiện phụ thuộc vào việc bạn chọn gốc tọa độ ở đâu, tất nhiên bạn có thể chọn bất kỳ. Tuy nhiên hiệu số tọa độ giữa hai sự kiện là độc lập với sự lựa chọn này, và điều này cho phép chúng ta có được phát biểu mang đầy ý nghĩa vật lý trong phương trình (11.1). Sẽ là không ý nghĩa nếu như kết quả vật lý lại phụ thuộc vào cách chọn gốc tọa độ bất kỳ, và do đó phép biến đổi Lorentz mà chúng ta thu được về sau cũng sẽ chỉ liên quan đến hiệu của các tọa độ. ♣

[3]Nó được giả sử trước Einstein rằng hai phát biểu là tương đương, tuy nhiên chúng ta ngay bây giờ sẽ thấy rằng điều đó không đúng. Phát biểu thứ hai là phát biểu vẫn còn đúng trong thuyết tương đối.

Một trong những thành tựu vĩ đại của vật lý thế kỷ mười chín đó là lý thuyết về điện từ trường. Vào năm 1864, James Clerk Maxwell đã đưa ra một tập hợp các phương trình mô tả chung mọi thứ đã biết về chủ đề này. Các phương trình này liên quan đến điện trường và từ trường qua không gian và đạo hàm theo thời gian của chúng. Chúng ta sẽ không xem xét tới dạng cụ thể của các phương trình này ở đây,[4] nhưng nó cho biết rằng nếu bạn biến đổi chúng từ một hệ quy chiếu này sang một hệ quy chiếu khác thông qua phép biến đổi Galileo thì cuối cùng chúng sẽ có dạng khác. Đó là nếu bạn mô tả các phương trình Maxwell trong một hệ quy chiếu (trong đó chúng có dạng chuẩn đẹp đẽ), và nếu sau đó bạn thay thế các tọa độ trong hệ quy chiếu này bởi các tọa độ trong hệ quy chiếu khác, sử dụng phương trình (11.1), thì các phương trình nhìn có vẻ sẽ khác (và không còn đẹp đẽ nữa). Điều này đưa ra một vấn đề nghiêm trọng. Nếu các phương trình Maxwell có dạng đơn giản trong một hệ quy chiếu và có dạng phức tạp trong mọi hệ quy chiếu khác, thì tại sao lại có hệ quy chiếu đặc biệt như vậy? Nói một cách khác, các phương trình Maxwell tiên đoán rằng ánh sáng chuyển động với vận tốc không đổi c. Nhưng vận tốc này được đo đối với hệ quy chiếu nào? Biến đổi Galileo chỉ ra rằng nếu vận tốc là c đối với một hệ quy chiếu cho trước thì nó sẽ không là c đối với bất kỳ hệ quy chiếu nào khác. Hệ quy chiếu đặc biệt mà chúng ta đề cập tới trong đó các phương trình Maxwell có dạng đơn giản và vận tốc ánh sáng là c được gọi là hệ quy chiếu ête. Chúng ta sẽ nói chi tiết hơn về ête trong phần tiếp theo, nhưng những thí nghiệm đã được thực hiện chỉ ra điều đáng ngạc nhiên là ánh sáng chuyển động với vận tốc v trong mọi hệ quy chiếu, không cần quan tâm đến việc hệ quy chiếu đó chuyển động như thế nào trong hệ quy chiếu ete.

Do đó sẽ có hai khả năng. Một là không đúng với các phương trình Maxwell, hoặc là không đúng với phép biến đổi Galileo. Xem xét điều thứ hai xem là "hiển nhiên" như thế nào, giả thiết tự nhiên trong cuối thế kỷ mười chín là mọi thứ là không đúng đối với các phương trình Maxwell, xét cho cùng các phương trình này là khá mới. Tuy nhiên, sau rất nhiều nỗ lực của nhiều người để làm cho các phương trình Maxwell phù hợp với phép biến đổi Galileo, cuối cùng Einstein chỉ ra rằng thực tế rắc rối nằm ở phép biến đổi Galileo. Một cách chặt chẽ hơn, vào năm 1905, ông chỉ ra rằng phép biến đổi Galileo là trường hợp đặc biệt của phép biến đổi Lorentz, chỉ đúng khi vận tốc liên quan là nhỏ hơn rất nhiều so với vận tốc của ánh sáng.[5] Như chúng ta sẽ thấy trong Mục 11.4.1, các hệ số

[4]Công thức ban đầu của Maxwell bao gồm một số lượng lớn các phương trình, nhưng về sau chúng được viết lại một cách súc tích hơn bằng cách sử dụng vector, dẫn đến bốn phương trình.

[5]Một điều rất nổi tiếng là các phương trình Maxwell là bất biến đối với phép biến đổi Lorentz (trái

trong phép biến đổi Lorentz là phụ thuộc cả vào vận tốc v và vận tốc ánh sáng c, trong đó sự xuất hiện của c là ở các mẫu số khác nhau. Bởi vì c là khá lớn (khoảng $3 \cdot 10^8$ m/s) so với vận tốc thông thường v, nên phần của phép biến đổi Lorentz liên quan đến c có thể bỏ qua, đối với bất kỳ giá trị thông thường nào của v. Đây là lý do tại sao không có ai trước Einstein nhận ra rằng phép biến đổi không có gì liên quan đến vận tốc của ánh sáng. Chỉ có các số hạng trong phương trình (11.1) là dễ nhận thấy.

Một cách ngắn gọn, các lý do dẫn đến các phương trình Maxwell mâu thuẫn với phép biến đổi Galileo đó là: (1) Vận tốc của ánh sáng xác định giới hạn mà phép biến đổi Galileo phá vỡ; (2) Các phương trình Maxwell vốn đã liên quan chặt chẽ với vận tốc ánh sáng, bởi vì ánh sáng là sóng điện từ.

11.1.2 Thí nghiệm Michelson - Morley

Như đã đề cập ở trên, trong cuối thế kỷ mười chín, sau khi Maxwell đưa ra các phương trình của ông, người ta đã biết rằng ánh sáng là một loại sóng điện từ và nó chuyển động với vận tốc khoảng $3 \cdot 10^8$m/s. Bây giờ, mọi loại sóng khác mà con người biết trong quá khứ đều cần một môi trường để truyền trong đó. Sóng âm cần môi trường không khí, sóng biển cần môi trường nước, sóng trên sợi dây tất nhiên là cần sợi dây,... Do đó một cách tự nhiên rằng ánh sáng cũng cần một môi trường để truyền trong đó. Môi trường này được gọi là ête. Tuy nhiên nếu ánh sáng truyền trong một môi trường cho trước, và nếu vận tốc trong môi trường này là c, thì vận tốc trong một hệ quy chiếu khác chuyển động với môi trường này phải khác với c. Ví dụ xét sóng âm trong không khí. Nếu vận tốc của âm thanh trong không khí là v_{sound}, và nếu bạn chạy trước nguồn âm với một vận tốc là v_{you} thì vận tốc của sóng âm đối với bạn (giả sử đó là một ngày không có gió) là $v_{sound} + v_{you}$. Một cách tương đương, nếu bạn đứng xuôi theo chiều gió và vận tốc của gió là v_{wind} thì vận tốc của sóng âm đối với bạn là $v_{sound} + v_{wind}$.

Nếu ête này thực sự tồn tại thì có một thứ hợp lý để làm là cố gắng đo vận tốc đối với nó. Điều này có thể được thực hiện theo cách sau đây (chúng ta sẽ làm việc đối với sóng âm trong không khí ở đây).[6] Gọi v_s là vận tốc của sóng âm trong không khí. Tưởng

ngược với tính không bất biến của chúng đối với phép biến đổi Galileo), nhưng Einstein là người đầu tiên nhận ra đầy đủ ý nghĩa của phép biến đổi này. Thay vì việc chỉ phù hợp với điện từ học, phép biến đổi Lorentz thay thế phép biến đổi Galileo trong khắp các lĩnh vực.

[6]Như chúng ta sẽ thấy ngay bây giờ, sẽ không có ête, và ánh sáng chuyển động với cùng vận tốc trong bất kỳ hệ quy chiếu nào. Đây là một thực tế khá là kỳ lạ, và nó khó hiểu hơn những gì mà chúng ta đã

tượng rằng có hai người đứng ở hai đầu của một sàn dài L, sàn này chuyển động với vận tốc v_p đối với hệ quy chiếu mà trong đó không khí ở trạng thái nghỉ. Một người vỗ tay, và người kia vỗ tay ngay khi anh ta nghe thấy tiếng vỗ tay đầu tiên (giả thiết rằng độ trễ thời gian do phản ứng được bỏ qua), và sau đó người thứ nhất ghi lại tổng thời gian vỗ tay khi người đó nghe thấy tiếng vỗ tay thứ hai. Vậy tổng thời gian là bao nhiêu? Tất nhiên, câu trả lời sẽ là chúng ta không thể nói được điều gì nếu không biết chiều chuyển động của sàn. Nó di chuyển song song với chiều dài của nó hay di chuyển ngang với chiều dài (hoặc một hướng nào đó nằm giữa hai hướng này)? Hãy xem xét hai trường hợp cơ bản. Đối với cả hai trường hợp này, chúng ta sẽ quan sát mô hình và thực hiện các tính toán trong hệ quy chiếu mà không khí ở trạng thái nghỉ.

Xét trường hợp đầu tiên khi sàn chuyển động song song với chiều dài của nó. Trong hệ quy chiếu của không khí, giả sử rằng người đứng sau là người vỗ tay đầu tiên. Khi đó mất một khoảng thời gian $L/(v_s - v_p)$ để âm thanh truyền tới người đứng trước. Điều này là sự thật bởi vì âm thanh phải truyền qua khoảng cách L với vận tốc tương đối $v_s - v_p$, như quan sát trong hệ quy chiếu của không khí.[7] Bằng lý luận tương tự, thời gian để âm thanh truyền tới người đằng sau là $L/(v_s + v_p)$. Do đó tổng thời gian sẽ là

$$t_1 = \frac{L}{v_s - vp} + \frac{L}{v_s + v_p} = \frac{2Lv_s}{v_s^2 - v_p^2}. \tag{11.2}$$

Giá trị này đúng là bằng $2L/v_s$ khi $v_p = 0$, và tiến tới vô cùng khi $v_p \to v_s$.

Bây giờ chúng ta xét trường hợp khi sàn chuyển động vuông góc với chiều dài của nó. Trong hệ quy chiếu của không khí, chúng ta sẽ có sơ đồ như trong hình 11.2. Bởi vì âm thanh chuyển động theo đường chéo,[8] thành phần "thẳng đứng" sẽ là $\sqrt{v_s^2 - v_p^2}$ (bằng cách sử dụng định lý Pitago). Đây là thành phần có liên quan đến chuyển động trên chiều dài của sàn, do đó tổng thời gian sẽ là

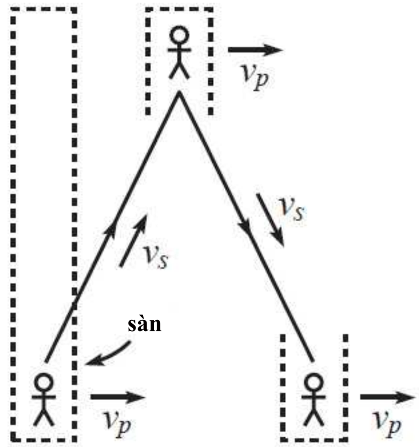
$$t_2 = \frac{2L}{\sqrt{v_s^2 - v_p^2}}. \tag{11.3}$$

Một lần nữa, kết quả này đúng bằng $2L/v_s$ khi $v_p = 0$, và bằng vô cùng khi $v_p \to v_s$.

biết. Nó đủ khó để vượt qua tất cả các suy nghĩ thông thường, không những thế chúng ta lại chưa có bất kỳ sự gợi ý nào chi tiết hơn, do đó tôi không thể tự mình sử dụng phương pháp này đối với sóng ánh sáng trong một môi trường ête. Tôi sẽ đề cập tới sóng âm trong không khí mà thôi

[7]Một cách giải thích khác, đối với vị trí đằng sau ban đầu của sàn, vị trí của sóng âm là $v_s t$, và vị trí của người đằng trước là $L + v_p t$. Cho hai đại lượng này bằng nhau dẫn đến $t = L/(v_s - v_p)$.

[8]Tất nhiên là trong thực tế âm thanh truyền đi theo mọi hướng, nhưng chỉ có phần của sóng âm thanh đặc biệt chuyển động theo đường chéo mới tới được với người còn lại.



Hình 11.2:

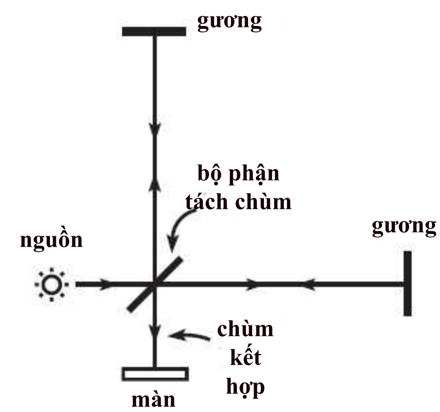
Thời gian trong phương trình (11.2) và (11.3) là không bằng nhau. Như là một bài tập, bạn có thể chỉ ra rằng trong tất cả các định hướng chiều chuyển động có thể của sàn, t_1 là thời gian lớn nhất, và t_2 là thời gian nhỏ nhất. Do đó, nếu bạn ở trên một bề mặt lớn chuyển động đối với không khí, và nếu bạn biết được giá trị của L và v_s, và nếu bạn muốn tính toán xem giá trị của v_p là bao nhiêu (giả thiết rằng không xảy ra trường hợp bạn xác định được hướng gió bằng cách tung một mẩu giấy nhỏ), tất cả những gì bạn phải làm là làm lại mô hình ở trên với một người nào đó đứng tại những điểm khác nhau dọc chu vi của đường tròn biết trước ở quanh bạn. Nếu bạn lấy tổng thời gian lớn nhất bằng với t_1 thì phương trình (11.2) sẽ đưa ra cho bạn giá trị v_p. Một cách khác, bạn có thể lấy tổng thời gian nhỏ nhất bằng với t_2 và phương trình (11.3) sẽ đưa ra cùng giá trị v_p. Chú ý rằng nếu $v_p \ll v_s$ thì bạn có thể áp dụng xấp xỉ bằng chuỗi Taylor đối với hai tổng thời gian thu được ở trên đây. Để sử dụng trong phần tiếp theo, hai sự xấp xỉ này sẽ dẫn đến hiệu thời gian như sau

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{2L}{v_s}\left(\frac{1}{1 - v_p^2/v_s^2} - \frac{1}{\sqrt{1 - v_p^2/v_s^2}}\right) \approx \frac{Lv_p^2}{v_s^3}. \tag{11.4}$$

Mô hình bên trên là ý tưởng chung mà Michelson và Morley đã sử dụng vào năm 1887 để đo vận tốc của trái đất qua ête đã nói tới.[9] Tuy nhiên có một rắc rối lớn đối với ánh sáng mà không nảy sinh đối với sóng âm, đó là vận tốc của ánh sáng là rất lớn đến nỗi bất kỳ khoảng thời gian nào đo một cách riêng lẻ đều sẽ có sai số đo không thể tránh được, sai số này lớn hơn nhiều so với hiệu số giữa t_1 và t_2. Do đó, sự đo đạc thời gian riêng lẻ về

[9]Xem Handschy (1982) để tìm hiểu kỹ hơn về số liệu và phân tích thí nghiệm.

bản chất là không mang lại thông tin gì. May thay, chúng ra có một phương pháp để giải quyết bế tắc này.



Hình 11.3:

Xét hai trường hợp "sàn" giống như ở bên trên được sắp xếp tạo thành một góc vuông với cùng điểm đầu. Điều này có thể được sắp xếp bằng cách có một tia sáng (đơn sắc) chạm vào một một bộ tách tia sáng, bộ tách này sẽ gửi đi hai tia sáng tạo thành một góc 90°. Các tia sáng sau đó chạm vào các gương và phản xạ lại bộ lọc, tại đó chúng (một phần) kết hợp lại trước khi chạm vào màn, như chỉ ra trong hình 11.3. Thực tế rằng ánh sáng là một sóng, dẫn chúng ta đến sự hỗn độn trong lần phản xạ đầu tiên, và bây giờ chúng ta xử lý như thế nào. Tính chất tự nhiên của sóng ánh sáng chỉ ra rằng tia ánh sáng kết hợp sinh ra một vân giao thoa trên màn. Tại tâm của vân, các tia sẽ giao thoa cộng hưởng hoặc triệt tiêu (hoặc trạng thái nào đó ở giữa), tùy thuộc vào việc hai tia sáng là cùng pha hay là ngược pha so với nhau khi chúng kết hợp. Vân giao thoa này là cực kỳ nhạy cảm. Một sự thay đổi nhỏ nhất trong chuyển động theo thời gian của tia sáng sẽ gây ra sự thay đổi rõ rệt của vân giao thoa.

Nếu toàn bộ dụng cụ thí nghiệm được xoay tròn sao cho thí nghiệm được thực hiện tại những góc khác nhau, thì số lượng lớn nhất mà các vân giao thoa thay đổi có thể sử dụng để xác định vận tốc của trái đất qua ête (v_p trong mô hình sàn ở phía trên). Trong trường hợp tới hạn, thời gian trong một nhánh là lớn hơn nhánh kia một lượng Lv^2/c^3, trong đó chúng ta đã thay đổi ký hiệu trong phương trình (11.4) sao cho $v_p \to v$ là vận tốc của trái đất, và $v_s \to c$ là vận tốc của ánh sáng. Nhưng trong trường hợp tới hạn khác, thời gian trong nhánh này là nhỏ hơn một lượng Lv^2/c^3. Do đó sự thay đổi giao thoa lớn nhất tương ứng với hiệu thời gian là $2Lv^2/c^3$.

Tuy nhiên, khi Michelson và Morley thực hiện thí nghiệm của họ, họ quan sát thấy rằng không có sự thay đổi giao thoa khi dụng cụ thí nghiệm được xoay tròn. Thực tế sơ đồ của họ cho phép đủ sự chặt chẽ để đo vận tốc đáng kể của trái đất qua ête nếu có một vận tốc như vậy tồn tại. Do đó nếu ête là tồn tại thì các kết quả của họ chỉ ra rằng vận tốc của trái đất qua ête là bằng không. Kết quả này, mặc dù là chắc chắn không xảy ra đâu, cũng là tốt về mặt kỹ thuật; nó có thể là trường hợp đơn giản tình cờ xảy ra với thí nghiệm của họ khi vận tốc tương đối bằng không. Tuy nhiên, khi họ thực hiện lại thí nghiệm của họ nửa năm sau, khi chuyển động của trái đất quanh mặt trời làm cho nó chuyển động theo chiều ngược lại, thì họ vẫn đo được vận tốc bằng không. Sẽ là không thể khi cả hai kết quả này đều bằng không (giả sử rằng ête tồn tại), do đó phải có điều gì đó là sai trong lý luận ban đầu. Đã có rất nhiều người qua nhiều năm cố gắng để giải thích kết quả bằng không này, nhưng không có lời giải thích nào là thỏa mãn. Một vài giải thích dẫn đến sự tiên đoán không chính xác trong các mô hình khác, và một vài trường hợp dường như có vẻ tốt nhưng lại là trường hợp khá đặc biệt.[10] Giải thích chính xác đưa ra từ lý thuyết tương đối của Einstein vào năm 1905 chỉ ra rằng ête là không tồn tại.[11] Nói một cách khác, ánh sáng không cần môi trường để truyền trong đó; nó không chuyển động với bất kỳ một hệ quy chiếu đặc biệt nào xác định trước, nhưng tất nhiên là nó chuyển động với bất cứ ai nhìn thấy nó.

NHẬN XÉT:

1. Chúng ta đã giả thiết ở trên rằng độ dài của hai nhánh trong dụng cụ thí nghiệm là bằng nhau. Tuy nhiên trong thực hành, chắc chắn là không thể hi vọng được rằng có thể tạo ra được độ dài bằng nhau như vậy, sẽ có một sai số đủ nhỏ so với bước sóng của ánh sáng. Nhưng may mắn là điều này không có vấn đề gì cả. Chúng ta không liên quan tới hiệu số của thời gian chuyển động liên kết với hai nhánh, mà đúng hơn là liên quan tới hiệu của các hiệu này khi dụng cụ thí nghiệm quay tròn. Sử dụng các

[10]Giải thích thành công nhất (và về bản chất là đúng, mặc dù lý do tại sao nó đúng vẫn không có cho đến khi Einstein giải thích đầy đủ mọi thứ) là sự co Lorentz - FitzGerald. Hai nhà khoa học này độc lập với nhau đã đưa ra rằng độ dài bị co lại theo chiều chuyển động chính xác bởi một thừa số, đó là $\sqrt{1-v^2/c^2}$, để làm thời gian chuyển động trong hai vị trí của mô hình thí nghiệm Michelson - Morley bằng nhau, điều này dẫn đến kết quả bằng không.

[11]Mặc dù chúng ta trình bày thí nghiệm Michelson - Morley ở đây cho mục đích sư phạm, tuy nhiên các nhà nhà sử học đều thống nhất rằng thực tế Einstein không bị ảnh hưởng nhiều bởi thí nghiệm này, ngoại trừ việc gián tiếp qua nghiên cứu của Lorentz về điện từ học. Xem Holton (1988).

phương trình (11.2) và (11.3) với các độ dài khác nhau L_1 và L_2, bạn có thể nhanh chóng chỉ ra rằng sự thay đổi giao thoa lớn nhất ứng với thời gian $(L_1 + L_2)v^2/c^3$, giả sử rằng $v \ll c$.

2. Giả thiết độ dài của các nhánh là xấp xỉ bằng nhau, hãy thay thế một vài số để thấy được sự thay đổi các vân giao thoa là bao nhiêu. Mô hình của Michelson - Morley có các nhánh với độ dài khoảng 10 m. Và chúng ta sẽ lấy v là vận tốc của trái đất quay quanh mặt trời, nó là khoảng $3 \cdot 10^4$ m/s. Khi đó chúng ta sẽ thu được sự thay đổi thời gian lớn nhất $t = 2Lv^2/c^3 \approx 7 \cdot 10^{-16}$ s. Số mũ âm lớn nhất ở đây có thể làm cho chúng ta muốn bỏ cuộc khi nghĩ rằng ảnh hưởng là nhỏ đến mức vô vọng. Nhưng chúng ta cũng nên cẩn thận với cái được gọi là đại lượng thứ nguyên "nhỏ". Chúng ta cần biết các đại lượng khác nào với thứ nguyên là thời gian mà chúng ta sẽ so sánh. Khoảng cách mà ánh sáng di chuyển trong thời gian t là $ct = (3 \cdot 10^8\text{ m/s})(7 \cdot 10^{-16}\text{ s}) \approx 2 \cdot 10^{-7}$ m, và kết quả này là một phân số hoàn toàn vừa phải của bước sóng của ánh sáng nhìn thấy, bước sóng này là khoảng $\lambda = 6 \cdot 10^{-7}$ m. Do đó ta có $ct/\lambda \approx 1/3$. Dẫn đến thời gian chúng ta muốn so sánh $2Lv^2/c^3$ là thời gian ánh sáng di chuyển hết một bước sóng của nó, cụ thể là λ/c, và hai thời gian này dẫn đến xấp xỉ cùng độ lớn. Sự dịch chuyển vân giao thoa khoảng một phần ba vòng tròn là khá hợp lý đối với sự chính xác trong mô hình của Michelson - Morley. Do đó nếu ête thực sự là tồn tại, thì họ dứt khoát sẽ có khả năng đo được vận tốc của trái đất qua nó.

3. Một giải thích được đưa ra về sự quan sát thấy không có ảnh hưởng ở trên đó là "sự kéo hệ quy chiếu." Có lẽ trái đất kéo ête cùng với nó, dẫn đến chúng ta quan sát thấy vận tốc tương đối bằng không. Sự giải thích bằng hệ quy chiếu kéo này là khá tin cậy, bởi vì trong ví dụ về sàn ở trên, sàn kéo một lớp không khí mỏng cùng với nó. Nhưng nó dẫn đến một điều rằng sự kéo hệ quy chiếu là không phù hợp với quang sai là hệ quả sau đây.

   Phụ thuộc vào chiều của vận tốc tức thời của trái đất khi nó quay trên quỹ đạo của nó quanh mặt trời, một ngôi sao cố định (phụ thuộc vào vị trí của nó) sẽ xuất hiện tại các vị trí hơi khác nhau trên bầu trời khi chúng ta quan sát tại hai thời điểm, cụ thể là cách nhau sáu tháng. Điều này là do thực tế rằng kính viễn vọng của bạn phải bị nhắm một góc lệch khá nhỏ so với chiều thực tế của ngôi sao, bởi vì khi ánh sáng của ngôi sao di chuyển tới kính viễn vọng thì kính viễn vọng đã chuyển động một khoảng nhỏ theo chiều quay của trái đất. Tỷ số của vận tốc trái đất quay quanh mặt trời và vận tốc của ánh sáng là khoảng 10^{-4}, do đó ảnh hưởng này là khá nhỏ. Nhưng nó cũng đủ lớn để có thể quan sát thấy, và quả thực nó có thể đo được. Chú ý rằng vận tốc của kính viễn vọng mới có ý nghĩa quan trọng ở đây chứ không phải là vị trí của nó.[12]

[12] Ảnh hưởng của quang sai này không giống như ảnh hưởng thị sai mà trong đó chiều của vị trí thực tế của vật thể bị thay đổi. Ví dụ, một người đứng tại những vị trí khác nhau trên trái đất quan sát mặt

Tuy nhiên, nếu sự kéo hệ quy chiếu là có thật thì ánh sáng từ ngôi sao sẽ bị kéo cùng với trái đất và do đó sẽ di chuyển làm cho kính viễn vọng hướng trực tiếp vào ngôi sao, điều này mâu thuẫn với quan sát thực tế rằng kính viễn vọng phải hướng lệch một góc nhỏ như đã nói tới ở trên. Hoặc ngay cả trong trường hợp xấu hơn, sự kéo quy chiếu có thể sinh ra một lớp biên nhiễu loạn sẽ làm mờ ngôi sao. Do đó sự tồn tại của quang sai chỉ ra rằng sự kéo hệ quy chiếu là không thể xảy ra. ♣

11.2 Các tiên đề

Bây giờ chúng ta sẽ bắt đầu thảo luận sơ qua và xem xét xem mối quan tâm chính của lý thuyết tương đối hẹp là gì? Chúng ta sẽ đi theo con đường mà Einstein đã đi và sử dụng hai tiên đề sau như là nền tảng của lý thuyết này. Chúng ta sẽ bắt đầu với hai tiên đề về vận tốc của ánh sáng:

- *Vận tốc ánh sáng là không đổi trong bất kỳ hệ quy chiếu quán tính nào.*
  Tôi không khẳng định rằng phát biểu này là hiển nhiên, hoặc thậm chí là có thể tin được. Nhưng tôi quả quyết rằng sẽ là rất dễ để hiểu được phát biểu này nói về cái gì (dù là bạn nghĩ điều này là quá ngớ ngẩn nếu là sự thật). Nó nói như sau. Xét một con tàu chuyển động trên mặt đất với vận tốc không đổi. Một người nào đó trên con tàu chiếu ánh sáng từ một điểm trên tàu tới một điểm khác. Gọi vận tốc của ánh sáng đối với tàu là c ($\approx 3 \cdot 10^8$ m/s). Khi đó tiên đề trên nói rằng một người ở trên mặt đất cũng quan sát thấy ánh sáng chuyển động với vận tốc c.

  Đây quả thực là một phát biểu khá kỳ lạ. Nó không đúng đối với những vật thể thông thường. Nếu một quả bóng được ném trên một con tàu thì vận tốc của quả bóng sẽ phải khác nhau trong các hệ quy chiếu khác nhau. Người quan sát trên mặt đất phải thêm vào vận tốc của quả bóng (đối với con tàu) và vận tốc của con tàu (đối với mặt đất) để thu được vận tốc của quả bóng đối với mặt đất.[13]

---

trăng ở những góc khác nhau (đó là họ nhìn mặt trăng trên đường thẳng với các ngôi sao xa khác nhau). Mặc dù thị sai được đo với ngôi sao ở gần (khi trái đất quay quanh mặt trời) nhưng ảnh hưởng góc của nó là nhỏ hơn nhiều so với ảnh hưởng góc của quang sai. Cái đầu giảm đối với khoảng cách trong khi đó cái sau thì lại không như thế. Để tìm hiểu sâu hơn về quang sai cũng như tại sao nó chỉ phụ thuộc vào vận tốc của trái đất (cụ thể là sự thay đổi vận tốc của trái đất) mà không phụ thuộc vào vận tốc của các ngôi sao (bởi vì bạn có thể nghĩ rằng dựa vào tiêu đề của Chương này thì vận tốc tương đối mới là vấn đề cần quan tâm), xem Eisner (1967).

[13]Thực tế, điều này không phải là quá chính xác, như công thức thêm vận tốc trong Mục 11.5.1 sẽ chỉ

Sự đúng đắn của tiên đề vận tốc của ánh sáng không thể được chứng minh từ những nguyên lý đã biết. Không có phát biểu nào với bất cứ nội dung mang tính chất vật lý nào trong vật lý (nghĩa là, một phát biểu không mang tính chất thuần túy mặt toán học như "hai quả táo cộng với hai quả táo sẽ thành bốn quả táo") có thể được chứng minh. Cuối cùng, chúng ta phải trông cậy vào thí nghiệm. Và quả thực, tất cả các hệ quả của tiên đề vận tốc ánh sáng đã được xác minh vô số lần suốt thế kỷ trước. Như đã đề cập tới trong phần trước, thí nghiệm sớm và nổi tiếng nhất về vận tốc ánh sáng là thí nghiệm được thực hiện bởi Michelson và Morley. Và trong những năm gần đây, các hệ quả này tiếp tục được kiểm chứng bằng máy gia tốc hạt năng lượng cao, trong đó các hạt cơ bản đạt tới vận tốc rất gần với vận tốc của ánh sáng. Tập hợp tất cả các dữ liệu từ rất nhiều thí nghiệm trong suốt những năm qua cho phép chúng ta có thể kết luận gần như chắc chắn rằng giả thiết lúc đầu của chúng ta về tính bất biến của vận tốc ánh sáng là đúng (hoặc ít nhất nó cũng là trường hợp giới hạn của một lý thuyết khác chính xác hơn).

Có một tiên đề nữa trong lý thuyết tương đối hẹp, đó là tiên đề về "tính tương đối" (cũng thường được gọi là nguyên lý tương đối). Tiên đề này đáng tin hơn nhiều so với tiên đề về vận tốc ánh sáng, do đó bạn có thể chỉ cần công nhận nó và không cần xem xét cụ thể. Nhưng tất nhiên cũng giống như bất kỳ tiên đề nào, nó là nền tảng cốt yếu. Tiên đề này có thể phát biểu theo nhiều cách khác nhau, nhưng ở đây chúng ta phát biểu đơn giản như sau:

- *Tất cả mọi hệ quy chiếu quán tính là "tương đương"*

  Tiên đề này về cơ bản nói rằng một hệ quy chiếu quán tính cho trước là không có gì đặc biệt so với tất cả các hệ quy chiếu quán tính khác. Không có hệ quy chiếu nào được ưu tiên hơn. Tuy nhiên, nó không có nghĩa là mọi thứ đang chuyển động, nó chỉ có ý nói rằng một thứ đang chuyển động đối với thứ khác. Đây là chỗ đề cập tới "tính tương đối" trong thuyết tương đối hẹp. Không có hệ quy chiếu tuyệt đối, sự chuyển động của bất kỳ hệ quy chiếu nào đều chỉ được định nghĩa so với các hệ quy chiếu khác.

  Tiên đề này cũng nói rằng nếu các định luật vật lý đúng với một hệ quy chiếu quán tính (và có lẽ chúng đúng trong hệ quy chiếu mà tôi đang ngồi đây),[14] thì chúng

ra. Nhưng nó đủ cho lập luận mà chúng ta thực hiện ở đây.

[14]Về mặt kỹ thuật, trái đất quay trong khi chuyển động tròn quanh mặt trời, và cũng có một sự dao

cũng đúng trong tất cả các hệ quy chiếu quán tính khác. Cũng có thể nói rằng nếu chúng ta có hai hệ quy chiếu S và S' thì S sẽ nhìn mọi thứ trong S' giống hệt như S' nhìn mọi thứ trong S, bởi vì chúng ta có thể thay đổi ký hiệu S và S' (chúng ta sẽ thu được một số điều từ phát biểu này trong vài phần tiếp theo). Ngoài ra tiên đề này còn nói rằng không gian trống là thuần nhất (tức là mọi điểm là giống nhau), bởi vì chúng ta có thể chọn một điểm bất kỳ làm gốc tọa độ. Nó cũng chỉ ra rằng không gian trống là đẳng hướng (tức là mọi chiều là giống nhau), bởi vì chúng ta có thể lấy một trục bất kỳ là trục x của hệ tọa độ.

Không giống như tiên đề đầu tiên về vận tốc ánh sáng, tiên đề thứ hai này là hoàn toàn có lý. Chúng ta đã từng đề cập tới việc không có không gian đặc biệt nào trong vũ trụ. Chúng ta đã từ bỏ việc coi trái đất là trung tâm, do đó cũng không có điểm đặc biệt nào là trung tâm.

Tiên đề thứ hai chỉ là nguyên lý bất biến quen thuộc của của Galileo, giả sử rằng nguyên lý bất biến Galileo được viết dưới dạng "Các định luật vật lý được giữ nguyên trong tất cả các hệ quy chiếu quán tính" chứ không phải dạng đề cập cụ thể tới phép biến đổi Galileo bởi vì phép biến đổi này không phù hợp với tiên đề về vận tốc ánh sáng.

Mọi điều mà chúng ta nói ở đây về tiên đề thứ hai là liên quan tới không gian trống. Nếu chúng ta có một mảnh khối lượng thì tất nhiên sẽ có sự khác nhau giữa vị trí của khối lượng và một điểm cách đó một mét. Để kết hợp khối lượng vào lý thuyết tương đối, chúng ta sẽ phải nghiên cứu thuyết tương đối tổng quát. Nhưng chúng ta sẽ không đề cập tới vấn đề đó trong chương này. Chúng ta chỉ nói tới không gian trống, có lẽ chứa vài thứ quan sát được chuyển động cùng với các tên lửa hoặc cùng với các hình cầu nhỏ trôi lơ lửng một cách vô định. Mặc dù thoạt đầu nó nghe có vẻ nhàm chán, nhưng nó hóa ra sẽ trở lên thú vị hơn so với điều bạn đang nghĩ.

NHẬN XÉT: Khi có tiên đề thứ hai, bạn có thể băn khoăn là chúng ta có cần tiên đề đầu tiên nữa hay không. Nếu tất cả các hệ quy chiếu quán tính là tương đương, phải chăng vận tốc ánh sáng sẽ là như nhau trong mọi hệ quy chiếu bất kỳ? Câu trả lời là không. Đối với tất cả những gì chúng ta đã biết, ánh sáng cũng có thể được xử lý giống như một quả bóng chày. Một quả bóng chày tất nhiên sẽ không có cùng vận tốc đối với các hệ quy chiếu khác nhau, và điều này không ảnh hưởng gì đến sự tương đương của các hệ quy chiếu.

động nhỏ nào đấy của sàn nhà dưới ghế của tôi,. . . , do đó tôi không thực sự là một hệ quy chiếu quán tính. Nhưng về mặt nào đó thì cũng thể coi tôi là một hệ quy chiếu quán tính.

Nó cũng dẫn đến rằng (xem Mục 11.10) gần như tất cả thuyết tương đối hẹp có thể rút ra bằng cách chỉ sử dụng tiên đề thứ hai. Tiên đề đầu tiên chỉ đơn giản là cho vào cho đủ một chút thông tin cần thiết bằng cách phát biểu rằng mọi thứ có cùng vận tốc hữu hạn trong mọi hệ quy chiếu. Điều này thực sự không quan trọng vì nó tình cờ xảy ra với vận tốc ánh sáng. Nó cũng có thể khoai tây nghiền hoặc một thứ nào đó đại loại như vậy (tất nhiên là không có khối lượng, như chúng ta sẽ thấy trong Chương 12, do đó chúng phải là khoai tây không có khối lượng hoặc bất cứ thứ gì như vậy), và lý thuyết tương đối hẹp khi đó sẽ không có gì thay đổi. Do đó để ngắn gọn hơn, chỉ cần phát biểu tiên đề đầu tiên như sau, "Có một thứ nào đó có cùng vận tốc trong mọi hệ quy chiếu quán tính." Cũng rất tình cờ là trong vũ trụ của chúng ta thứ này chính là thứ cho phép chúng ta nhìn thấy, tức là ánh sáng.[15] ♣

11.3 Những ảnh hưởng cơ bản

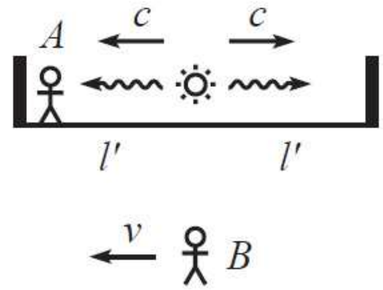
Những ảnh hưởng nổi bật nhất đến từ hai tiên đề của chúng ta đó là (1) sự mất tính đồng thời, (2) sự co độ dài, và (3) sự giãn nở thời gian. Trong phần này, chúng ta sẽ thảo luận về ba ảnh hưởng này bằng cách sử dụng các ví dụ cụ thể truyền thống. Trong phần tiếp theo, chúng ta sẽ rút ra biến đổi Lorentz bằng cách sử dụng ba kết quả này.

11.3.1 Sự mất tính đồng thời

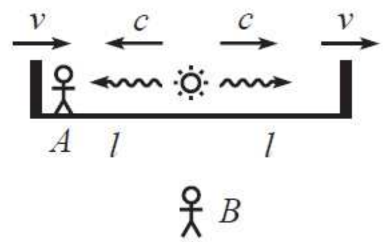
Xét một mô hình như sau. Trong hệ quy chiếu của A, một nguồn ánh sáng được đặt tại giữa hai máy thu với khoảng cách ℓ' tới mỗi máy (xem hình 11.4). Nguồn sáng phát ra một chớp sáng. Từ quan sát của A, ánh sáng chạm vào hai máy thu tại cùng một thời gian là ℓ'/c giây sau chớp sáng. Bây giờ xét người quan sát khác là B chuyển động với vận tốc v sang bên trái. Từ quan sát của B, liệu ánh sáng có chạm vào hai máy thu tại cùng một thời gian hay không? Chúng ta sẽ chỉ ra rằng là không.

Trong hệ quy chiếu của B, tình huống sẽ giống như trong hình 11.5. Các máy thu (cùng

[15] Để hiểu kỹ hơn, thực tế thậm chí không cần tồn tại một thứ nào đó có cùng vận tốc trong mọi hệ quy chiếu quán tính. Lý thuyết tương đối của chúng ta vẫn như vậy nếu như chúng ta viết tiên đề đầu tiên như sau, "Có một vận tốc giới hạn của một vật thể trong hệ quy chiếu bất kỳ" (Xem Mục 11.10 để thảo luận chi tiết hơn về vấn đề này.) Không cần phải có một thứ nào đó mà trong thực tế chuyển động với vận tốc này. Có thể hiểu được là tồn tại một lý thuyết không chứa các vật thể không khối lượng sao cho mọi thứ chuyển động chậm hơn so với vận tốc giới hạn này.



Hình 11.4:



Hình 11.5:

với mọi thứ khác trong hệ quy chiếu của A) chuyển động sang bên phải với vận tốc v, và ánh sáng chuyển động theo cả hai chiều tại vận tốc c đối với B (chứ không phải với nguồn sáng khi đo trong hệ quy chiếu của B; đây là chỗ sử dụng tiên đề về vận tốc ánh sáng). Do đó, vận tốc tương đối (theo quan sát của B) của ánh sáng và máy thu bên trái là $c + v$, và vận tốc tương đối của ánh sáng và máy thu bên phải là $c - v$.

NHẬN XÉT: Tất nhiên sẽ là hợp lý khi chỉ thêm vào và trừ đi trong các vận tốc này để thu được vận tốc tương đối khi quan sát bởi B. Ví dụ nếu v bằng $2 \cdot 10^8$ m/s thì trong một giây máy thu bên trái sẽ di chuyển một đoạn là $2 \cdot 10^8$ m sang bên phải, trong khi tia sáng bên trái di chuyển một đoạn $3 \cdot 10^8$ m sang bên trái. Điều này có nghĩa rằng bây giờ chúng gần hơn $5 \cdot 10^8$ m so với chúng cách đây một giây. Nói một cách khác, vận tốc tương đối (đo trong hệ quy chiếu của B) là $5 \cdot 10^8$ m/s, nó đơn giản chỉ là $c+v$ (chú ý rằng điều này chỉ ra rằng sẽ là hoàn toàn hợp lý đối với vận tốc tương đối của hai vật khi đo bởi vật thứ ba, có thể lấy một giá trị bất kỳ tối đa là $2c$.) Cả v và c ở đây được đo với cùng một người, cụ thể là B, do đó trực giác của chúng ta ở đây là đúng. Chúng ta không cần sử dụng "công thức cộng vận tốc" mà chúng ta sẽ rút ra trong Mục 11.5.1, công thức này sẽ có liên quan đến các mô hình khác. Tôi đưa ra nhận xét này ở đây chỉ trong trường hợp bạn đã nhìn thấy công thức cộng vận tốc và nghĩ rằng nó có liên quan đến mô hình này. Nhưng nếu điều đó không xảy ra với bạn thì không cần để ý tới nhận xét này. ♣

Gọi ℓ là khoảng cách từ nguồn sáng đến máy thu đo trong hệ quy chiếu của B.[16] Khi đó trong hệ quy chiếu của B, ánh sáng chạm vào máy thu bên trái tại thời gian t_l và máy thu bên phải tại thời gian t_r, trong đó

$$t_l = \frac{\ell}{c+v}, \quad \text{và} \quad t_r = \frac{\ell}{c-v}. \tag{11.5}$$

Hai đại lượng này sẽ không bằng nhau nếu như $v \neq 0$. (Một trường hợp ngoại lệ nữa là khi $\ell = 0$, tức là trường hợp hai sự kiện xảy ra tại cùng một vị trí và cùng thời gian trong tất cả các hệ quy chiếu.) Bài học thông qua ví dụ này đó là không được mang tính trực quan khi nói rằng một sự kiện xảy ra tại cùng một thời gian đối với sự kiện khác, trừ khi bạn chỉ ra hệ quy chiếu nào mà bạn định đề cập tới. Tính đồng thời phụ thuộc vào hệ quy chiếu mà sự quan sát được tiến hành.

NHẬN XÉT:

1. Tính bất biến của vận tốc ánh sáng được sử dụng trong phát biểu rằng hai vận tốc tương đối ở trên là $c+v$ và $c-v$. Nếu chúng ta đề cập tới quả bóng chày thay vì tia sáng thì vận tốc tương đối sẽ không giống như thế này. Nếu v_b là vân tốc của quả bóng chày được ném đi trong hệ quy chiếu của A, thì B sẽ quan sát thấy quả bóng chuyển động với vận tốc $v_b - v$ sang bên trái và $v_b + v$ sang bên phải.[17] Các đại lượng này không bằng v_b, tức là không giống như trong trường hợp tia sáng. Các vận tốc tương đối giữa quả bóng và các máy thu bên trái và bên phải do đó sẽ là $(v_b - v) + v = v_b$ và $(v_b + v) - v = v_b$. Các đại lượng này bằng nhau, do đó B quan sát thấy quả bóng chạm vào các máy thu tại cùng một thời điểm, đây là điều chúng ta biết rất rõ từ kinh nghiệm thông thường.

2. Quả thực là điều hợp lý trong phương trình (11.5) khi chúng ta thu được các khoảng thời gian bằng cách đơn giản lấy ℓ chia cho các vận tốc tương đối, $c+v$ và $c-v$. Nhưng nếu bạn muốn một phương pháp chính tắc hơn thì bạn có thể sử dụng lý luận sau đây: Trong hệ quy chiếu của B, vị trí của photon bên phải được cho bởi ct, và vị trí của máy thu bên phải (máy thu có vị trí lúc ban đầu ℓ) cho bởi $\ell + vt$. Cho hai vị trí này bằng nhau dẫn đến $t_r = \ell/(c-v)$. Tương tự đối với photon bên trái.

[16] Chúng ta sẽ thấy trong Mục 11.3.3 rằng ℓ không bằng ℓ', nguyên nhân là do sự co độ dài. Nhưng điều đó không quan trọng đối với những gì chúng ta đang làm ở đây. Thực tế mà chúng ta cần ở đây chỉ là khoảng cách từ nguồn sáng đến hai máy thu là bằng nhau, đo trong hệ quy chiếu của B. Điều này là đúng bởi vì không gian là thuần nhất, do đó thừa số của sự co độ dài phải là như nhau tại mọi nơi. Tìm hiểu sâu hơn về điều này trong Mục 11.3.3

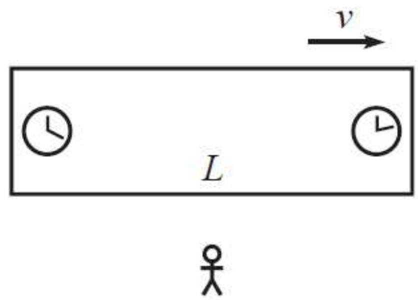
[17] Công thức cộng vận tốc trong Mục 11.5.1 chỉ ra rằng các công thức này thực tế là không chính xác. Nhưng chúng đủ cho mục đích của chúng ta ở đây.

3. Luôn luôn có sự khác nhau giữa thời gian một sự kiện xảy ra và thời gian một người nào đó nhìn thấy sự kiện đó xảy ra, bởi vì ánh sáng cần có thời gian để di chuyển từ sự kiện đó tới người quan sát. Những gì chúng ta đã tính toán ở trên là thời gian mà tại đó các sự kiện thực sự xảy ra. Nếu chúng ta muốn, chúng ta có thể tính toán được thời gian mà B nhìn thấy các sự kiện diễn ra, nhưng những thời gian đó là không quá quan trọng, và trong trường hợp tổng quát chúng ta không cần đề cập tới chúng. Chúng có thể dễ dàng tính được bằng cách thêm vào một hiệu thời gian với độ lớn là (khoảng cách)/c đối với quãng đường của photon tới mắt của người B. Tất nhiên, nếu B thực sự làm thí nghiệm trên để tìm t_r và t_l thì người ấy sẽ làm điều đó bằng cách mô tả thời gian mà người ấy nhìn thấy các hiện tượng, và sau đó trừ đi các hiệu thời gian có liên quan (khoảng cách)/c để tìm thời gian mà các sự kiện thực sự xảy ra.

   Tóm lại, kết quả $t_r \neq t_l$ trong phương trình (11.5) là do thực tế rằng các hiện tượng thực sự xảy ra tại các thời gian khác nhau trong hệ quy chiếu của B. Chúng ta không cần quan tâm đến thời gian ánh sáng chuyển động tới mắt của bạn. Trong chương này, chúng ta sẽ thường xuyên sử dụng ngôn ngữ hơi tùy tiện và nói về mọi thứ giống như kiểu, "Thời gian mà B nhìn thấy sự kiện Q xảy ra là bao nhiêu?" Nhưng chúng ta không thực sự có ý rằng, "Khi nào mắt của người B ghi nhận rằng sự kiện Q xảy ra?". Thay vào đó chúng ta có ý rằng, "Thời gian mà B biết rằng sự kiện Q xảy ra trong hệ quy chiếu của người ấy là bao nhiêu?" Nếu trong trường hợp chúng ta muốn sử dụng từ "nhìn" trong trường hợp đầu, chúng ta sẽ nói một cách cụ thể (như trong Mục 11.8 với ảnh hưởng Droppler). ♣

Ví dụ (Đồng hồ phía sau chạy nhanh hơn): Hai đồng hồ được đặt tại hai đầu của một con tàu có độ dài L (đo trong hệ quy chiếu của nó). Chúng được chỉnh cùng giờ trong hệ quy chiếu của con tàu. Con tàu chuyển động qua bạn với vận tốc v. Sẽ dẫn đến một điều rằng nếu bạn quan sát các đồng hồ tại cùng một thời điểm trong hệ quy chiếu của bạn thì bạn sẽ nhìn thấy đồng hồ phía sau chạy nhanh hơn đồng hồ đằng trước (xem hình 11.6). Thời gian chạy nhanh hơn là bao nhiêu?

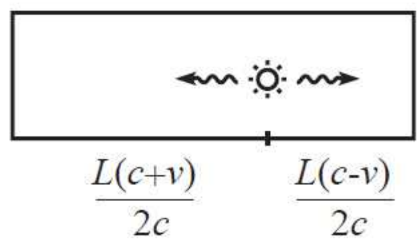
Lời giải: Như ở phần trên, giả sử chúng ta đặt một nguồn sáng trên con tàu nhưng bây giờ nguồn sáng ở vị trí sao cho ánh sáng chạm vào các đồng hồ tại hai đầu của con tàu tại cùng một thời điểm trong hệ quy chiếu của bạn. Giống như ở trên, vận tốc tương đối của photon và các đồng hồ sẽ là $c + v$ và $c - v$ (quan sát từ hệ quy chiếu của bạn). Do đó chúng ta cần chia con tàu thành các độ dài theo tỷ số này trong hệ quy chiếu của bạn. Nhưng bởi vì sự co độ dài (sẽ thảo luận chi tiết trong Mục 11.3.3) là độc lập với vị trí, do đó đây cũng phải là tỷ số trong hệ quy chiếu của tàu. Dẫn đến trong hệ quy chiếu của con tàu, bạn có thể nhanh chóng chỉ ra



Hình 11.6:

rằng hai số trong tỷ số này, và thêm vào L, là $L(c+v)/2c$ và $L(c-v)/2c$.

Do đó tình huống trong hệ quy chiếu của con tàu sẽ giống như trong hình 11.7.



Hình 11.7:

Ánh sáng phải di chuyển thêm một khoảng cách $L(c+v)/2c - L(c-v)/2c = Lv/c$ để tới được đồng hồ ở phía sau. Ánh sáng chuyển động với vận tốc c (luôn luôn là như vậy), do đó thời gian thêm sẽ là Lv/c^2. Dẫn đến đồng hồ ở phía sau chạy nhanh hơn một lượng Lv/c^2 khi nó bị chạm bởi photon phía sau, so sánh với đồng hồ ở phía trước khi nó bị chạm vào bởi photon phía trước.

Bây giờ, gọi thời điểm mà bạn nhìn vào các đồng hồ là thời điểm mà các photon chạm vào chúng (đó là lý do tại sao chúng ta chọn sự chạm vào là đồng thời trong hệ quy chiếu của bạn). Khi đó từ phần trên, bạn quan sát thấy đồng hồ phía sau chạy nhanh hơn đồng hồ phía trước một lượng,

$$\text{hiệu số} = \frac{Lv}{c^2}. \tag{11.6}$$

Chú ý rằng L xuất hiện ở đây là độ dài của con tàu trong hệ quy chiếu của nó chứ không phải là độ dài ngắn hơn mà bạn qua sát thấy trong hệ quy chiếu của bạn (xem Mục 11.3.3). Phụ lục G đưa ra một cách thành lập khác của phương trình (11.6), mặc dù chúng dựa vào nội dung chưa có trong chương này và Chương 14.

NHẬN XÉT:

1. Kết quả Lv/c^2 này không liên quan gì với thực tế rằng đồng hồ phía sau mất nhiều thời gian hơn để đi qua bạn.

2. Kết quả này cũng không nói rằng bạn nhìn đồng hồ phía sau chạy với tốc độ nhanh hơn đồng hồ phía trước. Chúng chạy với cùng một tốc độ (có cùng thừa số giãn nở thời gian đối với bạn; xem Mục 11.3.2). Đồng hồ phía sau chỉ đơn giản là tại một thời điểm cố định là chỉ thời gian trước so với đồng hồ phía trước khi bạn quan sát thấy.

3. Thực tế rằng đồng hồ phía sau chạy trước đồng hồ phía trước trong hệ quy chiếu của bạn nghĩa là trong hệ quy chiếu của con tàu ánh sáng sẽ chạm vào đồng hồ phía sau sau khi nó chạm vào đồng hồ phía trước.

4. Sẽ rất dễ quên là đồng hồ nào chạy trước. Nhưng có một cách nhớ có ích đối với "đồng hồ phía sau chạy trước" (nguyên gốc tiếng Anh là "rear clock ahead") đó là cả chữ cái đầu tiên và chữ cái thứ tư trong mỗi từ đều tạo thành một nhóm từ giống nhau mà thuật đảo chữ cái của chúng có nghĩa là "chiếc xe" (car), mà phần nào có nghĩa giống như "con tàu". Chắc chắn là như vậy. ♣

11.3.2 Sự giãn nở thời gian

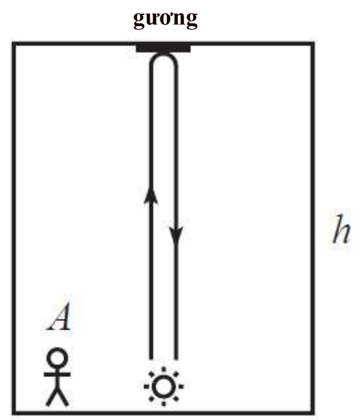
Ở đây chúng ta đưa ra một ví dụ kinh điển về một tia sáng chuyển động thẳng đứng trên một con tàu. Giả sử có một nguồn sáng trên sàn tàu và một chiếc gương trên trần với độ cao h so với sàn. Giả thiết người quan sát A ở trạng thái nghỉ trên con tàu và người quan sát B ở trạng thái nghỉ trên mặt đất. Vận tốc của con tàu đối với mặt đất là v.[18] Một chớp sáng được phát ra. Ánh sáng di chuyển lên tới gương, phản xạ trở lại, và sau đó hướng xuống dưới. Giả sử rằng sau khi chớp sáng được phát ra, chúng ta thay thế nguồn sáng bởi một chiếc gương sao cho ánh sáng bị giữ phản xạ lên và xuống vô hạn lần.

Trong hệ quy chiếu của A, con tàu ở trạng thái nghỉ. Quỹ đạo của tia sáng được chỉ ra như trong hình 11.8. Ánh sáng mất một khoảng thời gian h/c để chạm tới trần và sau đó mất một khoảng thời gian h/c để trở lại sàn. Do đó thời gian khứ hồi một lần như vậy sẽ là

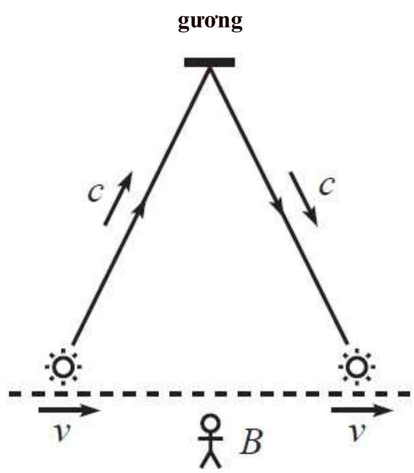
$$t_A = \frac{2h}{c}. \tag{11.7}$$

Trong hệ quy chiếu của B, con tàu chuyển động với vận tốc v. Quỹ đạo của tia sáng được chỉ ra như trong hình 11.9. Điểm mấu chốt thực tế ở đây đó là vận tốc của ánh

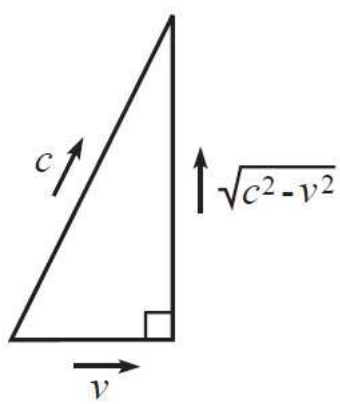
[18] Về mặt kỹ thuật, các từ, "đối với. . . ," sẽ luôn luôn được đề cập đến khi chúng ta nói về vận tốc, bởi vì không có hệ quy chiếu tuyệt đối, và do đó không có vận tốc tuyệt đối. Nhưng trong các phần tiếp theo, trừ khi rõ ràng chúng ta có ý gì (như trong trường hợp con tàu chuyển động với mặt đất), còn ngoài ra chúng ta đôi khi sẽ hơi tùy tiện và bỏ qua cụm từ "đối với. . . "



Hình 11.8:



Hình 11.9:



Hình 11.10:

sáng trong hệ quy chiếu của B vẫn là c. Điều này có nghĩa rằng ánh sáng chuyển động dọc quỹ đạo đường chéo hướng lên trên với vận tốc c. (Thành phần thẳng đứng của vận tốc không phải là c, giống như là trường hợp nếu ánh sáng được xử lý giống như một quả bóng chày.) Bởi vì thành phần ngang của vận tốc ánh sáng là v,[19] thành phần thẳng đứng phải là $\sqrt{c^2 - v^2}$ như chỉ ra trong hình 11.10.[20] Do đó thời gian ánh sáng chạm vào gương sẽ là $h/\sqrt{c^2 - v^2}$,[21] do đó thời gian một lần khứ hồi sẽ là

$$t_B = \frac{2h}{\sqrt{c^2 - v^2}}. \tag{11.8}$$

Chia phương trình (11.8) cho phương trình (11.7) dẫn đến

$$t_B = \gamma t_A, \tag{11.9}$$

trong đó

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{11.10}$$

Thừa số γ này có mặt ở khắp nơi trong thuyết tương đối hẹp. Chú ý rằng nó luôn luôn lớn hơn hoặc bằng 1. Điều này có nghĩa rằng thời gian khứ hồi trong hệ quy chiếu của B là dài hơn so với trong hệ quy chiếu của A.

Hàm ý của điều này là gì? Để cụ thể, lấy $v/s = 3/5$, dẫn đến $\gamma = 5/4$. Khi đó chúng ta có thể nói như sau. Nếu A đứng bên cạnh nguồn sáng, và nếu B đứng trên mặt đất, và nếu A vỗ tay trong một khoảng thời gian là $t_A = 4$ giây thì B sẽ quan sát thấy việc vỗ tay đó trong một khoảng thời gian là $t_B = 5$ giây (tất nhiên là bỏ qua khoảng thời gian ánh sáng chuyển động tới mắt của người ấy). Điều này là sự thật bởi vì cả A và B phải có cùng số lần khứ hồi tia sáng diễn ra giữa các lần vỗ tay. Để thuận tiện, nếu chúng ta giả sử rằng một lần khứ hồi mất một giây trong hệ quy chiếu A (tất nhiên đó sẽ là một con tàu rất cao) thì bốn lần khứ hồi giữa các lần vỗ tay sẽ mất năm giây trong hệ quy chiếu B, sử dụng phương trình (11.9).

NHẬN XÉT: Chúng ta đã khẳng định cả A và B phải thống nhất là có cùng số lần khứ hồi giữa các lần vỗ tay. Tuy nhiên, bởi vì A và B không thống nhất về quá nhiều điều (liệu hai sự kiện có xảy ra đồng thời, tốc độ mà đồng hồ chạy, và độ dài của mọi thứ, như chúng ta sẽ thấy sau đây), do đó bạn có thể sẽ băn khoăn liệu có bất cứ thứ gì mà họ thống nhất với

[19] Vâng, nó vẫn là v. Ánh sáng luôn luôn nằm trên đường thẳng đứng giữa nguồn và gương. Bởi vì cả hai vật thể này chuyển động theo phương ngang với cùng vận tốc v và ánh sáng cũng vậy.

[20] Định lý Pitago quả thực là chính xác ở đây. Nó đúng đối với khoảng cách, và bởi vì các vận tốc chỉ là cách khoảng cách chia cho thời gian, do đó nó cũng đúng với các vận tốc.

[21] Chúng ta đã giả sử rằng chiều cao của con tàu trong hệ quy chiếu của B vẫn là h. Mặc dù chúng ta sẽ thấy trong Mục 11.3.3 rằng có sự co độ dài dọc theo chiều chuyển động ở đây, và không có trong chiều vuông góc với chiều chuyển động (xem bài tập 11.1).

> nhau là nó giống nhau. Có, vẫn có những khẳng định là độc lập với hệ quy chiếu mà chúng ta có thể dựa vào. Nếu một thùng sơn bay qua bạn và đổ sơn vào đầu bạn thì mọi người đều đồng ý rằng bạn bị bao phủ bởi sơn. Tương tự như vậy, nếu A đứng cạnh đồng hồ ánh sáng và vỗ tay khi ánh sáng chạm vào sàn thì mọi người đều thống nhất với điều này. Nếu ánh sáng thực sự là một xung laze mạnh và nếu chuyển động vỗ tay của A vô tình đưa tay anh ta lên vị trí ngay ở trên gương khi xung laze tới đó, thì mọi người đều thống nhất rằng tay của anh ta sẽ bị cháy bởi tia laze. ♣

Điều gì sẽ xảy ra nếu chúng ta có một con tàu không chứa một đồng hồ ánh sáng đặc biệt nào? Điều đó không thành vấn đề. Chúng ta có thể xây dựng một cái như vậy nếu chúng ta muốn, do đó các kết quả tương tự liên quan đến tiếng vỗ tay vẫn phải đúng. Dẫn đến, có đồng hồ ánh sáng hay không có đồng hồ ánh sáng thì B vẫn quan sát thấy A chuyển động chậm một cách kỳ lạ. Từ quan sát của B, trái tim của A đập chậm hơn, chớp mắt của anh ta thờ ơ, và sự nhấm nháp cà phê của anh ta là chậm đến nỗi anh ta nên cần một tách cà phê khác.

Giả thiết của chúng ta là A ở trạng thái nghỉ trên con tàu là điểm quyết định trong sự lý luận và tính toán ở phần trên. Nếu A chuyển động đối với con tàu thì phương trình (11.9) không còn đúng nữa, bởi vì chúng ta không thể nói rằng cả A và B phải có cùng số lần khứ hồi của tia sáng diễn ra giữa các lần vỗ tay, bởi vì vấn đề về tính đồng thời. Một cách chặt chẽ hơn, nếu A ở trạng thái nghỉ trên tàu ngay cạnh nguồn sáng thì sẽ không có vấn đề tranh cãi gì về tính đồng thời, bởi vì khoảng cách L trong phương trình (11.6) là bằng không. Và nếu A ở trạng thái nghỉ tại một khoảng cách cố định so với nguồn sáng thì xét một người A' ở trạng thái nghỉ trên tàu ngay cạnh nguồn sáng. Khoảng cách L giữa A và A' là khác không, do đó từ sự mất tính đồng thời, B quan sát thấy hai đồng hồ chỉ những thời gian khác nhau. Nhưng hiệu số này là hằng số, do đó B sẽ nhìn thấy đồng hồ của A chạy cùng tốc độ với đồng hồ của A'. Một cách tương đương, chúng ta có thể chỉ cần một đồng hồ ánh sáng thứ hai trong một hộp nhỏ và A giữ nó, và nó sẽ có cùng vận tốc v (và do đó sinh ra cùng thừa số γ) như đồng hồ đầu tiên.

Tuy nhiên, nếu A chuyển động đối với con tàu thì chúng ta sẽ có vấn đề rắc rối hơn. Nếu A một lần nữa lại ở trạng thái nghỉ đối với nguồn sáng thì khoảng cách L giữa A và A' sẽ thay đổi, do đó B không thể sử dụng lý luận ở trong phần trên để kết luận rằng đồng hồ của A và đồng hồ của A' chạy cùng một tốc độ. Và thực tế đúng là chúng không có cùng tốc độ bởi vì như ở phần trên, chúng ta có thể có một đồng hồ ánh sáng khác và có A giữ nó. Trong trường hợp này, vận tốc của A là thành phần trong thừa số γ ở phương trình (11.10), nhưng vận tốc này là khác với vận tốc của A' (vận tốc của con tàu).

NHẬN XÉT:

1. Kết quả giãn nở thời gian rút ra trong phương trình (11.9) là khá lạ, không còn nghi ngờ gì nữa, nhưng dường như có một cái gì đó là không đúng cho đến khi chúng ta xem xét tình huống từ quan sát của A, A quan sát B bay qua với vận tốc v theo một chiều khác. Mặt đất về cơ bản cũng giống như con tàu, do đó chúng ta có thể áp dụng các lý luận tương tự. Thừa số độ giãn nở thời gian, γ, không phụ thuộc vào dấu của v, do đó A sẽ quan sát thấy cùng một thừa số giãn nở thời gian giống như B. Cụ thể là, A quan sát thấy đồng hồ của B chạy chậm lại. Nhưng điều này có thể là như thế nào? Chúng ta có thể khẳng định rằng đồng hồ của A là chậm hơn đồng hồ của B, hoặc cũng có thể là đồng hồ của B chạy chậm hơn đồng hồ của A được hay không? Câu trả lời là . . . có và không.

   Chú ý rằng lập luận về sự giãn nở thời gian ở bên trên chỉ có thể áp dụng vào tình huống khi mà một vật nào đó là không chuyển động trong một hệ quy chiếu thích hợp. Trong tình huống thứ hai, (khi A quan sát thấy B bay qua), phát biểu $t_A = \gamma t_B$ chỉ đúng khi hai sự kiện (chẳng hạn hai tiếng tích tắc đồng hồ của B) xảy ra ở cùng một vị trí trong hệ quy chiếu của B. Nhưng đối với hai sự kiện như vậy, chúng tất nhiên là sẽ không thể ở cùng vị trí trong hệ quy chiếu của A, do đó kết quả $t_B = \gamma t_A$ trong phương trình (11.9) không còn đúng nữa. Điều kiện về sự không di chuyển trong mỗi hệ quy chiếu không bao giờ đúng cả đối với một mô hình cho trước (trừ khi $v = 0$, trong trường hợp đó γ=1 và $t_A = t_B$). Do đó, câu trả lời cho câu hỏi vừa nêu ra bên trên đó là "có" nếu bạn hỏi câu hỏi đó trong một hệ quy chiếu thích hợp, và "không" nếu bạn nghĩ rằng câu trả lời là không phụ thuộc vào hệ quy chiếu.

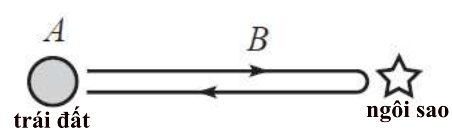
2. Liên quan tới thực tế rằng A nhìn thấy đồng hồ của B chạy chậm hơn, và B nhìn thấy đồng hồ của A chạy chậm hơn, xét phát biểu sau đây. "Đây là một điều mâu thuẫn. Về cơ bản nó giống như phát biểu, 'Tôi có hai quả táo ở trên bàn, quả bên trái to hơn quả bên phải, và quả bên phải to hơn quả bên trái.'". Bạn sẽ trả lời tình huống này như thế nào? Tất nhiên, nó không phải là mâu thuẫn. Các người quan sát A và B đã sử dụng các hệ tọa độ khác nhau để đo thời gian. Thời gian đo được trong mỗi hệ quy chiếu của họ là các thứ khá khác nhau. Kết quả sự giãn nở thời gian có vẻ trái ngược thực sự không có gì quá xa lạ giống như việc có hai người chạy ngược chiều nhau từ cùng một vị trí ban đầu, và cả hai người đều nói rằng người kia nhìn nhỏ hơn. Một cách ngắn gọn, chúng ta sẽ không so sánh quả táo với quả táo. Chúng ta sẽ so sánh quả táo với quả cam. Các lý luận tương tự nhưng chính xác hơn sẽ được cho sau đây. Giả sử có một quả táo và một quả cam ở trên bàn. Quả táo nói với quả

cam rằng, "Bạn là một quả táo xấu hơn nhiều so với tôi", và quả cam nói với quả táo, "Bạn là một quả cam xấu hơn nhiều so với tôi."

3. Chúng ta có thể xem phát biểu: "A quan sát thấy đồng hồ của B chạy chậm, và B cũng quan sát thấy đồng hồ của A chạy chậm," như một điều gì đó đáng lo ngại. Nhưng thực tế nó sẽ là một thảm họa hoàn toàn đối với lý thuyết của chúng ta nếu như A và B quan sát nhau theo các cách khác nhau. Một thực tế then chốt trong lý thuyết tương đối đó là A quan sát B chính xác như cách mà B quan sát A.

4. Trong mọi thứ mà chúng ta đã làm đến giờ, chúng ta giả thiết rằng A và B ở trong các hệ quy chiếu quán tính, bởi vì đây là các hệ quy chiếu mà các tiên đề của lý thuyết tương đối hẹp đề cập tới. Tuy nhiên, nó chỉ ra rằng kết quả giãn nở thời gian trong phương trình (11.9) vẫn đúng ngay cả trong trường hợp A có gia tốc, miễn là B không có gia tốc. Nói một cách khác, nếu bạn nhìn một đồng hồ chuyển động có gia tốc phức tạp thì để giải thích nó chạy nhanh như thế nào trong hệ quy chiếu của bạn, tất cả những gì bạn cần biết đó là vận tốc của nó tại một thời điểm tức thời; gia tốc của nó là không có liên quan (điều này đã có rất nhiều thí nghiệm kiểm chứng). Tuy nhiên nếu bạn tăng tốc thì tất cả dự đoán sẽ không đúng, và sẽ không chính xác nếu bạn sử dụng kết quả về sự giãn nở thời gian khi nhìn đồng hồ. Vẫn có thể nghiên cứu về một tình huống như vậy, nhưng chúng ta sẽ phải đợi đến Chương 14 để làm việc đó. ♣

Ví dụ (Sự trái ngược của hai anh em sinh đôi): Giả sử có hai anh em sinh đôi A và B, người A ở trên trái đất, trong khi người B bay rất nhanh tới một ngôi sao ở xa và sau đó trở lại (xem hình 11.11). Hãy chỉ ra rằng B trẻ hơn A khi họ gặp lại.



Hình 11.11:

Lời giải: Từ quan sát của A, đồng hồ của B chạy chậm hơn một thừa số γ, trên cả chiều đi và chiều về trong hành trình của B. Do đó B sẽ trẻ hơn A khi họ gặp lại. Đây là câu trả lời, và chỉ có thế. Do đó nếu câu trả lời đúng là tất cả những gì chúng ta quan tâm thì chúng ta có thể dừng lại tại đây và đi về nhà. Nhưng lý luận của chúng ta sẽ dẫn đến một mục đích lớn hơn. Từ "trái ngược" trong tiêu đề của ví dụ này lần lượt đến từ các lập luận sau đây. Một người nào đó có thể nói rằng trong hệ quy chiếu của B, đồng hồ của A chạy chậm hơn bởi một thừa số γ, và do đó A sẽ trẻ hơn B khi họ gặp lại nhau.

Điều này hoàn toàn là đúng khi hai anh em sinh đôi đứng cạnh nhau (đó là khi họ trong cùng một hệ quy chiếu), chúng ta không thể cùng có rằng B trẻ hơn A, đồng thời A lại trẻ hơn B. Do đó điều gì là không chính xác trong lý luận của chúng ta tại phần trước? Sự không chính xác nằm ở chỗ thực tế rằng không có một hệ quy chiếu mà B ở trong đó. Hệ quy chiếu quán tính đối với chiều đi là khác hệ quy chiếu quán tính của chiều về. Sự rút ra kết quả giãn nở thời gian của chúng ta chỉ áp dụng cho một hệ quy chiếu quán tính.

Nói một cách khác, B tăng tốc khi người ấy quay trở lại, và kết quả sự giãn nở thời gian của chúng ta chỉ đúng theo quan sát của một người quan sát quán tính.[22] Sự đối xứng trong bài toán bị phá vỡ bởi gia tốc. Nếu cả A và B đều bị bịt mắt, họ vẫn có thể nói ai đang chuyển động, bởi vì B sẽ cảm thấy gia tốc tại thời điểm quay trở lại. Vận tốc không đổi không thể cảm nhận thấy, nhưng gia tốc thì có thể. (Tuy nhiên, xem Chương 14 đối với thuyết tương đối tổng quát. Trọng lực sẽ làm phức tạp mọi thứ.)

Ở phần trên đã chỉ ra rằng điều gì là không đúng đối với lý luận "A là trẻ hơn", nhưng không chỉ ra làm thế nào để thay đổi nó một cách định lượng để thu được câu trả lời chính xác. Có rất nhiều cách khác nhau để làm việc này, bạn có thể sử dụng một trong số chúng trong các bài toán (Bài tập 11.67, bài tập 11.2, 11.19, 11.24 và nhiều bài tập khác trong Chương 14). Phụ lục H cũng đưa ra danh sách tất cả các lời giải có thể có mà tôi có thể nghĩ ra đối với bài toán về sự trái ngược của anh em sinh đôi.

Ví dụ (Sự phân rã muon): Hạt cơ bản có tên là muon (nó giống hệt electron, chỉ trừ một điều đó là khối lượng của nó lớn gấp khoảng 200 lần khối lượng của electron) được tạo ra trong môi trường áp suất cao khi các tia vũ trụ va chạm với phân tử không khí. Các muon có thời gian sống trung bình khoảng $2 \cdot 10^{-6}$ giây[23]

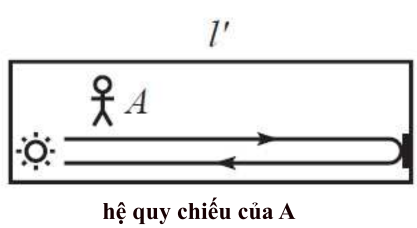
[22] Đối với toàn bộ chiều đi và chiều về của cuộc hành trình, B quan sát thấy đồng hồ của A chạy chậm, nhưng sự kỳ lạ xảy ra suốt thời điểm quay trở lại để cuối cùng làm cho A già hơn. Tuy nhiên chú ý rằng, một sự thảo luận về gia tốc không cần thiết để hiểu một cách định lượng sự trái ngược, như bài tập 11.2 sẽ chỉ ra.

[23] Đây là thời gian sống "thực sự", tức là thời gian sống được đo trong hệ quy chiếu của muon.

(sau đó chúng phân rã thành các electron và các neutrino), và chuyển động với vận tốc gần bằng vận tốc của ánh sáng. Giả sử một cách đơn giản rằng một muon cho trước được tạo thành ở độ cao 50 km, chuyển động thẳng đứng hướng xuống dưới, có vận tốc $v = 0.99998c$, phân rã chính xác trong $T = 2 \cdot 10^{-6}$ giây, và không va chạm với bất cứ thứ gì khi chuyển động xuống.[24] Liệu muon sẽ có chạm vào trái đất trước khi nó phân rã hay không?

Lời giải: Thật là sai lầm khi nói rằng khoảng cách di chuyển bởi muon là $d = vT \approx (3 \cdot 10^8 \text{ m/s})(2 \cdot 10^{-6} \text{ s}) = 600$ m, và kết quả này là nhỏ hơn 50 km, do đó muon sẽ không chạm vào trái đất. Lý luận này là không chính xác bởi vì ảnh hưởng của sự giãn nở thời gian. Muon sống lâu hơn trong hệ quy chiếu trái đất bởi một thừa số γ, với $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2} \approx 160$ ở đây. Do đó thời khoảng cách di chuyển chính xác trong hệ quy chiếu trái đất phải là $v(\gamma T) \approx 100$ km. Dẫn đến muon di chuyển thừa ra 50 km. Thực tế rằng chúng ta thường nhận biết việc muon chạm vào bề mặt trái đất theo rất nhiều cách phỏng đoán (trong khi lý luận sai lầm $d = vT$ sẽ dự đoán rằng chúng ta sẽ không thấy bất cứ điều gì) là một trong rất nhiều kiểm tra thí nghiệm xác nhận tính đúng đắn của thuyết tương đối.

11.3.3 Sự co độ dài



Hình 11.12:

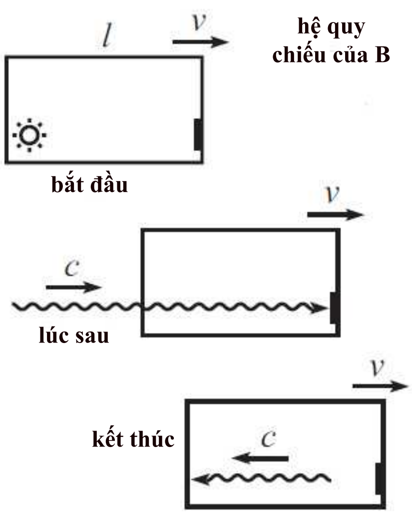
Xét mô hình sau đây. Người A đứng trên một con tàu mà anh ta đo được độ dài là ℓ', và người B đứng trên mặt đất. Con tàu chuyển động với vận tốc v đối với mặt đất. Một

[24]Trong thế giới thực, các muon được tạo ra ở nhiều độ cao khác nhau, chuyển động theo nhiều hướng khác nhau, có nhiều vận tốc khác nhau, phân rã theo thời gian sống biến đổi theo công thức chuẩn bán thời gian, và có thể va chạm mạnh vào các phân tử không khí. Do đó về mặt kỹ thuật chúng ta sẽ có mọi thứ là không chính xác ở đây. Nhưng đó không là vấn đề. Ví dụ này vẫn sẽ rất tốt cho mục đích hiện tại của chúng ta.

nguồn sáng được đặt tại phía sau con tàu, và một chiếc gương được đặt tại phía trước. Nguồn sáng phát ra một chớp sáng hướng về phía gương, phản xạ lại, và sau đó quay trở lại nguồn sáng. Bằng cách xem xét quá trình này diễn ra trong bao nhiêu lâu trong hai hệ quy chiếu, chúng ta có thể xác định được độ dài của con tàu đo bởi người B.[25] Trong hệ quy chiếu của A (xem hình 11.12), thời gian khứ hồi của ánh sáng đơn giản chỉ là

$$t_A = \frac{2\ell'}{c}. \tag{11.11}$$

Mọi thứ sẽ phức tạp hơn một chút trong hệ quy chiếu của B (xem hình 11.13). Gọi độ



Hình 11.13:

dài của con tàu đo bởi B là ℓ. Đối với tất cả những gì chúng ta đã biết về vấn đề này thì ℓ có thể bằng ℓ', nhưng chúng ta sẽ chỉ ra ngay sau đây rằng điều đó là không đúng. Vận tốc tương đối (đo bởi B) của ánh sáng và gương suốt giai đoạn đầu tiên của hành trình là $c - v$. Vận tốc tương đối suốt giai đoạn thứ hai là $c + v$. Suốt mỗi giai đoạn, ánh sáng phải di chuyển một khoảng trống với độ dài ban đầu ℓ. Do đó, tổng thời gian khứ hồi sẽ là

$$t_B = \frac{\ell}{c-v} + \frac{\ell}{c+v} = \frac{2\ell c}{c^2 - v^2} \equiv \frac{2\ell}{c}\gamma^2. \tag{11.12}$$

Nhưng từ phương trình (11.9) chúng ta biết rằng

$$t_B = \gamma t_A. \tag{11.13}$$

[25]Nhận xét thứ ba dưới đây sẽ đưa ra (nhanh hơn) cách rút ra của sự co độ dài. Nhưng chúng ta sẽ thảo luận chi tiết cách lập luận hiện tại bởi vì sự tính toán ở đây có thể dùng làm bài học.

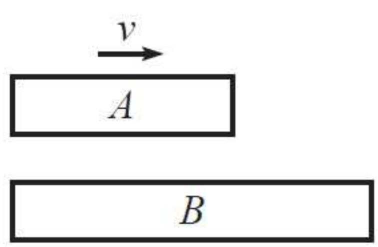
Đây là khẳng định đúng đắn bởi vì hai sự kiện mà chúng ta đề cập tới (ánh sáng di chuyển trở lại, và ánh sáng quay trở lại) xảy ra tại cùng một vị trí trong hệ quy chiếu con tàu, do đó sẽ là chính xác khi chúng ta sử dụng kết quả về sự giãn nở thời gian trong phương trình (11.9). Thay các kết quả của t_A và t_B từ phương trình (11.11) và phương trình (11.12) vào phương trình (11.13), chúng ta sẽ thu được

$$\ell = \frac{\ell'}{\gamma}. \tag{11.14}$$

Chú ý rằng chúng ta sẽ không thể sử dụng mô hình này để tìm sự co độ dài nếu như chúng ta chưa tìm thấy sự giãn nở thời gian trong phương trình (11.9). Bởi vì $\gamma \geq 1$, do đó chúng ta thấy rằng B đo độ dài của con tàu ngắn hơn A đo. Thuật ngữ *độ dài riêng* được sử dụng để mô tả độ dài của một vật thể trong hệ quy chiếu nghỉ của nó. Dẫn đến ℓ' là độ dài riêng của con tàu trên, và độ dài trong bất kỳ hệ quy chiếu nào khác cũng đều nhỏ hơn hoặc bằng ℓ. Sự co độ dài này thường được gọi là *sự co Lorentz - FitzGerald*, đối với lý do đã được cho trong chú thích 10.

NHẬN XÉT:

1. Kết quả về sự co độ dài trong phương trình (11.14) là đối với các độ dài dọc theo chiều của vận tốc tương đối. Không có sự co độ dài theo chiều vuông góc, như sẽ chỉ ra trong bài tập 11.1.

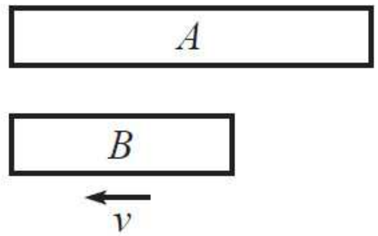


Hình 11.14:

2. Như với sự giãn nở thời gian, sự co độ dài này cũng là khá kỳ lạ, nhưng thực tế dường như không có bất cứ sự nghịch lý nào về nó, cho đến khi chúng ta xem xét mọi thứ từ quan sát của A. Để tạo thành tình huống đối xứng, giả sử rằng B đứng trên một con tàu giống hệt như vậy nhưng không chuyển động đối với mặt đất. A quan sát thấy B bay qua với vận tốc v theo chiều ngược lại. Không có con tàu nào là cơ bản hơn con tàu kia, do đó lập luận tương tự có thể được áp dụng, và A cũng nhìn thấy thừa số của sự co độ dài giống như B nhìn thấy. Cụ thể là A đo thấy con tàu của B ngắn hơn. Nhưng điều này có thể là như thế nào? Chúng ta có thể khẳng định rằng con tàu của A là ngắn hơn con tàu của B hoặc con tàu của B là ngắn hơn con tàu của A

được hay không? Mô hình thực tế là cái chỉ ra trong hình 11.14 hay là mô hình chỉ ra trong hình 11.15? Mô hình nào thực sự là chính xác hơn? Câu trả lời là ...còn tùy thuộc.

Từ "là" ở phần trên là một từ rất không nên sử dụng và nói chung nó là nguyên nhân



Hình 11.15:

của tất cả sự nhầm lẫn (nhưng may mắn là lúc này nó có thể sử dụng tốt). Không có thứ gì thực sự có nghĩa "là" khi đề cập tới độ dài. Sẽ chỉ có nghĩa khi nói tới độ dài là như thế nào trong một hệ quy chiếu cho trước. Cụ thể là không có mô hình nào là thực sự chính xác. Sự đúng đắn phụ thuộc vào hệ quy chiếu mà chúng ta quan sát.

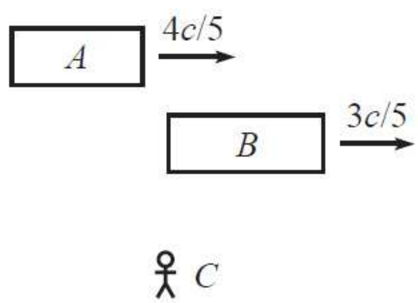
Cụ thể hơn một chút. Bạn đo độ dài như thế nào? Bạn mô tả các tọa độ của hai đầu vật thể nào đó và đo đồng thời, sau đó bạn lấy hiệu. Nhưng từ "đồng thời" ở đây lại dẫn đến một sự rắc rối. Hai sự kiện đồng thời trong một hệ quy chiếu sẽ không đồng thời trong hệ quy chiếu khác. Một cách chặt chẽ hơn, đây là điều chúng ta khẳng định: Giả sử B mô tả đồng thời các tọa độ hai đầu con tàu của A, và cũng mô tả đồng thời các tọa độ hai đầu con tàu của người ấy. Thì hiệu hai tọa độ đầu sẽ nhỏ hơn hiệu giữa hai tọa độ sau. Tương tự như vậy, nếu A mô tả đồng thời các tọa độ con tàu của B, và cũng mô tả đồng thời các tọa độ hai đầu con tàu của anh ta. Thì hiệu giữa hai tọa độ đầu sẽ nhỏ hơn hiệu giữa hai tọa độ sau. Không có gì mâu thuẫn ở đây bởi vì các thời gian mà A và B mô tả các tọa độ không có quan hệ với nhau do sự mất tính đồng thời. Bạn có thể tính toán định lượng về vấn đề này trong bài tập 11.3. Cũng giống như sự giãn nở thời gian, chúng ta sẽ so sánh quả táo và quả cam.

3. Có một lý luận rất đơn giản để chỉ ra rằng sự giãn nở thời gian đưa đến sự co độ dài và ngược lại. Giả sử B đứng trên mặt đất, cạnh một cái gậy có độ dài ℓ. A bay qua cái gậy với vận tốc v. Trong hệ quy chiếu của B, A mất một khoảng thời gian ℓ/v để chuyển động ngang theo độ dài của cái gậy. Do đó (giả sử rằng chúng ta đã chứng minh kết quả về sự giãn nở thời gian), một đồng hồ trên tay A sẽ tăng thêm $\ell/\gamma v$ khi anh ta chuyển động ngang theo chiều dài của gậy.

   A quan sát tình huống này như thế nào? Anh ta nhìn thấy mặt đất và chiếc gậy bay với vận tốc v. Thời gian giữa hai đầu đi qua anh ta là $\ell/\gamma v$ (bởi vì đó là thời gian trôi qua trên đồng hồ của anh ấy). Để thu được độ dài chiếc gậy trong hệ quy chiếu của anh ta, anh ta đơn giản chỉ cần nhân vận tốc với thời gian. Cụ thể, anh ta đo được độ dài là $(\ell/\gamma v)v = \ell/\gamma$, đây là sự co độ dài mà chúng ta mong muốn. Lý luận tương tự cũng chỉ ra rằng sự co độ dài đưa đến sự giãn nở thời gian.

4. Như đã đề cập lúc đầu, thừa số co độ dài γ là độc lập với vị trí của vật thể. Cụ thể là tất cả các phần của con tàu đều bị co lại cùng một lượng. Điều này đến từ thực tế rằng tất cả mọi điểm trong không gian là tương đương với nhau. Nói một cách khác, chúng ta có thể đặt một lượng lớn các mô hình thu nhỏ của hệ nguồn sáng - gương dọc theo chiều dài của con tàu. Tất cả chúng đều sinh ra cùng một giá trị γ, độc lập với vị trí trên con tàu.

5. Nếu bạn vẫn muốn hỏi, "Sự co độ dài này thực sự là có thật hay không?" thì hãy xét ví dụ mang tính giả thuyết sau đây. Tưởng tượng rằng có một mảnh giấy bay ngang qua Mona Lisa, bay là là bề mặt. Một mảnh giấy thông thường là đủ rộng để che phủ mặt của bà ấy, do đó nếu mảnh giấy chuyển động chậm và nếu bạn chụp ảnh vào thời điểm thích hợp thì trong bức ảnh bạn sẽ nhìn thấy toàn bộ khuôn mặt của bà ấy bị bao phủ bởi mảnh giấy. Tuy nhiên, nếu mảnh giấy bay đủ nhanh, và nếu bạn chụp ảnh tại một thời điểm thích hợp thì trong bức ảnh bạn sẽ nhìn thấy mảnh giấy mỏng thẳng đứng chỉ bao phủ được một phần rất nhỏ của khuôn mặt bà ta. Do đó bạn vẫn sẽ nhìn thấy bà ấy mỉm cười với bạn. ♣



Hình 11.16:

Ví dụ (Các con tàu chuyển động): Hai con tàu A và B, mỗi con tàu có độ dài riêng là L và chuyển động cùng chiều. Vận tốc của A là $4c/5$, và vận tốc của B là $3c/5$. A xuất phát phía sau B (xem hình 11.16). Theo quan sát của người C trên mặt đất, mất khoảng thời gian bao lâu để A đuổi kịp B? Ở đây chúng ta muốn nói rằng thời gian giữa phía trước của A đi qua phía sau của B, và phía sau của A đi qua phía trước của B.

Lời giải: Đối với người C ở trên mặt đất, thừa số γ liên kết tương ứng với A và B lần lượt là $5/3$ và $5/4$. Do đó, độ dài của chúng đối với hệ quy chiếu trên mặt đất là

$3L/5$ và $4L/5$. Để đuổi kịp B thì A phải di chuyển nhiều hơn B một khoảng cách bằng tổng độ dài của hai con tàu, cụ thể là bằng $7L/5$. Vận tốc tương đối của hai con tàu (quan sát bởi người C ở trên mặt đất) là hiệu của hai vận tốc hai con tàu, và bằng $c/5$. Do đó tổng thời gian sẽ là

$$t_C = \frac{7L/5}{c/5} = \frac{7L}{c}. \tag{11.15}$$

Ví dụ (Xét lại ví dụ về phân rã muon): Xét ví dụ "Phân rã muon" từ Mục 11.3.2. Trong hệ quy chiếu của muon, thời gian sống của nó là $T = 2 \cdot 10^{-6}$ giây, và trái đất chuyển động với nó với vận tốc $v = 0.99998c$. Khi đó, trái đất (trái đất chỉ di chuyển một đoạn $d = vT \approx 600$ m trước khi muon phân rã) chạm vào muon như thế nào?

Lời giải: Điểm quan trọng ở đây đó là trong hệ quy chiếu của muon, khoảng cách tới trái đất co lại bởi một thừa số $\gamma \approx 160$. Do đó, trái đất ban đầu chỉ cách xa 50 km/160 $\approx$ 300 m. Bởi vì trái đất có thể di chuyển một khoảng cách 600 m suốt thời gian sống của muon, do đó trái đất có dư thời gian để va chạm với muon.

Như đã nói trong nhận xét thứ ba ở trên, sự giãn nở thời gian và sự co độ dài có mối liên hệ trực tiếp với nhau. Chúng ta không thể có cái này mà không có cái kia. Trong hệ quy chiếu của trái đất, sự chuyển động của muon tới trái đất được giải thích bằng sự giãn nở thời gian. Trong hệ quy chiếu của muon, nó được giải thích bằng sự co độ dài.

Một lưu ý cực kỳ quan trọng trong việc giải các bài toán liên quan đến thuyết tương đối đó là tự mình hình thành một hệ quy chiếu và tất cả mọi thứ phải đưa về hệ quy chiếu này. Mọi ý nghĩ thoáng qua của bạn đều phải là những gì bạn quan sát thấy. Cụ thể là, đừng bao giờ cố sử dụng lập luận giống như kiểu, "Người mà tôi nhìn thấy trong hệ quy chiếu khác này quan sát thấy như thế." Điều này hầu hết sẽ là nguyên nhân chắc chắn dẫn đến sai lầm ở một chỗ nào đó trong lời giải của bạn, bởi vì khi đó bạn chắn chắn cuối cùng sẽ mô tả một phương trình chứa các đại lượng đo trong các hệ quy chiếu khác nhau, điều đó không bao giờ là chính xác. Tất nhiên, bạn có thể muốn giải quyết một phần khác của bài toán bằng cách sử dụng một hệ quy chiếu khác, hoặc bạn có thể muốn làm lại toàn bộ bài toán trong một hệ quy chiếu khác. Điều đó là tốt, nhưng khi bạn quyết định bạn sẽ sử dụng hệ quy chiếu nào thì hãy chắc chắn rằng bạn hãy đưa tất cả các đại lượng liên quan về hệ quy chiếu đó.

Một lưu ý cũng rất quan trọng đó là mô tả mô hình thông qua hình vẽ (trong một hệ quy chiếu nào đó mà bạn đã chọn) tại mọi thời điểm khi mọi thứ có ý nghĩa xảy ra, giống như chúng ta đã làm trong hình 11.13. Một khi bạn đã vẽ được hình thì chắc chắn rằng bạn sẽ biết điều gì cần phải làm. Nhưng nếu không có hình vẽ thì chắc chắn rằng hầu hết các trường hợp chúng ta đều gặp rắc rối.

Đến lúc này bạn có thể muốn nhìn vào "Các câu hỏi về đại lượng tương đối" trong Phụ lục F, chỉ để chắc chắn rằng chúng ta đang nói về cùng một vấn đề. Một vài câu hỏi đề cập tới nội dung mà chúng ta chưa nói tới, nhưng hầu hết là liên quan tới những thứ mà chúng ta đã làm cho đến giờ.

Đây là kết luận cho các nghiên cứu của chúng ta về ba ảnh hưởng cơ bản. Trong phần tiếp theo, chúng ta sẽ kết hợp tất cả những vẫn đề mà chúng ta đã đạt được và sử dụng chúng để đưa ra phép biến đổi Lorentz. Nhưng trước hết chúng ta hãy đến với nhận xét cuối cùng trước khi chuyển sang phần đó.

Lưới đồng hồ và gậy mét

Trong mọi thứ mà chúng ta đã làm đến bây giờ, chúng ta đều sử dụng cách làm đó là có người quan sát trong các hệ quy chiếu khác nhau tiến hành các sự đo khác nhau. Nhưng như đã đề cập ngay lúc đầu, điều này có thể sinh ra một vài sự mơ hồ, bởi vì bạn có thể nghĩ rằng thời gian mà ánh sáng tới mắt của người quan sát là quan trọng, trong khi đó cái mà chúng ta đề cập tới trong trường hợp tổng quát đó là thời gian mà sự việc thực sự xảy ra.

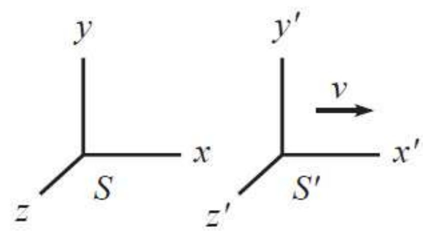
Một cách để có thể loại trừ sự mơ hồ này đó là bỏ đi người quan sát và tưởng tượng rằng không gian được làm đầy bằng một lưới lớn các gậy mét và các đồng hồ được đồng bộ hóa. Hệ quy chiếu khác nhau được định nghĩa bằng các lưới khác nhau; giả sử rằng các lưới của các hệ quy chiếu khác nhau bằng một cách nào đó có thể đi qua một cách tự do các lưới khác. Tất cả các gậy mét trong một hệ quy chiếu cho trước đều ở trạng thái nghỉ đối với tất cả các gậy khác, do đó chúng ta không phải lo lắng về vấn đề co độ dài trong mỗi hệ quy chiếu. Nhưng lưới của một hệ quy chiếu chuyển động qua bạn sẽ bị co lại theo chiều chuyển động bởi vì tất cả các gậy mét đều bị co lại theo chiều đó.

Để đo độ dài của một vật thể bất kỳ trong một hệ quy chiếu cho trước, chúng ta chỉ cần xác định vị trí của hai đầu (tại cùng một thời gian đo trong hệ quy chiếu đó) đối với lưới. Đối với tính đồng bộ của các đồng hồ trong mỗi hệ quy chiếu, điều này có thể thực hiện bằng cách đặt một nguồn sáng ở giữa hai đồng hồ bất kỳ và gửi tín hiệu đi, khi đó đặt các đồng hồ tại một giá trị cho trước khi tín hiệu chạm vào chúng. Một sự lựa chọn khác, một phương pháp dễ hiểu hơn của sự đồng bộ hóa đó là bắt đầu với tất cả các đồng hồ đồng bộ bên phải cạnh các đồng hồ khác, và sau đó di chuyển chúng rất chậm tới các vị trí cuối cùng của chúng. Bất kỳ ảnh hưởng của sự giãn nở thời gian nào đều có thể thực hiện một cách hơi tùy tiện bằng việc di chuyển các đồng hồ đủ chậm. Điều này là đúng bởi vì thừa số giãn nở thời gian γ là bậc hai đối với v, nhưng thời gian mà đồng hồ đi tới vị trí cuối cùng của nó chỉ là bậc một của $1/v$.

Phương pháp lưới để xem xét mọi thứ này nhấn mạnh rằng người quan sát là không quan trọng, và một hệ quy chiếu được định nghĩa đơn giản như là một lưới các tọa độ không gian và thời gian. Bất cứ thứ gì xảy ra (một "sự kiện") đều được tự động gán cho một tọa độ không gian và thời gian trong mọi hệ quy chiếu, độc lập với người quan sát. Khái niệm về một "sự kiện" là rất quan trọng trong phần tiếp theo.

11.4 Phép biến đổi Lorentz

11.4.1 Sự hình thành phép biến đổi Lorentz



Hình 11.17:

Xét một hệ tọa độ S' chuyển động đối với một hệ tọa độ S khác (xem hình 11.17). Gọi vận tốc tương đối không đổi của các hệ tọa độ là v. Giả sử các trục tương ứng của S và S' luôn cùng hướng, và gốc của S' chuyển động dọc theo trục x của S, theo chiều dương. Không có điều gì thú vị xảy ra theo các chiều y và z (xem bài tập 11.1), do đó chúng ta sẽ bỏ qua chúng.

Mục đích của chúng ta trong phần này là xem xét hai sự kiện (một sự kiện là bất cứ thứ gì có các tọa độ không gian và thời gian) xảy ra trong không thời gian và mối liên hệ các đại lượng Δx và Δt của các tọa độ trong một hệ quy chiếu với $\Delta x'$ và $\Delta t'$ của các tọa độ trong một hệ quy chiếu khác. Do đó chúng ta muốn tìm các hằng số A, B, C và D trong các mối liên hệ,

$$\begin{aligned} \Delta x &= A\,\Delta x' + B\,\Delta t', \\ \Delta t &= C\,\Delta t' + D\,\Delta x' \end{aligned} \tag{11.16}$$

Bốn hằng số ở đây sẽ chỉ phụ thuộc vào vận tốc v (với hai hệ quy chiếu quán tính cho trước thì v là hằng số). Nhưng chúng ta sẽ không viết cụ thể sự phụ thuộc này, chúng ta hãy đến với nhận xét sau đây.

NHẬN XÉT:

1. Chúng ta đã giả thiết trong phương trình (11.16) rằng Δx và Δt là hàm tuyến tính của $\Delta x'$ và $\Delta t'$. Và chúng ta cũng giả sử rằng A, B, C và D là các hằng số, tức là nó chỉ phụ thuộc vào v chứ không phụ thuộc vào x, t, x', t'.

   Giả thiết đầu tiên trong hai giả thiết này được kiểm tra bằng thực tế rằng bất kỳ khoảng hữu hạn nào cũng có thể xây dựng từ một chuỗi rất nhiều các khoảng vô cùng nhỏ. Nhưng đối với một khoảng vô cùng nhỏ, bất kỳ đại lượng nào có dạng ví dụ như $(\Delta t')^2$ đều có thể bỏ qua khi so sánh với các đại lượng tuyến tính. Do đó, nếu chúng ta cộng tất cả các khoảng vô cùng nhỏ để thu được một khoảng hữu hạn thì chúng ta sẽ chỉ giữ lại các đại lượng tuyến tính. Một cách tương đương, sẽ không có vấn đề gì khi chúng ta chọn đo với đại lượng nào, chẳng hạn như các gậy mét hoặc là các gậy nửa mét.

   Giả thiết thứ hai có thể kiểm tra bằng rất nhiều cách. Một cách đó là tất cả các hệ quy chiếu quán tính sẽ đều giống nhau về việc chuyển động không gia tốc là như thế nào. Cụ thể là, nếu $\Delta x' = u'\Delta t'$ thì chúng ta cũng sẽ có $\Delta x = u\Delta t$ trong đó u là một hằng số nào đó. Điều này chỉ đúng nếu như các hệ số ở trên là hằng số, bạn có thể kiểm tra lại điều này. Một cách xác minh khác đến từ tiên đề thứ hai trong các tiên đề của thuyết tương đối của chúng ta, tiên đề này nói rằng tất cả các điểm trong không gian (rỗng) là giống hệt nhau. Chú ý tới điều này, và giả sử rằng chúng ta có dạng của phép biến đổi, chẳng hạn là $\Delta x = A\,\Delta x' + B\,\Delta t' + E\,x'\Delta x'$. x' trong đại lượng cuối cùng biểu thị rằng vị trí tuyệt đối trong không thời gian (và không chỉ là vị trí tương đối) là không quan trọng. Do đó, đại lượng cuối cùng không thể tồn tại.

2. Nếu các mối liên hệ trong phương trình (11.16) trở thành phép biến đổi Galileo thông thường (đây là phép biến đổi đúng với vận tốc tương đối v thông thường) thì chúng ta sẽ có $\Delta x = \Delta x' + v\Delta t$, và $\Delta t = \Delta t'$ (tức là $A = C = 1,\ B = v$, và $D = 0$). Tuy nhiên chúng ta sẽ chỉ ra rằng với những giả thiết của lý thuyết tương đối hẹp thì phép biến đổi này không phải là trường hợp mà ta đang đề cập đến. Phép biến đổi Galileo không phải là phép biến đổi chính xác. Nhưng chúng ta sẽ chỉ ra dưới đây rằng phép

biến đổi chính xác quả thực suy biến về phép biến đổi Galileo trong trường hợp giới hạn khi vận tốc là nhỏ, đây là điều chúng bắt buộc phải có. ♣

Các hằng số A, B, C và D trong phương trình (11.16) là bốn số chưa biết, và chúng ta có thể tìm được chúng bằng cách sử dụng bốn thực tế mà chúng ta đã đề cập tới ở trên trong Mục 11.3. Bốn thực tế mà chúng ta sẽ sử dụng là:

	Ảnh hưởng	Điều kiện	Kết quả	Phương trình
1	Sự giãn nở thời gian	$x' = 0$	$t = \gamma t'$	(11.9)
2	Sự co độ dài	$t' = 0$	$x' = x/\gamma$	(11.14)
3	Vận tốc tương đối v	$x = 0$	$x' = -vt'$	
4	Đồng hồ sau nhanh hơn	$t = 0$	$t' = -vx'/c^2$	(11.6)

Chúng ta đã tùy tiện bỏ qua ký hiệu Δ trước các tọa độ, vì sợ rằng nó có thể làm công thức trở lên cồng kềnh. Chúng ta sẽ thường xuyên bỏ qua ký hiệu Δ này, nhưng chúng ta sẽ hiểu rằng x mà chúng ta đề cập tới thực sự phải là Δx, ... Chúng ta sẽ luôn luôn đề cập tới hiệu giữa các tọa độ của hai sự kiện xảy ra trong không thời gian. Giá trị thực sự của bất kỳ tọa độ nào cũng đều không có liên quan, bởi vì không có gốc tọa độ được ưu tiên trong bất kỳ hệ quy chiếu nào.

Bạn hãy dừng lại một chút và kiểm tra rằng bốn kết quả mà chúng ta nhắc lại trong bảng ở trên là công thức toán học cụ thể trong thực tế đối với bốn ảnh hưởng đó, với các điều kiện cho trước.[26] Lời khuyên của tôi là bạn hãy cứ dừng lại cho đến khi bạn không còn bất cứ băn khoăn hoặc nghi ngờ gì về tất cả các công thức trong bảng đó. Chú ý rằng cách viết ảnh hưởng "đồng hồ sau nhanh hơn" quả thực là chính xác bởi vì đồng hồ phía trước chỉ thời gian nhỏ hơn đồng hồ phía sau. Do đó đồng hồ với giá trị x' lớn hơn là đồng hồ ứng với giá trị thời gian t' nhỏ hơn.

Bây giờ chúng ta có thể sử dụng bốn thực tế của chúng ta trong bảng ở trên để nhanh chóng tìm ra bốn hằng số A, B, C và D trong phương trình (11.16).

Thực tế (1) dẫn đến $C = \gamma$.

Thực tế (2) dẫn đến $A = \gamma$.

Thực tế (3) dẫn đến $B/A = v \Longrightarrow B = \gamma v$.

Thực tế (4) dẫn đến $D/C = v/c^2 \Longrightarrow D = \gamma v/c^2$.

[26] Chúng ta có thể phát biểu các ảnh hưởng theo nhiều cách khác nữa, bằng cách thay đổi dấu phẩy hoặc bỏ dấu phẩy. Ví dụ, sự giãn nở thời gian có thể viết như sau "$t' = \gamma t$ khi $x = 0$." Nhưng chúng ta chọn cách ở trên để viết bởi vì chúng sẽ cho phép chúng ta tìm ra bốn hằng số một cách hiệu quả nhất.

Phương trình (11.16) được gọi là phép biến đổi Lorentz, và do đó nó sẽ có dạng như sau

$$
\begin{aligned}
\Delta x &= \gamma(\Delta x' + v\Delta t'), \\
\Delta t &= \gamma(\Delta t' + v\Delta x'/c^2), \\
\Delta y &= \Delta y', \\
\Delta z &= \Delta z',
\end{aligned}
\tag{11.17}
$$

trong đó

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{11.18}$$

Chúng ta đã bổ sung thêm vào phép biến đổi tầm thường đối với y và z, nhưng chúng ta sẽ không cần thiết phải viết những đại lượng này trong tương lai. Ngoài ra chúng ta cũng sẽ bỏ qua ký hiệu Δ từ bây giờ, nhưng hãy nhớ rằng thực sự chúng phải luôn luôn có mặt.

Nếu chúng ta giải ngược lại đối với x' và t' theo x và t từ phương trình (11.17), thì chúng ta thấy rằng phép biến đổi ngược Lorentz sẽ được cho bởi

$$
\begin{aligned}
x' &= \gamma(x - vt) \\
t' &= \gamma(t - vx/c^2).
\end{aligned}
\tag{11.19}
$$

Tất nhiên, tùy thuộc vào quan điểm của bạn đối với tên gọi phép biến đổi "ngược" là tập hợp phương trình nào trong hai tập hợp phương trình ở trên. Nhưng rất hiển nhiên mang tính trực quan rằng sự khác nhau giữa hai tập hợp phương trình chỉ là dấu của đại lượng v, bởi vì S đơn giản là chuyển động ngược lại phía sau đối với S'.

Lý do tại sao sự thành lập phương trình (11.17) lại diễn ra hết sức nhanh chóng là bởi vì chúng ta đã làm hầu như hết các công việc trong Mục 11.3 khi chúng ta rút ra các ảnh hưởng cơ bản. Nếu chúng ta muốn tìm được phép biến đổi Lorentz từ đầu, tức là bắt đầu với hai tiên đề trong Mục 11.2 thì sự thành lập sẽ dài hơn. Trong Phụ lục I chúng ta sẽ đưa ra một cách thành lập như vậy, ở đó hiển nhiên rằng tất cả các thông tin đều đến từ các tiên đề. Cách làm hơi cồng kềnh như vậy nhưng vẫn có ích bởi vì chúng ta sẽ sử dụng kết quả theo một cách rất thú vị trong Mục 11.10.

NHẬN XÉT:

1. Trong trường hợp giới hạn $v \ll c$ (hoặc một cách chặt chẽ hơn, trong trường hợp giới hạn $vx'/c^2 \ll t'$, điều này có nghĩa là ngay cả khi v nhỏ thì chúng ta vẫn phải cẩn thận rằng x' không được quá lớn), phương trình (11.17) suy biến thành $x = x' + vt$ và

$t = t'$, đây là phép biến đổi Galileo mà chúng ta đã biết. Phép biến đổi Galileo phải là một trường hợp riêng của phép biến đổi Lorentz bởi vì chúng ta biết từ những kinh nghiệm thông thường (khi $v \ll c$) rằng phép biến đổi Galileo hoạt động khá chính xác.

2. Phương trình (11.17) biểu thị một sự đối xứng đẹp đẽ giữa x và ct. Với $\beta \equiv v/c$, ta có

$$\begin{aligned} x &= \gamma\Big(x' + \beta(ct')\Big), \\ ct &= \gamma\Big((ct') + \beta x'\Big). \end{aligned} \tag{11.20}$$

Một cách tương đương, dưới dạng đơn vị với $c = 1$ (ví dụ, ở đó một đơn vị khoảng cách bằng $3 \cdot 10^8$ mét, hoặc ở đó một đơn vị thời gian bằng $1/(3 \cdot 10^8)$ giây), phương trình (11.17) có dạng đối xứng,

$$\begin{aligned} x &= \gamma(x' + vt'), \\ t &= \gamma(t' + vx'). \end{aligned} \tag{11.21}$$

3. Dưới dạng ma trận, phương trình (11.20) có thể viết lại như sau

$$\begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix}. \tag{11.22}$$

Công thức này nhìn giống như ma trận của một phép quay. Bạn có thể tìm hiểu kỹ hơn trong Mục 11.9 và trong bài tập 11.27.

4. Chúng ta đã thành lập các công thức trong biến đổi Lorentz ở trên bằng cách sử dụng hệ thống tọa độ có dấu phẩy và không có dấu phẩy. Nhưng khi bài làm các bài tập, thường sẽ là tốt nhất khi bạn đánh dấu các tọa độ của bạn với các chỉ số dưới giống như A đối với Alice, hoặc T đối với con tàu. Thêm nữa, chú ý này ít có khả năng làm bạn nghĩ rằng một hệ quy chiếu là đặc biệt hơn các hệ quy chiếu khác.

5. Sẽ rất dễ nhầm lẫn về dấu của vế phải trong phép biến đổi Lorentz. Để tìm hiểu nó là dấu cộng hay dấu trừ, hãy mô tả $x_A = \gamma(x_B \pm vt_B)$, và sau đó tưởng tượng ngồi trên hệ A và nhìn vào một điểm cố định của hệ B. Điểm cố định này thỏa mãn (thêm vào trở lại ký hiệu Δ để tránh nhầm lẫn) $\Delta x_B = 0$, điều này dẫn đến $\Delta x_A = \pm\gamma\Delta t_B$. Do đó nếu điểm này chuyển động sang bến phải (tức là nếu nó tăng khi thời gian tăng) thì chúng ta lấy dấu "+." Và nếu nó chuyển động sang bên trái thì chúng ta lấy dấu "−." Nói một cách khác, dấu ở đây xác định bởi A (người với các tọa độ bên vế trái của phương trình) quan sát thấy B (người với các tọa độ bên vế phải của phương trình) chuyển động như thế nào.

6. Một thứ rất quan trọng mà chúng ta phải kiểm tra đó là hai phép biến đổi Lorentz liên tiếp (từ S_1 sang S_2 và sau đó từ S_2 sang S_3) cũng phải thu được một phép biến đổi Lorentz (từ S_1 sang S_3). Điều này phải là sự thật bởi vì chúng ta đã chỉ ra rằng hai hệ quy chiếu bất kỳ phải có liên hệ với nhau bởi phương trình (11.17). Nếu chúng

ta tổng hợp hai phép biến đổi Lorentz (theo cùng một chiều) và thấy rằng phép biến đổi từ S_1 đến S_3 không có dạng như phương trình (11.17), với một vận tốc v mới nào đó, thì toàn bộ lý thuyết của chúng ta sẽ là mâu thuẫn, và chúng ta sẽ phải từ bỏ một trong các tiên đề của chúng ta.[27] Bạn có thể chỉ ra rằng sự tổng hợp của một phép biến đổi Lorentz (với vận tốc v_1) và một phép biến đổi Lorentz (với vận tốc v_2) quả thực thu được một phép biến đổi Lorentz, và vận tốc của nó là $(v_1+v_2)/(1+v_1v_2/c^2)$. Đây là nhiệm vụ của bài tập 11.47 và cũng của bài tập 11.27 (bài tập này được phát biểu một cách trực tiếp, giới thiệu trong Mục 11.9). Vận tốc tổng hợp này là thứ mà chúng ta sẽ xem xét lại khi chúng ta đề cập tới công thức cộng vận tốc trong Mục 11.5.1. ♣

Ví dụ: Một con tàu với độ dài riêng L chuyển động với vận tốc $5c/13$ đối với mặt đất. Một quả bóng được ném từ phía sau con tàu lên phía trước. Vận tốc của quả bóng đối với con tàu là $c/3$. Theo quan sát của người trên mặt đất thì thời gian quả bóng bay trong không khí là bao nhiêu, và nó di chuyển được bao xa?

Lời giải: Thừa số γ liên kết với vận tốc $5c/13$ là $\gamma = 13/12$. Hai sự kiện mà chúng ta đề cập tới ở đây đó là "quả bóng rời khỏi phía sau con tàu" và "quả bóng tới phía trước con tàu." Khoảng cách không thời gian giữa hai sự kiện này dễ dàng tính được trên con tàu. Chúng ta có $\Delta x_T = L$, và $\Delta t_T = L/(c/3) = 3L/c$. Do đó phép biến đổi Lorentz sẽ dẫn đến các tọa độ trên mặt đất sẽ là

$$\begin{aligned} x_G &= \gamma(x_T + vt_T) = \frac{13}{12}\left(L + \left(\frac{5c}{13}\right)\left(\frac{3L}{c}\right)\right) = \frac{7L}{3}, \\ t_G &= \gamma(t_T + vx_T/c^2) = \frac{13}{12}\left(\frac{3L}{c} + \frac{(5c/13)L}{c^2}\right) = \frac{11L}{3c}. \end{aligned} \tag{11.23}$$

Trong một bài toán cho trước, giống như ví dụ ở trên, một hệ quy chiếu thường cho phép chúng ta tính toán nhanh chóng các đại lượng Δx và Δt, do đó bạn đơn giản là chỉ cần thay thế các đại lượng này vào phép biến đổi Lorentz để thu được $\Delta x'$ và $\Delta t'$ trong hệ quy chiếu khác, ở đó chúng có thể là không hiển nhiên lắm.

[27]Phát biểu này chỉ đúng đối với trường hợp tổng hợp hai phép biến đổi Lorentz theo cùng chiều. Nếu chúng ta tổng hợp một phép biến đổi Lorentz theo chiều x và một phép biến đổi Lorentz theo chiều y thì kết quả sẽ không phải là một phép biến đổi Lorentz theo một chiều mới nào đó, nhưng đúng hơn là một sự tổng hợp của một phép biến đổi Lorentz theo chiều mới nào đó và một sự quay quanh một góc nào đó. Sự quay này được biết với cái tên là *Sự tiến động Thomas*. Xem phụ lục của Muller (1992) để biết cách thành lập nhanh chóng của sự tiến động Thomas. Để với thảo luận chi tiết hơn, xem Costella và cộng sự (2001) và Rebilas (2002).

Thuyết tương đối là một chủ đề mà ở đó thường có rất nhiều cách giải một bài toán. Nếu bạn cố gắng tìm Δx và Δt nào đó, thì bạn có thể sử dụng phép biến đổi Lorentz, hoặc có lẽ là khoảng bất biến (sẽ được giới thiệu trong Mục 11.6), hoặc có thể sử dụng cách cộng vận tốc (giới thiệu trong Mục 11.5.1), hoặc thậm chí là phương pháp gửi các tín hiệu ánh sáng như là đã sử dụng trong Mục 11.3. Tùy thuộc vào bài toán cụ thể vào sở thích cá nhân của bạn, mà một cách làm nào đó sẽ được ưu tiên hơn các cách khác. Nhưng không quan trọng là bạn chọn cách làm nào, bạn hãy nên lợi dụng việc có nhiều sự lựa chọn bằng cách sử dụng một phương pháp thứ hai để kiểm tra lại kết quả của bạn. Đối với tôi, tôi thấy rằng phương pháp sử dụng phép biến đổi Lorentz là sự lựa chọn tốt hơn, bởi vì các phương pháp khác thường thú vị hơn khi giải một bài toán lần đầu tiên, trong khi đó phép biến đổi Lorentz thường nhanh và dễ áp dụng (hoàn hảo đối với việc kiểm tra lại).[28]

11.4.2 Các ảnh hưởng cơ bản

Bây giờ chúng ta sẽ xét xem phép biến đổi Lorentz sẽ dẫn tới ba ảnh hưởng cơ bản (cụ thể là, sự mất tính đồng thời, sự giãn nở thời gian, và sự co độ dài) mà chúng ta đã thảo luận trong Mục 11.3 như thế nào. Tất nhiên, chúng ta đã sử dụng những ảnh hưởng này để thành lập phép biến đổi Lorentz, do đó chúng ta biết rằng mọi thứ sẽ như thế nào. Chúng ta sẽ chỉ thực hiện lại các việc đã làm. Nhưng bởi vì những ảnh hưởng này là rất quan trọng, do đó hãy nhấn mạnh và thảo luận chúng thêm một lần nữa, với điểm bắt đầu là phép biến đổi Lorentz.

Sự mất tính đồng thời

Xét hai sự kiện xảy ra đồng thời trong hệ quy chiếu S'. Khi đó khoảng cách giữa chúng đo trong hệ quy chiếu S' sẽ là $(x', t') = (x', 0)$. Như đã nói trước, chúng ta sẽ không viết ký hiệu Δ trước các tọa độ. Sử dụng phương trình thứ hai trong tập hợp phương trình (11.17), chúng ta thấy rằng thời gian giữa hai sự kiện đo trong hệ quy chiếu S sẽ là $t = \gamma v x'/c^2$. Thời gian này không bằng không (trừ khi $x' = 0$). Do đó, các sự kiện sẽ

[28] Tuy nhiên tôi sẽ phải rất thận trọng khi giải một bài toán mà chỉ sử dụng phép biến đổi Lorentz và không có phương pháp khác để kiểm tra lại, bởi vì rất dễ sẽ bị nhầm lẫn về dấu trong phép biến đổi. Và bởi vì không có cách nào ngoại trừ việc thay thế thuần túy các con số, và cũng không có nhiều cơ hội đối với việc kiểm tra bằng trực giác.

không xảy ra đồng thời trong hệ quy chiếu S.

Sự giãn nở thời gian

Xét hai sự kiện cùng xảy ra tại một vị trí trong hệ quy chiếu S'. Khi đó khoảng cách giữa chúng là $(x', t') = (0, t')$. Sử dụng phương trình thứ hai trong tập hợp phương trình (11.17). chúng ta thấy rằng thời gian giữa hai sự kiện đo trong hệ quy chiếu S là

$$t = \gamma t' \quad (\text{nếu } x' = 0). \tag{11.24}$$

Thừa số γ luôn lớn hơn hoặc bằng 1, do đó $t \geq t'$. Sự trôi qua của một giây trên đồng hồ trong S' sẽ lâu hơn một giây trên đồng hồ trong S. S sẽ quan sát thấy S' uống cà phê của anh ấy rất chậm rãi.

Cách làm hoàn toàn tương tự nếu như chúng ta thay đổi vị trí S và S'. Xét hai sự kiện xảy ra ở cùng một vị trí trong hệ quy chiếu S. Khoảng cách giữa chúng là $(x, t) = (0, t)$. Sử dụng phương trình thứ hai của tập hợp phương trình (11.19), chúng ta thấy rằng thời gian giữa hai sự kiện đo trong hệ quy chiếu của S' sẽ là

$$t' = \gamma t \quad (\text{nếu } x = 0). \tag{11.25}$$

Do đó, $t' \geq t$. Một cách khác để dẫn đến điều này đó là sử dụng phương trình đầu tiên của (11.17) và chúng ta có $x' = -vt'$, và sau đó thay biểu thức này vào phương trình thứ hai.

NHẬN XÉT: Nếu chúng ta mô tả cùng một lúc hai phương trình trên, $t = \gamma t'$ và $t' = \gamma t$, thì hình như chúng xuất hiện mâu thuẫn với nhau. Tuy nhiên sự mâu thuẫn rõ ràng này nảy sinh từ sự bỏ sót trong điều kiện mà chúng được xây dựng từ đó. Phương trình đầu tiên xây dựng từ giả thiết rằng $x' = 0$. Phương trình sau xây dựng từ giả thiết $x = 0$. Do đó thực chất là không có gì mâu thuẫn ở đây cả. Có lẽ là tốt hơn chúng ta nên viết các phương trình này như sau

$$(t = \gamma t')_{x'=0}, \quad \text{và} \quad (t' = \gamma t)_{x=0}, \tag{11.26}$$

tuy nhiên điều này là khá cồng kềnh. ♣

Sự co độ dài

Cách tiến hành phần này giống như phần về sự giãn nở thời gian ở trên, ngoại trừ một điều là chúng ta muốn khoảng thời gian cho trước bằng không, thay vì khoảng không gian bằng không. Chúng ta muốn điều này xảy ra bởi vì để đo được một độ dài, chúng ta sẽ phải tính toán khoảng cách giữa hai điểm mà các vị trí của chúng phải được đo một cách đồng thời. Đó chính là độ dài cần xác định.

Xét một chiếc gậy ở trạng thái nghỉ trong hệ quy chiếu S', và nó có độ dài ℓ' trong S'. Chúng ta muốn tìm độ dài ℓ trong hệ quy chiếu S. Đo đồng thời các tọa độ của hai đầu chiếc gậy trong hệ quy chiếu S sẽ dẫn đến khoảng cách $(x, t) = (x, 0)$. Sử dụng phương trình đầu tiên trong tập hợp phương trình (11.19), ta có

$$x' = \gamma x \quad (\text{nếu } t = 0). \tag{11.27}$$

Nhưng x là độ dài định nghĩa trong hệ quy chiếu S. Và x' là độ dài trong S', bởi vì chiếc gậy không chuyển động trong S'.[29] Do đó, $\ell = \ell'/\gamma$. Và bởi vì $\gamma \geq 1$, nên chúng ta có $\ell \leq \ell'$, do đó S quan sát thấy chiếc gậy ngắn hơn so với S' quan sát.

Bây giờ chúng ta thay đổi vị trí S và S'. Xét một chiếc gậy ở trạng thái nghỉ trong S, với độ dài l đo trong S. Chúng ta muốn tìm độ dài trong hệ quy chiếu S'. Đo các tọa độ của hai đầu chiếc gậy trong S' sẽ dẫn đến khoảng cách là $(x', t') = (x', 0)$. Sử dụng phương trình đầu tiên trong tập hợp phương trình (11.17), chúng ta có

$$x = \gamma x' \quad (\text{nếu } t' = 0). \tag{11.28}$$

Nhưng x' là độ dài định nghĩa trong S'. Và x là độ dài trong S, bởi vì chiếc gậy không chuyển động trong S. Do đó, $\ell' = \ell/\gamma$, dẫn đến $\ell' \leq \ell$.

NHẬN XÉT: Cũng giống như trường hợp sự giãn nở thời gian ở phía trên, nếu chúng ta mô tả đồng thời hai phương trình, $\ell = \ell'/\gamma$ và $\ell' = \ell/\gamma$, thì hình như chúng xuất hiện một cách mâu thuẫn với nhau. Nhưng giống như phần trước, sự mâu thuẫn rõ ràng này phát sinh từ sự bỏ sót trong điều kiện mà chúng được xây dựng. Phương trình đầu tiên xuất phát từ giả thiết rằng $t = 0$ và chiếc gậy ở trạng thái nghỉ trong S'. Phương trình thứ hai dựa vào giả thiết rằng $t' = 0$ và chiếc gậy ở trạng thái nghỉ trong S. Chúng hoàn toàn không có gì mâu thuẫn. Thực ra chúng ta nên viết là

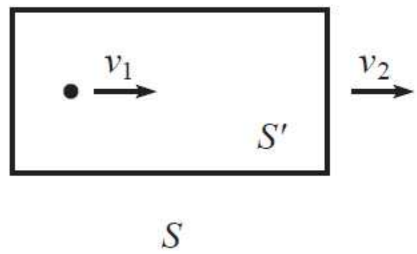
$$(x = x'/\gamma)_{t=0}, \quad \text{và} \quad (x' = x/\gamma)_{t'=0}, \tag{11.29}$$

và sau đó đồng nhất x' trong phương trình đầu tiên với ℓ' chỉ sau khi đề cập tới giả thiết cụ thể hơn là chiếc gậy ở trạng thái nghỉ trong hệ quy chiếu S'. Tương tự đối với phương trình thứ hai. Nhưng điều này là rất mất công. ♣

[29] Sự đo đồng thời hai đầu của chiếc gậy trong S sẽ là không đồng thời trong hệ quy chiếu S'. Trong hệ quy chiếu S', khoảng cách giữa hai sự kiện là x', t', ở đó cả x' và t' đều khác không. Điều này không thỏa mãn định nghĩa của chúng ta về một độ dài đo trong hệ quy chiếu S' (bởi vì $t' \neq 0$), nhưng chiếc gậy không chuyển động trong S', do đó S' có thể đo hai đầu của chiếc gậy bất cứ khi nào anh ta muốn, và anh ta sẽ luôn luôn thu được cùng một hiệu số. Do đó x' quả thực là độ dài trong hệ quy chiếu S'.

11.5 Cộng vận tốc

11.5.1 Cộng vận tốc dọc



Hình 11.18:

Xét một mô hình sau đây. Một vật thể chuyển động với vận tốc v_1 đối với hệ quy chiếu S'. Và hệ S' này chuyển động với vận tốc v_2 đối với hệ quy chiếu S theo cùng chiều với chuyển động của vật thể (xem hình 11.18). Vận tốc u của vật thể đối với hệ quy chiếu S là bao nhiêu?

Phép biến đổi Lorentz có thể được sử dụng để dễ dàng trả lời câu hỏi này. Vận tốc tương đối của các hệ quy chiếu là v_2. Xét hai sự kiện dọc theo quỹ đạo của vật thể (ví dụ, chẳng hạn tạo hai tiếng bíp bíp). Chúng ta đã có $\Delta x'/\Delta t' = v_1$. Mục đích của chúng ta là tìm $u \equiv \Delta x/\Delta t$. Phép biến đổi Lorentz từ S' sang S theo phương trình (11.17) là

$$\Delta x = \gamma_2(\Delta x' + v_2 \Delta t'), \quad \text{và} \quad \Delta t = \gamma_2(\Delta t' + v_2 \Delta x'/c^2), \tag{11.30}$$

trong đó $\gamma_2 \equiv 1/\sqrt{1 - v_2^2/c^2}$. Do đó,

$$\begin{aligned} u \equiv \frac{\Delta x}{\Delta t} &= \frac{\Delta x' + v_2 \Delta t'}{\Delta t' + v_2 \Delta x'/c^2} \\ &= \frac{\Delta x'/\Delta t' + v_2}{1 + v_2(\Delta x'/\Delta t')/c^2} \\ &= \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2/c^2}. \end{aligned} \tag{11.31}$$

Công thức này được gọi là *công thức cộng vận tốc*, với các vận tốc cùng nằm trên một đường thẳng. Chúng ta hãy xem xét một vài đặc điểm của công thức này.

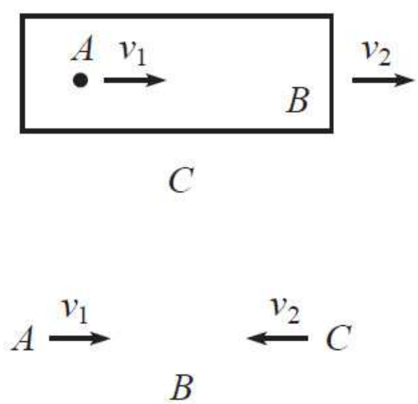
- Nó đối xứng đối với v_1 và v_2, điều này là hiển nhiên bởi vì chúng ta có thể thay đổi vai trò của vật thể và hệ quy chiếu S.

- Khi $v_1 v_2 \ll c^2$, công thức này suy biến thành $u \approx v_1 + v_2$, đây là công thức mà chúng ta biết rằng nó khá chính xác đối với các vận tốc thông thường.

- Nếu $v_1 = c$ hoặc $v_2 = c$ thì chúng ta có $u = c$, đây là trường hợp chắc chắn phải xảy ra, bởi vì mọi thứ mà chuyển động với vận tốc ánh sáng c trong một hệ quy chiếu thì cũng chuyển động với vận tốc c trong bất kỳ hệ quy chiếu nào khác.

- Giá trị lớn nhất (hoặc nhỏ nhất) của u trong miền $-c \leq v_1, v_2 \leq c$ bằng c (hoặc $-c$), các giá trị này có thể tìm được bằng cách chú ý rằng $\partial u/\partial v_1$ và $\partial u/\partial v_2$ không bao giờ bằng không bên trong miền đang xét của v_1 và v_2.

Nếu bạn lấy hai vận tốc bất kỳ nhỏ hơn c và thay chúng vào phương trình (11.31) thì bạn sẽ thu được một vận tốc lại nhỏ hơn c. Điều này chỉ ra rằng cho dù bạn có làm cho vật thể tăng tốc thế nào đi chăng nữa (cụ thể là cho dù bao nhiêu lần bạn truyền cho vận thể vận tốc v_1 đối với hệ quy chiếu đang chuyển động với vận tốc v_2) thì bạn cũng không thể có được vận tốc lớn hơn vận tốc ánh sáng. Chúng ta sẽ đưa ra cách lập luận khác cho kết quả này trong Chương 12 khi chúng ta thảo luận về năng lượng.



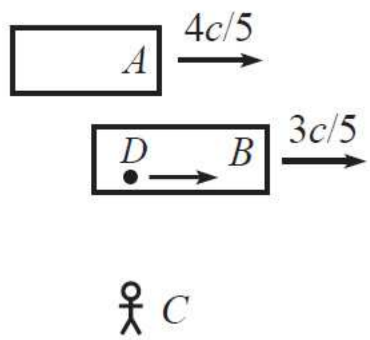
Hình 11.19:

NHẬN XÉT: Xét hai trường hợp như được chỉ ra trong hình 11.19. Nếu mục đích là tìm vận tốc của A đối với C thì công thức cộng vận tốc có thể áp dụng vào cả hai trường hợp, bởi vì trường hợp thứ hai là giống như trường hợp đầu tiên theo quan sát trong hệ quy chiếu của B.

Công thức cộng vận tốc áp dụng khi chúng ta hỏi, "Nếu A chuyển động với vận tốc v_1 so với B, và B chuyển động với vận tốc v_2 so với C (tất nhiên điều này cũng có nghĩa rằng C chuyển động với vận tốc v_2 so với B), thì A chuyển động với vận tốc là bao nhiêu so với C?" Công thức cộng vận tốc không áp dụng nếu chúng ta hỏi một câu hỏi thực tế hơn, "theo quan sát của B thì vận tốc tương đối của A và C là bao nhiêu?" Câu trả lời cho câu hỏi này phải là $v_1 + v_2$.

Tóm lại, nếu hai vận tốc được cho trước đối với cùng một người quan sát, chẳng hạn là B, và nếu bạn được hỏi về vận tốc tương đối đo bởi B, thì bạn đơn giản chỉ cần cộng hai vận tốc này lại.[30] Nhưng nếu bạn được hỏi về vận tốc tương đối đo bởi A hoặc C thì bạn phải sử dụng công thức cộng vận tốc. Sẽ không có ý nghĩa khi cộng các vận tốc mà lại được đo đối với các người quan sát khác nhau. Làm như vậy sẽ dẫn đến việc cộng các thứ mà lại được đo trong các hệ tọa độ khác nhau, điều này là không có ý nghĩa. Nói một cách khác, lấy vận tốc của A đối với B và cộng nó vào vận tốc của B đối với C và hy vọng thu được vận tốc của A đối với C, điều này là không đúng. ♣

Ví dụ (Xét lại ví dụ về các con tàu chuyển động): Xét lại trường hợp trong ví dụ "Các con tàu chuyển động" trong Mục 11.3.3.



Hình 11.20:

(a) Theo quan sát của A và theo quan sát của B, mất bao nhiêu thời gian để A đuổi kịp B?

(b) Gọi sự kiện E_1 là "phía trước của A đi qua phía sau của B", và sự kiện E_2 là "phía sau của A đi qua phía trước của B." Người D đi bộ với vận tốc không đổi từ phía sau của B lên phía trước (xem hình 11.20), sao cho anh ta trùng với cả hai sự kiện E_1 và E_2. Theo quan sát của D, quá trình đuổi kịp mất bao nhiêu thời gian?

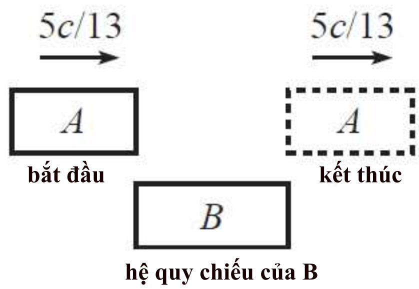
Lời giải:

[30]Chú ý rằng vận tốc kết quả tất nhiên có thể lớn hơn c. Nếu tôi nhìn thấy một quả bóng hướng về phía tôi với vận tốc $0.9c$ từ bên phải, và một quả bóng khác hướng về phía tôi với vận tốc $0.9c$ từ bên trái thì vận tốc tương đối của hai quả bóng trong hệ quy chiếu của tôi sẽ là $1.8c$. Tuy nhiên, trong hệ quy chiếu của một trong hai quả bóng, vận tốc tương đối là $(1.8/1.81)c \approx (0.9945)c$, từ phương trình (11.31).

(a) Đầu tiên, xét quan sát của B. Từ công thức cộng vận tốc, B quan sát thấy A chuyển động với vận tốc

$$u = \frac{\frac{4c}{5} - \frac{3c}{5}}{1 - \frac{4}{5}\frac{3}{5}} = \frac{5c}{13}. \tag{11.32}$$

Thừa số γ liên kết với vận tốc này là $\gamma = 13/12$. Do đó, B quan sát thấy con

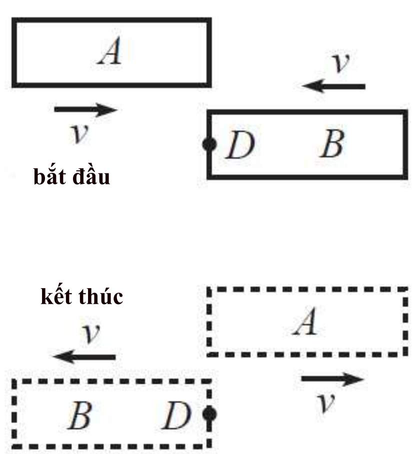


Hình 11.21:

tàu A co lại thành độ dài $12L/13$. Suốt quá trình đuổi kịp, A phải di chuyển một khoảng cách bằng tổng các độ dài của các con tàu trong hệ quy chiếu của B (xem hình 11.21), tổng độ dài này bằng $L + 12L/13 = 25L/13$. Bởi vì A chuyển động với vận tốc $5c/13$, do đó tổng thời gian trong hệ quy chiếu của B là

$$t_B = \frac{25L/13}{5c/13} = \frac{5L}{c}. \tag{11.33}$$

Lập luận hoàn toàn tương tự như vậy đối với quan sát của A, chúng ta sẽ có $t_A = t_B = 5L/c$.



Hình 11.22:

(b) Xem xét mọi thứ từ quan sát của người D. D ở trạng thái nghỉ, và hai con tàu chuyển động với hai vận tốc bằng nhau v nhưng ngược chiều (xem hình 11.22), bởi vì nếu ngược lại thì sự kiện thứ hai E_2 sẽ không có vị trí tại D. Cộng tương đối vận tốc v với chính nó sẽ thu được vận tốc của A theo quan sát của B. Nhưng từ phần (a) chúng ta biết rằng vận tốc tương đối này bằng $5c/13$. Do đó

$$\frac{2v}{1+v^2/c^2} = \frac{5c}{13} \quad \Longrightarrow \quad v = \frac{c}{5}, \tag{11.34}$$

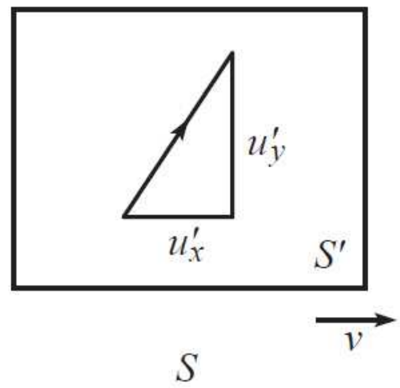
trong đó chúng ta đã loại đi nghiệm không có ý nghĩa vật lý $v = 5c$. Thừa số γ liên kết với vận tốc $v = c/5$ là $\gamma = 5/(2\sqrt{6})$. Do đó D sẽ quan sát thấy cả hai con tàu đều bị co lại tới độ dài $2\sqrt{6}L/5$. Suốt quá trình đuổi kịp, mỗi con tàu di chuyển một khoảng cách bằng độ dài của chúng, bởi vì cả hai sự kiện E_1 và E_2 phải xảy ra tại D. Tổng thời gian trong hệ quy chiếu của D do đó sẽ là

$$t_D = \frac{2\sqrt{6}L/5}{c/5} = \frac{2\sqrt{6}L}{c}. \tag{11.35}$$

NHẬN XÉT: Có một vài cách kiểm tra lại mà chúng ta có thể tiến hành. Vận tốc của D đối với mặt đất có thể thu được thông qua hệ quy chiếu của B bằng cách cộng tương đối vận tốc $3c/5$ và $c/5$, hoặc cũng có thể thông qua hệ quy chiếu của A bằng cách trừ đi $c/5$ từ $4c/5$. Cả hai cách này đều đưa đến cùng một kết quả, cụ thể là $5c/7$, tất nhiên là chúng phải dẫn đến cùng một kết quả. (Thực tế vận tốc $c/5$ có thể xác định bằng lý luận này, thay vì việc sử dụng phương trình (11.34).) Thừa số γ giữa mặt đất và D do đó sẽ là $7/2\sqrt{6}$. Sau đó chúng ta có thể sử dụng sự giãn nở thời gian để khẳng định rằng một người nào đó ở trên mặt đất quan sát thấy sự đuổi kịp mất một khoảng thời gian $(7/2\sqrt{6})t_D$ (chúng ta có thể khẳng định điều này bởi vì cả hai sự kiện đều xảy ra tại D). Sử dụng phương trình (11.35) sẽ dẫn đến thời gian trong hệ quy chiếu mặt đất là $7L/c$, phù hợp với phương trình (11.15). Tương tự, thừa số γ giữa D và một trong hai con tàu là $5/2\sqrt{6}$. Do đó thời gian đuổi kịp theo quan sát của A hoặc B là $(5/2\sqrt{6})t_D = 5L/c$, phù hợp với phương trình (11.33).

Chú ý rằng chúng ta không thể sử dụng sự giãn nở thời gian đơn giản để liên hệ mặt đất với A hoặc B, bởi vì hai sự kiện không xảy ra tại cùng một vị trí trong hệ quy chiếu con tàu. Nhưng bởi vì cả hai sự kiện đều xảy ra tại cùng một vị trí trong hệ quy chiếu của D, cụ thể là ngay tại D, do đó sẽ là hợp lý khi sử dụng sự giãn nở thời gian để đi từ hệ quy chiếu của D tới bất kỳ hệ quy chiếu nào khác. ♣

11.5.2 Cộng vận tốc ngang



Hình 11.23:

Xét trường hợp hai chiều tổng quát sau đây. Một vật thể chuyển động với vận tốc (u'_x, u'_y) đối với hệ quy chiếu S'. Và hệ quy chiếu S' chuyển động với vận tốc v đối với hệ quy chiếu S theo chiều x (xem hình 11.23). Vận tốc (u_x, u_y) của vật thể đối với hệ quy chiếu S là bao nhiêu?

Sự tồn tại của chuyển động theo chiều y không ảnh hưởng gì đến sự thành lập của vận tốc theo chiều x trong phần trước, do đó phương trình (11.31) vẫn đúng. Theo những ký hiệu hiện tại, phương trình này trở thành

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + u'_x v/c^2}. \tag{11.36}$$

Để tìm u_y, chúng ta có thể sử dụng lại biến đổi Lorentz. Xét hai sự kiện dọc theo quỹ đạo của vật thể. Chúng ta đã có $\Delta x'/\Delta t' = u'_x$, và $\Delta y'/\Delta t' = u'_y$. Mục đích của chúng ta là đi tìm $u_y \equiv \Delta y/\Delta t$. Phép biến đổi Lorentz có liên quan từ S' sang S trong phương trình (11.17) là

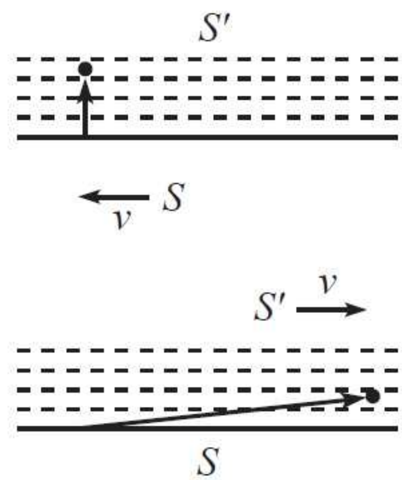
$$\Delta y = \Delta y', \quad \text{và} \quad \Delta t = \gamma(\Delta t' + v\Delta x') \tag{11.37}$$

Do đó,

$$\begin{aligned} u_y \equiv \frac{\Delta y}{\Delta t} &= \frac{\Delta y'}{\gamma(\Delta t' + v\Delta x'/c^2)} \\ &= \frac{\Delta y'/\Delta t'}{\gamma(1 + v(\Delta x'/\Delta t')/c^2)} \\ &= \frac{u'_y}{\gamma(1 + u'_x v/c^2)}. \end{aligned} \tag{11.38}$$

NHẬN XÉT: Trong trường hợp đặc biệt khi $u'_x = 0$, chúng ta có $u_y = u'_y/\gamma$. Khi đó u'_y là nhỏ và v lớn, kết quả này có thể xem như là một trường hợp đặc biệt của sự giãn nở thời gian bằng cách sau đây. Xét một chuỗi các đường thẳng song song với trục x và cách đều nhau (xem hình 11.24). Tưởng tượng rằng đồng hồ của vật thể tích tắc một lần mỗi khi nó đi qua một đường thẳng. Bởi vì u'_y nhỏ, do đó hệ quy chiếu của vật thể về bản chất là hệ quy chiếu S'. Do đó nếu S chuyển động sang bên trái thì vật thể chuyển động với vận tốc v đối với S. Dẫn đến S quan sát thấy đồng hồ chạy chậm lại bởi một thừa số γ. Điều này có nghĩa rằng S quan sát thấy vật thể đi qua các đường thẳng với một tốc độ chậm hơn bởi thừa số γ (bởi vì đồng hồ vẫn tích tắc một lần mỗi khi nó đi qua một đường thẳng; điều này là một phát biểu độc lập với hệ quy chiếu). Do khoảng cách theo chiều y là như nhau trong hai hệ quy chiếu nên chúng ta có thể kết luận rằng $u_y = u'_y/\gamma$. Thừa số γ này sẽ rất quan trọng khi chúng ta đề cập tới động lượng trong Chương 12.

Tóm lại, nếu bạn chạy qua một vật thể theo chiều x thì vận tốc y của nó là chậm hơn trong



Hình 11.24:

hệ quy chiếu của bạn (hoặc nhanh hơn, phụ thuộc vào dấu của vận tốc tương đối u'_x và v). Điều này quả thực là lạ, nhưng cũng không quá kỳ lạ hơn các ảnh hưởng khác mà chúng ta đã nhìn thấy. Bài tập 11.16 đề cập tới một trường hợp đặc biệt khi $u'_x = 0$, nhưng ở đó u'_y không nhất thiết phải nhỏ. ♣

11.6 Khoảng bất biến

Xét đại lượng,

$$(\Delta s)^2 \equiv c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2. \tag{11.39}$$

Về mặt kỹ thuật chúng ta cũng có thể nên trừ thêm hai đại lượng $(\Delta y)^2$ và $(\Delta z)^2$, nhưng không có điều gì đáng quan tâm xảy ra theo các chiều ngang, do đó chúng ta sẽ bỏ qua chúng. Sử dụng phương trình (11.17), chúng ta có thể viết đại lượng $(\Delta s)^2$ dưới dạng các tọa độ $\Delta x'$ và $\Delta t'$ trong hệ quy chiếu S'. Kết quả sẽ là (bỏ qua ký hiệu Δ)

$$\begin{aligned} c^2t^2 - x^2 &= \frac{c^2(t' + vx'/c^2)^2}{1 - v^2/c^2} - \frac{(x' + vt')^2}{1 - v^2/c^2} \\ &= \frac{t'^2(c^2 - v^2) - x'^2(1 - v^2/c^2)}{1 - v^2/c^2} \\ &= c^2t'^2 - x'^2. \end{aligned} \tag{11.40}$$

Chúng ta thấy rằng phép biến đổi Lorentz chỉ ra đại lượng $c^2t^2 - x^2$ không phụ thuộc vào hệ quy chiếu. Kết quả này còn hơn cả dự tính của chúng ta vì lý do sau đây. Tiên đề về vận tốc ánh sáng nói rằng nếu $c^2t'^2 - x'^2 = 0$ thì $c^2t^2 - x^2 = 0$. Nhưng phương trình (11.40) chỉ ra rằng nếu $c^2t'^2 - x'^2 = b$ thì $c^2t^2 - x^2 = b$ đối với một giá trị b nào đó, không nhất thiết bằng không. Điều này như bạn có thể đoán là rất hữu ích. Có rất nhiều thứ thay đổi khi chúng ta chuyển từ hệ quy chiếu này sang hệ quy chiếu khác, do đó sẽ là rất thú vị khi chúng ta có một đại lượng độc lập với hệ quy chiếu mà chúng ta có thể dựa vào. Thực tế rằng s^2 là bất biến dưới phép biến đổi Lorentz của x và t chính xác tương tự như thực tế rằng r^2 là bất biến dưới sự quay mặt phẳng $x - y$. Các tọa độ thay đổi dưới phép biến đổi, nhưng sự tổ hợp đặc biệt $c^2t^2 - x^2$ đối với phép biến đổi Lorentz, hoặc $x^2 + y^2$ đối với sự quay, vẫn giữ nguyên giá trị của chúng. Tất cả các người quan sát quán tính sẽ nhận thấy cùng một giá trị s^2, độc lập với hệ tọa độ thực tế mà họ sử dụng.

Một chú ý về thuật ngữ: Hiệu các tọa độ, $(c\Delta t, \Delta x)$, thường được nói đến như là *khoảng không thời gian*, trong khi đó đại lượng $(\Delta s)^2 \equiv c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$ được nhắc đến với cái tên là *khoảng bất biến* (hoặc bình phương khoảng bất biến). Trong bất cứ trường hợp nào, chỉ cần gọi nó là s^2 và mọi người sẽ biết bạn định nói đến điều gì. Đại lượng bất biến s^2 thực sự đúng là một trường hợp đặc biệt của những kết quả tổng quát hơn liên quan đến tích trong và vector bốn chiều mà chúng ta sẽ thảo luận trong Chương 13. Bây giờ chúng ta hãy xem xét các ý nghĩa vật lý của đại lượng $s^2 \equiv c^2t^2 - x^2$; có ba trường hợp cần đề cập tới.

Trường hợp 1: $s^2 > 0$ *(sự ngăn cách thời gian)*

Trong trường hợp này, chúng ta nói rằng hai sự kiện bị ngăn cách thời gian. Ta có $c^2t^2 > x^2$, và do đó $|x/t| < c$. Xét một hệ quy chiếu S' chuyển động với vận tốc v đối với hệ quy chiếu S. Biến đổi Lorentz đối với x sẽ là

$$x' = \gamma(x - vt). \tag{11.41}$$

Bởi vì $|x/t| < c$, do đó sẽ tồn tại một vận tốc v nhỏ hơn c (cụ thể là $v = x/t$) sao cho $x' = 0$. Nói một cách khác, nếu hai sự kiện bị ngăn cách thời gian thì có thể tìm được một hệ quy chiếu S' mà ở đó hai sự kiện xảy ra ở cùng một vị trí. (Tóm lại, điều kiện $|x/t| < c$ có nghĩa rằng một phần tử có thể di chuyển từ một sự kiện này đến sự kiện kia.) Khi đó đại lượng bất biến s^2 sẽ dẫn đến $s^2 = c^2t'^2 - x'^2 = c^2t'^2$. Do đó chúng ta thấy rằng s/c là thời gian giữa các sự kiện trong hệ quy chiếu mà ở đó các sự kiện xảy ra tại cùng một vị trí. Thời gian này được gọi là *thời gian riêng*.

Trường hợp 2: $s^2 < 0$ *(sự ngăn cách không gian)*

Trong trường hợp này, chúng ta nói rằng hai sự kiện bị ngăn cách không gian.[31] Ta có $c^2t^2 < x^2$, và do đó $|t/x| < 1/c$. Xét một hệ quy chiếu S' chuyển động với vận tốc v đối với S. Phép biến đổi Lorentz đối với t' là

$$t' = \gamma(t - vx/c^2). \tag{11.42}$$

Bởi vì $|t/x| < 1/c$ nên sẽ tồn tại một vận tốc v nhỏ hơn c (cụ thể là $v = c^2t/x$) sao cho tại đó $t' = 0$. Nói một cách khác, nếu hai sự kiện bị ngăn cách không gian thì có thể tìm được một hệ quy chiếu S' mà trong đó hai sự kiện xảy ra tại cùng một thời điểm. (Khẳng định này không dễ dàng thấy được giống như khẳng định tương ứng trong trường hợp sự ngăn cách thời gian ở trên. Nhưng nếu bạn vẽ một sơ đồ Minkowski, sơ đồ này sẽ được mô tả trong phần tới, thì sẽ là hiển nhiên.) Đại lượng bất biến s^2 khi đó sẽ trở thành $s^2 = c^2t'^2 - x'^2 = -x'^2$. Do đó chúng ta thấy rằng $|s|$ là khoảng cách giữa hai sự kiện trong hệ quy chiếu mà tại đó hai sự kiện xảy ra ở cùng một thời điểm. Khoảng cách này được gọi là *khoảng cách riêng*, hoặc *độ dài riêng*.

Trường hợp 3: $s^2 = 0$ ***(sự ngăn cách ánh sáng)*** Trong trường hợp này chúng ta nói rằng hai sự kiện bị ngăn cách ánh sáng. Ta có $c^2t^2 = x^2$, và do đó $|x/t| = c$. Điều này đúng trong mọi hệ quy chiếu, do đó trong mọi hệ quy chiếu một photon phát ra tại một trong các sự kiện sẽ đến sự kiện còn lại. Sẽ không thể tìm được

[31] Chú ý rằng s^2 là âm trong trường hợp này, điều đó có nghĩa là s là số ảo. Chúng ta có thể lấy giá trị tuyệt đối của s nếu ta muốn thu được số thực.

một hệ quy chiếu S' mà trong đó hai sự kiện xảy ra tại cùng một vị trí hoặc cùng một thời điểm, bởi vì hệ quy chiếu sẽ phải chuyển động với vận tốc ánh sáng.

Ví dụ (Sự giãn nở thời gian): Một sự minh họa về tính hữu ích của đại lượng bất biến s^2 là việc thành lập công thức của sự giãn nở thời gian. Giả sử hệ quy chiếu S' chuyển động với vận tốc v so với hệ quy chiếu S. Xét hai sự kiện tại gốc tọa độ của S', cách nhau khoảng thời gian t'. Khoảng cách giữa hai sự kiện là

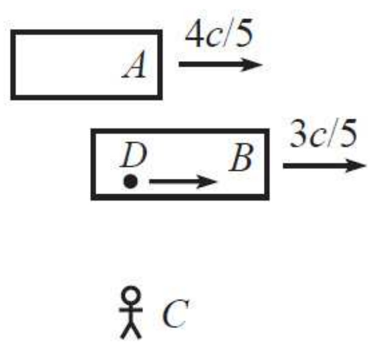
$$\begin{aligned} &\text{trong } S': \quad (x', t') = (0, t'), \\ &\text{trong } S: \quad (x, t) = (vt, t). \end{aligned} \tag{11.43}$$

Đại lượng bất biến s^2 chỉ ra rằng $c^2t'^2 - 0 = c^2t^2 - v^2t^2$. Do đó,

$$t = \frac{t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{11.44}$$

Phương pháp này dẫn đến một sự hiển nhiên rằng kết quả sự giãn nở thời gian dựa trên giả thiết rằng $x' = 0$.

Xét lại ví dụ về các con tàu chuyển động: Xét lại mô hình trong ví dụ "Các con tàu chuyển động" trong Mục 11.3.3 và Mục 11.5.1. Kiểm tra lại rằng s^2 giữa hai sự kiện E_1 và E_2 là bằng nhau trong tất cả các hệ quy chiếu A, B, C và D (xem hình 11.25).



Hình 11.25:

Lời giải: Đại lượng duy nhất mà chúng ta sẽ cần mà ta chưa tìm trong hai ví dụ ở trên là khoảng cách giữa E_1 và E_2 trong hệ quy chiếu của C (hệ quy chiếu mặt đất). Trong hệ quy chiếu này, tàu A chuyển động với vận tốc $4c/5$ trong thời gian $t_C = 7L/c$, đi được một khoảng cách $28L/5$. Nhưng sự kiện E_2 xảy ra tại phía sau của con tàu với khoảng cách $3L/5$ sau đầu phía trước (đây là độ dài co lại trong hệ quy chiếu mặt đất). Do đó, khoảng cách giữa hai sự kiện E_1 và E_2 trong hệ quy chiếu mặt đất là $28L/5 - 3L/5 = 5L$. Bạn cũng có thể áp dụng cách lý luận tương tự khi sử dụng con tàu B, khi đó kết quả $5L$ sẽ thu được từ dạng $(3c/5)(7L/c) + 4L/5$.

Thay các kết quả đã có trước vào cùng nhau, chúng ta có các khoảng cách sau giữa hai sự kiện trong các hệ quy chiếu khác nhau:

	A	B	C	D
Δt	$5L/c$	$5L/c$	$7L/c$	$2\sqrt{6}L/c$
Δx	$-L$	L	$5L$	0

Từ bảng trên chúng ta thấy rằng $\Delta s^2 \equiv c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 = 24L^2$ đối với cả bốn hệ quy chiếu như mong muốn. Tất nhiên chúng ta có thể làm ngược lại bằng cách sử dụng kết quả $s^2 = 24L^2$ từ các hệ quy chiếu A, B, hoặc D để suy luận ra rằng $\Delta x = 5L$ trong hệ quy chiếu C. Trong bài tập 11.10, bạn sẽ được yêu cầu thực hiện một nhiệm vụ hơi tẻ nhạt là kiểm tra lại rằng các giá trị trong bảng trên thỏa mãn phép biến đổi Lorentz giữa sáu cặp khác nhau của các hệ quy chiếu.

11.7 Sơ đồ Minkowski

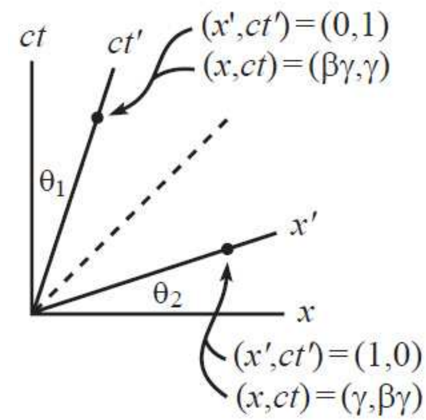
Sơ đồ Minkowski (còn được gọi là sơ đồ "không thời gian") là vô cùng hữu ích trong việc xem xét xem các tọa độ biến đổi như thế nào giữa các hệ quy chiếu khác nhau. Nếu bạn muốn đưa ra các số chính xác trong một bài toán, chắc chắn bạn sẽ phải sử dụng một trong các cách mà chúng ta đã gặp cho đến giờ. Nhưng muốn thu được một bức tranh tổng thể mang tính trực quan (nếu thực tế có bất cứ một thứ gì mang tính trực quan như vậy trong chuyển động tương đối), thì sẽ không có công cụ nào tốt hơn sơ đồ Minkowski. Sau đây là cách mà bạn có thể tạo ra một sơ đồ Minkowski như thế nào.

Giả sử hệ quy chiếu S' chuyển động với vận tốc v so với hệ quy chiếu S (dọc theo trục x như thường lệ, và bỏ qua thành phần y và z). Vẽ các trục x và ct của hệ quy chiếu S.[32] Khi đó trục x' và ct' của hệ quy chiếu S' sẽ trông như thế nào khi thêm vào sơ đồ này? Cụ thể là góc nghiêng của các trục là bao nhiêu, và độ lớn của một đơn vị trên các trục này là như thế nào? (Không có lý do gì mà một đơn vị trên trục x' và ct' sẽ có cùng độ dài giống như một đơn vị trên trục x và ct.) Chúng ta có thể trả lời câu hỏi này bằng cách sử dụng phép

[32]Chúng ta chọn vẽ ct thay vì t trên trục thẳng đứng, với mục đích đường đi của tia sáng nằm tại góc $45°$. Chúng ta có thể chọn các đơn vị trong đó $c = 1$.

biến đổi Lorentz, phương trình (11.17). Đầu tiên ta sẽ xem xét trục ct', và sau đó là trục x'.

Góc và kích thước đơn vị của trục ct'



Hình 11.26:

Nhìn vào điểm $(x', ct') = (0, 1)$ nằm trên trục ct' một đơn vị ct' từ gốc tọa độ (xem hình 11.26). Phương trình (11.17) chỉ ra cho chúng ta rằng điểm này là điểm $(x, ct) = (\gamma v/c, \gamma)$. Góc giữa trục ct' và trục ct do đó sẽ cho bởi $\tan\theta_1 = x/ct = v/c$. Với $\beta \equiv v/c$, ta có

$$\tan\theta_1 = \beta. \tag{11.45}$$

Một cách khác, trục ct' đơn giản chỉ là "đường vũ trụ" của gốc tọa độ S'. (Một đường vũ trụ là đường mà một vật thể di chuyển qua không thời gian.) Gốc tọa độ chuyển động với vận tốc v đối với S. Do đó, các điểm trên trục ct' thỏa mãn $x/t = v$, hoặc $x/ct = v/c$.

Trên hình vẽ, điểm $(x', ct') = (0, 1)$ mà chúng ta vừa thấy là điểm $(x, ct) = (\gamma v/c, \gamma)$ là khoảng cách $\gamma\sqrt{1 + v^2/c^2}$ từ gốc tọa độ. Do đó, sử dụng định nghĩa của β và γ, chúng ta thấy rằng

$$\frac{\text{một đơn vị } ct'}{\text{một đơn vị } ct} = \sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}}, \tag{11.46}$$

khi đo trên một lưới ở đó các trục x và ct là trực giao với nhau. Tỷ số này sẽ tiến tới vô cùng khi $\beta \to 1$. Và tất nhiên nó bằng 1 nếu $\beta = 0$.

Góc và kích thước đơn vị của trục x'

Lý luận cơ bản giống như trường hợp trước sẽ được giữ ở đây. Nhìn vào điểm $(x', ct') = (1, 0)$ nằm trên trục x', một đơn vị x' từ gốc tọa độ (xem hình 11.26). Phương trình (11.17) chỉ ra rằng điểm này là điểm $(x, ct) = (\gamma, \gamma v/c)$. Do đó góc giữa trục x' và trục x cho bởi $\tan\theta_2 = ct/x = v/c$. Dẫn đến trong trường hợp trục ct',

$$\tan\theta_2 = \beta. \tag{11.47}$$

Trên hình vẽ, điểm $(x', ct') = (1, 0)$ mà chúng ta vừa thấy là điểm $(x, ct) = (\gamma, \gamma v/c)$ là một khoảng cách $\gamma\sqrt{1 + v^2/c^2}$ từ gốc tọa độ. Do đó, trong trường hợp trục ct',

$$\frac{\text{một đơn vị } x'}{\text{một đơn vị } x} = \sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}}, \tag{11.48}$$

khi đo trong một lưới mà ở đó các trục x và ct là trực giao với nhau. Do đó, cả hai trục x' và ct' đều bị dãn ra theo cùng một thừa số, và nghiêng cùng một góc đối với trục x và ct. "Sự ép" này của các trục trong phép biến đổi Lorentz là khác so với những gì xảy ra trong sự quay, ở đó các trục đều quay theo cùng một chiều.

NHẬN XÉT: Nếu $v/c \equiv \beta = 0$ thì $\theta_1 = \theta_2 = 0$, do đó trục ct' và x' sẽ trùng với các trục ct và x, điều này khá hiển nhiên. Nếu β rất gần 1 thì cả hai trục x' và ct' đều rất gần với đường thẳng tia sáng $45°$. Chú ý rằng bởi vì $\theta_1 = \theta_2$ nên đường thẳng tia sáng sẽ cắt đôi các trục x' và ct'. Do đó (như chúng ta đã kiểm tra ở phần trên), tỷ lệ trên các trục này phải bằng nhau, bởi vì tia sáng phải thỏa mãn $x' = ct'$. ♣

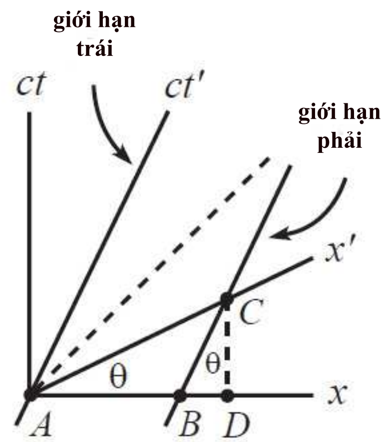
Bây giờ chúng ta đã biết các trục x' và ct' nhìn như thế nào. Cho trước hai điểm bất kỳ trong sơ đồ Minkowski (cụ thể là cho trước hai sự kiện trong không thời gian), chúng ta có thể chỉ cần biểu thị các đại lượng $\Delta x, \Delta ct, \Delta x'$, và $\Delta ct'$ mà hai người quan sát của chúng ta đo được, giả thiết rằng đồ thị của chúng ta là đủ chính xác. Mặc dù các đại lượng này tất nhiên có liên hệ với nhau bởi phép biến đổi Lorentz, nhưng ưu điểm của sơ đồ Minkowski đó là thực tế bạn có thể quan sát thấy về mặt hình học những gì đang diễn ra.

Có những sự giải thích mang ý nghĩa vật lý rất hữu ích của các trục ct' và x'. Nếu bạn đứng tại gốc tọa độ của S' thì trục ct' là trục "ngay tại đây", và trục x' là trục "ngay bây giờ" (đường thẳng của sự đồng thời). Cụ thể là, tất cả các sự kiện trên trục ct' xảy ra tại vị trí của bạn (xét cho cùng, trục ct' là đường vũ trụ của bạn), và tất cả các sự kiện trên trục x' xảy ra một cách đồng thời (tất cả chúng đều có $t' = 0$).

Ví dụ (Sự co độ dài): Đối với cả hai phần của bài toán này, sử dụng sơ đồ Minkowski ở đó các trục trong hệ quy chiếu S là trực giao với nhau.

(a) Vận tốc tương đối của S' và S là v (dọc theo chiều x). Một chiếc gậy mét nằm dọc theo trục x' và ở trạng thái nghỉ trong hệ quy chiếu S'. Nếu S đo độ dài của nó thì kết quả sẽ là bao nhiêu?

(b) Bây giờ để chiếc gậy mét nằm dọc trục x và ở trạng thái nghỉ trong S. Nếu S' đo độ dài của nó thì kết quả là bao nhiêu?



Hình 11.27:

Lời giải:

(a) Không mất tính tổng quát chúng ta có thể giả sử đầu bên trái của chiếc gậy nằm tại gốc tọa độ của S'. Khi đó đường vũ trụ của hai đầu chiếc gậy được chỉ ra trong hình 11.27. Khoảng cách AC bằng 1 mét trong hệ quy chiếu S' bởi vì A và C là hai đầu của chiếc gậy tại cùng một thời điểm trong hệ quy chiếu S'; đây chính là cách đo một độ dài mà chúng ta đã đề cập đến. Và bởi vì một đơn vị trên trục x' có độ dài $\sqrt{1+\beta^2}/\sqrt{1-\beta^2}$, đây là độ dài trên trang giấy của đoạn thẳng AC.

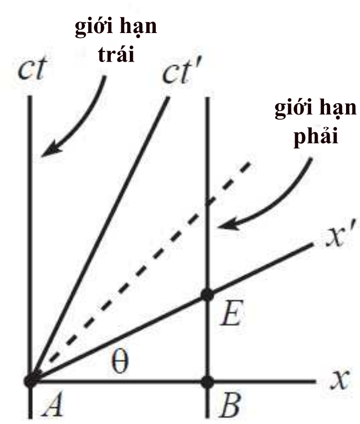
S đo độ dài của chiếc gậy như thế nào? Anh ta mô tả các tọa độ x của hai đầu chiếc gậy tại cùng một thời điểm (tất nhiên là đo bởi anh ấy), và sau đó lấy hiệu. Giả sử thời gian anh ta đo là $t = 0$. Khi đó anh ấy đo hai đầu tại các điểm A và B.[33] Bây giờ đến lúc chúng ta sẽ thực hiện một vài biến

[33]Nếu S đo hai đầu chiếc gậy trong bằng một cách hơi đặc biệt, chẳng hạn như phá hủy chúng bằng cách cho chúng phát nổ, thì S' sẽ quan sát thấy đầu bên phải phát nổ trước (sự kiện tại B có tọa độ t' âm, bởi vì nó nằm dưới trục x'), và một lát sau đó S' sẽ quan sát thấy đầu bên trái phát nổ (sự kiện tại A có $t' = 0$). Do đó S đo các đầu gậy tại các thời gian khác nhau trong hệ quy chiếu S'. Đây là một phần lý do tại sao S' sẽ không ngạc nhiên chút nào khi thấy sự đo đạc của S là nhỏ hơn một mét.

đổi hình học. Chúng ta phải tìm độ dài của đoạn AB trong hình 11.27, với chú ý rằng đoạn AC có độ dài $\sqrt{1+\beta^2}/\sqrt{1-\beta^2}$. Ta đã biết rằng các trục x' và ct' nghiêng một góc θ, với $\tan\theta = \beta$. Do đó, $CD = (AC)\sin\theta$. Và bởi vì $\angle BCD = \theta$, chúng ta có $BD = (CD)\tan\theta = (AC)\sin\theta\tan\theta$. Do đó (sử dụng $\tan\theta = \beta$),

$$\begin{aligned} AB = AD - BD &= (AC)\cos\theta - (AC)\sin\theta\tan\theta \\ &= (AC)\cos\theta(1-\tan^2\theta) \\ &= \sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}}\frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}}(1-\beta^2) \\ &= \sqrt{1-\beta^2}. \end{aligned} \tag{11.49}$$

Do đó, S sẽ đo được chiếc gậy mét có độ dài $\sqrt{1-\beta^2}$, đây là kết quả sự co độ dài tiêu chuẩn.



Hình 11.28:

(b) Bây giờ chiếc gậy ở trạng thái nghỉ trong S, và chúng ta muốn tìm độ dài mà S' đo được. Giả sử đầu bên trái của chiếc gậy nằm tại gốc tọa độ trong S. Khi đó đường vũ trụ của hai đầu gậy được chỉ ra như trong hình 11.28. Khoảng cách AB là 1 mét trong hệ quy chiếu S.

Trong việc đo độ dài của chiếc gậy, S' mô tả các tọa độ x' của các đầu gậy tại cùng một thời điểm (đo bởi anh ta), và sau đó lấy hiệu số. Giả sử thời gian anh ta đo là $t' = 0$. Khi đó anh ta đo hai đầu là tại các điểm A và E. Bây giờ chúng ta sẽ thực hiện các tính toán hình học, trường hợp này khá đơn giản. Độ dài của AE đơn giản chỉ là $1/\cos\theta = \sqrt{1+\beta^2}$. Nhưng bởi vì một đơn vị dọc theo trục x' có độ dài $\sqrt{1+\beta^2}/\sqrt{1-\beta^2}$ trên trang giấy nên chúng ta thấy rằng AE là $\sqrt{1-\beta^2}$ của một đơn vị trong hệ quy chiếu S'. Do đó, S' sẽ đo thấy chiếc gậy mét có độ dài $\sqrt{1-\beta^2}$, đây một lần nữa lại là kết quả sự co độ dài tiêu chuẩn.

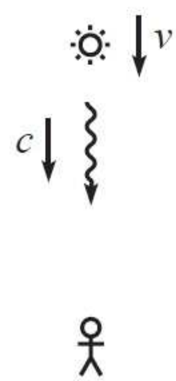
Các phân tích sử dụng trong ví dụ trên cũng có thể dùng để tính toán đối với các khoảng thời gian. Việc thành lập sự giãn nở thời gian bằng cách sử dụng sơ đồ Minkowski là nhiệm vụ của bài tập 11.62. Và việc tính toán kết quả đồng hồ phía sau chạy nhanh hơn Lv/c^2 là nhiệm vụ của bài tập 11.63.

11.8 Ảnh hưởng Doppler

11.8.1 Ảnh hưởng Doppler theo chiều dọc

Xét một nguồn phát chớp sáng tại tần số f' (trong hệ quy chiếu của nó) trong khi đang chuyển động thẳng về phía bạn với vận tốc v, như chỉ ra trong hình 11.29. Hỏi chớp sáng chạm vào mắt bạn với tần số bằng bao nhiêu? Trong các bài toán về ảnh hưởng Doppler này, bạn phải rất cẩn thận để phân biệt thời gian mà tại đó sự kiện xảy ra trong hệ quy chiếu của bạn, và thời gian mà bạn nhìn thấy sự kiện xảy ra. Đây là một trong vài tình huống mà chúng ta đề cập tới trường hợp thứ hai.

Có hai ảnh hưởng trong ảnh hưởng Doppler theo chiều dọc. Ảnh hưởng đầu tiên là sự



Hình 11.29:

giãn nở thời gian tương đối. Sẽ có nhiều thời gian hơn giữa các chớp sáng trong hệ quy chiếu của bạn, điều này có nghĩa là chúng xảy ra ở một tần số nhỏ hơn. Ảnh hưởng thứ hai là ảnh hưởng Doppler thông thường (như là với âm thanh), nảy sinh từ sự chuyển động của nguồn sáng. Các chớp sáng liên tiếp sẽ có khoảng cách nhỏ hơn (hoặc lớn hơn nếu v là âm) để di chuyển tới chạm vào mắt của bạn. Ảnh hưởng này tăng (hoặc giảm nếu v âm) tần số chớp sáng chạm vào mắt bạn.

Bây giờ chúng ta sẽ tính toán định lượng và tìm tần số quan sát được. Thời gian giữa các lần phát chớp sáng trong hệ quy chiếu của nguồn sáng là $\Delta t' = 1/f'$. Thời gian giữa các lần phát chớp sáng trong hệ quy chiếu của bạn khi đó sẽ là $\Delta t = \gamma \Delta t'$, đây là sự giãn nở thời gian thông thường. Do đó photon của một chớp sáng đã di chuyển một khoảng cách (trong hệ quy chiếu của bạn) là $c\Delta t = c\gamma\Delta t'$ vào lúc chớp sáng tiếp theo xảy ra. Suốt khoảng thời gian giữa các lần phát chớp sáng này, nguồn sáng đã di chuyển một khoảng cách $v\Delta t = v\gamma\Delta t'$ hướng về phía bạn trong hệ quy chiếu của bạn. Do đó, tại thời điểm chớp sáng tiếp theo phát ra, photon của chớp sáng tiếp theo này sẽ có khoảng cách (trong hệ quy chiếu của bạn) $c\Delta t - v\Delta t = (c - v)\gamma\Delta t'$ phía sau photon của chớp sáng phát trước. Kết quả này đúng với tất cả các chớp sáng liền nhau. Thời gian, ΔT, giữa các lần các chớp sáng chạm vào mắt bạn bằng $1/c$ nhân với khoảng cách này, do đó ta có

$$\Delta T = \frac{1}{c}(c - v)\gamma\Delta t' = \frac{1 - \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}\Delta t' = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}\left(\frac{1}{f'}\right), \tag{11.50}$$

trong đó $\beta = v/c$. Do đó, tần số mà bạn quan sát thấy sẽ là

$$f = \frac{1}{\Delta T} = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}f'. \tag{11.51}$$

Nếu $\beta > 0$ (tức là nguồn sáng chuyển động hướng về phía bạn) thì $f > f'$. Ảnh hưởng Doppler thông thường sẽ thắng thế ảnh hưởng của sự giãn nở thời gian. Trong trường hợp này chúng ta nói rằng ánh sáng bị "dịch chuyển xanh", bởi vì ánh sáng xanh ở phía có tần số cao trong dải nhìn thấy. Tất nhiên, ánh sáng không có bất cứ điều gì thay đổi đối với màu sắc xanh; từ "xanh" ở đây chúng ta chỉ có ý rằng tần số là tăng. Nếu $\beta < 0$ (tức là nguồn sáng chuyển động ra xa bạn) thì $f < f'$. Cả hai ảnh hưởng đều làm giảm tần số. Trong trường hợp này chúng ta nói rằng ánh sáng bị "dịch chuyển đỏ", bởi vì ánh sáng đỏ ở phía có tần số nhỏ trong dải nhìn thấy.

NHẬN XÉT: Chúng ta cũng có thể rút ra phương trình (11.51) bằng cách sử dụng hệ quy chiếu của nguồn sáng. Trong hệ quy chiếu này, khoảng cách giữa hai chớp sáng liên tiếp nhau là $c\Delta t'$. Và bởi vì bạn đang chuyển động hướng về phía nguồn với vận tốc v nên vận tốc tương đối của bạn và một chớp sáng cho trước sẽ là $c + v$. Do đó thời gian giữa các lần bạn chạm phải chớp sáng là $c\Delta t'/(c + v) = \Delta t'/(1 + \beta)$, đo trong hệ quy chiếu của nguồn sáng. Nhưng đồng hồ của bạn chạy chậm hơn trong hệ quy chiếu này, do đó thời gian chỉ là

$\Delta T = (1/\gamma)\Delta t'/(1+\beta)$ trôi qua trên đồng hồ của bạn, kết quả này bạn có thể chỉ ra rằng nó phù hợp với thời gian trong phương trình (11.50).

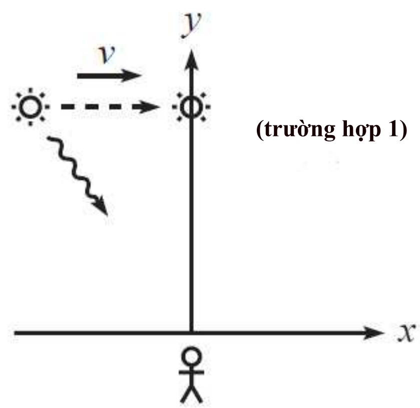
Chúng ta chắc chắn cũng cần thu được kết quả giống như phần trước bằng cách tính toán trong hệ quy chiếu của nguồn sáng, bởi vì nguyên lý tương đối nói rằng kết quả không phụ thuộc vào vật thể nào mà chúng ta xem xét ở trạng thái nghỉ; không có hệ quy chiếu nào được ưu tiên hơn. Đây là sự khác biệt với tình huống ảnh hưởng Doppler không tương đối (liên quan đến một chiếc còi chuyển động về phía bạn), bởi vì tần số phụ thuộc vào bạn hay là nguồn còn tùy vào bạn di chuyển hay nguồn sáng di chuyển. Lý do cho điều này đó là khi chúng ta nói "chuyển động" ở đây, chúng ta có ý rằng là chuyển động đối với hệ quy chiếu nghỉ của không khí, đây là môi trường mà âm thanh di chuyển trong đó. Do đó thực tế chúng ta có một hệ quy chiếu ưu tiên hơn, không giống như trường hợp tương đối (ở đó không có ête). Sử dụng lý luận cho bên trên đối với hai hệ quy chiếu khác nhau nhưng không có thừa số γ, bạn có thể chỉ ra rằng hai kết quả Doppler không tương đối là $f = f'(1-\beta)$ nếu nguồn sáng chuyển động hướng về phía bạn đứng yên, và $f = (1+\beta)f'$ nếu bạn chuyển động hướng về phía nguồn sáng đứng yên. Ở đây β là tỷ số của vận tốc chuyển động của vật thể và vận tốc âm thanh. Bởi vì hai kết quả khác nhau này, ảnh hưởng Doppler tương đối có thể được xem xét như là một ảnh hưởng đơn giản hơn, với ý nghĩa rằng chỉ có một tần số cần nhớ. ♣

11.8.2 Ảnh hưởng Doppler theo chiều ngang

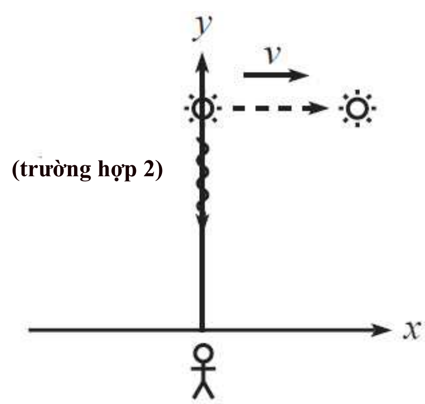
Bây giờ chúng ta hãy xem xét một tình huống hai chiều. Xét một nguồn phát ra các chớp sáng tại tần số f' (trong hệ quy chiếu của nó), trong khi chuyển động ngang qua tầm quan sát của bạn với vận tốc v. Có hai câu hỏi thích hợp mà chúng ta có thể hỏi về tần số bạn quan sát thấy:

- **Trường hợp 1:** Tại thời điểm nguồn sáng ở tại vị trí gần với bạn nhất, với tần số bao nhiêu khi chớp sáng chạm vào mắt bạn?
- **Trường hợp 2:** Khi bạn nhìn thấy nguồn sáng ở tại vị trí gần với bạn nhất, với tần số bao nhiêu khi ánh sáng chạm vào mắt bạn?

Sự khác biệt của hai trường hợp này được chỉ ra như trong hình 11.30 và hình 11.31, trong đó sự di chuyển của nguồn sáng được lấy song song với trục x. Trong trường hợp đầu tiên, các photon mà bạn nhìn thấy phải được phát ra tại một thời gian sớm hơn,



Hình 11.30:



Hình 11.31:

bởi vì nguồn sáng chuyển động suốt thời gian khác không mà ánh sáng tới mắt của bạn. Trong tình huống này, chúng ta phải xử lý các photon chạm vào mắt bạn khi (đo trong hệ quy chiếu của bạn) nguồn sáng đi ngang qua trục y. Do đó, bạn nhìn thấy các photon đến tại một góc đối với trục y.

Trong trường hợp thứ hai, bạn quan sát thấy các photon đến dọc theo trục y (theo định nghĩa của tình huống này). Tại thời điểm bạn quan sát thấy một trong các photon này, nguồn sáng đã ở một vị trí qua trục y. Chúng ta hãy tìm các tần số quan sát thấy trong hai trường hợp này.

Trường hợp 1: Gọi hệ quy chiếu của bạn là S, và gọi hệ quy chiếu của nguồn là S'. Xét tình huống từ quan điểm của S'. S' nhìn thấy bạn chuyển động ngang qua tầm nhìn của anh ta với vận tốc v. Các photon liên quan chạm vào mắt của bạn khi bạn ngang qua trục y' (định nghĩa là trục đi qua nguồn) của hệ quy chiếu S'. S' nhìn thấy bạn chạm vào chớp sáng mỗi $\Delta t' = 1/f'$ giây trong hệ quy chiếu của anh ta. (Điều này là đúng bởi vì khi bạn ở vị trí rất gần trục y', tất cả những điểm trên quỹ đạo của bạn về cơ bản là có cùng khoảng cách tới nguồn. Do đó chúng ta không phải lo lắng về bất cứ ảnh hưởng theo chiều dọc nào cả trong hệ quy chiếu S'.) Điều này có nghĩa là bạn sẽ chạm vào chớp sáng mỗi $\Delta T = \Delta t'/\gamma = 1/(f'\gamma)$ giây trong hệ quy chiếu của bạn, bởi vì S' quan sát thấy đồng hồ của bạn chạy chậm hơn. Dẫn đến, tần số trong hệ quy chiếu của bạn sẽ là

$$f = \frac{1}{\Delta T} = \gamma f' = \frac{f'}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (11.52)$$

Do đó, f lớn hơn f'. Bạn quan sát thấy các chớp sáng với tần số lớn hơn so với S' phát ra chúng.

Trường hợp 2: Một lần nữa, gọi hệ quy chiếu của bạn là S và hệ quy chiếu của nguồn sáng là S'. Xét tình huống từ quan điểm của bạn. Bởi vì sự giãn nở thời gian, một đồng hồ trên nguồn sáng chạy chậm (trong hệ quy chiếu của bạn) bởi một thừa số γ. Do đó bạn chạm vào một chớp sáng mỗi $\Delta T = \gamma \Delta t' = \gamma/f'$ giây trong hệ quy chiếu của bạn. (Chúng ta đã sử dụng thực tế rằng các photon liên quan được phát ra từ các điểm về cơ bản là có khoảng cách bằng nhau từ bạn. Do đó tất cả chúng di chuyển cùng một khoảng cách, và chúng ta không cần phải lo lắng gì về bất cứ ảnh hưởng theo chiều dọc nào cả trong hệ quy chiếu của bạn.) Khi bạn nhìn thấy nguồn sáng ngang qua trục y, thì bạn quan sát thấy tần số

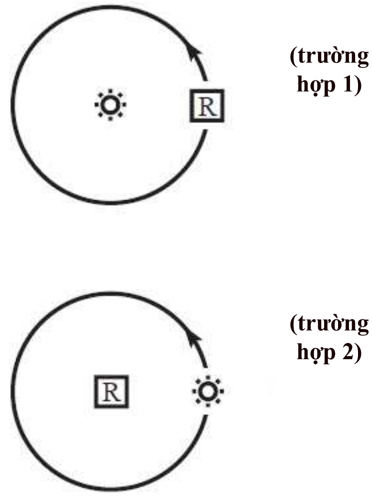
$$f = \frac{1}{\Delta T} = \frac{1}{\gamma \Delta t'} = \frac{f'}{\gamma} = f'\sqrt{1-\beta^2}. \qquad (11.53)$$

Do đó, f nhỏ hơn f'. Bạn quan sát thấy các chớp sáng với tần số nhỏ hơn S' phát ra chúng.

Khi mọi người đề cập tới "ảnh hưởng Doppler theo chiều ngang," họ thỉnh thoảng có ý rằng đó là trường hợp 1, và thỉnh thoảng lại là trường hợp 2. Tiêu đề "Doppler theo chiều ngang" do đó nhiều khi là mơ hồ, do đó bạn nên nhớ cần phải phát biểu một cách chính xác trường hợp nào mà bạn đề cập tới. Một số trường hợp "nằm giữa" hai trường hợp này cũng có thể được xem xét. Nhưng chúng hơi rắc rối.

NHẬN XÉT:

1. Hai tình huống ở trên có thể được mô tả lần lượt bằng cách khác (bạn có thể tự tìm hiểu) theo như sau đây (xem hình 11.32).
   - **Trường hợp 1:** Một máy thu chuyển động với vận tốc v trên một vòng tròn quanh nguồn sáng. Tần số mà máy thu ghi được là bao nhiêu?
   - **Trường hợp 2:** Một nguồn sáng chuyển động với vận tốc v trên một vòng tròn quanh máy thu. Tần số mà máy thu ghi được là bao nhiêu?



Hình 11.32:

Hai mô hình này đưa đến một điều hiển nhiên rằng các kết quả trong phương trình (11.52) và (11.53) nảy sinh ra từ một lý luận đơn giản về sự giãn nở thời gian sử dụng một vật thể quán tính đặt tại tâm của mỗi đường tròn.

Các mô hình này cũng liên quan tới các vật thể có gia tốc. Do đó chúng ta sẽ phải sử dụng thực tế (đã được kiểm tra bằng rất nhiều thí nghiệm) rằng nếu một người quan sát quán tính nhìn vào một chiếc đồng hồ chuyển động, thì chỉ có vận tốc tức thời của đồng hồ là quan trọng trong việc tính toán thừa số giãn nở thời gian. Gia tốc là không có liên quan.[34]

2. Chú ý đến lý luận không chính xác sau đây đối với trường hợp 1, dẫn đến một dạng không chính xác của phương trình (11.52). "S quan sát mọi thứ trong S' chậm hơn bởi một thừa số γ (cụ thể là $\Delta t = \gamma \Delta t'$), theo ảnh hưởng của sự giãn nở thời gian thông thường. Do đó S nhìn thấy các chớp sáng phát ra với nhịp độ chậm hơn. Dẫn đến $f = f'/\gamma$." Lý luận này đặt γ ở vị trí sai. Vậy thì sai lầm ở đâu? Sai lầm nằm ở chỗ khó hiểu về thời gian mà tại đó một sự kiện xảy ra trong hệ quy chiếu S, với thời gian mà S quan sát thấy (bằng mắt của anh ta) sự kiện xảy ra. Các chớp sáng chắc chắn xảy ra tại một tần số nhỏ hơn trong S, nhưng do sự chuyển động của S' đối với S, do đó dẫn đến các chớp sáng chạm vào mắt của S với tốc độ nhanh hơn, bởi vì nguồn sáng chuyển động hướng về phía S trong khi nó phát ra các photon. Bạn có thể mô tả chi tiết từ quan điểm của S.[35]

Một cách khác, sai lầm có thể phát biểu như sau. Kết quả sự giãn nở thời gian,

[34]Tuy nhiên, gia tốc sẽ là rất quan trọng nếu mọi thứ được xem xét dưới quan điểm về vật thể có gia tốc. Nhưng chúng ta sẽ đợi đến Chương 14 về thuyết tương đối tổng quát để thảo luận về vấn đề này.

[35]Đây là một bài tập khá hài hước (bài tập 11.66), nhưng nó sẽ thuyết phục bạn rằng sẽ là rất dễ khi xem xét mọi thứ trong hệ quy chiếu mà ở đó không có các ảnh hưởng theo chiều dọc, giống như chúng ta tiến hành lời giải của chúng ta ở trên đây.

$\Delta t = \gamma \Delta t'$, dựa trên giả thiết rằng $\Delta x'$ giữa hai sự kiện là bằng không. Điều này áp dụng tốt đối với hai chớp sáng từ nguồn. Tuy nhiên, hai sự kiện trong câu hỏi của chúng ta lại là hai hai chớp sáng chạm vào mắt của bạn (hai sự kiện này chuyển động trong S'), do đó $\Delta t = \gamma \Delta t'$ không thể áp dụng. Thay thế vào đó, kết quả $\Delta t' = \gamma$ mới là thích hợp và đúng đắn khi $\Delta x = 0$. (Nhưng chúng ta vẫn cần sử dụng thực tế rằng tất cả các photon liên quan đều di chuyển cùng một khoảng cách. điều này có nghĩa rằng chúng ta không cần lo lắng về bất cứ ảnh hưởng theo chiều dọc nào.) ♣

11.9 Tốc độ

11.9.1 Định nghĩa

Chúng ta định nghĩa *tốc độ* ϕ bởi

$$\tanh \phi \equiv \beta \equiv \frac{v}{c}. \tag{11.54}$$

Một vài đặc tính của các hàm lượng giác hyperbolic được cho trong Phụ lục A. Cụ thể, $\tanh \phi \equiv (e^{\phi} - e^{-\phi})/(e^{\phi} + e^{-\phi})$. Tốc độ định nghĩa trong phương trình (11.54) rất hữu ích trong các bài toán liên quan đến thuyết tương đối bởi vì rất nhiều biểu thức của chúng ta sẽ có dạng cụ thể đẹp đẽ khi sử dụng nó. Ví dụ, xét công thức cộng vận tốc. Giả sử $\beta_1 = \tanh \phi_1$ và $\beta_2 = \tanh \phi_2$. Khi đó nếu chúng ta thay thế β_1 và β_2 vào công thức cộng vận tốc, phương trình (11.31), ta thu được

$$\frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2} = \frac{\tanh \phi_1 + \tanh \phi_2}{1 + \tanh \phi_1 \tanh \phi_2} = \tanh(\phi_1 + \phi_2), \tag{11.55}$$

trong đó chúng ta đã sử dụng công thức cộng đối với $\tanh \phi$, điều này bạn có thể chứng minh bằng cách viết các số hạng dưới dạng hàm số mũ $e^{\pm\phi}$. Do đó, trong khi công thức cộng vận tốc có dạng khá lạ trong phương trình (11.31) thì công thức cộng tốc độ lại có dạng chuẩn.

Phép biến đổi Lorentz cũng có dạng đẹp đẽ khi viết dưới dạng tốc độ. Thừa số quen thuộc γ của chúng ta có thể viết lại như sau

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 \phi}} = \cosh \phi. \tag{11.56}$$

Đồng thời,

$$\gamma\beta \equiv \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\tanh \phi}{\sqrt{1 - \tanh^2 \phi}} = \sinh \phi. \tag{11.57}$$

Do đó, phép biến đổi Lorentz dạng ma trận, phương trình (11.22), trở thành

$$\begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\phi & \sinh\phi \\ \sinh\phi & \cosh\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix}. \tag{11.58}$$

Phép biến đổi này nhìn tương tự như một phép quay trong một mặt phẳng, phép quay này cho bởi công thức

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \tag{11.59}$$

ngoại trừ một điều là bây giờ chúng ta có hàm lượng giác hyperbolic thay vì hàm lượng giác thông thường. Thức tế rằng việc khoảng $s^2 \equiv c^2t^2 - x^2$ không phụ thuộc vào hệ quy chiếu là hiển nhiên từ phương trình (11.58), bởi vì các đại lượng chéo trong hình vuông bỏ qua, và $\cosh^2\phi - \sinh^2\phi = 1$. (So sánh với tính bất biến của $r^2 \equiv x^2 + y^2$ đối với sự quay trong mặt phẳng, ở đó các đại lượng chéo từ phương trình (11.59) cũng bỏ qua giống như vậy, và $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.)

Các đại lượng liên quan đến sơ đồ Minkowski cũng có dạng đẹp đẽ khi chúng ta viết lại chúng dưới dạng tốc độ. Góc giữa các trục S và S' thỏa mãn

$$\tan\theta = \beta = \tanh\phi \tag{11.60}$$

Và kích thước của một đơn vị trên các trục x' và ct' từ phương trình (11.46) là

$$\sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}} = \sqrt{\frac{1+\tanh^2\phi}{1-\tanh^2\phi}} = \sqrt{\cosh^2\phi + \sinh^2\phi} = \sqrt{\cosh 2\phi}. \tag{11.61}$$

Đối với trường hợp ϕ lớn, kết quả này xấp xỉ bằng $e^\phi/\sqrt{2}$.

11.9.2 Ý nghĩa vật lý

Thực tế rằng việc đưa vào đại lượng tốc độ đã làm cho rất nhiều công thức của chúng ta nhìn có vẻ đẹp đẽ hơn, và đây là lý do đủ để chúng ta xem xét nó. Nhưng thêm vào đó, cũng có một sự giải thích mang đầy ý nghĩa vật lý. Xét một mô hình sau đây. Một con tàu vũ trụ ban đầu ở trạng thái nghỉ trong hệ quy chiếu quán tính. Tại một thời điểm cho trước, nó bắt đầu tăng tốc. Gọi a là *gia tốc riêng*, gia tốc này được định nghĩa như sau. Giả sử t là tọa độ thời gian trong hệ quy chiếu của con tàu.[36] Nếu gia tốc riêng là a

[36]Tất nhiên là hệ quy chiếu này thay đổi theo thời gian, bởi vì con tàu đang tăng tốc. Thời gian t chỉ đơn giản là thời gian riêng của con tàu. Thông thường, chúng ta sẽ định nghĩa thời gian này bởi t', nhưng chúng ta không muốn viết dấu phẩy lặp đi lặp lại trong các tính toán sau.

thì tại thời điểm $t + dt$, con tàu chuyển động với vận tốc adt đối với hệ quy chiếu mà nó ở trong đó tại thời gian t. Một định nghĩa tương đương đó là nhà du hành cảm thấy một lực ma tác dụng vào thân thể của anh ta bởi con tàu. Nếu anh ta đứng trên một chiếc cân thì chiếc cân đó chỉ độ lớn $F = ma$.

Vận tốc tương đối của con tàu vũ trụ và hệ quy chiếu quán tính (của con tàu) tại thời điểm t bằng bao nhiêu? Chúng ta có thể trả lời câu hỏi này bằng cách xem xét hai thời điểm gần nhau và sử dụng công thức cộng vận tốc (11.31). Từ định nghĩa của a, phương trình (11.31) đưa đến, với $v_1 \equiv adt$ và $v_2 \equiv v(t)$,

$$v(t+dt) = \frac{v(t) + adt}{1 + v(t)adt/c^2}. \tag{11.62}$$

Khai triển biểu thức này đến bậc nhất đối với dt thu được[37]

$$\frac{dv}{dt} = a\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \quad \Longrightarrow \quad \int_0^v \frac{dv}{1 - v^2/c^2} = \int_0^t adt. \tag{11.63}$$

Tách biến và sau đó tích phân, sử dụng $\int dz/(1-z^2) = \tanh^{-1} z$,[38] và giả thiết rằng a là hằng số, dẫn đến

$$v(t) = c\tanh(at/c). \tag{11.64}$$

Khi a nhỏ hoặc t nhỏ (một cách chặt chẽ, khi $at/c \ll 1$), ta thu được $v(t) \approx at$, như chúng ta mong muốn (bởi vì $\tanh z \approx z$ khi z nhỏ, điều này có được từ dạng hàm số mũ của tanh). Và khi $at/c \gg 1$, ta thu được $v(t) \approx c$, như ta mong muốn. Nếu a là hàm của thời gian, $a(t)$, thì chúng ta không thể đưa a ra ngoài dấu tích phân trong phương trình (11.63), do đó chúng ta sẽ kết thúc bởi công thức tổng quát,

$$v(t) = c\tanh\left(\frac{1}{c}\int_0^t a(t)dt\right). \tag{11.65}$$

Đại lượng tốc độ ϕ như định nghĩa trong phương trình (11.54) do đó sẽ được cho bởi

$$\phi(t) \equiv \frac{1}{c}\int_0^t a(t)dt. \tag{11.66}$$

Chú ý rằng trong khi v có c là giá trị giới hạn, thì ϕ có thể lớn bất kỳ. Nhìn vào phương trình (11.65) chúng ta thấy rằng đại lượng ϕ liên kết với một giá trị v cho trước là $1/mc$ nhân với tích phân theo thời gian của lực (cảm nhận bởi nhà du hành), lực này cần để

[37]Một cách tương đương, hãy lấy đạo hàm của $(v+w)/(1+vw/c^2)$ đối với w, và sau đó cho $w = 0$.

[38]Cụ thể, bạn có thể sử dụng $1/(1-z^2) = 1/(2(1-z)) + 1/(2(1+z))$, và sau đó tích phân để thu được kết quả là các hàm logarit, sau đó sẽ dẫn đến hàm tanh. Bạn cũng có thể sử dụng kết quả của bài tập 11.17 để tìm $v(t)$. Xem nhận xét trong lời giải của bài tập đó (tất nhiên là sau khi cố gắng giải nó!).

làm cho nhà du hành có vận tốc v. Bằng cách tác dụng lực trong khoảng thời gian dài bất kỳ, ta có thể làm cho ϕ có độ lớn bất kỳ.

Tích phân $\int a(t)dt$ có thể được mô tả một cách nhầm lẫn, là vận tốc không chính xác. Cụ thể là nó là vận tốc mà nhà du hành nghĩ rằng anh ta có, nếu anh ta nhắm mắt lại và không biết gì về thuyết tương đối. Và quả thực, suy nghĩ của anh ta về cơ bản là đúng khi các vận tốc là nhỏ. Đại lượng $\int a(t)dt = \int F(t)dt/m$ này nhìn giống như một thứ gì đó hợp lý về mặt vật lý, do đó nó dường như sẽ có ý nghĩa nào đó. Và quả thực, mặc dù nó không bằng v, nhưng tất cả những gì bạn phải làm để thu được v là lấy tanh và thêm vào hằng số c.

Thực tế rằng cộng các tốc độ thông qua công thức cộng đơn giản khi sử dụng công thức cộng vận tốc như chúng ta đã thấy trong phương trình (11.55), là khá hiển nhiên từ phương trình (11.65). Thực sự không có gì đặc biệt xảy ra ở đây, thực tế chỉ là

$$\int_{t_0}^{t_2} a(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} a(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} a(t)dt. \tag{11.67}$$

Để rõ ràng, giả sử có một lực tác dụng từ t_0 đến t_1 làm cho khối lượng có vận tốc $\beta_1 = \tanh\phi_1 = \tanh\left(\int_{t_0}^{t_1} adt\right)$ (bỏ qua c), và sau đó thêm một lực tác dụng từ t_1 đến t_2 làm cho khối lượng thêm vận tốc $\beta_2 = \tanh\phi_2 = \tanh\left(\int_{t_1}^{t_2} adt\right)$, đối với hệ quy chiếu tại t_1. Khi đó vận tốc tổng có thể được xem xét theo hai cách: (1) nó là kết quả của công thức cộng vận tốc tương đối $\beta_1 = \tanh\phi_1$ và $\beta_2 = \tanh\phi_2$, và (2) nó là kết quả của lực tác dụng từ t_0 đến t_2 (tất nhiên là bạn sẽ thu được vận tốc cuối cùng như nhau, dù bạn có hay không quan tâm và ghi lại vận tốc dọc theo quỹ đạo tại t_1), cụ thể là $\beta = \tanh\left(\int_{t_0}^{t_2} adt\right) = \tanh(\phi_1 + \phi_2)$, ở đó dấu bằng thứ hai đến từ phát biểu, phương trình (11.67), rằng các tích phân đơn giản là cộng lại. Do đó, cộng tương đối $\tanh\phi_1$ và $\tanh\phi_2$ dẫn đến $\tanh(\phi_1 + \phi_2)$, như chúng ta muốn chỉ ra. Chú ý rằng lý luận này không phụ thuộc vào thực tế rằng hàm số ở đây là một hàm tanh. Nó có thể là một hàm bất kỳ. Nếu chúng ta sống ở một thế giới mà tại đó ví dụ vận tốc được cho bởi $\beta = \tan\left(\int adt\right)$, thì các tốc độ vẫn được cộng bằng phép cộng đơn giản. Chỉ là trong thế giới của chúng ta, ta có hàm tanh. (Chúng ta sẽ thấy trong phần tiếp theo rằng một thế giới "tan" dù sao cũng có vấn đề.)

11.10 Thuyết tương đối không có c

Trong Mục 11.2, chúng ta đã giới thiệu hai tiên đề của thuyết tương đối hẹp, cụ thể là tiên đề về vận tốc ánh sáng và tiên đề tương đối. Phụ lục I đưa ra sự thành lập phép biến đổi Lorentz trực tiếp từ hai tiên đề này và không sử dụng ba ảnh hưởng cơ bản mà chúng ta đã dựa vào để thành lập phép biến đổi Lorentz trong Mục 11.4.1. Sẽ là thú vị khi xem điều gì sẽ xảy ra nếu chúng ta nới lỏng các tiên đề này. Sẽ là rất khó tưởng tượng một vũ trụ (trống) hợp lý mà ở đó vận tốc của ánh sáng phụ thuộc vào hệ quy chiếu. Ví dụ ánh sáng sẽ được đối xử giống như một quả bóng. Do đó bây giờ hãy bỏ đi tiên đề về vận tốc ánh sáng và hãy xem chúng ta có thể nói gì về phép biến đổi tọa độ giữa các hệ quy chiếu mà chỉ sử dụng tiên đề tương đối. Bạn có thể tìm hiểu chi tiết hơn về vấn đề này trong Lee và Kalotas (1975) và các hệ quy chiếu trong đó.

Trong Phụ lục I, dạng của phép biến đổi trước khi có tiên đề về vận tốc ánh sáng được cho trong phương trình (I.8) như sau

$$\begin{aligned} x &= A_v(x' + vt'), \\ t &= A_v\left(t' + \frac{1}{v}\left(1 - \frac{1}{A_v^2}\right)x'\right). \end{aligned} \tag{11.68}$$

Chúng ta sẽ đặt chỉ số dưới vào A trong phần này để nhắc nhở chúng ta về sự phụ thuộc vào vận tốc v. Liệu chúng ta có thể nói bất cứ điều gì về A_v mà không cần tiên đề về vận tốc ánh sáng hay không? Quả thực chúng ta có thể. Định nghĩa V_v bởi

$$\frac{1}{V_v^2} \equiv \frac{1}{v^2}\left(1 - \frac{1}{A_v^2}\right) \quad \Longrightarrow \quad A_v = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/V_v^2}}. \tag{11.69}$$

Chúng ta lấy căn bậc hai dương bởi vì khi $v = 0$ thì chúng ta sẽ có $x = x'$ và $t = t'$. Phương trình (11.68) bây giờ trở thành

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/V_v^2}}(x' + vt'), \\ t &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/V_v^2}}\left(\frac{v}{V_v^2}x' + t'\right). \end{aligned} \tag{11.70}$$

Tất cả những gì chúng ta làm đến giờ là thay đổi các biến. Nhưng bây giờ chúng ta có khẳng định sau đây.

Khẳng định 11.1. *V_v^2 là độc lập đối với v.*

Chứng minh. Như đã nói trong nhận xét cuối cùng ở Mục 11.4.1, chúng ta biết rằng hai áp dụng liên tiếp của phép biến đổi trong phương trình (11.70) phải thu lại được một phép biến đổi có dạng tương tự như vậy. Xét một phép biến đổi đặc trưng bởi vận tốc v_1 và một phép biến đổi khác đặc trưng bởi vận tốc v_2. Để đơn giản, chúng ta định nghĩa

$$\begin{aligned} &V_1 \equiv V_{v_1}, \quad V_2 \equiv V_{v_2}, \\ &\gamma_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{1-v_1^2/V_1^2}}, \quad \gamma_2 \equiv \frac{1}{\sqrt{1-v_2^2/V_2^2}}. \end{aligned} \tag{11.71}$$

Để tính toán phép biến đổi hợp này, cách dễ nhất là sử dụng ký hiệu ma trận. Nhìn vào phương trình (11.70), chúng ta thấy rằng phép biến đổi hợp cho bởi ma trận

$$\begin{pmatrix} \gamma_2 & \gamma_2 v_2 \\ \gamma_2 \frac{v_2}{V_2^2} & \gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_1 v_1 \\ \gamma_1 \frac{v_1}{V_1^2} & \gamma_1 \end{pmatrix} = \gamma_1\gamma_2 \begin{pmatrix} 1+\frac{v_1 v_2}{V_1^2} & v_2+v_2 \\ \frac{v_1}{V_1^2}+\frac{v_2}{V_2^2} & 1+\frac{v_1 v_2}{V_2^2} \end{pmatrix}. \tag{11.72}$$

Phép biến đổi hợp phải vẫn có dạng như phương trình (11.70). Nhưng điều này có nghĩa rằng phần tử phía trên bên trái và phần tử phía dưới bên phải của ma trận hợp phải bằng nhau. Do đó $V_1^2 = V_2^2$. Bởi vì điều này đúng với v_1 và v_2 bất kỳ, nên chúng ta thấy rằng V_v^2 phải là hằng số. Dẫn đến nó độc lập với v. □

Ký hiệu giá trị không đổi của V_v^2 là V^2. Khi đó phép biến đổi tọa độ trong phương trình (11.70) trở thành

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2/V^2}}, \\ t &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2/V^2}}\left(t' + \frac{v}{V^2}x'\right). \end{aligned} \tag{11.73}$$

Chúng ta đã thu được kết quả này mà chỉ sử dụng tiên đề tương đối. Phép biến đổi này có dạng giống như phép biến đổi Lorentz trong phương trình (11.17).
Chỉ có một thông tin thêm trong phương trình (11.17) đó là V bằng vận tốc ánh sáng c. Cũng đáng chú ý rằng chúng ta có thể chứng minh bằng cách chỉ sử dụng tiên đề tương đối.
Chúng ta có thể nói thêm một vài điều nữa. Có bốn khả năng cơ bản đối với giá trị của V^2. Tuy nhiên, hai trong bốn khả năng này không có ý nghĩa vật lý.

- $V^2 = \infty$: Trường hợp này dẫn đến phép biến đổi Galileo, $x = x' + vt'$ và $t = t'$.
- $0 < V^2 < \infty$: Trường hợp này dẫn đến phép biến đổi dạng giống như Lorentz. V là vận tốc giới hạn của vật thể. Các thí nghiệm chỉ ra rằng trường hợp này là trường hợp tương ứng với thế giới mà chúng ta đang sống.

- $V^2 = 0$: Trường hợp này không có ý nghĩa vật lý, bởi vì bất kỳ giá trị khác không nào của v cũng làm thừa số γ là ảo (và vô cùng). Không có vật thể nào có thể chuyển động được như vậy.

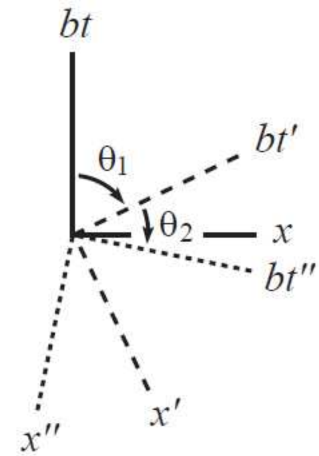
- $V^2 < 0$: Tất nhiên trường hợp này cũng không có ý nghĩa vật lý. Bạn có thể băn khoăn rằng bình phương của V nhỏ hơn không, nhưng điều này không có vấn đề gì bởi vì V xuất hiện trong phép biến đổi (11.73) chỉ dưới dạng bình phương. Sẽ không cần V là vận tốc thực tế của bất kỳ vật thể nào. Vấn đề rắc rối ở đây đó là tính tự nhiên của phương trình (11.73) chỉ ra khả năng đảo ngược thời gian. Điều này dẫn đến sự vi phạm quan hệ nguyên nhân hệ quả và tất cả những vấn đề khác liên quan đến đảo ngược thời gian. Do đó chúng ta bỏ qua trường hợp này. Để cụ thể hơn, định nghĩa $b^2 \equiv -V^2$, trong đó b là một số dương. Khi đó phương trình (11.73) có thể viết lại dưới dạng,

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\theta + (bt')\sin\theta, \\ bt &= -x'\sin\theta + (bt')\cos\theta, \end{aligned} \tag{11.74}$$

ở đó $\tan\theta \equiv v/b$. Đồng thời $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$, bởi vì dấu dương của các hệ số x' và t' trong phương trình (11.74) chỉ ra rằng đại lượng $\cos\theta$ trong phương trình (11.74) thỏa mãn $\cos\theta \geq 0$. Chúng ta có hàm lượng giác thông thường trong phương trình (11.74) thay vì hàm lượng giác hyperbolic như phép biến đổi Lorentz trong phương trình (11.58). Phép biến đổi này đơn giản chỉ là sự quay một trục qua góc θ trong mặt phẳng. Trục S quay ngược chiều kim đồng hồ (bạn có thể kiểm tra lại) một góc θ đối với trục S'. Một cách tương đương, trục S' quay cùng chiều kim đồng hồ một góc θ đối với trục S.

Phương trình (11.74) thỏa mãn đòi hỏi rằng hợp của hai phép biến đổi cũng là một phép biến đổi có cùng dạng. Quay một góc θ_1, sau đó quay một góc θ_2 sẽ thu được một góc quay $\theta_1 + \theta_2$. Tuy nhiên, nếu θ_1 và θ_2 dương, và nếu phép quay tổng có góc quay lớn hơn $90°$ thì chúng ta sẽ có một vấn đề. Hàm tan của một góc như vậy sẽ là một số âm. Do đó, $\tan\theta = v/b$ chỉ ra rằng v là âm.

Tình huống này được chỉ ra trong hình 11.33. Hệ quy chiếu S'' chuyển động với vận tốc $v_2 > 0$ đối với hệ quy chiếu S', hệ quy chiếu S' lại chuyển động với vận tốc $v_1 > 0$ đối với hệ quy chiếu S. Từ hình vẽ chúng ta thấy rằng một người nào đó đứng ở trạng thái nghỉ trong hệ quy chiếu S'' (tức là một người nào đó mà đường vũ trụ là trục bt'') sẽ có một vài vấn đề trong hệ quy chiếu S. Thứ nhất, trục bt'' có độ nghiêng âm trong hệ quy chiếu S, điều này có nghĩa là khi t tăng thì x giảm. Dẫn đến người đó chuyển động với vận tốc âm đối với S. Cộng hai vận tốc dương và thu được một vận tốc âm hiển nhiên là một điều vô lý. Nhưng thậm chí còn tồi tệ hơn, một người nào đó ở trạng thái nghỉ trong



Hình 11.33:

hệ quy chiếu S'' chuyển động theo chiều dương dọc trục bt'', điều này có nghĩa rằng anh ta đang chuyển động ngược thời gian trong hệ quy chiếu S. Tức là anh ta sẽ chết trước khi anh ta được sinh ra. Điều này quả thực quá vô lý.

Một phương pháp tương đương về trường hợp này được đưa ra trong Lee và Kalotas (1977), tuy nhiên phương pháp đó không đề cập cụ thể đến sự vi phạm quan hệ nguyên nhân hệ quả, để dẫn đến chú ý rằng phép biến đổi trong phương trình (11.74) không tạo thành một nhóm đóng. Nói một cách khác, việc áp dụng liên tiếp phép biến đổi có thể cuối cùng lại thu được một phép biến đổi không có dạng giống như phương trình (11.74), nguyên nhân là do sự hạn chế $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$. (Trong khi đó phép quay trong một mặt phẳng tạo thành một nhóm đóng, bởi vì không có sự hạn chế đối với θ.) Lý luận này tương đương với lý luận về sự nghịch đảo thời gian ở trên, bởi vì $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ tương đương với $\cos\theta \geq 0$, điều này tương đương với phát biểu rằng các hệ số của t và t' trong phương trình (11.74) có cùng một dấu.

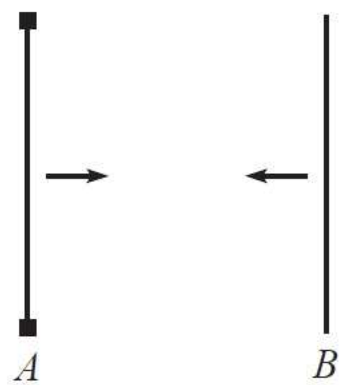
Chú ý rằng tất cả các trường hợp hữu hạn $0 < V^2 < \infty$ về bản chất là giống nhau. Bất kỳ sự khác nhau nào trong giá trị số cụ thể của V có thể điều chỉnh bằng cách định nghĩa lại độ lớn đơn vị đối với x và t. Cho một giá trị V hữu hạn, nó phải là một cái gì đó cụ thể, do đó sẽ không có ý nghĩa khi nghĩ là có điều gì đó quá quan trọng đối với giá trị số của nó. Dẫn đến quyết định chỉ được đưa ra khi xây dựng cấu trúc không thời gian của một vũ trụ (rỗng). Bạn chỉ phải nói V là hữu hạn hay vô hạn, cụ thể vũ trụ là Lorentz hay là Galileo. Một cách tương đương, tất cả những gì mà bạn phải nói đó là có hay không có giới hạn trên của vận tốc vật thể. Nếu có thì bạn đơn giản có thể thừa nhận sự tồn tại của một vật thể nào đó chuyển động với vận tốc giới hạn này. Nói một cách khác, để tạo thành một vũ trụ của bạn, bạn đơn giản chỉ phải nói, "Hãy có ánh sáng."

11.11 Bài tập

Mục 11.3: Các ảnh hưởng cơ bản

11.1. Không có sự co độ dài theo chiều ngang *

Hai gậy mét A và B chuyển động qua nhau như chỉ ra trong hình 11.34. Gậy A được sơn hai đầu. Sử dụng mô hình này để chỉ ra rằng trong hệ quy chiếu của một chiếc gậy thì chiếc gậy còn lại vẫn có độ dài là một mét.



Hình 11.34:

11.2. Giải thích sự giãn nở thời gian **

Hai hành tinh A và B ở trạng thái nghỉ đối với nhau, cách nhau một khoảng L, và có các đồng hồ đồng bộ trên mỗi hành tinh. Một con tàu vũ trụ bay với vận tốc v qua hành tinh A hướng về hành tinh B và đồng bộ hóa đồng hồ của nó với đồng hồ của A ngay khi nó bay qua A (các đồng hồ đều đặt tại không). Con tàu cuối cùng bay qua hành tinh B và so sánh đồng hồ của nó với đồng hồ của B. Chúng ta biết từ việc tính toán trong hệ quy chiếu của các hành tinh rằng khi con tàu tới B, đồng hồ của B chỉ L/v. Và đồng hồ của con tàu vũ trụ chỉ $L/\gamma v$, bởi vì nó chạy chậm bởi một thừa số γ khi quan sát trong hệ quy chiếu của các hành tinh.

Một người nào đó trên con tàu vũ trụ sẽ giải thích một cách định lượng với bạn như thế nào về việc tại sao đồng hồ của B chỉ L/v (giá trị này lớn hơn giá trị $L/\gamma v$ của riêng nó), giả thiết đã biết rằng con tàu quan sát thấy đồng hồ của B chạy chậm?

11.3. Giải thích sự co độ dài **

Hai quả bom nằm trên một sân ga với khoảng cách giữa chúng là L. Khi một con tàu chuyển động ngang qua với vận tốc v, hai quả bom phát nổ đồng thời (trong hệ quy chiếu của sân ga) và để lại dấu vết trên con tàu. Bởi vì sự co độ dài của con tàu, chúng ta biết rằng các vết trên con tàu sẽ có khoảng cách γL khi quan sát trong hệ quy chiếu của con tàu, bởi vì khoảng cách này là sự co độ dài đối với khoảng cách cho trước L trong hệ quy chiếu sân ga.

Một người nào đó đứng trên con tàu sẽ giải thích một cách định lượng như thế nào về việc tại sao các vết có khoảng cách γL, giả thiết biết rằng các quả bom chỉ có khoảng cách L/γ trong hệ quy chiếu con tàu?

11.4. Một chiếc gậy chuyển động **

Một chiếc gậy có độ dài L chuyển động qua bạn với vận tốc v. Có một khoảng thời gian giữa thời điểm đầu trước của chiếc gậy trùng với bạn và thời điểm đầu sau trùng với bạn. Khoảng thời gian này là bao nhiêu trong

(a) hệ quy chiếu của bạn? (Tính toán khoảng thời gian này bằng làm việc trong hệ quy chiếu của bạn.)

(b) hệ quy chiếu của bạn? (Làm việc trong hệ quy chiếu của chiếc gậy.)

(c) hệ quy chiếu của chiếc gậy? (Làm việc trong hệ quy chiếu của bạn. Đây là phần đòi hỏi phải khéo léo.)

(d) hệ quy chiếu của chiếc gậy? (Làm việc trong hệ quy chiếu của chiếc gậy.)

11.5. Hình vuông quay tròn **

Một hình vuông với cạnh L bay qua bạn với vận tốc v, theo chiều song song với hai cạnh của nó. Bạn đứng trên mặt phẳng của hình vuông. Khi bạn nhìn thấy hình vuông tại điểm gần nhất của nó đối với bạn, chỉ ra rằng đối với bạn hình vuông giống như bị quay tròn thay vì co lại. (Giả thiết rằng L là nhỏ so với khoảng cách giữa bạn và hình vuông.)

11.6. Con tàu trong một chiếc hầm **

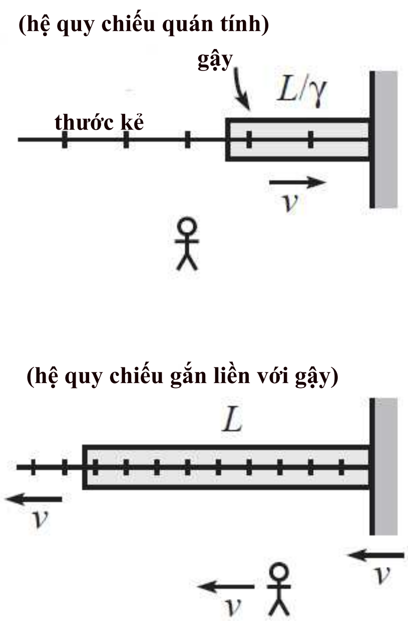
Một con tàu và một chiếc hầm đều có độ dài riêng L. Con tàu chuyển động hướng về phía hầm với vận tốc v. Một quả bom đặt tại phía trước con tàu. Quả bom được thiết kế sao cho nó nổ khi phía trước của con tàu đi qua đầu phía xa của hầm. Một cảm biến được đặt tại phía sau con tàu. Khi phía sau con tàu ngang qua đầu phía gần của hầm, cảm biến sẽ tạo tín hiệu tới bom để tháo dỡ không nổ nữa. Như vậy cuối cùng quả bom có nổ hay không?

11.7. Quan sát phía sau chiếc gậy **

Một thước kẻ được đặt vuông góc với tường, và bạn đứng ở trạng thái nghỉ đối với thước và tường. Một chiếc gậy có chiều dài L bay qua với vận tốc v. Nó di chuyển phía trước thước kẻ, sao cho nó che khuất phần thước kẻ từ quan sát của bạn. Khi chiếc gậy chạm vào tường thì nó dừng lại. Lý luận nào sau đây là đúng (và chỗ nào là sai trong lý luận không chính xác)?

Trong hệ quy chiếu của bạn, chiếc gậy ngắn hơn L. Do đó, ngay trước khi nó chạm vào tường, bạn có thể quan sát thấy một điểm đánh dấu trên thước kẻ mà điểm đó gần tường hơn đơn vị L (xem hình 11.35).

Nhưng trong hệ quy chiếu của chiếc gậy, các điểm đánh dấu trên thước kẻ gần nhau hơn. Do đó, khi tường chạm vào gậy, điểm đánh dấu gần nhất đối với tường mà bạn có thể nhìn thấy trên thước kẻ là lớn hơn đơn vị L (xem hình 11.35).



Hình 11.35:

11.8. Máy cắt bánh quy **

Bột bánh quy (tất nhiên, có lớp mỏng sôcôla) nằm trên một băng tải chuyển động với vận tốc v. Một con dấu tròn đập dẹt bánh quy khi bột bánh nằm dưới nó. Khi bạn mua những chiếc bánh này ở cửa hàng, chúng sẽ có hình dạng như thế nào? Cụ thể là chúng bị ép theo chiều của băng tải, bị trải ra theo chiều đó, hay là hình tròn?

11.9. Ngắn hơn **

Hai quả bóng chuyển động với vận tốc v theo một đường thẳng hướng về hai người đứng trên đường thẳng đó. Khoảng cách riêng giữa hai quả bóng là γL, và khoảng cách riêng giữa hai người là L. Bởi vì sự co độ dài, hai người đo khoảng cách giữa hai quả bóng sẽ là L, do đó hai quả bóng ngang qua hai người đồng thời (đo bởi hai người) như chỉ ra trong hình 11.36. Giả thiết rằng các đồng hồ của hai người đều chỉ không tại thời gian này. Nếu hai người bắt hai quả bóng thì khoảng cách riêng bây giờ giữa hai quả bóng trở thành L, kết quả này ngắn hơn khoảng cách riêng ban đầu γL. Nhiệm vụ của bạn: Bằng việc tính toán trong hệ quy chiếu mà ở đó các quả bóng ở trạng thái nghỉ ban đầu, hãy giải thích khoảng cách riêng giữa các quả bóng giảm từ γL đến L như thế nào. Thực hiện việc này theo cách sau đây.

(a) Vẽ hình ảnh lúc đầu và lúc cuối đối với quá trình này. Biểu thị chỉ số trên cả hai đồng hồ trong hai hình ảnh đó, và đánh dấu tất cả các độ dài liên quan.

(b) Sử dụng các khoảng cách đã đánh dấu trong các hình ảnh của bạn, hai người đã di chuyển bao xa? Sử dụng các thời gian đánh dấu trong các hình ảnh của bạn, hai người di chuyển bao xa? Chỉ ra rằng hai phương pháp này đưa ra cùng kết quả.

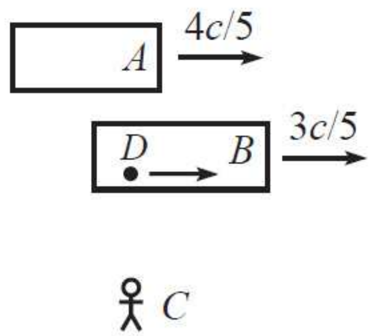
(c) Giải thích bằng lời rằng khoảng cách riêng giữa hai quả bóng giảm từ γL đến L như thế nào.

Hình 11.36:

Mục 11.4: Phép biến đổi Lorentz

11.10. Một tập hợp các phép biến đổi Lorentz *

Kiểm tra lại rằng các giá trị của Δx và Δt trong bảng ở ví dụ "Các con tàu chuyển động" trong Mục 11.6 thỏa mãn phép biến đổi Lorentz giữa sáu cặp hệ quy chiếu, cụ thể là AB, AC, AD, BC, BD và CD (xem hình 11.37).

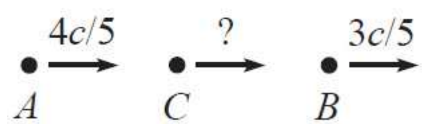


Hình 11.37:

Mục 11.5: Cộng vận tốc

11.11. Các vận tốc bằng nhau *

A và B chuyển động với vận tốc $4c/5$ và $3c/5$ đối với mặt đất, như chỉ ra trong hình 11.38. C sẽ phải di chuyển nhanh như thế nào sao cho người ấy nhìn thấy A và B tiến gần tới cô với cùng vận tốc? Vận tốc này là bao nhiêu?



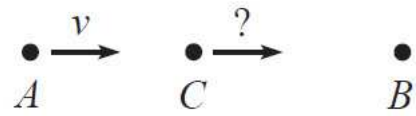
Hình 11.38:

11.12. Thêm một trường hợp các vận tốc bằng nhau **

A chuyển động với vận tốc v đối với mặt đất, và B ở trạng thái nghỉ, như chỉ ra trong hình 11.39. C sẽ phải chuyển động nhanh như thế nào để người ấy nhìn thấy A và B tiến gần tới cô với cùng vận tốc? Trong hệ quy chiếu mặt đất (hệ quy chiếu của B), tỷ số các khoảng cách CB và AC bằng bao nhiêu (giả thiết rằng A và C tới B tại cùng thời điểm)? Câu trả lời cho điều này hết sức đẹp đẽ và rõ ràng. Bạn có thể nghĩ ra một giải thích trực quan đơn giản cho kết quả này được không?

11.13. Các vận tốc ngang bằng nhau *

Trong hệ quy chiếu quán tính, một vật thể chuyển động với vận tốc (u_x, u_y), và bạn

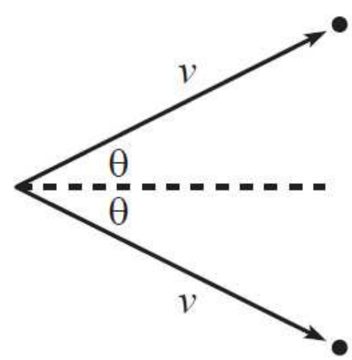


Hình 11.39:

chuyển động với vận tốc v theo chiều x. Vận tốc v sẽ phải bằng bao nhiêu để bạn cũng nhìn thấy vật thể chuyển động chuyển động với vận tốc u_y theo chiều y của bạn? Tất nhiên một nghiệm là $v = 0$. Tìm nghiệm khác.

11.14. Vận tốc tương đối *

Trong hệ quy chiếu quán tính, hai phần tử chuyển động với vận tốc v dọc theo hai đường như trong hình 11.40. Góc giữa hai đường là 2θ. Vận tốc của một phần tử theo quan sát của phần tử kia bằng bao nhiêu? (*Chú ý*: Bài toán này sẽ được đưa ra lại trong Chương 13, ở đó nó có thể được giải bằng cách đơn giản hơn rất nhiều với việc sử dụng vector 4 chiều.)



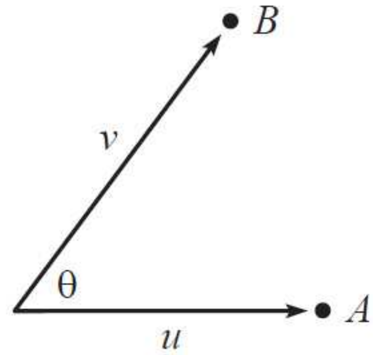
Hình 11.40:

11.15. Một trường hợp vận tốc tương đối khác **

Trong hệ quy chiếu quán tính, các phần tử A và B chuyển động với vận tốc u và v theo các đường như trong hình 11.41. Góc giữa hai đường này là θ. Vận tốc của một phần tử theo quan sát của phần tử kia bằng bao nhiêu? (*Chú ý*: Bài toán này sẽ được đưa ra lại trong Chương 13, ở đó nó có thể được giải bằng cách đơn giản hơn rất nhiều với việc sử dụng vector 4 chiều.)

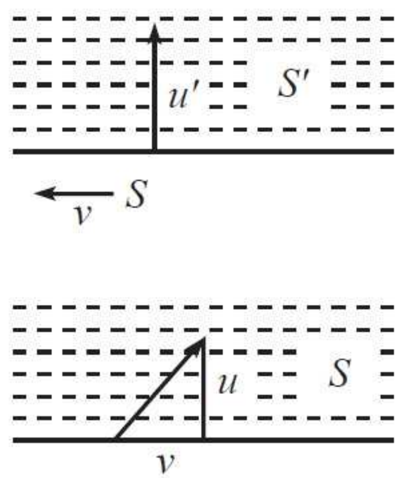
11.16. Cộng vận tốc ngang **

Đối với trường hợp đặc biệt khi $u'_x = 0$, công thức cộng vận tốc ngang, phương trình (11.38),



Hình 11.41:

trở thành $u_y = u'_y/\gamma$. Hãy rút ra công thức này bằng cách sau đây: Trong hệ quy chiếu S', một phần tử chuyển động với vận tốc $(0, u')$ như trong hình ảnh đầu tiên của hình 11.42. Hệ quy chiếu S chuyển động sang bên trái với vận tốc v, do đó tình huống trong hệ quy chiếu S sẽ giống như những gì chỉ ra trong hình ảnh thứ hai của hình 11.42, với vận tốc theo chiều y bây giờ là u. Xét một chuỗi các đường chấm chấm cách đều nhau như trong hình vẽ. Tỷ số thời gian giữa các lần qua đường chấm chấm trong hệ quy chiếu S và S' là $T_S/T_{S'} = u'/u$. Rút ra biểu thức khác của tỷ số này bằng cách sử dụng lý luận về sự giãn nở thời gian, và sau đó cho hai biểu thức này bằng nhau để giải ra u đối với u' và v.

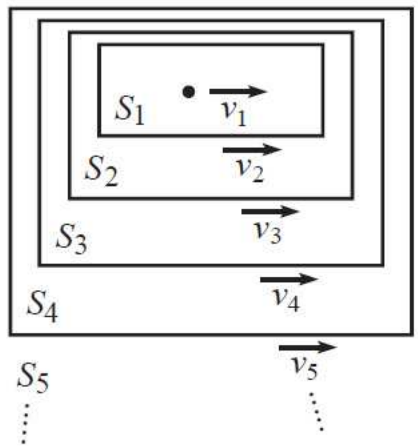


Hình 11.42:

11.17. Cộng nhiều vận tốc **

Một vật thể chuyển động với vận tốc $v_1/c \equiv \beta_1$ đối với S_1, S_1 chuyển động với vận tốc β_2 đối với S_2, S_2 lại chuyển động với vận tốc β_3 đối với S_3, và cứ thế tiếp tục cho đến cuối cùng S_{N-1} chuyển động với vận tốc β_N đối với S_N (xem hình 11.43). Chỉ ra bằng phương pháp quy nạp rằng vận tốc $\beta_{(N)}$ của vật thể đối với S_N có thể viết như sau

$$\beta_{(N)} = \frac{P_N^+ - P_N^-}{P_N^+ + P_N^-},$$
$$\text{trong đó} \quad P_N^+ \equiv \prod_{i=1}^{N}(1+\beta_i), \quad \text{và} \quad P_N^- \equiv \prod_{i=1}^{N}(1-\beta_i). \tag{11.75}$$



Hình 11.43:

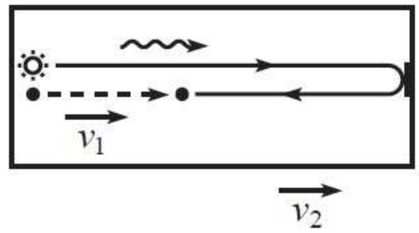
11.18. Thành lập công thức cộng vận tốc từ đầu **

Một quả bóng chuyển động với vận tốc v_1 đối với một con tàu. Con tàu chuyển động với vận tốc v_2 đối với mặt đất. Vận tốc của quả bóng đối với mặt đất là bao nhiêu? Giải bài toán này (tức là rút ra công thức cộng vận tốc trong phương trình (11.31)) bằng cách sau đây (không sử dụng sự giãn nở thời gian, sự co độ dài, ...; chỉ sử dụng tiên đề tương đối và thực tế rằng vận tốc ánh sáng là như nhau trong mọi hệ quy chiếu quán tính).

Giả sử quả bóng được ném từ phía sau con tàu. Tại cùng thời điểm đó, một photon được giải phóng bên cạnh nó (xem hình 11.44). Photon hướng tới phía trước con tàu, đập vào một chiếc gương, phản xạ trở lại, và cuối cùng chạm phải quả bóng. Trong cả hai hệ quy chiếu, hệ quy chiếu của con tàu và hệ quy chiếu mặt đất, tính toán phần quãng đường dọc con tàu mà ở đó sự va chạm xảy ra, và sau đó cho hai đại lượng này bằng nhau.

11.19. Thay đổi ví dụ về nghịch lý của hai anh em sinh đôi ***

Xét sự thay đổi sau đây về sự nghịch lý của hai anh em sinh đôi. A, B và C mỗi người có một chiếc đồng hồ. Trong hệ quy chiếu của A, B bay qua A với vận tốc v hướng sang phải. Khi B ngang qua A, cả hai người họ sẽ đặt đồng hồ của mình giá trị bằng không.



Hình 11.44:

Cũng như vậy, trong hệ quy chiếu của A, C bắt đầu ở phía xa bên phải và chuyển động sang trái với vận tốc v. Khi B và C ngang qua nhau, C đặt đồng hồ của anh ta chỉ cùng giá trị giống như đồng hồ của B. Cuối cùng. khi C ngang qua A, họ so sánh số chỉ trên các đồng hồ của họ. Tại thời điểm này, giả sử đồng hồ của A chỉ T_A, và đồng hồ của C chỉ T_C.

(a) Tính toán trong hệ quy chiếu của A, chỉ ra rằng $T_C = T_A/\gamma$, ở đó $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

(b) Tính toán trong hệ quy chiếu của B, chỉ ra lại rằng $T_C = T_A/\gamma$.

(c) Tính toán trong hệ quy chiếu của C, chỉ ra lại rằng $T_C = T_A/\gamma$.

Mục 11.6: Khoảng bất biến

11.20. Ném quả bóng trên một con tàu **

Một con tàu với độ dài riêng L chuyển động với vận tốc $c/2$ đối với mặt đất. Một quả bóng được ném từ phía sau đến phía trước con tàu với vận tốc $c/3$ đối với con tàu. Hỏi thời gian quả bóng chuyển động là bao lâu, và quãng đường nó đi được là bao nhiêu, trong:

(a) Hệ quy chiếu con tàu?

(b) Hệ quy chiếu mặt đất? Giải trường hợp này bằng cách

(i) Sử dụng lý luận cộng vận tốc.

(ii) Sử dụng phép biến đổi Lorentz từ hệ quy chiếu con tàu tới hệ quy chiếu mặt đất.

(c) Hệ quy chiếu của quả bóng?

(d) Kiểm tra rằng khoảng bất biến quả thực là như nhau trong cả ba hệ quy chiếu.

(e) Chỉ ra rằng thời gian trong hệ quy chiếu của quả bóng và hệ quy chiếu mặt đất liên hệ với nhau bởi thừa số γ.

(f) Câu hỏi giống như trên đối với hệ quy chiếu của quả bóng và hệ quy chiếu con tàu.

(g) Chỉ ra rằng thời gian trong hệ quy chiếu con tàu và hệ quy chiếu mặt đất không liên hệ với nhau bởi thừa số γ. Tại sao lại như vậy?

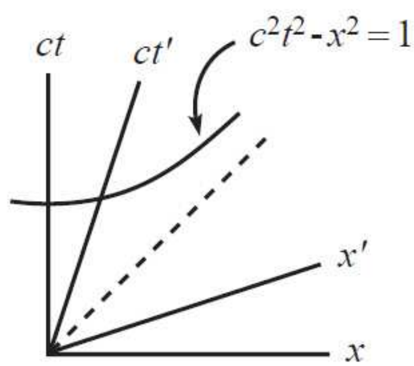
Sơ đồ Minkowski

11.21. Một hệ quy chiếu mới *

Trong một hệ quy chiếu cho trước, sự kiện 1 xảy ra tại $x = 0, ct = 0$ và sự kiện 2 xảy ra tại $x = 2, ct = 1$ (với các đơn vị là độ dài xác định nào đó). Tìm một hệ quy chiếu mà trong đó hai sự kiện xảy ra đồng thời.

11.22. Đơn vị trong sơ đồ Minkowski *

Xét sơ đồ Minkowski trong hình 11.45. Trong hệ quy chiếu S, vẽ đường hyperbol $c^2t^2 - x^2 = 1$. Đồng thời cũng vẽ các trục của hệ quy chiếu S' chuyển động qua S với vận tốc v. Sử dụng tính bất biến của khoảng $s^2 = c^2t^2 - x^2$ để rút ra tỷ số của các kích thước đơn vị trên các trục ct' và ct, sau đó kiểm tra kết quả của bạn với phương trình (11.46).



Hình 11.45:

11.23. Cộng vận tốc bằng sơ đồ Minkowski **

Một vật thể chuyển động với vận tốc v_1 đối với hệ quy chiếu S'. Hệ quy chiếu S' chuyển động với vận tốc v_2 đối với hệ quy chiếu S (cùng chiều với chiều chuyển động của vật thể). Vận tốc u của vật thể đối với hệ quy chiếu S bằng bao nhiêu? Giải bài toán này (tức là rút ra công thức cộng vận tốc) bằng cách vẽ sơ đồ Minkowski với hệ quy chiếu S và S', vẽ đường vũ trụ của vật thể, và sau đó thực hiện các tính toán hình học.

11.24. Tiếng vỗ tay **

Hai anh em sinh đôi, A ở trên trái đất và B bay tới một ngôi sao xa và quay trở lại. Đối với cả hai mô hình sau đây, vẽ sơ đồ Minkowski giải thích nhưng gì đang diễn ra.

(a) Trong suốt hành trình, B vỗ tay theo cách sao cho tiếng vỗ tay của anh ta xảy ra tại những khoảng thời gian bằng nhau Δt trong hệ quy chiếu của A. Các tiếng vỗ tay xảy ra trong hệ quy chiếu của B tại các khoảng thời gian như thế nào?

(b) Bây giờ giả sử A vỗ tay theo cách sao cho tiếng vỗ tay của anh ta xảy ra tại những khoảng thời gian bằng nhau Δt trong hệ quy chiếu của B. Các tiếng vỗ tay xảy ra trong hệ quy chiếu của A tại các khoảng thời gian như thế nào? (Hãy cẩn thận trong trường hợp này. Tổng của tất cả các khoảng thời gian phải bằng với thời gian tăng tuổi của A, thời gian này lớn hơn thời gian tăng tuổi của B như chúng ta đã biết từ nghịch lý của anh em sinh đôi thông thường.)

11.25. Gia tốc và sự thay đổi màu đỏ ***

Sử dụng sơ đồ Minkowski để giải bài toán sau đây: Hai người đứng cách nhau một khoảng d. Họ đồng thời bắt đầu tăng tốc theo cùng một chiều (dọc theo đường thẳng giữa họ) với cùng gia tốc riêng a. Tại thời điểm họ bắt đầu chuyển động, mỗi đồng hồ của họ chạy nhanh như thế nào trong hệ quy chiếu (thay đổi) của người kia?

11.26. Phá vỡ hay không phá vỡ ***

Hai tàu vũ trụ trôi bồng bềnh ngoài không gian và ở trạng thái nghỉ đối với nhau. Chúng được nối với nhau bởi một sợi dây (xem hình 11.46). Sợi dây rất chắc, nhưng nó cũng không thể chịu được sức kéo căng bất kỳ. Tại một thời điểm cho trước, các con tàu đồng thời (đối với hệ quy chiếu quán tính ban đầu của chúng) bắt đầu tăng tốc theo cùng một chiều (dọc theo đường thẳng giữa chúng) với cùng gia tốc riêng không đổi. Nói một cách khác, giả thiết rằng chúng cùng được mua các động cơ giống hệt nhau từ cùng một cửa hàng và sau đó được lắp đặt giống như nhau. Sợi dây rốt cuộc có bị phá vỡ hay không?

Hình 11.46:

Mục 11.9: Tốc độ

11.27. Các phép biến đổi Lorentz liên tiếp

Phép biến đổi Lorentz trong phương trình (11.58) có thể được viết lại dưới dạng ma trận như sau

$$\begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\phi & \sinh\phi \\ \sinh\phi & \cosh\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix}. \tag{11.76}$$

Chỉ ra rằng nếu bạn áp dụng một phép biến đổi Lorentz với $v_1 = \tanh\phi_1$, và sau đó áp dụng một phép biến đổi Lorentz khác với $v_2 = \tanh\phi_2$ thì kết quả sẽ là một phép biến đổi Lorentz với $v = \tanh(\phi_1 + \phi_2)$.

11.28. Thời gian tăng tốc **

Một con tàu vũ trụ ban đầu ở trạng thái nghỉ trong hệ quy chiếu quán tính. Tại một thời điểm cho trước, nó bắt đầu tăng tốc. Giả sử điều này xảy ra khi đồng hồ trong hệ quy chiếu quán tính chỉ $t = 0$ và đồng hồ trên con tàu vũ trụ chỉ $t' = 0$. Gia tốc riêng là a. (Tức là tại thời điểm $t' + dt'$, con tàu chuyển động với vận tốc adt' đối với hệ quy chiếu mà nó ở tại thời điểm t'.) Vào thời điểm sau đó, một người trong hệ quy chiếu quán tính đo t và t'. Mối liên hệ giữa chúng là như thế nào?

11.12 Bài tập luyện tập

Mục 11.3: Các ảnh hưởng cơ bản

11.29. Vận tốc c thực tế *

Một tàu vũ trụ bay qua giữa hai hành tinh cách nhau một năm ánh sáng. Vận tốc của con tàu phải bằng bao nhiêu để thời gian trôi qua trên đồng hồ của thuyền trưởng là một năm?

11.30. Một con tàu chuyển động *

Một con tàu có chiều dài 15 cs chuyển động với vận tốc $3c/5$.[39] Nó sẽ mất thời gian bao lâu để đi qua một người đứng trên mặt đất (đo bởi người đó)? Giải bài toán này bằng cách tính toán trong hệ quy chiếu của người, và sau đó giải lại bằng cách sử dụng hệ quy chiếu của con tàu.

11.31. Đuổi kịp một con tàu *

Con tàu A có chiều dài L. Con tàu B chuyển động qua A (trên một đường song song,

[39] 1 cs là một "giây ánh sáng". Nó bằng $(1)(3 \cdot 10^8 \text{ m/s})(1 \text{ s}) = 3 \cdot 10^8$ m.

hướng về cùng một chiều) với vận tốc tương đối $4c/5$. Con tàu B có chiều dài sao cho A nói rằng phía trước của các con tàu trùng nhau chính xác tại thời điểm phía sau của chúng trùng nhau. Hiệu thời gian giữa thời điểm hai đầu trùng nhau và thời điểm hai phía sau trùng nhau đo bởi con tàu B là bao nhiêu?

11.32. Đi bộ trên một con tàu *

Một con tàu có độ dài riêng L và vận tốc $3c/5$ tiến lại một chiếc hầm có độ dài L. Tại thời điểm phía trước của con tàu tiến vào hầm, một người rời khỏi phía trước con tàu và đi bộ (nhanh) về phía sau. người ấy đến phía sau của con tàu ngay khi nó (phía sau của nó) rời khỏi hầm.

(a) Quá trình này diễn ra bao lâu trong hệ quy chiếu của mặt đất?

(b) Vận tốc của người đối với mặt đất là bao nhiêu?

(c) Thời gian trôi qua trên đồng hồ của người là bao nhiêu?

11.33. Vẫy tay đồng thời *

Alice bay qua Bob với vận tốc v. Ngay khi cô ta ngang qua, họ đều chỉnh đồng hồ của họ chỉ không. Khi đồng hồ của Alice chỉ thời gian T, người ấy vẫy tay ra hiệu với Bob. Sau đó Bob vẫy tay với Alice đồng thời (đo bởi anh ấy) với vẫy tay của Alice (do đó điều này thực tế xảy ra trước khi anh ta nhìn thấy vẫy tay của người ấy). Sau đó Alice vẫy tay với Bob đồng thời (đo bởi người ấy) với vẫy tay của Bob. Sau đó Bob lại vẫy tay với Alice đồng thời (đo bởi anh ấy) với vẫy tay lần hai của Alice. Và cứ thế tiếp tục. Số chỉ trên đồng hồ của Alice đối với tất cả các lần người ấy vẫy tay là bao nhiêu? Và câu hỏi tương tự đối với Bob?

11.34. Đây và kia *

Một con tàu có độ dài riêng L di chuyển qua bạn với vận tốc v. Một người trên con tàu đứng ở phía trước, cạnh một đồng hồ chỉ không. Tại thời điểm cuối cùng (đo bởi bạn), một đồng hồ tại phía sau con tàu chỉ lv/c^2. Bạn sẽ trả lời phát biểu sau như thế nào:

"Người tại phía trước con tàu có thể rời khỏi phía trước ngay sau khi đồng hồ tại đó chỉ không, và sau đó chạy lại phía sau và tới đó ngay sau khi đồng hồ ở đó chỉ Lv/c^2. Bạn (trên mặt đất) do đó sẽ nhìn thấy người đó đồng thời ở cả phía trước và phía sau con tàu lần lượt khi các đồng hồ chỉ không và chỉ Lv/c^2."

11.35. Photon trên một con tàu *

Một con tàu có độ dài riêng L có các đồng hồ đặt tại phía trước và phía sau của nó. Một photon được phóng ra từ phía sau của con tàu đến phía trước. Tính toán trong hệ quy chiếu của con tàu chúng ta có thể dễ dàng nói rằng nếu photon rời phía sau con tàu khi đồng hồ ở đó chỉ không thì nó sẽ đến phía trước con tàu khi đồng hồ tại đó chỉ L/c.

Bây giờ xét mô hình này trong hệ quy chiếu mặt đất, ở đó con tàu chuyển động với vận tốc v. Rút lại kết quả trên (hiệu số chỉ của hai đồng hồ là L/c) bằng cách chỉ tính toán trong hệ quy chiếu mặt đất.

11.36. Ba anh em sinh ba *

Ba anh em sinh ba, A ở trên trái đất. B chuyển động với vận tốc $4c/5$ tới một hành tinh (cách xa một khoảng L) và quay trở lại. C di chuyển tới hành tinh đó với vận tốc $3c/4$, và sau đó quay trở lại với vận tốc cần thiết để tới trái đất đúng lúc B cũng quay trở lại trái đất. Tuổi của mỗi anh em sinh ba suốt quá trình này sẽ là bao nhiêu? Ai là người trẻ nhất?

11.37. Quan sát tín hiệu ánh sáng **

A và B bắt đầu di chuyển tại cùng một điểm (với các đồng hồ của họ đều chỉ không) và chuyển động ngược chiều nhau với vận tốc tương đối v. Khi đồng hồ của B chỉ thời gian T, anh ta (B) gửi đi một tín hiệu ánh sáng. Khi A nhận tín hiệu này, đồng hồ của anh ta (A) chỉ thời gian là bao nhiêu? Trả lời câu hỏi này bằng cách tính toán toàn bộ trong (a) hệ quy chiếu của A, và sau đó (b) hệ quy chiếu của B. (Bài tập này cơ bản là sự thành lập ảnh hưởng Doppler theo chiều dọc mà chúng ta đã thảo luận trong Mục 11.8.1.)

11.38. Hai con tàu và một cái cây **

Hai con tàu có độ dài riêng L chuyển động hướng theo hai chiều ngược nhau về phía nhau trên các đường thẳng song song. Cả hai con tàu đều di chuyển với vận tốc v đối với mặt đất. Cả hai đều có các đồng hồ tại phía trước và phía sau, và các đồng hồ này được đồng bộ hóa như thường lệ trong hệ quy chiếu của con tàu mà chúng ở trong đó. Một cái cây đặt ở trên mặt đất tại vị trí ở đó phía trước của các con tàu ngang qua nhau. Các đồng hồ tại phía trước các con tàu đều chỉ không khi chúng ngang qua nhau. Tìm số chỉ trên các đồng hồ tại phía sau các con tàu khi chúng (phía sau) ngang qua nhau tại vị trí cái cây. Thực hiện tính toán này bằng ba cách khác nhau:

(a) Tưởng tượng rằng bạn đứng cạnh cái cây trên mặt đất, và bạn quan sát một trong hai đồng hồ phía sau thay đổi như thế nào.

(b) Tưởng tượng rằng bạn đang đứng trên một trong hai con tàu, và bạn quan sát đồng hồ phía sau trong con tàu của bạn thay đổi như thế nào suốt thời gian cái cây chuyển động khoảng cách liên quan.

(c) Tưởng tượng rằng bạn là một trong hai con tàu, và bạn quan sát đồng hồ phía sau của con tàu còn lại thay đổi như thế nào suốt thời gian cái cây chuyển động khoảng cách liên quan. (Bạn sẽ phải cần sử dụng công thức cộng vận tốc.)

11.39. Hai lần đồng thời **

Một con tàu có độ dài riêng L chuyển động với vận tốc v đối với mặt đất. Khi phía trước con tàu ngang qua một cái cây trên mặt đất, một quả bóng được ném đồng thời (được đo trong hệ quy chiếu mặt đất) từ phía sau con tàu hướng về phía trước, với vận tốc u đối với con tàu. u sẽ phải bằng bao nhiêu để quả bóng chạm vào phía trước con tàu đồng thời (được đo trong hệ quy chiếu con tàu) với thời điểm cái cây ngang qua phía sau con tàu? Chỉ ra rằng để nghiệm đối với u tồn tại, chúng ta phải có $v/c < (\sqrt{5}-1)/2$, tỷ số này là nghịch đảo của tỷ số vàng.

11.40. Tiếng vỗ tay **

Hai người đứng cách nhau một khoảng L dọc theo một con đường hướng đông - tây. Cả hai cùng vỗ tay vào thời điểm giữa trưa trong hệ quy chiếu mặt đất. Bạn đang lái xe xuống phía đông của con đường này với vận tốc $4c/5$. Bạn chú ý rằng bạn ở bên cạnh người phía tây tại cùng một thời điểm (đo trong hệ quy chiếu của bạn) mà người phía đông vỗ tay. Sau đó, bạn chú ý rằng bạn ở bên cạnh một cái cây tại cùng một thời điểm (đo trong hệ quy chiếu của bạn) mà người phía tây vỗ tay. Cái cây ở đâu trên con đường? (Mô tả vị trí của nó trong hệ quy chiếu mặt đất.)

11.41. Photon, cái cây, và ngôi nhà **

(a) Một con tàu có độ dài L chuyển động với vận tốc v đối với mặt đất. Tại thời điểm phía sau con tàu ngang qua một cái cây xác định, một người nào đó tại phía sau con tàu chiếu một photon hướng về phía trước. Photon tình cờ chạm vào phía trước con tàu tại thời điểm khi phía trước con tàu ngang qua một ngôi nhà xác định. Khi đó trong hệ quy chiếu mặt đất, khoảng cách giữa cái cây và ngôi nhà là bao xa? Giải bài toán này bằng cách tính toán trong hệ quy chiếu mặt đất.

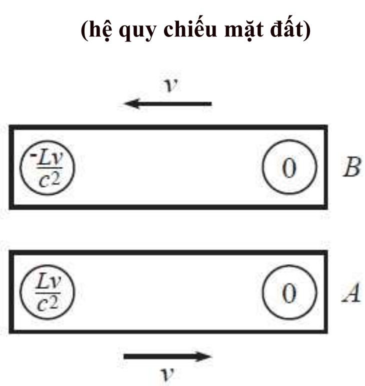
(b) Bây giờ hãy xem xét mô hình từ việc quan sát trong hệ quy chiếu con tàu. Sử dụng kết quả của bạn đối với khoảng cách cái cây - ngôi nhà từ phần (a), kiểm tra rằng ngôi nhà gặp phía trước con tàu tại cùng thời điểm photon gặp nó.

11.42. Người đi qua hầm **

Một người chạy với vận tốc v hướng tới một cái hầm có chiều dài L. Một nguồn sáng đặt tại đầu phía xa của hầm. Tại thời điểm người bắt đầu vào trong hầm, nguồn sáng đồng thời (đo trong hệ quy chiếu của hầm) phát ra một photon chuyển động trong hầm hướng về phía người. Cuối cùng khi người và photon gặp nhau, vị trí của người ở tại tỷ số f đối với chiều dài của hầm. Hỏi f bằng bao nhiêu? Giải bài toán này bằng cách tính toán trong hệ quy chiếu của hầm, và sau đó tính toán lại trong hệ quy chiếu của người.

11.43. Các con tàu trùng khớp **

Một người quan sát trên mặt đất nhìn hai con tàu Avà B đều có độ dài riêng L chuyển động theo hai chiều ngược nhau với vận tốc v đối với mặt đất. người ấy nhận thấy rằng khi các con tàu "trùng khớp", đồng hồ tại phía trước con tàu A và đồng hồ tại phía sau của B đều chỉ không. Từ ảnh hưởng "đồng hồ phía sau chạy nhanh hơn", do đó người ấy cũng nhận thấy rằng các đồng hồ ở phía sau của A và phía trước của B chỉ lần lượt Lv/c^2 và $-Lv/c^2$ (như trong hình 11.47). Bây giờ tưởng tượng bạn đang đi trên con tàu A. Khi phía sau của B ngang qua phía trước con tàu của bạn (A), các đồng hồ tại cả hai vị trí này đều chỉ không (như đã nói ở trên). Bằng cách chỉ sử dụng hệ quy chiếu của A, hãy giải thích tại sao các đồng hồ tại phía sau của A và phía trước của B chỉ lần lượt là Lv/c^2 và $-Lv/c^2$ khi các điểm này trùng nhau. (Bạn sẽ cần sử dụng công thức cộng vận tốc.)



Hình 11.47:

11.44. Chiếc gậy rơi xuống mặt đất **

Một chiếc gậy nằm ngang rơi xuống và nằm dưới mặt đất. Một cách định tính, quá trình này xảy ra như thế nào trong hệ quy chiếu của một người nào đó đang chạy với vận tốc v?

11.45. Đi qua lỗ hổng **

Một chiếc gậy có độ dài riêng L chuyển động với vận tốc v theo hướng chiều dài của nó. Nó đi qua một tấm vô cùng mỏng được cắt một lỗ hổng đường kính L. Khi chiếc gậy đi qua lỗ hổng, tấm được nâng lên sao cho chiếc gậy đi qua lỗ hổng và cuối cùng ở bên dưới tấm. Tất nhiên, có thể ...

Trong hệ quy chiếu quán tính, độ dài của chiếc gậy bị co lại thành L/γ, do đó dường như chiếc gậy dễ dàng hơn khi đi qua lỗ hổng. Nhưng trong hệ quy chiếu của chiếc gậy, lỗ hổng lại bị co lại thành L/γ, do đó dường như chiếc gậy không thể qua được lỗ hổng (hoặc đúng hơn là lỗ hổng không thể bao phủ xung quanh chiếc gậy, bởi vì nó đang chuyển động với hệ quy chiếu của chiếc gậy). Do đó câu hỏi là: Chiếc gậy cuối cùng có ở bên mặt kia của tấm hay không?

11.46. Một con tàu ngắn trong hầm **

Xét mô hình trong bài tập 11.6, chỉ thay đổi một điều là con tàu bây giờ có chiều dài rL, trong đó r là một thừa số nào đó. Giá trị lớn nhất của r theo v là bao nhiêu để quả bom có thể không nổ? Kiểm tra rằng bạn thu được cùng câu trả lời bằng cách tính toán trong hệ quy chiếu con tàu và hệ quy chiếu của hầm.

Mục 11.4: Phép biến đổi Lorentz

11.47. Các phép biến đổi Lorentz liên tiếp **

Chỉ ra rằng hợp của một phép biến đổi Lorentz (với vận tốc v_1) và một phép biến đổi Lorentz (với vận tốc v_2) cũng là một phép biến đổi Lorentz với vận tốc $u = (v_1 + v_2)/(1 + v_1 v_2/c^2)$.

11.48. Sự mất tính đồng thời **

Một con tàu chuyển động với vận tốc v đối với mặt đất. Hai sự kiện xảy ra đồng thời, cách nhau một khoảng cách L trong hệ quy chiếu con tàu. Hiệu thời gian và không gian trong hệ quy chiếu mặt đất là bao nhiêu? Giải bài toán này bằng cách:

(a) Sử dụng phép biến đổi Lorentz.

(b) Chỉ sử dụng kết quả trong Mục 11.3. Tính toán trong hệ quy chiếu mặt đất, và sau đó tính toán lại trong hệ quy chiếu con tàu.

Mục 11.5: Cộng vận tốc

11.49. Thừa số γ *

Chỉ ra rằng cộng tương đối (hoặc trừ) của các vận tốc u và v có thừa số γ cho bởi $\gamma = \gamma_u \gamma_v (1 \pm uv)$.

11.50. Sự giãn nở thời gian *

Một đồng hồ chuyển động thẳng đứng với vận tốc v trong một hệ quy chiếu cho trước, và bạn chạy ngang với vận tốc v đối với hệ quy chiếu này. Chỉ ra rằng bạn sẽ nhìn thấy đồng hồ chạy chậm bởi thừa số $\gamma_u \gamma_v$.

11.51. Bộ ba Pitago *

Giả sử (a, b, h) là một bộ ba Pitago. (Chúng ta sẽ sử dụng h ký hiệu cạnh huyền thay vì dùng ký hiệu c). Xét phép cộng tương đối hoặc trừ tương đối của hai vận tốc $\beta_1 = a/h$ và $\beta_2 = b/h$. Chỉ ra rằng tử số và mẫu số của kết quả là cạnh bên và cạnh huyền của một bộ ba Pitago khác, và hãy tìm cạnh còn lại. Thừa số γ liên kết là bao nhiêu?

11.52. Hai người chạy *

A và B cùng xuất phát tại một điểm và đồng thời chạy về hai hướng ngược nhau với vận tốc $3c/5$ đối với mặt đất. A chuyển động sang phải, và B chuyển động sang bên trái. Xét một điểm đánh dấu trên mặt đất tại vị trí $x = L$. Theo quan sát trong hệ quy chiếu mặt đất, A và B cách nhau một khoảng cách $2L$ khi A đi qua điểm đánh dấu này. Theo quan sát của A, B cách bao xa khi A trùng với điểm đánh dấu?

11.53. Photon chuyển động lệch *

Một photon chuyển động tại góc lệch θ đối với trục x' trong hệ quy chiếu S'. Hệ quy chiếu S' chuyển động với vận tốc v đối với hệ quy chiếu S (dọc theo trục x'). Tính các thành phần của vận tốc photon trong S, và kiểm tra rằng vận tốc của photon là c.

11.54. Chạy trên một con tàu **

Một con tàu có độ dài riêng L chuyển động với vận tốc v_1 đối với mặt đất. Một hành khách chạy từ phía sau con tàu tới phía trước với vận tốc v_2 đối với con tàu. Quá trình này diễn bao trong bao nhiêu lâu theo quan sát của một người nào đó đứng trên mặt đất? Giải bài toán này theo hai cách khác nhau:

(a) Tìm vận tốc tương đối của hành khách và con tàu (theo quan sát của người trên mặt đất), và sau đó tìm thời gian đối với hành khách để chạy về phía trước con tàu.

(b) Tìm thời gian trôi qua trên đồng hồ của hành khách (bằng cách tính toán trong bất cứ hệ quy chiếu nào mà bạn muốn), và sau đó sử dụng sự giãn nở thời gian để thu được thời gian trôi qua trên đồng hồ mặt đất.

11.55. Công thức cộng vận tốc **

Thực tế rằng bài tập trước có thể được giải theo hai cách khác nhau dẫn đến một phương pháp rút ra công thức cộng vận tốc: Một con tàu có độ dài riêng L chuyển động với vận tốc v_1 đối với mặt đất. Một quả bóng được ném từ phía sau con tàu tới phía trước với vận tốc v_2 đối với con tàu. Gọi vận tốc của quả bóng đối với mặt đất là V. Tính thời gian chuyển động của quả bóng đo bởi người quan sát trên mặt đất theo hai cách khác nhau sau đây, và sau đó cho chúng bằng nhau để tìm ra V theo v_1 và v_2. (Việc này hơi rắc rối, và bạn phải giải một phương trình bậc hai.)

(a) Cách đầu tiên: Tìm vận tốc tương đối của quả bóng và con tàu (theo quan sát của người trên mặt đất), và sau đó tìm thời gian quả bóng chuyển động tới phía trước con tàu.

(b) Cách thứ hai: Tìm thời gian trôi qua trên đồng hồ của quả bóng (bằng cách tính toán trong bất cứ hệ quy chiếu nào mà bạn muốn), và sau đó sử dụng sự giãn nở thời gian để thu được thời gian trôi qua trên đồng hồ mặt đất.

11.56. Công thức cộng vận tốc một lần nữa **

Một con tàu có độ dài riêng L chuyển động với vận tốc v đối với mặt đất. Một quả bóng được ném từ phía sau con tàu tới phía trước với vận tốc u đối với con tàu. Khi tìm thời gian của quá trình này trong hệ quy chiếu mặt đất, một sai lầm phổ biến đó là sử dụng sự giãn nở thời gian từ hệ quy chiếu con tàu tới hệ quy chiếu mặt đất, điều này sẽ dẫn tới câu trả lời không chính xác là $\gamma_v(L/u)$. Điều này là không chính xác bởi vì sự giãn nở thời gian chỉ đúng khi hai sự kiện liên quan xảy ra tại cùng một vị trí trong một trong các hệ quy chiếu; mặt khác tính đồng thời vẫn đang còn tranh luận.

(a) Tìm tổng thời gian trong hệ quy chiếu mặt đất một cách chính xác bằng cách nhìn vào thời gian chạy của một đồng hồ ở trạng thái nghỉ trong hệ quy chiếu con tàu (ví dụ đồng hồ ở tại phía trước con tàu), và áp dụng sự giãn nở thời gian đối với đồng hồ này.

(b) Tìm tổng thời gian trong hệ quy chiếu mặt đất bằng cách áp dụng sự giãn nở thời gian đối với đồng hồ của quả bóng. Câu trả lời của bạn sẽ chứa vận tốc chưa biết V của quả bóng đối với mặt đất.

(c) Đồng nhất hai kết quả của bạn từ phần (a) và (b) để chỉ ra rằng $\gamma_V = \gamma_u\gamma_v(1+uv/c^2)$. Sau đó giải đối với V để tìm ra công thức cộng vận tốc.

11.57. Các viên đạn trên một con tàu **

Một con tàu chuyển động với vận tốc v. Các viên đạn được bắn liên tiếp với vận tốc u (đối với con tàu) từ phía sau con tàu tới phía trước. Một viên đạn mới được bắn tại thời điểm (đo trong hệ quy chiếu con tàu) mà viên đạn mới chạm vào phía trước con tàu. Trong hệ quy chiếu mặt đất, phần quãng đường dọc theo con tàu của một viên đạn cho trước là bao nhiêu (đo trong hệ quy chiếu mặt đất) tại thời điểm viên đạn tiếp theo được bắn ra? Số viên đạn lớn nhất bay trong một thời điểm cho trước trong hệ quy chiếu mặt đất là bao nhiêu?

11.58. Sự giãn nở thời gian và Lv/c^2 **

Một người đi bộ rất chậm với vận tốc u từ phía sau con tàu có độ dài riêng L tới phía trước của nó. Ảnh hưởng sự giãn nở thời gian trong hệ quy chiếu con tàu có thể làm cho nhỏ bất kỳ bằng cách cho u đủ nhỏ (bởi vì ảnh hưởng này là bậc hai đối với u). Do đó, nếu đồng hồ của người đó giống như đồng hồ ở phía sau con tàu khi anh ta xuất phát thì nó cũng (về cơ bản) giống như đồng hồ phía trước con tàu khi anh ta kết thúc quãng đường.

Bây giờ xét mô hình này trong hệ quy chiếu mặt đất, ở đó con tàu chuyển động với vận tốc v. Đồng hồ phía sau chỉ lớn hơn Lv/c^2 so với đồng hồ phía trước, do đó như đã nói thời gian chạy của đồng hồ người đó suốt quá trình này phải nhỏ hơn Lv/c^2 thời gian chạy của đồng hồ phía trước. Bằng cách làm việc trong hệ quy chiếu mặt đất, hãy giải thích tại sao trường hợp này lại như vậy. Giả thiết rằng $u \ll v$.[40]

[40]Nếu bạn sắp đặt một tập hợp các hệ thống con tàu này xung quanh chu vi của một sân ga quay tròn, thì kết quả ở trên chỉ ra thực tế sau đây. Giả sử người A ở trạng thái nghỉ trên sân ga, và người B đi bộ chậm một cách tùy ý quanh chu vi sân ga. Khi đó khi B trở về tới A thì đồng hồ của B sẽ chỉ nhỏ hơn đồng hồ của A. Đây là sự thật bởi vì lý luận đã nói tới ở trên chỉ ra (như bạn sẽ tính toán thấy) rằng một người quan sát quán tính nhìn thấy chạy chậm hơn đồng hồ của A. Kết quả này, khi bạn có thể đi chậm một cách tùy ý trong một hệ quy chiếu cụ thể và có đồng hồ của bạn mất tính đồng nhất với các đồng hồ khác, là một hệ quả của thực tế rằng một hệ quy chiếu không quán tính nào đó có thể có một

11.59. Đi qua một con tàu **

Một người A đứng trên mặt đất, con tàu B có độ dài riêng L chuyển động sang phải với vận tốc $3c/5$, và người C chạy sang phải với vận tốc $4c/5$. C bắt đầu phía sau con tàu và cuối cùng đi qua nó. Gọi E_1 là sự kiện "C trùng với phía sau con tàu", và E_2 là sự kiện "C trùng với phía trước con tàu." Tìm Δt và Δx giữa hai sự kiện E_1 và E_2 trong hệ quy chiếu của A, B và C, và chỉ ra rằng $c^2\Delta t^2 - \Delta x^2$ là như nhau trong cả ba hệ quy chiếu.

11.60. Các con tàu chuyển động **

Con tàu A với độ dài riêng Lchuyển động về hướng đông với vận tốc v, trong khi con tàu B với độ dài riêng $2L$ chuyển động về hướng tây cũng với vận tốc v. Thời gian để hai con tàu đi qua nhau là bao nhiêu lâu (định nghĩa là thời gian giữa phía trước trùng nhau và phía sau trùng nhau):

1. Trong hệ quy chiếu của A.
2. Trong hệ quy chiếu của B.
3. Trong hệ quy chiếu mặt đất.
4. Kiểm tra rằng đại lượng bất biến là như nhau trong cả ba hệ quy chiếu.

11.61. Ném quả bóng trên một con tàu **

Một con tàu có độ dài riêng L chuyển động với vận tốc $3c/5$ đối với mặt đất. Một quả bóng được ném từ phía sau tới phía trước con tàu với vận tốc $c/2$ đối với con tàu. Thời gian chuyển động của quả bóng và khoảng cách quả bóng đi được là bao nhiêu, trong:

(a) Hệ quy chiếu con tàu?

(b) Hệ quy chiếu mặt đất? Giải trường hợp này bằng cách

  (i) Sử dụng lý luận cộng vận tốc.

  (ii) Sử dụng phép biến đổi Lorentz từ hệ quy chiếu con tàu tới hệ quy chiếu mặt đất.

(c) Hệ quy chiếu của quả bóng?

(d) Kiểm tra rằng đại lượng bất biến quả thực là như nhau trong cả ba hệ quy chiếu.

---

phương pháp thống nhất (tức là phương pháp không có sự gián đoạn) về việc đồng bộ hóa các đồng hồ. Xem Cranor và cộng sự (2000) để tìm hiểu chi tiết hơn.

(e) Chỉ ra rằng thời gian trong hệ quy chiếu quả bóng và thời gian trong hệ quy chiếu mặt đất liên hệ với nhau bởi thừa số γ thích hợp.

(f) Câu hỏi tương tự đối với hệ quy chiếu quả bóng và hệ quy chiếu con tàu.

(g) Chỉ ra rằng thời gian trong hệ quy chiếu con tàu và hệ quy chiếu mặt đất không liên hệ với nhau bởi thừa số γ. Tại sao lại như vậy?

Sơ đồ Minkowski

11.62. Sự giãn nở thời gian qua sơ đồ Minkowski *

Trong ví dụ ở Mục 11.7, sử dụng sơ đồ Minkowski để rút ra kết quả sự giãn nở thời gian giữa hệ quy chiếu S và hệ quy chiếu S' (trong cả hai chiều như trong ví dụ).

11.63. Đại lượng Lv/c^2 qua sơ đồ Minkowski *

Trong ví dụ ở Mục 11.7, sử dụng sơ đồ Minkowski để rút ra kết quả đồng hồ phía sau chạy nhanh hơn Lv/c^2 đối với hệ quy chiếu S và S' (theo cả hai chiều như trong ví dụ).

11.64. Vỗ tay đồng thời, xét lại **

Giải bài tập 11.33 bằng cách sử dụng Minkowski từ quan điểm của một người nào đó quan sát thấy Alice và Bob chuyển động với các vận tốc bằng nhau nhưng ngược chiều.

11.65. Con tàu ngắn trong một chiếc hầm, xét lại ***

Giải bài tập 11.46 bằng cách sử dụng sơ đồ Minkowski từ cách quan sát của con tàu, và sau đó từ quan sát của hầm.

Ảnh hưởng Doppler

11.66. Ảnh hưởng Doppler theo chiều ngang **

Như đã đề cập trong nhận xét thứ hai của Mục 11.8.2, có thể giải quyết trường hợp thứ nhất của ảnh hưởng Doppler theo chiều ngang bằng cách tính toán trong hệ quy chiếu của người quan sát, miễn là bạn giải thích thành phần theo chiều dọc của chuyển động của nguồn. Giải bài toán theo cách này và thu lại phương trình (11.52).

11.67. Nghịch lý anh em sinh đôi qua ảnh hưởng Doppler **

Hai anh em sinh đôi, người A ở trên trái đất, và người B bay với vận tốc v tới một ngôi sao ở xa và quay trở lại. Ngôi sao ở khoảng cách L đến trái đất trong hệ quy chiếu trái đất - ngôi sao. Sử dụng ảnh hưởng Doppler chỉ ra rằng B trẻ hơn một thừa số γ khi người ấy quay lại (không sử dụng bất kỳ kết quả gì về sự giãn nở thời gian cũng như sự co độ dài). Thực hiện điều này theo hai cách; cả hai cách đều có thể thực hiên bằng cách làm việc trong hệ quy chiếu A hoặc hệ quy chiếu B, do đó tùy bạn có thể chọn hệ quy chiếu nào bạn muốn sử dụng.

(a) A gửi đi tín hiệu chớp sáng tại khoảng thời gian t giây (đo trong hệ quy chiếu của anh ta). Bằng cách xét số chớp sáng thay đổi màu đỏ và thay đổi màu xanh mà B nhận được, chỉ ra rằng $T_B = T_A/\gamma$.

(b) B gửi đi tín hiệu tại khoảng thời gian t giây (đo trong hệ quy chiếu của người ấy). Bằng cách xét số chớp sáng thay đổi màu đỏ và thay đổi màu xanh mà A nhận được, chỉ ra rằng $T_B = T_A/\gamma$.

Mục 11.9Tốc độ

11.68. Thời gian di chuyển **

Xét mô hình trong bài tập 11.28 (và bạn có thể tự do sử dụng các kết quả từ bài tập đó trong bài toán này). Giả sử con tàu vũ trụ chuyển động tới một hành tinh cách xa trái đất một khoảng L.

(a) Bằng cách tính toán trong hệ quy chiếu của trái đất, tìm thời gian của cuộc hành trình đo bởi trái đất. Kiểm tra các giới hạn khi L lớn và khi L nhỏ (so sánh với c^2/a).

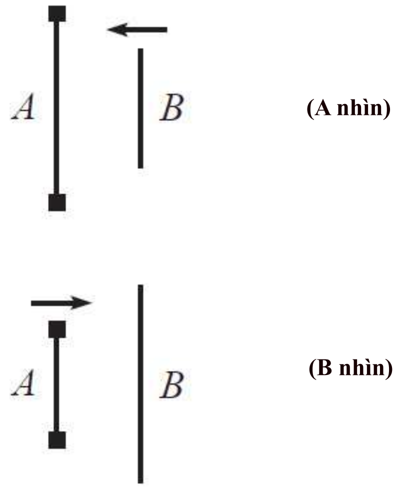
(b) Bằng cách tính toán trong hệ quy chiếu (thay đổi) của con tàu, tìm thời gian của cuộc hành trình đo bởi con tàu (chỉ cần thu được một phương trình ẩn). Kiểm tra giới hạn khi L nhỏ. Thời gian sẽ như thế nào nếu L lớn?

11.13 Lời giải

11.1. Không có sự co độ dài theo chiều ngang

Giả sử rằng các đầu sơn có thể là các điểm chuyển động trên gậy B nếu B đủ dài, hoặc A đủ ngắn. Điểm mấu chốt thực tế mà chúng ta cần ở đây là tiên đề thứ hai của thuyết tương đối, tiên đề này nói rằng các hệ quy chiếu của hai chiếc gậy là tương đương. Tức là nếu A quan sát thấy B ngắn hơn (hoặc dài hơn, hoặc bằng) so với nó thì B cũng quan sát thấy A ngắn hơn (hoặc dài hơn, hoặc bằng) so với nó. Thừa số co độ dài phải giống nhau khi chuyển động theo mỗi cách giữa các hệ quy chiếu.

Giả sử (khi tìm kiếm sự co độ dài) rằng A nhìn thấy B ngắn lại. Khi đó B sẽ không thể mở rộng



Hình 11.48:

tới các đầu của A, do đó sẽ không có các điểm đánh dấu trên B. Nhưng trong trường hợp này, B cũng phải nhìn thấy A ngắn hơn, do đó sẽ có các điểm đánh dấu trên B (xem hình 11.48). Điều này là mâu thuẫn. Tương tự, nếu chúng ta giả thiết A nhìn thấy B dài hơn thì chúng ta cũng dẫn đến một điều mâu thuẫn. Do đó chúng ta cuối cùng chỉ có khả năng thứ ba, cụ thể là mỗi chiếc gậy nhìn thấy chiếc gậy còn lại có độ dài một mét.

11.2. Giải thích sự giãn nở thời gian

Cách giải quyết đối với sự trái ngược hiển nhiên là "xuất phát trước" ở đó đồng hồ của B chạy nhanh hơn đồng hồ của A khi quan sát trong hệ quy chiếu con tàu. Từ phương trình (11.6), chúng ta biết rằng trong hệ quy chiếu con tàu, đồng hồ của B chỉ nhanh hơn đồng hồ của đồng hồ của A một lượng Lv/c^2. (Hai hành tinh có thể được xem là hai đầu của con tàu trong ví dụ ở Mục 11.3.1.)

Do đó, một người nào đó ở trên con tàu sẽ nói rằng: "Đồng hồ của tôi tăng lên $L/\gamma v$ suốt toàn bộ hành trình. Tôi nhìn thấy đồng hồ của B chạy chậm đi bởi một thừa số γ, do đó tôi quan sát thấy đồng hồ của B chạy nhanh chỉ một lượng $(L/\gamma v)/\gamma = L/\gamma^2 v$. Tuy nhiên, đồng hồ của B bắt đầu không phải tại không mà tại Lv/c^2. Do đó, số chỉ cuối cùng trên đồng hồ của B khi tôi ở đó sẽ là

$$\frac{Lv}{c^2} + \frac{L}{\gamma^2 v} = \frac{L}{v}\left(\frac{v^2}{c^2} + \frac{1}{\gamma^2}\right) = \frac{L}{v}\left(\frac{v^2}{c^2} + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\right) = \frac{L}{v}, \tag{11.77}$$

như chúng ta muốn chỉ ra."

11.3. Giải thích sự co độ dài

Cách giải quyết đối với sự trái ngược hiển nhiên đó là việc phát nổ không xảy ra đồng thời trong hệ quy chiếu con tàu. Khi sân ga đi ngang qua con tàu, bom "sau" phát nổ trước khi bom "trước" phát nổ.[41] Khi đó quả bom phía sau sẽ di chuyển xa hơn thời gian nó phát nổ và để lại dấu vết của nó. Khoảng cách giữa các dấu vết do đó sẽ lớn hơn khoảng cách mà bạn mong đợi. Hãy tính toán định lượng về điều này.

Giả sử hai quả bom chứa các đồng hồ chỉ không khi chúng phát nổ (chúng được đồng bộ hóa trong hệ quy chiếu sân ga). Khi đó trong hệ quy chiếu con tàu, đồng hồ của quả bom phía trước chỉ $-Lv/c^2$ khi quả bom phía sau phát nổ chỉ thời gian không. (Đây là kết quả "đồng hồ phía sau chạy nhanh hơn" từ phương trình (11.6).) Do đó đồng hồ của quả bom phía trước phải trôi qua một lượng Lv/c^2 trước khi nó phát nổ. Nhưng con tàu quan sát thấy đồng hồ của các quả bom chạy chậm đi bởi một thừa số γ, do đó trong hệ quy chiếu con tàu quả bom phía trước phát nổ tại thời điểm $\gamma Lv/c^2$ sau khi quả bom phía sau phát nổ. Suốt thời gian $\gamma Lv/c^2$ này, sân ga chuyển động một khoảng cách $(\gamma Lv/c^2)v$ đối với con tàu.

Do đó, một người nào đó trên con tàu sẽ nói rằng: "Do sự co độ dài, khoảng cách giữa các quả bom là L/γ. Do đó quả bom phía trước cách quả bom phía sau một khoảng L/γ khi quả bom phía sau phát nổ. Khi đó quả bom phía trước di chuyển thêm một khoảng cách $\gamma Lv^2/c^2$ tại thời điểm nó phát nổ, với khoảng cách

$$\frac{L}{\gamma} + \frac{\gamma Lv^2}{c^2} = \gamma L\left(\frac{1}{\gamma^2} + \frac{v^2}{c^2}\right) = \gamma L\left(\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{v^2}{c^2}\right) = \gamma L \tag{11.78}$$

phía trước dấu vết của quả bom phía sau, như chúng ta muốn chỉ ra."

11.4. Một chiếc gậy chuyển động

(a) Chiếc gậy có độ dài L/γ trong hệ quy chiếu của bạn, và nó chuyển động với vận tốc v. Do đó, thời gian để nó chuyển động một khoảng cách L/γ trong hệ quy chiếu của bạn sẽ là $L/\gamma v$.

(b) Chiếc gậy quan sát thấy bạn bay qua nó với vận tốc v. Chiếc gậy có độ dài L trong hệ quy chiếu của nó, do đó thời gian trôi qua trong hệ quy chiếu của chiếc gậy sẽ là L/v. Suốt thời gian này, chiếc gậy quan sát thấy đồng hồ trên tay bạn chạy chậm lại bởi một thừa số γ. Do đó, thời gian trôi qua trên đồng hồ của bạn sẽ là $L/\gamma v$, giống như kết quả trong phần (a).

[41] Bởi vì chúng ta ở đây sẽ làm việc trong hệ quy chiếu con tàu, nên chúng ta sẽ sử dụng từ "sau" và "trước" theo cách mà một người nào đó trên con tàu sử dụng chúng khi cô ta quan sát sân ga đi qua con tàu. Tức là nếu con tàu hướng về phía đông đối với sân ga thì từ quan sát của con tàu, sân ga sẽ hướng về phía tây, do đó quả bom phía đông trên sân ga là quả bom nổ sau, và quả bom phía tây là quả bom nổ trước. Dẫn đến chúng ta có định hướng ngược khi so sánh với cách mà người nào đó trên con tàu đánh dấu phía sau và phía trước của con tàu. Sử dụng định hướng tương tự sẽ đưa đến cụm từ "đồng hồ trước chạy nhanh hơn" sau đây, điều này sẽ làm tôi rùng mình.

Về mặt logic, sự khác nhau trong hai lời giải ở phần (a) và (b) đó là một lời giải sử dụng sự co độ dài, và lời giải còn lại sử dụng sự giãn nở thời gian. Về mặt toán học, chúng khác nhau đơn giản chỉ là thứ tự khi xảy ra việc chia cho γ và v.

(c) Bạn quan sát thấy đồng hồ phía sau trên chiếc gậy chỉ một lượng thời gian Lv/c^2 lớn hơn đồng hồ phía trước. Để nói thêm về điều này, tất nhiên là thời gian sẽ trôi qua nhanh hơn trên đồng hồ phía sau trong khoảng thời gian nó tiến tới bạn. Thời gian trong hệ quy chiếu của bạn là $L/\gamma v$ (bởi vì chiếc gậy có độ dài L/γ trong hệ quy chiếu của bạn). Nhưng các đồng hồ của chiếc gậy chạy chậm, do đó chỉ có khoảng thời gian $L/\gamma^2 v$ trôi qua trên đồng hồ phía sau trong khoảng thời gian nó tiến tới bạn. Tổng thời gian thêm (so sánh với số chỉ của đồng hồ phía trước khi nó ngang qua bạn) mà đồng hồ phía sau chỉ do đó sẽ là

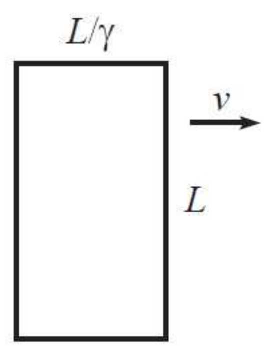
$$\frac{Lv}{c^2} + \frac{L}{\gamma^2 v} = \frac{L}{v}\left(\frac{v^2}{c^2} + \frac{1}{\gamma^2}\right) = \frac{L}{v}\left(\frac{v^2}{c^2} + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\right) = \frac{L}{v}, \tag{11.79}$$

giống như kết quả thu được bằng tính toán nhanh trong phần tiếp theo (d).

(d) Chiếc gậy quan sát thấy bạn bay qua với vận tốc v. Chiếc gậy có độ dài L trong hệ quy chiếu của nó, do đó thời gian trôi qua trong hệ quy chiếu của chiếc gậy sẽ là L/v.

11.5. Hình vuông quay tròn

Hình 11.49 chỉ ra hình ảnh quan sát từ phía trên của hình vuông tại thời điểm (trong hệ quy

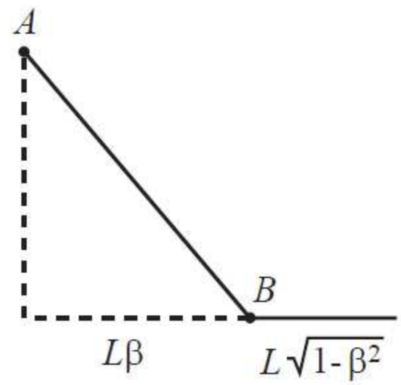


Hình 11.49:

chiếu của bạn) khi nó ở gần bạn nhất. Độ dài của nó bị co lại dọc theo chiều chuyển động, do đó nó sẽ có hình dạng hình chữ nhật với các cạnh L và L/γ. Đây là hình dạng trong hệ quy chiếu của bạn (ở đó hình dạng được định nghĩa là tất cả các điểm của vật thể tại cùng một thời điểm). Nhưng hình vuông trông sẽ như thế nào theo quan sát của bạn? Tức là các photon chạm vào mắt của bạn tại thời điểm cho trước nào?[42]

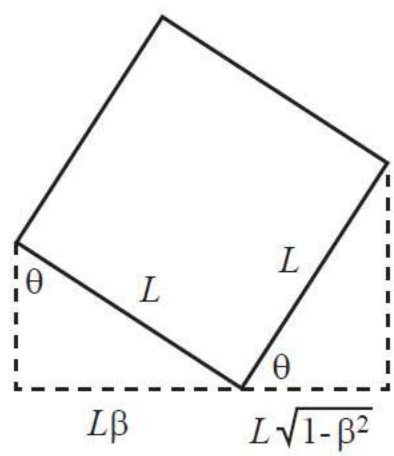
Các photon từ cạnh phía xa của hình vuông phải di chuyển thêm một khoảng cách L so với

[42]Trong các bài toán về thuyết tương đối, chúng ta gần như luôn luôn bỏ qua thời gian ánh sáng di



Hình 11.50:

các photon từ cạnh gần để tới được mắt của bạn. Do đó chúng cần thêm thời gian L/c để di chuyển. Suốt thời gian L/c, hình vuông di chuyển một khoảng cách $Lv/c \equiv L\beta$ sang phía bên. Do đó, từ hình vẽ 11.50, một photon phát ra từ điểm A sẽ chạm vào mắt của bạn tại cùng thời điểm với một photon phát ra từ điểm B. Điều này có nghĩa rằng cạnh xa của hình vuông tạo thành khoảng cách $L\beta$ ngang qua tầm nhìn của bạn, trong khi đó cạnh gần tạo thành khoảng cách $L/\gamma = L\sqrt{1-\beta^2}$ ngang qua tầm nhìn của bạn. Nhưng điều này chính xác là giống như một hình vuông cạnh L quay tròn, như chỉ ra trong hình 11.51, trong đó góc quay thỏa mãn $\sin\theta = \beta$. Đối với trường hợp một vòng tròn thay vì hình vuông, xem Hollenback (1976).



Hình 11.51:

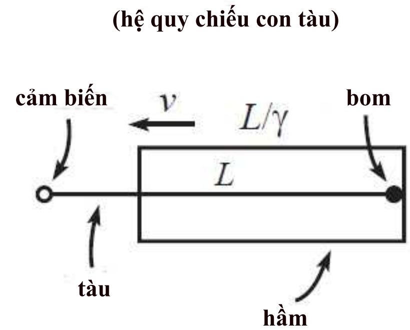
11.6. Một con tàu trong một chiếc hầm

Vâng, quả bom sẽ phát nổ. Điều này là rõ ràng trong hệ quy chiếu của con tàu (xem hình 11.52).

chuyển từ vật thể tới mắt của bạn (tức là chúng ta mô tả những gì thực sự xảy ra). Nhưng với ảnh hưởng Doppler đã thảo luận trong Mục 11.8, bài toán này là một trong vài ngoại lệ mà chúng ta thực sự muốn xác định những gì mà mắt bạn nhận được.

Trong hệ quy chiếu này, con tàu có độ dài L, và chiếc hầm chuyển động đi qua nó. Chiếc hầm có độ dài co lại thành L/γ. Do đó, đầu phía xa của chiếc hầm đi qua đầu phía trước của con tàu trước khi đầu phía gần của nó đi qua đầu phía sau của con tàu, dẫn đến quả bom sẽ phát nổ.

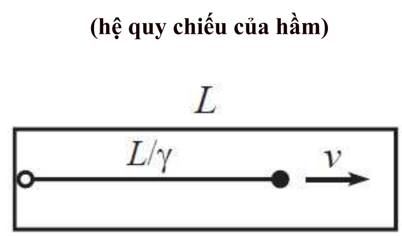
Tuy nhiên chúng ta cũng có thể xem xét mọi thứ trong hệ quy chiếu của chiếc hầm (xem



Hình 11.52:

hình 11.53). Ở đây chiếc hầm có độ dài L, và con tàu có độ dài co lại thành L/γ. Do đó, thiết bị cảm biến sẽ khởi động trước khi phía trước của con tàu ngang qua đầu phía xa của chiếc hầm, và dẫn đến bạn có thể nghĩ rằng quả bom sẽ không phát nổ. Ở đây chúng ta sẽ chỉ ra điều ngược lại.

Lời giải thích cho sự trái ngược này đó là thiết bị cảm biến không thể phát tín hiệu đồng thời



Hình 11.53:

tới quả bom để ngay lập tức tháo nổ cho nó. Phải mất một khoảng thời gian hữu hạn để tín hiệu di chuyển theo chiều dài của con tàu từ cảm biến tới quả bom. Và nó dẫn đến rằng thời gian di chuyển này sẽ không thể làm cho tín hiệu tháo nổ có thể tới quả bom trước khi quả bom tới đầu phía xa của chiếc hầm, cho dù là con tàu chuyển động nhanh đến như thế nào. Chúng ta sẽ chỉ ra điều này.

Tín hiệu sẽ có khả năng tốt nhất để tháo nổ trong trường hợp này nếu nó có vận tốc c, do đó chúng ta sẽ giả thiết là trường hợp này. Bây giờ tín hiệu tới quả bom trước khi quả bom tới đầu phía xa của hầm nếu và chỉ nếu một tia sáng phát ra từ đầu phía gần của hầm (tại thời điểm phía sau của con tàu đi qua) chạm tới đầu phía xa của hầm trước khi phía trước của con tàu tới đầu phía xa của hầm. Tường hợp đầu mất khoảng thời gian L/c. Trường hợp sau mất khoảng thời gian $L(1-1/\gamma)/v$, bởi vì phía trước của con tàu cách một khoảng L/γ qua hầm. Do đó nếu quả bom không phát nổ thì chúng ta phải có

$$\begin{aligned} & L/c < L(1-1/\gamma)/v \\ \iff \quad & \beta < 1-\sqrt{1-\beta^2} \\ \iff \quad & \sqrt{1-\beta^2} < 1-\beta \\ \iff \quad & \sqrt{1+\beta} < \sqrt{1-\beta}. \end{aligned} \tag{11.80}$$

Điều này là vô lý. Do đó, tín hiệu luôn luôn tới muộn, và quả bom sẽ luôn luôn phát nổ.

11.7. Quan sát phía sau chiếc gậy

Lý luận đầu tiên là chính xác. Bạn có thể quan sát một điểm trên thước kẻ có độ dài tới tường nhỏ hơn L. Bạn thực sự có thể quan sát một điểm có khoảng cách tới tường thậm chí là gần hơn L/γ, như chúng ta sẽ chỉ ra dưới đây.

Sai lầm trong lý luận thứ hai (trong hệ quy chiếu của chiếc gậy) đó là hình ảnh thứ hai trong hình vẽ 11.35 không phải là những gì mà bạn nhìn thấy. Hình ảnh thứ hai này chỉ ra các thứ trong đó tại cùng một thời điểm trong hệ quy chiếu của chiếc gậy chứ không phải là tại cùng một thời điểm trong hệ quy chiếu của bạn. Nói một cách khác, sai lầm là trong giả thiết ẩn rằng các tín hiệu di chuyển một cách đồng thời. Nhưng trong thực tế, phía sau của chiếc gậy không thể biết rằng phía trước của nó đã chạm vào tường cho đến khi một khoảng thời gian hữu hạn trôi qua. Suốt khoảng thời gian này, thước kẻ (và tường, và bạn) chuyển động xa hơn sang bên trái, điều này cho phép bạn quan sát chiếc thước kẻ được nhiều hơn. Chúng ta hãy tính toán định lượng vấn đề này và xác định (trong cả hai hệ quy chiếu) điểm gần nhất tới tường mà bạn có thể nhìn thấy.

Xét hệ quy chiếu của bạn, chiếc gậy có độ dài L/γ. Do đó, khi chiếc gậy chạm vào tường, bạn có thể quan sát thấy một điểm có khoảng cách L/γ tới tường. Tuy nhiên bạn sẽ có thể quan sát thấy một điểm gần tường hơn, bởi vì đầu phía sau của chiếc gậy sẽ tiếp tục chuyển động hướng về phía trước, bởi vì nó chưa biết được rằng đầu phía trước đã chạm vào tường. Tín hiệu dừng lại (sóng va chạm,...) cần phải có thời gian để di chuyển.

Giả sử rằng tín hiệu dừng lại di chuyển dọc chiếc gậy với vận tốc c. (Chúng ta có thể tính toán với một vận tốc tổng quát u, nhưng vận tốc c đơn giản hơn và sẽ dẫn đến một giới hạn trên của điểm gần nhất mà bạn có thể quan sát thấy.) Tín hiệu sẽ tới đầu phía sau ở đâu? Bắt đầu từ thời gian chiếc gậy chạm vào tường, tín hiệu di chuyển ngược lại từ tường với vận tốc c, trong khi đó đầu phía sau của chiếc gậy chuyển động hướng về phía trước với vận tốc v (từ một điểm cách xa tường L/γ). Do đó vận tốc tương đối (theo quan sát của bạn) của tín hiệu và đầu phía sau là $c+v$. Dẫn đến, tín hiệu chạm vào đầu phía sau sau khoảng thời gian $(L/\gamma)/(c+v)$. Suốt thời gian này, tín hiệu đã di chuyển một khoảng cách $c(L/\gamma)/(c+v)$ so với tường. Điểm gần nhất tới tường mà bạn có thể quan sát thấy trên thước kẻ do đó là điểm có giá trị

$$\frac{L}{\gamma(1+\beta)} = L\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}. \tag{11.81}$$

Bây giờ xét hệ quy chiếu của chiếc gậy. Tường chuyển động sang bên trái hướng về chiếc gậy với vận tốc v. Sau khi tường chạm vào đầu bên phải của chiếc gậy, tín hiệu di chuyển sang bên trái với vận tốc c, trong khi đó tường tiếp tục chuyển động sang bên trái với vận tốc v. Tường sẽ ở vị trí nào khi tín hiệu tới đầu bên trái? Tường di chuyển với vận tốc v, do đó nó sẽ di chuyển được một khoảng cách Lv/c trong khoảng thời gian mà tín hiệu di chuyển được khoảng cách L. Điều này có nghĩa là tường cách đầu bên trái của chiếc gậy một khoảng $L(1-v/c)$. Trong hệ quy chiếu của chiếc gậy, kết quả này tương ứng với khoảng cách $\gamma L(1-v/c)$ trên thước kẻ, bởi vì thước kẻ bị co độ dài. Do đó đầu bên trái của chiếc gậy là điểm có giá trị

$$L\gamma(1-\beta) = L\sqrt{\frac{1-\beta}{1+beta}}, \tag{11.82}$$

giống như kết quả trong phương trình (11.81).

11.8. Máy cắt bánh quy

Gọi đường kính của máy cắt bánh là L, và xem xét hai lý luận sau đây.

- Trong hệ quy chiếu quán tính, bột bánh bị co độ dài, do đó đường kính L tương ứng với một khoảng cách lớn hơn L (cụ thể là γL) trong hệ quy chiếu của bột bánh. Do đó, khi bạn mua một chiếc bánh quy, nó bị trải rộng ra bởi thừa số γ theo chiều của băng chuyền.[43]

- Trong hệ quy chiếu của bột bánh, máy cắt bánh bị co độ dài lại thành L/γ theo chiều chuyển động. Do đó trong hệ quy chiếu của bột bánh, bánh quy có độ dài chỉ là L/γ. Dẫn đến khi bạn mua một chiếc bánh quy, nó bị nén lại bởi thừa số γ theo chiều của băng chuyền.

Lý luận nào là chính xác? Câu trả lời là lý luận đầu tiên. Các chiếc bánh quy bị trải rộng ra. Sai lầm trong lý luận thứ hai đó là các phần khác nhau của máy cắt bánh không cắt bột đồng thời trong hệ quy chiếu của bột bánh. Những gì mà bột bánh quan sát thấy là: Giả sử rằng máy

[43]Hình dạng là một elip, bởi vì đó là hình dạng của một hình tròn bị trải rộng ra. Tâm sai của elip bằng tiêu cự chia cho nửa độ dài trục lớn. Như là một bài tập, bạn có thể chỉ ra rằng tâm sai trong trường hợp này bằng $\beta \equiv v/c$.

cắt di chuyển sang trái, phía phải của máy cắt dập vào bột, sau đó các phần gần của máy cắt dập vào bột, và cứ thế tiếp tục cho đến cuối cùng khi phía trái của máy dập vào bột. Nhưng trong khoảng thời gian này phía trước (tức là phía bên trái) của máy cắt đã di chuyển xa hơn sang trái. Do đó dẫn đến bánh sẽ có độ dài lớn hơn L. Sẽ mất một chút thời gian để giải thích (bằng cách làm việc trong hệ quy chiếu của bột bánh) rằng độ dài thực sự là γL, nhưng chúng ta sẽ làm điều đó ngay bây giờ.

Xét thời điểm khi điểm ở bên phải nhất của máy cắt dập vào bột. Trong hệ quy chiếu của bột bánh, một đồng hồ tại phía sau (phía bên phải) của máy cắt chỉ thời gian lớn hơn một lượng Lv/c^2 so với đồng hồ phía trước (phía bên trái). Do đó đồng hồ phía trước phải chạy thêm Lv/c^2 trong thời gian nó cắt bột. (Điều này là sự thật bởi vì tất cả các điểm trên máy cắt dập bột đồng thời trong hệ quy chiếu của máy cắt. Do đó, tất cả các đồng hồ của máy cắt cùng chỉ giống nhau khi chúng dập bột.) Nhưng do sự giãn nở thời gian, sẽ mất một khoảng thời gian $\gamma(Lv/c^2)$ trong hệ quy chiếu của bột bánh. Trong suốt thời gian này, máy cắt di chuyển một một khoảng cách $v(\gamma Lv/c^2)$. Bởi vì phía trước của máy cắt ban đầu có khoảng cách L/γ (do sự co độ dài) so với phía sau, nên tổng độ dài của bánh quy trong hệ quy chiếu của bột bánh sẽ là

$$\ell = \frac{L}{\gamma} + v\left(\frac{\gamma L v}{c^2}\right) = \gamma L\left(\frac{1}{\gamma^2} + \frac{v^2}{c^2}\right) = \gamma L\left(\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{v^2}{c^2}\right) = \gamma L,$$

như chúng ta muốn chỉ ra. Nếu bột bánh sau đó bị giảm chậm lại thì hình dạng của bánh quy vẫn sẽ không thay đổi. Do đó đây là hình dạng mà bạn nhìn thấy trong cửa hàng.

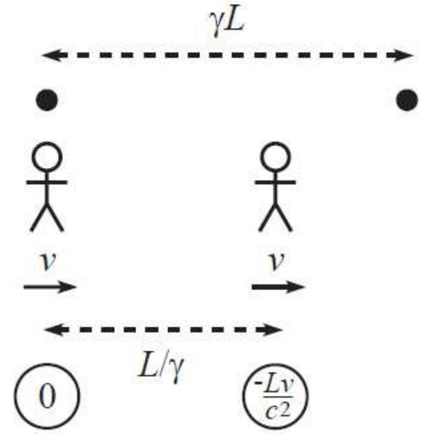
11.9. Ngắn hơn

(a) Trong hệ quy chiếu mà ở đó các quả bóng ban đầu ở trạng thái nghỉ, hình ảnh ban đầu (khi người bên trái bắt quả bóng bên trái tại thời điểm đồng hồ của anh ta chỉ không) được chỉ ra trong hình 11.54. Các quả bóng cách nhau một khoảng γL, và khoảng cách giữa hai người bị co lại thành L/γ. Đồng hồ của người phía trước chậm hơn Lv/c^2 so với đồng hồ của người phía sau, do đó nó chỉ $-Lv/c^2$.

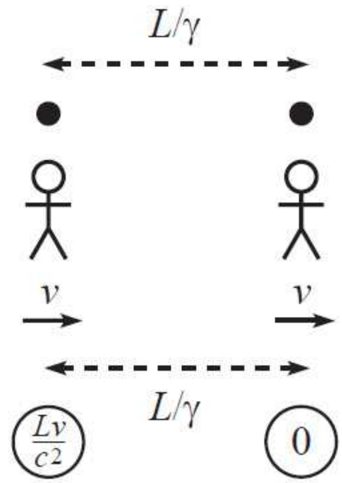
Hình ảnh cuối cùng (khi người bên phải bắt quả bóng bên phải tại thời điểm đồng hồ của anh ta chỉ không) được chỉ ra trong hình 11.55. Tại thời điểm người bên phải bắt quả bóng, người bên trái đã di chuyển sang bên phải trong khi giữ quả bóng bên trái. Đồng hồ của người bên trái chạy nhanh hơn, do đó nó chỉ Lv/c^2.

(b) Bằng cách quan sát các khoảng cách trong cách hình vẽ, chúng ta thấy rằng hai người đã di chuyển một khoảng $\gamma L - L/\gamma$.

Bây giờ chúng ta sẽ sử dụng số chỉ của các đồng hồ để thu được khoảng cách này. Tổng thời gian đối với quá trình này là $\gamma(Lv/c^2)$ bởi vì mỗi đồng hồ chạy một khoảng thời gian



Hình 11.54:



Hình 11.55:

Lv/c^2, nhưng các đồng hồ này chạy chậm trong hệ quy chiếu mà chúng ta đang làm việc. Bởi vì vận tốc của hai người là v, khoảng cách họ di chuyển là $v(\gamma Lv/c^2)$. Kết quả này phải bằng $\gamma L - L/\gamma$. Và quả thực nó bằng, bởi vì

$$\gamma L - \frac{L}{\gamma} = \gamma L\left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) = \gamma L\left(1 - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\right) = \frac{\gamma L v^2}{c^2}. \tag{11.83}$$

Nếu sau đó chúng ta thay đổi hệ quy chiếu mà trong đó mọi thứ ở trạng thái nghỉ thì chúng ta thấy rằng khoảng cách riêng giữa các quả bóng là L như chúng ta muốn chỉ ra.

(c) Tóm lại, khoảng cách riêng giữa các quả bóng giảm bởi vì trong hệ quy chiếu mà ở đó các quả bóng ban đầu ở trạng thái nghỉ, người bên trái bắt quả bóng bên trái đầu tiên và sau đó kéo nó gần hơn với quả bóng bên phải tại thời điểm người bên phải bắt quả bóng bên phải. Do đó tất cả đều dẫn đến sự mất tính đồng thời.

11.10. Một tập hợp các phép biến đổi Lorentz

Sử dụng các kết quả từ ví dụ "Các con tàu chuyển động" trong Mục 11.5.1 và Mục 11.6, các vận tốc tương đối và các thừa số liên kết γ đối với sáu cặp hệ quy chiếu là

	AB	AC	AD	BC	BD	CD
v	$5c/13$	$4c/5$	$c/5$	$3c/5$	$c/5$	$5c/7c$
γ	$13/12$	$5/3$	$5/2\sqrt{6}$	$5/4$	$5/2\sqrt{6}$	$7/2\sqrt{6}$

Từ ví dụ trong Mục 11.6, khoảng cách giữa hai sự kiện trong bốn hệ quy chiếu là

	A	B	C	D
Δx	$-L$	L	$5L$	0
Δt	$5L/c$	$5L/c$	$7L/c$	$2\sqrt{6}L/c$

Phép biến đổi Lorentz là

$$\begin{aligned} \Delta x &= \gamma(\Delta x' + v\Delta t'), \\ \Delta t &= \gamma(\Delta t' + v\Delta x'/c^2). \end{aligned} \tag{11.84}$$

Đối với mỗi cặp trong sáu cặp hệ quy chiếu này, chúng ta sẽ biến đổi từ hệ quy chiếu nhanh hơn sang hệ quy chiếu chậm hơn. Điều này có nghĩa là các tọa độ của hệ quy chiếu nhanh hơn sẽ ở bên vế phải của phép biến đổi Lorentz. Do đó dấu bên vế phải của phép biến đổi Lorentz sẽ luôn luôn là "+." Ví dụ trong trường hợp AB, chúng ta sẽ viết "Hệ quy chiếu B và A," theo thứ tự đó để biểu thị rằng các tọa độ của B ở bên vế trái và các tọa độ của A ở bên vế phải. Chúng ta liệt kê một cách đơn giản các phép biến đổi Lorentz đối với sáu trường hợp, và bạn có thể kiểm tra rằng chúng quả thực là chính xác.

$$\begin{aligned}
&\text{Hệ quy chiếu } B \text{ và } A: && L = \frac{13}{12}\left(-L + \left(\frac{5c}{13}\right)\left(\frac{5L}{c}\right)\right), \\
& && \frac{5L}{c} = \frac{13}{12}\left(\frac{5L}{c} + \frac{\frac{5c}{13}(-L)}{c^2}\right). \\[2ex]
&\text{Hệ quy chiếu } C \text{ và } A: && 5L = \frac{5}{3}\left(-L + \left(\frac{4c}{5}\right)\left(\frac{5L}{c}\right)\right), \\
& && \frac{7L}{c} = \frac{5}{3}\left(\frac{5L}{c} + \frac{\frac{4c}{5}(-L)}{c^2}\right). \\[2ex]
&\text{Hệ quy chiếu } D \text{ và } A: && 0 = \frac{5}{2\sqrt{6}}\left(-L + \left(\frac{c}{5}\right)\left(\frac{5L}{c}\right)\right), \\
& && \frac{2\sqrt{6}L}{c} = \frac{5}{2\sqrt{6}}\left(\frac{5L}{c} + \frac{\frac{c}{5}(-L)}{c^2}\right). \\[2ex]
&\text{Hệ quy chiếu } C \text{ và } B: && 5L = \frac{5}{4}\left(L + \left(\frac{3c}{5}\right)\left(\frac{5L}{c}\right)\right), \\
& && \frac{7L}{c} = \frac{5}{4}\left(\frac{5L}{c} + \frac{\frac{3c}{5}L}{c^2}\right).
\end{aligned} \tag{11.85}$$

$$\text{Hệ quy chiếu } B \text{ và } D: \qquad L = \frac{5}{2\sqrt{6}}\left(0 + \left(\frac{c}{5}\right)\left(\frac{2\sqrt{6}L}{c}\right)\right),$$

$$\frac{5L}{c} = \frac{5}{2\sqrt{6}}\left(\frac{2\sqrt{6}L}{c} + \frac{\frac{c}{5}(0)}{c^2}\right).$$

$$\text{Hệ quy chiếu } C \text{ và } D: \qquad 5L = \frac{7}{2\sqrt{6}}\left(0 + \left(\frac{5c}{7}\right)\left(\frac{2\sqrt{6}L}{c}\right)\right),$$

$$\frac{7L}{c} = \frac{7}{2\sqrt{6}}\left(\frac{2\sqrt{6}L}{c} + \frac{\frac{5c}{7}(0)}{c^2}\right).$$

11.11. Các vận tốc bằng nhau

LỜI GIẢI THỨ NHẤT: Giả sử C chuyển động với vận tốc v đối với mặt đất, và gọi vận tốc tương đối của C so với cả A và B là u (theo quan sát bởi C). Khi đó hai biểu thức khác nhau đối với u là trừ tương đối v từ $4c/5$, và trừ tương đối $3c/5$ từ v. Do đó (bỏ qua c),

$$\frac{\frac{4}{5} - v}{1 - \frac{4}{5}v} = u = \frac{v - \frac{3}{5}}{1 - \frac{3}{5}v}. \tag{11.86}$$

Điều này dẫn đến $0 = 35v^2 - 74v + 35 = (5v - 7)(7v - 5)$. Bởi vì nghiệm $v = 7/5$ biểu diễn một vận tốc lớn hơn c, nên chúng ta phải có

$$v = \frac{5}{7}c. \tag{11.87}$$

Thay giá trị này trở lại vào phương trình (11.86) dẫn đến $u = c/5$.

LỜI GIẢI THỨ HAI: Với v và u định nghĩa như ở trên, hai biểu thức khác nhau đối với v là từ tương đối u từ $4c/5$, và cộng tương đối u vào $3c/5$. Do đó,

$$\frac{\frac{4}{5} - u}{1 - \frac{4}{5}u} = v = \frac{\frac{3}{5} + u}{1 + \frac{3}{5}u}. \tag{11.88}$$

Điều này dẫn đến $0 = 5u^2 - 26u + 5 = (5u - 1)(u - 5)$. Bởi vì nghiệm $u = 5$ biểu diễn một vận tốc lớn hơn c nên chúng ta phải có

$$u = \frac{c}{5}. \tag{11.89}$$

Thay giá trị này trở lại vào phương trình (11.88) dẫn đến $v = 5c/7$.

LỜI GIẢI THỨ BA: Vận tốc tương đối của A và B là

$$\frac{\frac{4}{5} - \frac{3}{5}}{1 - \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5}} = \frac{5}{13}. \tag{11.90}$$

Từ quan sát của C, giá trị $5/13$ này là kết quả của việc cộng tương đối u với u. Do đó,

$$\frac{5}{13} = \frac{2u}{1 + u^2} \quad \Longrightarrow \quad 5u^2 - 26u + 5 = 0, \tag{11.91}$$

như cách giải thứ hai.

11.12. Thêm một trường hợp các vận tốc bằng nhau

Gọi u là vận tốc mà C quan sát thấy A và B tiến tới người ấy. Do đó u là vận tốc mong muốn của C đối với B, tức là đối với mặt đất. Từ quan sát của C, vận tốc cho trước v là kết quả của việc cộng tương đối u với u. Do đó (bỏ qua ký hiệu c),

$$v = \frac{2u}{1+u^2} \quad \Longrightarrow \quad u = \frac{1-\sqrt{1-v^2}}{v}. \tag{11.92}$$

Phương trình bậc hai đối với u cũng có một nghiệm với dấu trừ trước căn bậc hai, nhưng nghiệm này không thể thỏa mãn bởi vì nó lớn hơn 1 (và trong thực tế tiến dần tới vô cùng khi v tiến tới không). Nghiệm thu được ở trên đối với u có giới hạn riêng khi v tiến tới không, cụ thể là $u \to v/2$, giá trị này có thể thu được bằng cách sử dụng công thức Taylor cho căn bậc hai.

Tỷ số của các khoảng cách CB và AC trong hệ quy chiếu quán tính cũng giống như tỷ số của hiệu các vận tốc trong hệ quy chiếu quán tính (bởi vì cả A và C đều chạy đến B tại cùng một thời điểm, do đó bạn có thể dễ dàng tưởng tượng được điều này). Dẫn đến,

$$\begin{aligned} \frac{CB}{AC} = \frac{V_C - V_B}{V_A - V_C} &= \frac{\frac{1-\sqrt{1-v^2}}{v} - 0}{v - \frac{1-\sqrt{1-v^2}}{v}} \\ &= \frac{1-\sqrt{1-v^2}}{\sqrt{1-v^2} - (1-v^2)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \equiv \gamma. \end{aligned} \tag{11.93}$$

Chúng ta thấy rằng khoảng cách từ C đến B gấp γ lần khoảng cách từ C đến A khi đo trong hệ quy chiếu quán tính. Chú ý rằng đối với các vận tốc không quán tính, chúng ta có $\gamma \approx 1$, do đó C ở giữa A và B như mong muốn của chúng ta. Một lý do mang tính trực quan cho kết quả là thừa số đơn gian γ như sau. Tưởng tượng rằng A và B mang theo hai chiếc gậy giống hệt nhau khi họ chạy tới C. Xét tình huống khi đầu của các chiếc gậy chạm vào C. Trong hệ quy chiếu quán tính (hệ quy chiếu mà B ở trạng thái nghỉ), chiếc gậy của B không bị co lại, nhưng chiếc gậy của A bị co lại bởi thừa số γ. Do đó trong hệ quy chiếu quán tính, A sẽ gần C hơn so với B bởi thừa số γ.

11.13. Các vận tốc ngang bằng nhau

Từ quan sát của bạn, hệ quy chiếu quán tính chuyển động với vận tốc v theo chiều âm của trục x. Do đó công thức cộng vận tốc ngang, phương trình (11.38) sẽ dẫn đến vận tốc theo phương y trong hệ quy chiếu của bạn là $u_y/\gamma(1-u_x v)$. Cho giá trị này bằng u_y ta có

$$\gamma(1-u_x v) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{1-v^2} = (1-u_x v) \quad \Longrightarrow \quad v = \frac{2u_x}{1+u_x^2}. \tag{11.94}$$

hoặc $v = 0$, tất nhiên. Giá trị v này chỉ đơn giản là cộng tương đối u_x với chính nó. Điều này có ý nghĩa bởi vì nó chỉ ra rằng trong cả hệ quy chiếu của bạn và hệ quy chiếu quán tính ban đầu chuyển động với vận tốc u_x (nhưng theo chiều ngược nhau) đối với hệ quy chiếu mà trong đó vật thể không có vận tốc theo chiều x. Do đó, do tính đối xứng thì vận tốc theo phương y cũng phải giống nhau trong hệ quy chiếu của bạn và hệ quy chiếu quán tính.

11.14. Vận tốc tương đối

Xét hệ quy chiếu S' di chuyển cùng với điểm P ở giữa hai phần tử. S' chuyển động với vận tốc $v\cos\theta$, do đó thừa số γ liên kết nó với hệ quy chiếu quán tính là

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2\cos^2\theta}}. \tag{11.95}$$

Bây giờ chúng ta hãy tìm vận tốc thẳng đứng của các phần tử trong hệ quy chiếu S'. Bởi vì các phần tử có $u'_x = 0$, nên công thức cộng vận tốc ngang, phương trình (11.38), sẽ dẫn đến $v\sin\theta = u'_y/\gamma$. Do đó, trong S' mỗi phần tử chuyển động dọc theo trục thẳng đứng từ P với vận tốc

$$u'_y = \gamma v\sin\theta. \tag{11.96}$$

Vận tốc của một phần thử theo quan sát của phần tử còn lại bây giờ có thể tìm thông qua công thức cộng vận tốc theo chiều dọc,

$$V = \frac{2u'_y}{1+u'^2_y} = \frac{\frac{2v\sin\theta}{\sqrt{1-v^2\cos^2\theta}}}{1+\frac{v^2\sin^2\theta}{1-v^2\cos^2\theta}} = \frac{2v\sin\theta\sqrt{1-v^2\cos^2\theta}}{1-v^2\cos 2\theta}. \tag{11.97}$$

Nếu muốn, phương trình này có thể được viết lại như sau (để sử dụng cho phần tiếp theo trong Chương 13)

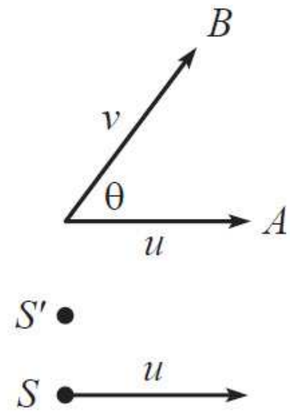
$$V = \sqrt{1-\frac{(1-v^2)^2}{(1-v^2\cos 2\theta)^2}}. \tag{11.98}$$

NHẬN XÉT: Nếu $2\theta = 180°$ thì $V = 2v/(1+v^2)$ như đã biết. Và nếu $\theta = 0°$ thì $V = 0$. Nếu θ rất nhỏ thì kết quả này rút gọn thành $V \approx 2v\sin\theta/\sqrt{1-v^2}$, giá trị này đơn giản chỉ là cộng không tương đối (về cơ bản) vận tốc trong phương trình (11.96) với chính nó. ♣

11.15. Một trường hợp vận tốc tương đối khác

Giả sử vận tốc của điểm A theo chiều x, như chỉ ra trong hình 11.56. Giả sử S' là hệ quy chiếu quán tính, và S là hệ quy chiếu của A (do đó hệ quy chiếu S' chuyển động với vận tốc $-u$ đối với S). Các vận tốc theo phương x và y của B trong hệ quy chiếu S' là $v\cos\theta$ và $v\sin\theta$. Do đó, công thức cộng vận tốc dọc và công thức cộng vận tốc ngang, phương trình (11.31) và phương trình (11.38) sẽ dẫn đến các thành phần vận tốc của B trong hệ quy chiếu S như sau

$$\begin{aligned} V_x &= \frac{v\cos\theta - u}{1-uv\cos\theta}, \\ V_y &= \frac{v\sin\theta}{\gamma_u(1-uv\cos\theta)} = \frac{\sqrt{1-u^2}v\sin\theta}{1-uv\cos\theta}. \end{aligned} \tag{11.99}$$



Hình 11.56:

Vận tốc tổng của B trong hệ quy chiếu S (tức là theo quan sát của A) do đó là

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{\left(\frac{v\cos\theta - u}{1 - uv\cos\theta}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{1-u^2}v\sin\theta}{1 - uv\cos\theta}\right)^2}$$
$$= \frac{\sqrt{u^2 + v^2 - 2uv\cos\theta - u^2v^2\sin^2\theta}}{1 - uv\cos\theta}. \tag{11.100}$$

Nếu muốn, phương trình này có thể được viết lại như sau

$$V = \sqrt{1 - \frac{(1-u^2)(1-v^2)}{(1-uv\cos\theta)^2}}. \tag{11.101}$$

Lý do tại sao phương trình này lại được sắp xếp như vậy sẽ được trả lời trong Chương 13.

NHẬN XÉT: Nếu $u = v$, công thức này sẽ rút gọn thành kết quả của bài toán trước (nếu chúng ta thay θ bởi 2θ). Nếu $\theta = 180^\circ$ thì $V = (u+v)/(1+uv)$. Và nếu $\theta = 0^\circ$ thì $V = |v-u|/(1-uv)$. ♣

11.16. Cộng vận tốc ngang

Giả sử rằng một đồng hồ trên phần tử chỉ thời gian T giữa hai lần liên tiếp đi qua các đường chấm chấm. Trong hệ quy chiếu S', vận tốc của phần tử là u', do đó thừa số giãn nở thời gian là $\gamma' = 1/\sqrt{1-u'^2}$. Dẫn đến thời gian giữa hai lần liên tiếp đi qua các đường chấm chấm là $T_{S'} = \gamma' T$.

Trong hệ quy chiếu S, vận tốc của phần tử là $\sqrt{v^2+u^2}$. (Tất nhiên là định lý Pitago cũng đúng cho các vận tốc này bởi vì cả hai vận tốc này cùng được đo trong cùng một hệ quy chiếu.) Do đó, thừa số giãn nở thời gian là $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2-u^2}$. Thời gian giữa hai lần liên tiếp đi qua các đường chấm chấm do đó sẽ là $T_S = \gamma T$. Cho hai biểu thức của chúng ta bằng nhau đối với $T_S/T_{S'}$ dẫn đến

$$\frac{u'}{u} = \frac{T_S}{T_{S'}} = \frac{\sqrt{1-u'^2}}{\sqrt{1-v^2-u^2}}. \tag{11.102}$$

Giải phương trình này đối với u sẽ thu được kết quả mong muốn,

$$u = u'\sqrt{1-v^2} \equiv \frac{u'}{\gamma_v}. \tag{11.103}$$

NHẬN XÉT: Một phương pháp ngắn gọn hơn đối với bài toán này như sau. Tưởng tượng có một đồng hồ ở trạng thái nghỉ trong S' với cùng giá trị x' như của phần tử. Giả sử đồng hồ này kêu tích tắc đồng thời (quan sát trong S') với mỗi lần phần tử ngang qua các đường chấm chấm. Khi đó đồng hồ cũng kêu tích tắc đồng thời với mỗi lần phần tử ngang qua các đường chấm chấm trong hệ quy chiếu S, bởi vì đồng hồ và phần tử có cùng giá trị x'. Nhưng đồng hồ tích tắc chậm hơn trong hệ quy chiếu S bởi thừa số $\sqrt{1-v^2}$. Do đó, vận tốc theo phương y nhỏ hơn trong hệ quy chiếu S bởi thừa số này như chúng ta muốn chỉ ra. ♣

11.17. Cộng nhiều vận tốc

Đầu tiên chúng ta kiểm tra công thức đối với $N=1$ và $N=2$. Khi $N=1$, công thức trở thành

$$\beta_{(1)} = \frac{P_1^+ - P_1^-}{P_1^+ + P_1^-} = \frac{(1+\beta_1)-(1-\beta_1)}{(1+\beta_1)+(1-\beta_1)} = \beta_1, \tag{11.104}$$

như giả thiết đã biết. Và khi $N=2$, công thức trở thành

$$\beta_{(2)} = \frac{P_2^+ - P_2^-}{P_2^+ + P_2^-} = \frac{(1+\beta_1)(1+\beta_2)-(1-\beta_1)(1-\beta_2)}{(1+\beta_1)(1+\beta_2)+(1-\beta_1)(1-\beta_2)} = \frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2}, \tag{11.105}$$

và đây chính là công thức cộng vận tốc.

Bây giờ chúng ta sẽ chứng minh cho trường hợp tổng quát N. Chúng ta sẽ sử dụng phương pháp quy nạp. Tức là chúng ta sẽ giả sử rằng kết quả đúng với N và sau đó chỉ ra rằng nó cũng đúng với $N+1$. Để tìm vận tốc $\beta_{(N+1)}$ của vật thể đối với S_{N+1}, chúng ta có thể cộng tương đối vận tốc của vật thể đối với S_N (vận tốc này bằng $\beta_{(N)}$) và vận tốc của S_N đối với S_{N+1} (vận tốc này bằng β_{N+1}). Điều này dẫn đến

$$\beta_{(N+1)} = \frac{\beta_{N+1}+\beta_{(N)}}{1+\beta_{N+1}\beta_{(N)}}. \tag{11.106}$$

Với giả thiết rằng công thức của chúng ta đúng với N nên phương trình này trở thành

$$\begin{aligned}
\beta_{(N+1)} = \frac{\beta_{N+1} + \frac{P_N^+ - P_N^-}{P_N^+ + P_N^-}}{1+\beta_{N+1}\frac{P_N^+ - P_N^-}{P_N^+ + P_N^-}} &= \frac{\beta_{N+1}(P_N^+ + P_N^-) + (P_N^+ - P_N^-)}{(P_N^+ + P_N^-) + \beta_{N+1}(P_N^+ - P_N^-)} \\
&= \frac{P_N^+(1+\beta_{N+1}) - P_N^-(1-\beta_{N+1})}{P_N^+(1+\beta_{N+1}) + P_N^-(1-\beta_{N+1})} \\
&\equiv \frac{P_{N+1}^+ - P_{N+1}^-}{P_{N+1}^+ + P_{N+1}^-},
\end{aligned} \tag{11.107}$$

như chúng ta muốn chỉ ra. Do đó chúng ta đã chỉ ra rằng nếu kết quả đã đúng với N thì nó cũng đúng với $N+1$. Và bởi vì ta biết rằng kết quả quả thực đã đúng với $N=1$ do đó nó đúng với mọi N.

Công thức đối với β_N có một vài đặc điểm mong đợi. Nó đối xứng với các β_i. Và nếu vật thể cho trước là một photon với $\beta_1 = 1$ thì $P_N^- = 0$, điều này dẫn đến $\beta_{(N)} = 1$. Và nếu vật thể cho trước là một photon với $\beta_1 = -1$ thì $P_N^+ = 0$, điều này dẫn đến $\beta_{(N)} = -1$.

NHẬN XÉT: Chúng ta có thể sử dụng kết quả của bài toán này để rút ra $v(t)$ cho trong phương trình (11.64). Đầu tiên, chú ý rằng nếu tất cả β_i ở đây bằng nhau và nếu giá trị chung của chúng là đủ nhỏ thì

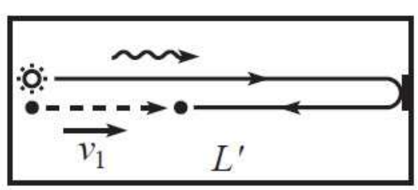
$$\beta_{(N)} = \frac{(1+\beta)^N - (1-\beta)^N}{(1+\beta)^N + (1-\beta)^N} \approx \frac{e^{\beta N} - e^{-\beta N}}{e^{\beta N} + e^{-\beta N}} = \tanh(\beta N). \tag{11.108}$$

Giả sử β bằng $a\, dt/c$, đây là vận tốc tương đối của hai hệ quy chiếu tại các thời điểm gần nhau trong mô hình con tàu không gian dẫn đến phương trình (11.64). Nếu chúng ta đặt $N = t/dt$ là số lượng các hệ quy chiếu (và nếu chúng ta lấy giới hạn $dt \to 0$), thì chúng ta mô tả lại mô hình con tàu không gian. Do đó, giá trị $\beta_{(N)}$ trong phương trình (11.108) sẽ bằng $v(t)$ trong phương trình (11.64). Và quả thực, với $\beta = a\, dt/c$ và $N = t/dt$, phương trình (11.108) dẫn đến $\beta_{(N)} = \tanh(at/c)$ như mong muốn. ♣

11.18. Thành lập công thức cộng vận tốc từ đầu

Như đã nói trong bài toán này, chúng ta sẽ sử dụng thực tế rằng sự gặp nhau của photon và quả bóng xảy ra tại cùng một tỷ số của quãng đường dọc con tàu, độc lập với hệ quy chiếu. Điều này là đúng bởi vì mặc dù khoảng cách có thể thay đổi phụ thuộc vào hệ quy chiếu nhưng tỷ số vẫn giữ nguyên, bởi vì sự co độ dài không phụ thuộc vào vị trí. Chúng ta sẽ tính toán tỷ số mong muốn trong hệ quy chiếu S' của con tàu, và sau đó trong hệ quy chiếu S của mặt đất.

HỆ QUY CHIẾU CON TÀU: Giải sử con tàu có độ dài L' trong hệ quy chiếu của nó. Đầu tiên



(hệ quy chiếu S')

Hình 11.57:

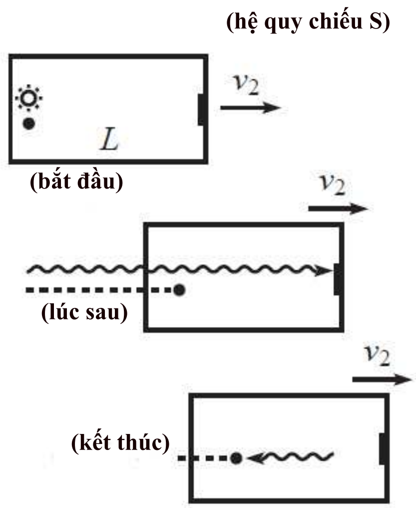
chúng ta hãy tìm thời điểm mà photon gặp quả bóng (xem hình 11.57). Từ hình vẽ, chúng ta thấy rằng tổng các khoảng cách di chuyển bởi quả bóng và photon $v_1t' + ct'$ phải bằng hai lần độ dài của con tàu, tức là bằng $2L'$. Do đó thời gian gặp nhau sẽ là

$$t' = \frac{2L'}{c + v_1}. \tag{11.109}$$

Khi đó khoảng cách mà quả bóng đã di chuyển là $v_1t' = 2v_1L'/(c + v_1)$, và phân số F' mong muốn là

$$F' = \frac{2v_1}{c + v_1}. \tag{11.110}$$

HỆ QUY CHIẾU MẶT ĐẤT: Gọi vận tốc của quả bóng đối với mặt đất là v, và giả sử con tàu



Hình 11.58:

có độ dài L trong hệ quy chiếu mặt đất ($L = L'/\gamma$ nhưng chúng ta sẽ không sử dụng điều này). Một lần nữa đầu tiên chúng ta hãy tìm thời điểm mà photon gặp quả bóng (xem hình 11.58). Ánh sáng mất khoảng thời gian $L/(c - v_2)$ để tới gương bởi vì gương lùi lại với vận tốc v_2. Tại thời điểm này, ánh sáng đã di chuyển một khoảng cách $cL/(c - v_2)$. Từ hình vẽ chúng ta thấy rằng ta có thể sử dụng lý luận giống như trường hợp hệ quy chiếu con tàu, nhưng bây giờ với tổng khoảng cách di chuyển bởi quả bóng và photon $vt + ct$ bằng $2cL/(c - v_2)$. Do đó thời gian gặp nhau sẽ là

$$t = \frac{2cL}{(c - v_2)(c + v)}. \tag{11.111}$$

Vận tốc tương đối của quả bóng và phía sau con tàu (quan sát trong hệ quy chiếu mặt đất) là $v - v_2$, do đó khoảng cách giữa quả bóng và phía sau con tàu tại thời điểm này là $2(v - v_2)cL/[(c - v_2)(c + v)]$. Dẫn đến phân số F mong muốn là

$$F = \frac{2(v - v_2)c}{(c - v_2)(c + v)}. \tag{11.112}$$

Bây giờ chúng ta có thể cho hai biểu thức trên của F và F' bằng nhau. Để thuận tiện, định nghĩa $\beta \equiv v/c$, $\beta_1 \equiv v_1/c$, và $\beta_2 \equiv v_2/c$. Khi đó $F' = F$ dẫn đến

$$\frac{\beta_1}{1+\beta_1} = \frac{\beta - \beta_2}{(1-\beta_2)(1+\beta)}. \tag{11.113}$$

Giải β theo β_1 và β_2 ta có

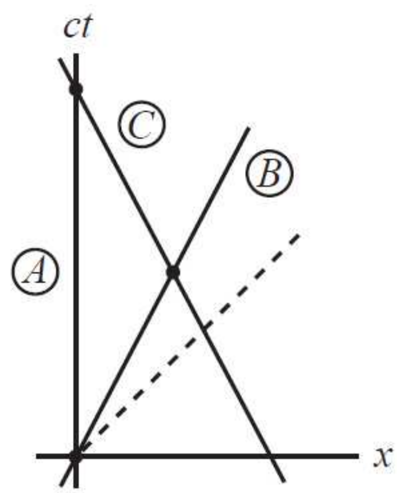
$$\beta = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1+\beta_1\beta_2}, \tag{11.114}$$

như mong muốn. Bài toán này được giải trong Mermin (1983).

11.19. Thay đổi ví dụ về sự nghịch lý của hai anh em sinh đôi

(a) Trong hệ quy chiếu của A, các đường vũ trụ của A, B và C được chỉ ra trong hình 11.59. Đồng hồ của B chạy chậm bởi một thừa số $1/\gamma$. Do đó, nếu đồng hồ của A chỉ thời gian t khi B gặp C thì đồng hồ của B chỉ t/γ khi anh ta gặp C. Dẫn đến thời gian anh ta gặp C là t/γ.

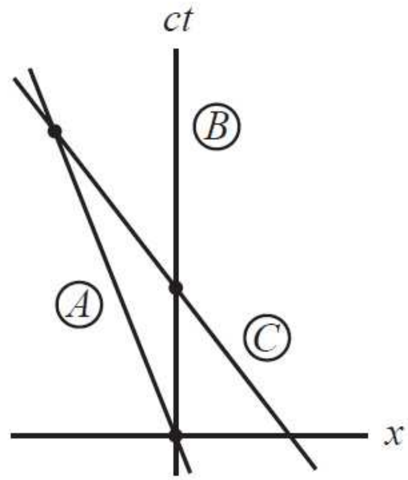
Trong hệ quy chiếu của A, thời gian giữa sự kiện này và sự kiện C lại gặp A bằng t, bởi



Hình 11.59:

vì B và C di chuyển cùng vận tốc. Nhưng A quan sát thấy đồng hồ của C chạy chậm bởi thừa số $1/\gamma$, do đó A nhìn thấy đồng hồ của C tăng lên thành t/γ. Dẫn đến khi A và C gặp nhau, đồng hồ của A chỉ $2t$, và đồng hồ của C chỉ $2t/\gamma$. Nói một cách khác, $T_C = T_A/\gamma$.

(b) Bây giờ chúng ta xem xét mọi thứ trong hệ quy chiếu của B. Các đường vũ trụ của A, B và C được chỉ ra trong hình 11.60. Từ quan sát của B, có hai ảnh hưởng dẫn đến mối quan hệ $T_C = T_A/\gamma$. Ảnh hưởng đầu tiên là B nhìn thấy đồng hồ của A chạy chậm, do đó thời gian mà anh ta gặp C lớn hơn thời gian mà đồng hồ của A chỉ tại thời điểm này. Ảnh hưởng thứ hai đó là B nhìn thấy đồng hồ của C chạy chậm hơn đồng hồ của A (bởi vì vận tốc tương



Hình 11.60:

đối của C và B lớn hơn vận tốc tương đối của A và B). Điều này dẫn đến thời gian chậm lớn hơn thời gian lúc đầu mà đồng hồ của C nhanh hơn đồng hồ của A. Do đó cuối cùng, đồng hồ của C chỉ thời gian chậm hơn đồng hồ của A. Chúng ta hãy tính toán định lượng điều này.

Gọi thời gian mà đồng hồ của B chỉ khi anh ta gặp C là t_B. Khi đó khi B gặp C tại thời điểm này, đồng hồ của A chỉ t_B/γ. Chúng ta sẽ tìm tất cả các thời liên quan dưới đây theo t_B. Chúng ta phải xác định thời gian trôi qua thêm trên đồng hồ của A và đồng hồ của C là bao nhiêu tại thời điểm họ gặp nhau. Từ công thức cộng vận tốc, B quan sát thấy C chuyển động sang bên trái với vận tốc $2v/(1+v^2)$. Anh ta cũng nhìn thấy A chuyển động sang bên trái với vận tốc v. Nhưng A xuất phát trước C một khoảng vt_B, do đó nếu t là thời gian (theo quan sát của B) giữa sự gặp nhau của B và C và sự gặp nhau của A và C, thì

$$\frac{2vt}{1+v^2} = vt + vt_B \quad \Longrightarrow \quad t = t_B\left(\frac{1+v^2}{1-v^2}\right). \tag{11.115}$$

Trong khoảng thời gian này, B quan sát thấy đồng hồ của A và C tăng lên đại lượng t chia cho thừa số giãn nở thời gian liên quan. Đối với A, thừa số này là $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$. Đối với C, thừa số này bằng

$$\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2v}{1+v^2}\right)^2}} = \frac{1+v^2}{1-v^2}. \tag{11.116}$$

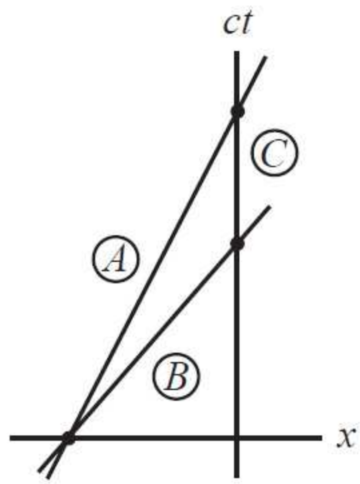
Do đó, tổng thời gian chỉ trên đồng hồ của A khi A gặp C là

$$\begin{aligned} T_A = \frac{t_B}{\gamma} + t\sqrt{1-v^2} &= t_B\sqrt{1-v^2} + t_B\left(\frac{1+v^2}{1-v^2}\right)\sqrt{1-v^2} \\ &= \frac{2t_B}{\sqrt{1-v^2}}. \end{aligned} \tag{11.117}$$

Và tổng thời gian chỉ trên đồng hồ của C khi A và C gặp nhau là

$$T_C = t_B + t\left(\frac{1-v^2}{1+v^2}\right) = t_B + t_B\left(\frac{1+v^2}{1-v^2}\right)\left(\frac{1-v^2}{1+v^2}\right) = 2t_B. \tag{11.118}$$

Do đó, $T_C = T_A\sqrt{1-v^2} \equiv T_A/\gamma$.



Hình 11.61:

(c) Bây giờ chúng ta sẽ làm việc trong hệ quy chiếu của C. Các đường vũ trụ của A, B và C được chỉ ra trong hình 11.61. Như trong phần (b), vận tốc tương đối của B và C là $2v/(1+v^2)$, và thừa số giãn nở thời gian giữa B vàC là $(1+v^2)/(1-v^2)$. Mặt khác cũng như trong phần (b), giả sử B và C gặp nhau khi đồng hồ của B chỉ t_B. Do đó đây là thời gian mà B gặp C. Chúng ta sẽ tìm tất cả các thời gian liên quan theo t_B.

C quan sát thấy đồng hồ của B chạy chậm, do đó từ quan sát của C, B di chuyển trong khoảng thời gian $t_B(1+v^2)/(1-v^2)$ sau khi anh ta gặp A. Trong thời gian này, B di chuyển được một khoảng cách trong hệ quy chiếu của C bằng

$$d = t_B\left(\frac{1+v^2}{1-v^2}\right)\frac{2v}{1+v^2} = \frac{2vt_B}{1-v^2}. \tag{11.119}$$

A phải di chuyển một khoảng cách giống như vậy (từ vị trí mà anh ta gặp B) để gặp C. Bây giờ ta có thể tìm T_A. Thời gian (quan sát bởi C) để A di chuyển được khoảng cách d tới C là $d/v = 2t_B/(1-v^2)$. Nhưng bởi vì C quan sát thấy đồng hồ của A chạy chậm bởi thừa số $\sqrt{1-v^2}$ nên đồng hồ của A sẽ chỉ

$$T_A = \frac{2t_B}{\sqrt{1-v^2}}. \tag{11.120}$$

Bây giờ chúng ta hãy tìm T_C. Để tìm T_C, chúng ta phải lấy t_B và thêm vào khoảng thời gian thêm để A tới C so với thời gian B tới C. Từ phần trên, thời gian thêm này là

$2t_B/(1-v^2) - t_B(1+v^2)/(1-v^2) = t_B$. Do đó, đồng hồ của C chỉ

$$T_C = 2t_B. \tag{11.121}$$

Dẫn đến, $T_C = T_A\sqrt{1-v^2} \equiv T_A/\gamma$.

11.20. Ném quả bóng trên một con tàu

(a) Trong hệ quy chiếu con tàu, khoảng cách đơn giản chỉ là $d = L$. Và thời gian là $t = L/(c/3) = 3L/c$.

(b) (i) Vận tốc của quả bóng đối với mặt đất là (với $u = c/3$ và $v = c/2$)

$$V_g = \frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}} = \frac{\frac{c}{3}+\frac{c}{2}}{1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{5c}{7}. \tag{11.122}$$

Độ dài của con tàu trong hệ quy chiếu mặt đất là $L/\gamma_{1/2} = \sqrt{3}L/2$. Do đó, tại thời điểm t vị trí của phía trước con tàu là $\sqrt{3}L/2 + vt$. Và vị trí của quả bóng là $V_g t$. Hai vị trí này bằng nhau khi

$$(V_g - v)t = \frac{\sqrt{3}L}{2} \quad\Longrightarrow\quad t = \frac{\frac{\sqrt{3}L}{2}}{\frac{5c}{7}-\frac{c}{2}} = \frac{7L}{\sqrt{3}c}. \tag{11.123}$$

Một cách tương đương, thời gian này thu được bằng cách chú ý rằng quả bóng tiến lại gần vị trí xuất phát ban đầu $\sqrt{3}L/2$ của phía trước con tàu, với vận tốc tương đối $V_g - v$. Khoảng cách mà quả bóng di chuyển là $d = V_g t = (5c/7)(7L/\sqrt{3}c) = 5L/\sqrt{3}$.

(ii) Trong hệ quy chiếu con tàu, khoảng không gian và thời gian là $x' = L$ và $t' = 3L/c$ từ phần (a). Thừa số γ giữa các hệ quy chiếu là $\gamma_{1/2} = 2/\sqrt{3}$, do đó phép biến đổi Lorentz sẽ dẫn đến các tọa độ trong hệ quy chiếu mặt đất như sau

$$\begin{aligned} x &= \gamma(x' + vt') = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(L + \frac{c}{2}\left(\frac{3L}{c}\right)\right) = \frac{5L}{\sqrt{3}}, \\ t &= \gamma(t' + vx'/c^2) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{3L}{c} + \frac{\frac{c}{2}(L)}{c^2}\right) = \frac{7L}{\sqrt{3}c}, \end{aligned} \tag{11.124}$$

giống như các kết quả ở phần trên.

(c) Trong hệ quy chiếu của quả bóng, con tàu có độ dài $L/\gamma_{1/3} = \sqrt{8}L/3$. Do đó, thời gian để con tàu bay qua quả bóng với vận tốc $c/3$ là $t = (\sqrt{8}L/3)/(c/3) = 2\sqrt{2}L/c$. Và tất nhiên khoảng cách là $d = 0$ bởi vì quả bóng không chuyển động trong hệ quy chiếu quả bóng.

(d) Giá trị $c^2t^2 - x^2$ trong ba hệ quy chiếu là:

Hệ quy chiếu con tàu: $c^2t^2 - x^2 = c^2(3L/c)^2 - L^2 = 8L^2$.

Hệ quy chiếu mặt đất: $c^2t^2 - x^2 = c^2(7L/\sqrt{3}c)^2 - (5L/\sqrt{3})^2 = 8L^2$.

Hệ quy chiếu quả bóng: $c^2t^2 - x^2 = c^2(2\sqrt{2}L/c)^2 - (0)^2 = 8L^2$.

Tất cả các giá trị này đều bằng nhau.

(e) Vận tốc tương đối của hệ quy chiếu quả bóng và hệ quy chiếu mặt đất là $5c/7$. Do đó, $\gamma_{5/7} = 7/2\sqrt{6}$ và các thời gian quả thực liên hệ bởi

$$t_g = \gamma t_b \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{7L}{\sqrt{3}c} = \frac{7}{2\sqrt{6}}\left(\frac{2\sqrt{2}L}{c}\right), \quad \text{điều này là đúng.} \tag{11.125}$$

(f) Vận tốc tương đối của hệ quy chiếu quả bóng và hệ quy chiếu mặt đất là $c/3$. Do đó, $\gamma_{1/3} = 3/2\sqrt{2}$ và các thời gian quả thực liên hệ bởi

$$t_t = \gamma t_b \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{3L}{c} = \frac{3}{2\sqrt{2}}\left(\frac{2\sqrt{2}L}{c}\right), \quad \text{điều này là đúng.} \tag{11.126}$$

(g) Vận tốc tương đối của hệ quy chiếu con tàu và hệ quy chiếu mặt đất là $c/2$. Do đó, $\gamma_{1/2} = 2/\sqrt{3}$, và các thời gian không liên hệ với nhau bởi một thừa số giãn nở thời gian đơn giản, bởi vì

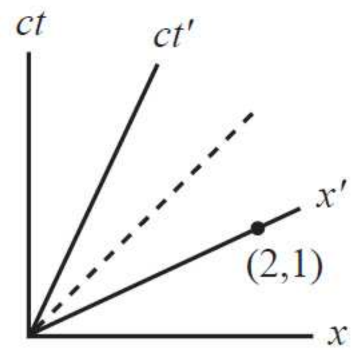
$$t_g \neq \gamma t_t \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{7L}{\sqrt{3}c} \neq \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{3L}{c}\right). \tag{11.127}$$

Chúng ta không thu được một đẳng thức bởi vì sự giãn nở thời gian chỉ đúng khi sử dụng với hai sự kiện xảy ra tại cùng một vị trí trong một hệ quy chiếu. Về mặt toán học, phép biến đổi Lorentz $\Delta t = \gamma(\Delta t' + (v/c^2)\Delta x')$ dẫn đến $\Delta t = \gamma \Delta x'$ chỉ đúng khi $\Delta x' = 0$. Trong bài toán này, các sự kiện "quả bóng rời phía sau" và "quả bóng chạm vào phía trước" xảy ra tại cùng một vị trí trong hệ quy chiếu quả bóng, nhưng không cùng một vị trí trong hệ quy chiếu con tàu cũng như hệ quy chiếu mặt đất. Một cách tương đương, không có hệ quy chiếu nào trong hai hệ quy chiếu con tàu và mặt đất là đặc biệt hơn hệ quy chiếu còn lại cho đến khi hai sự kiện này xảy ra. Do đó nếu một người nào đó cứ cố gắng sử dụng sự giãn nở thời gian, anh ta sẽ gặp khó khăn khi quyết định vế nào của phương trình mà γ có mặt.

11.21. Một hệ quy chiếu mới

LỜI GIẢI THỨ NHẤT: Xét sơ đồ Minkowski trong hình 11.62. Trong hệ quy chiếu S, sự kiện 1 xảy ra ở gốc tọa độ, và sự kiện 2 xảy ra ở điểm $(2, 1)$. Bây giờ xét hệ quy chiếu S' có trục x' đi qua điểm $(2, 1)$. Bởi vì tất cả các điểm trên trục x' là đồng thời trong hệ quy chiếu S' (tất cả chúng đều có $t' = 0$), chúng ta thấy rằng S' là hệ quy chiếu mong muốn. Từ phương trình (11.47), độ nghiêng của trục x' bằng $\beta \equiv v/c$. Bởi vì độ nghiêng là $1/2$, chúng ta có $v = c/2$. Chú ý rằng bằng cách quan sát sơ đồ Minkowski, rõ ràng rằng nếu vận tốc tương đối của S và S' lớn hơn $c/2$ thì sự kiện 2 xảy ra trước sự kiện 1 trong S'. Và nếu nó nhỏ hơn $c/2$ thì sự kiện 2 xảy ra sau sự kiện 1 trong S'.

LỜI GIẢI THỨ HAI: Gọi hệ quy chiếu gốc là S, và hệ quy chiếu mong muốn là S'. Giả sử S' chuyển động với vận tốc v (theo chiều dương) đối với S. Mục đích của chúng ta là tìm v. Phép



Hình 11.62:

biến đổi Lorentz từ S đến S' là

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t), \quad \Delta t' = \gamma(\Delta t - v\Delta x/c^2). \tag{11.128}$$

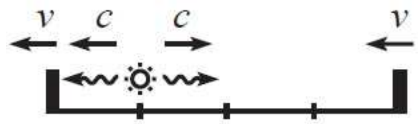
Chúng ta muốn làm cho $\Delta t'$ bằng không, do đó phương trình thứ hai trong các phương trình này dẫn đến $\Delta t - v\Delta x/c^2$, hoặc $v = c^2\Delta t/\Delta x$. Chúng ta đã có $\Delta x = 2$ và $\Delta t = 1/c$, do đó giá trị v mong muốn là $c/2$.

LỜI GIẢI THỨ BA: Xét mô hình trong hình 11.63, mô hình này xây dựng rõ ràng hai sự kiện

Hình 11.63:

cho trước. Các máy thu đặt tại $x = 0$ và $x = 2$, và một nguồn sáng đặt tại $x = 1/2$. Nguồn sáng phát ra một chớp sáng, và khi ánh sáng chạm vào máy thu thì chúng ta sẽ nói rằng một sự kiện đã xảy ra. Do đó sự kiện bên trái xảy ra tại $x = 0$, $ct = 1/2$. Và sự kiện bên phải xảy ra tại $x = 2$, $ct = 3/2$. Nếu chúng ta muốn, chúng ta có thể thay đổi các đồng hồ của chúng ta đi một đại lượng $-1/(2c)$ để làm cho các sự kiện xảy ra tại $ct = 0$ và $ct = 1$, nhưng sự thay đổi này là không cần thiết bởi vì tất cả những gì mà chúng ta liên quan tới là hiệu thời gian.

Bây giờ xét một người quan sát di chuyển sang bên phải với vận tốc v. Cô ta quan sát thấy toàn bộ dụng cụ thí nghiệm chuyển động sang trái với vận tốc v (xem hình 11.64). Mục đích của chúng ta là đi tìm v để cho các photon chạm vào các máy thu tại cùng một thời điểm trong hệ quy chiếu của cô ta. Xét các photon chuyển động sang bên trái. Cô ta nhìn thấy chúng chuyển động với vận tốc v, nhưng máy thu bên trái lại lùi lại với vận tốc v. Do đó vận tốc tương đối (đo bởi người ấy) của các photon và máy thu bên trái là $c - v$. Bằng lý luận tương tự, vận tốc



Hình 11.64:

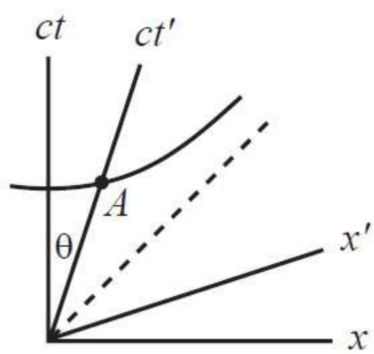
tương đối của các photon và máy thu bên phải là $c+v$. Nguồn sáng cách xa gấp ba lần đến máy thu bên phải so với đến máy thu bên trái. Do đó, nếu ánh sáng chạm vào hai máy thu tại cùng một thời điểm thì chúng ta phải có $c+v = 3(c-v)$. Điều này dẫn đến $v = c/2$.

11.22. Đơn vị trong sơ đồ Minkowski

Tất cả các điểm trên trục ct' đều có đặc điểm là $x' = 0$. Tất cả các điểm trên hyperbol đều có đặc điểm là $c^2t'^2 - x'^2 = 1$ do tính bất biến của đại lượng s^2. Do đó giá trị ct' tại giao điểm A bằng 1. Dẫn đến, chúng ta đơn giản chỉ phải xác định khoảng cách trên giấy từ điểm A tới gốc tọa độ (xem hình 11.65). Chúng ta sẽ thực hiện điều này bằng cách tìm các tọa độ (x, ct) của A. Chúng ta biết rằng $\tan\theta = \beta$. Nhưng $\tan\theta = x/ct$. Do đó, $x = \beta(ct)$ (điều này chỉ là phát biểu rằng $x = vt$). Thay thế giá trị này vào phương trình đã biết ở trên, $c^2t^2 - x^2 = 1$. chúng ta tìm được $ct = 1/\sqrt{1-\beta^2}$. Khi đó khoảng cách từ A tới gốc tọa độ là

$$\sqrt{c^2t^2 + x^2} = ct\sqrt{1+\beta^2} = \sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}}. \tag{11.129}$$

Do đó đại lượng này là tỷ số của các kích thước đơn vị trên các trục ct' và ct, giống như trong



Hình 11.65:

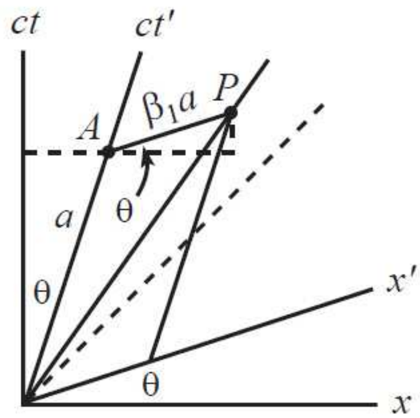
phương trình (11.46). Phân tích giống hệt như vậy cũng đúng đối với tỷ số kích thước đơn vị trên trục x.

11.23. Cộng vận tốc bằng sơ đồ Minkowski

Lấy một điểm P trên đường vũ trụ của vật thể. Giả sử các tọa độ của P trong hệ quy chiếu S

là (x, ct). Mục đích của chúng ta là tìm vận tốc $u = x/t$. Trong suốt bài toán này, sẽ dễ dàng hơn khi làm việc với đại lượng $\beta \equiv v/c$, do đó mục đích của chúng ta sẽ là tìm $\beta_u \equiv x/(ct)$.

Các tọa độ của P trong S', cụ thể là (x', ct'), sẽ được biểu thị bằng hình bình hành trong



Hình 11.66:

hình 11.66. Để thuận tiện, giả sử ct' có độ dài a trên trang giấy. Khi đó từ giả thiết chúng ta có $x' = v_1 t' \equiv \beta_1(ct') = \beta_1 a$. Đây là khoảng cách từ A đến P trên trang giấy. Theo a, bây giờ chúng ta có thể xác định các tọa độ $(x.ct)$ của P. Các tọa độ của điểm A là

$$(x, ct)_A = (a \sin\theta, a\cos\theta). \tag{11.130}$$

Các tọa độ của P đối với A là

$$(x, ct)_{P-A} = (\beta_1 a \cos\theta, \beta_1 a \sin\theta). \tag{11.131}$$

Cộng hai tập hợp các tọa độ này sẽ dẫn đến tọa độ của điểm P như sau

$$(x, ct)_P = (a\sin\theta + \beta_1 a\cos\theta, a\cos\theta + \beta_1 a \sin\theta). \tag{11.132}$$

Do đó tỷ số của x và ct tại điểm P là

$$\beta_u \equiv \frac{x}{ct} = \frac{\sin\theta + \beta_1\cos\theta}{\cos\theta + \beta_1\sin\theta} = \frac{\tan\theta + \beta_1}{1 + \beta_1\tan\theta} = \frac{\beta_2 + \beta_1}{1 + \beta_1\beta_2}, \tag{11.133}$$

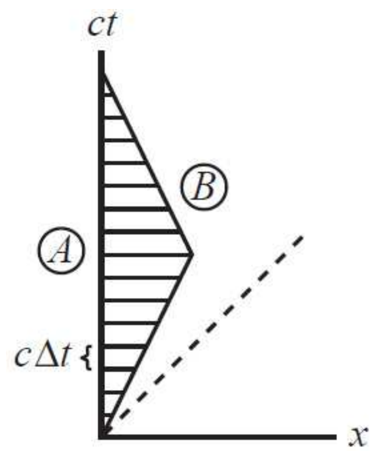
ở đó chúng ta đã sử dụng $\tan\theta = v_2/c \equiv \beta_2$, bởi vì S' chuyển động với vận tốc v_2 đối với S. Nếu chúng ta thay đổi lại ký hiệu từ β trở lại v thì kết quả sẽ là $u = (v_2 + v_1)/(1 + v_1 v_2/c^2)$ như mong đợi.

11.24. Tiếng vỗ tay

(a) Từ kết quả về sự giãn nở thời gian thông thường, A nhìn thấy đồng hồ của B chạy chậm, do đó B phải vỗ tay tại khoảng thời gian $\Delta t/\gamma$ để dẫn đến khoảng thời gian Δt trong hệ quy chiếu của A. Sơ đồ Minkowski thích hợp được chỉ ra trong hình 11.67. Giả sử B vỗ tay tại các vị trí không thời gian ở đó các đường ngang (các đường của sự đồng thời trong hệ quy chiếu A) giao với đường vũ trụ của B. Từ giả thiết, khoảng cách thẳng đứng giữa các đường này là $c\Delta t$. Do đó, khoảng cách dọc theo đường vũ trụ nghiêng của B (đường này có độ nghiêng là $\pm 1/\beta$) là $\sqrt{1+\beta^2}c\Delta t$. Nhưng chúng ta biết từ phương trình (11.46) rằng kích thước đơn vị của trục ct của B trên trang giấy là $\sqrt{(1+\beta^2)/(1-beta^2)}$ nhân với kích thước đơn vị của trục ct của A. Do đó, khoảng thời gian giữa các tiếng vỗ tay trong hệ quy chiếu của B là

$$\frac{\sqrt{1+\beta^2}\Delta t}{\sqrt{(1+\beta^2)/(1-\beta^2)}} = \sqrt{1-\beta^2}\Delta t \equiv \frac{\Delta t}{\gamma}, \tag{11.134}$$

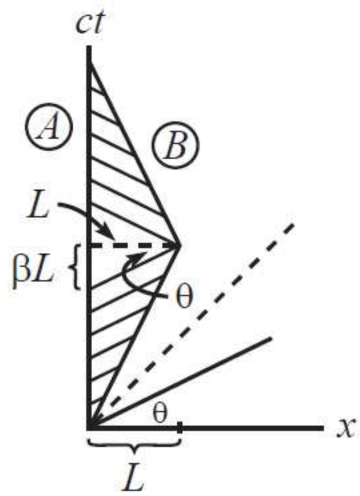
như ở trên.



Hình 11.67:

(b) Từ kết quả về sự giãn nở thời gian thông thường, B quan sát thấy đồng hồ của A chạy chậm, do đó A phải vỗ tay tại các khoảng thời gian $\Delta t/\gamma$ để dẫn đến các khoảng thời gian là Δt trong hệ quy chiếu của B. Tuy nhiên, B có thể sử dụng lý luận về sự giãn nở thời gian thông thường chỉ trong các phần của hành trình khi anh ta trong một hệ quy chiếu quán tính. Tức là anh ta không thể sử dụng nó suốt hành trình quay trở lại. Do đó chúng ta có tình huống như trong hình 11.68. Giả sử A vỗ tay tại những vị trí không thời gian ở đó các đường nghiêng (các đường của sự đồng thời trong hệ quy chiếu của B) giao với đường vũ trụ của A. Từ giả thiết, khoảng cách nghiêng giữa các đường dọc theo đường vũ trụ của B là $c\Delta t$ nhân với đơn vị, tức là có độ dài $\sqrt{(1+\beta^2)(1-\beta^2)}c\Delta t$ trên trang giấy. Nhưng khi đó bằng cách lý luận hình học giống như cách dẫn ra phương trình (11.49), khoảng cách thẳng đứng giữa các đường kẻ dọc theo đường vũ trụ của A là (bạn nên kiểm tra lại) $\sqrt{1-\beta^2}c\Delta t$, kết quả này dẫn đến khoảng thời gian $\Delta t/\gamma$ như ở trên.

Nhưng điểm then chốt ở đây đó là bởi vì độc dốc của các đường nghiêng đột ngột thay đổi



Hình 11.68:

khi B quay trở lại, có một khoảng lớn thời gian ở giữa đường vũ trụ của A ở đó các đường nghiêng không chạm vào nó. Kết quả là A vỗ tay liên tục trong một khoảng thời gian, sau đó không vỗ tay trong một khoảng, và sau đó lại vỗ tay. Kết quả nói chung như chúng ta sẽ chỉ ra bây giờ đó là thời gian sẽ trôi qua nhiều hơn trong hệ quy chiếu của A (tất nhiên nó sẽ dẫn đến là $2L/v$, trong đó L là khoảng cách trong hệ quy chiếu của A tới ngôi sao) so với trong hệ quy chiếu của B ($2L/\gamma v$, từ kết quả sự giãn nở thời gian thông thường).

Bởi vì thời gian giữa các tiếng vỗ tay là ngắn hơn trong hệ quy chiếu của A so với hệ quy chiếu của B (trừ trong miền ở giữa), nên thời gian trôi qua trên đồng hồ của A trong khi anh ta vỗ tay là $1/\gamma$ nhân với tổng thời gian trôi qua trên đồng hồ của B, điều này dẫn đến $(1L/\gamma v)/\gamma = 2L/\gamma^2 v$. Nhưng như trong hình 11.68, độ dài của miền trên trục ct của A ở đó không có tiếng vỗ tay là $2\beta L$, giá trị này tương ứng với thời gian $2vL/c^2$. Tổng thời gian trôi qua trên đồng hồ của A trong toàn bộ quá trình do đó sẽ là

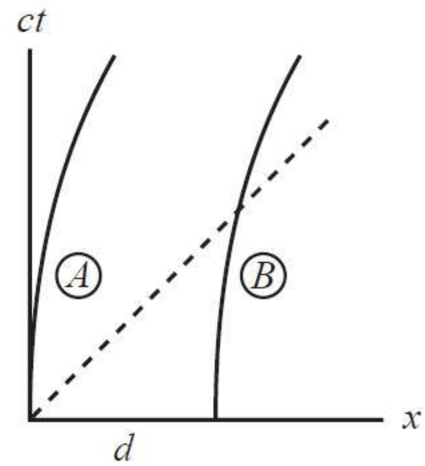
$$\frac{2L}{\gamma^2 v} + \frac{}{2}vLc^2 = \frac{2L}{v}\left(\frac{1}{\gamma^2} + \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{2L}{v}\left(\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{2L}{v}, \tag{11.135}$$

như mong đợi.

11.25. Gia tốc và sự thay đổi màu đỏ

Có nhiều cách khác nhau để giải bài toán này, ví dụ bằng cách gửi đi các photon giữa hai người, hoặc bằng cách sử dụng nguyên lý tương đương trong thuyết tương đối tổng quát. Ở đây chúng ta sẽ giải bằng cách sử dụng sơ đồ Minkowski, để chứng minh rằng kết quả thay đổi màu đỏ này có thể hoàn toàn được rút ra chỉ bằng việc sử dụng thuyết tương đối hẹp cơ bản.

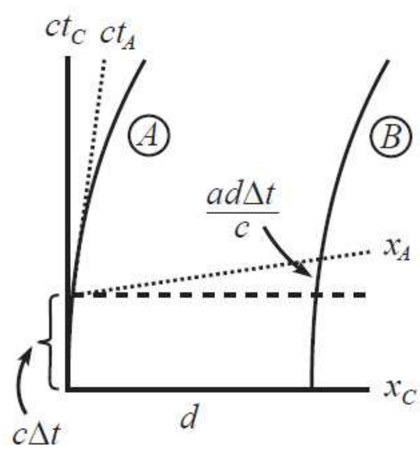
Vẽ các đường vũ trụ của hai người A và B theo cách nhìn của người quan sát trong hệ quy chiếu mà ở đó họ ban đầu đều ở trạng thái nghỉ. Chúng ta có tình huống như trong hình 11.69.



Hình 11.69:

Xét một khoảng thời gian vô cùng nhỏ Δt đo bởi C. Tại thời điểm này (trong hệ quy chiếu của C), A và B đều chuyển động với vận tốc $a\Delta t$. Các trục trong hệ quy chiếu của A được chỉ ra như trong hình 11.70. Cả A và B đều đã di chuyển một khoảng cách $a(\Delta t)^2/2$, giá trị này có thể bỏ qua bởi vì Δt là rất nhỏ (chúng ta sẽ chỉ giữ lại trong kết quả các đại lượng bậc nhất của Δt, do đó bất kỳ các đại lượng $(\Delta t)^2$ nào cũng có thể bỏ qua). Cũng như vậy, thừa số giãn nở thời gian trong thuyết tương đối hẹp giữa hai hệ quy chiếu bất kỳ trong ba hệ quy chiếu A, B, C đều có thể bỏ qua, bởi vì các vận tốc tương đối tối đa cũng chỉ bằng $v = a\Delta t$, do đó các thừa số giãn nở thời gian sai khác với 1 bởi bậc $(\Delta t)^2$. Giả sử A tạo ra một vụ nổ nhỏ (gọi sự kiện này là E_1) tại thời điểm Δt trong hệ quy chiếu của C. Khi đó Δt cũng là thời gian của vụ nổ đo bởi A với sai số bậc $(\Delta t)^2$.

Bây giờ chúng ta hãy tìm hiểu vị trí trục x của A (tức là trục hiện thời trong hệ quy chiếu của



Hình 11.70:

A) giao với đường vũ trụ của B. Độ nghiêng của trục x của A trong hình vẽ là $v/c = a\Delta t/c$, trên khoảng cách d (khoảng cách quả thực là d với sai số cùng bậc với $(\Delta t)^2$). Do đó, trục x của A cắt đường vũ trụ của B tại độ cao $c\Delta t + ad\Delta t/c$ theo quan sát của C, tức là tại thời điểm $\Delta t + ad\Delta t/c^2$ theo quan sát bởi C. Nhưng thời gian của C giống như thời gian của B (sai khác đến bậc $(\Delta t)^2$), do đó đồng hồ của B chỉ $\Delta t(1 + ad/c^2)$. Dẫn đến có thể nói rằng B tạo ra một vụ nổ nhỏ (sự kiện E_2 tại thời điểm này).

Cả hai sự kiện E_1 và E_2 đều xảy ra tại cùng một thời điểm trong hệ quy chiếu của A, bởi vì chúng đều nằm dọc trên đường thời gian hằng số trong hệ quy chiếu của A. Điều này có nghĩa là trong hệ quy chiếu của A, đồng hồ của B chỉ $\Delta t(1 + ad/c^2)$ khi đồng hồ của A chỉ Δt. Do đó, trong hệ quy chiếu (thay đổi) của A, đồng hồ của B bị tăng nhanh bởi một thừa số,

$$\frac{\Delta t_B}{\Delta t_A} = 1 + \frac{ad}{c^2}. \tag{11.136}$$

Chúng ta có thể thực hiện cách làm tương tự để thấy đồng hồ của A thay đổi như thế nào trong hệ quy chiếu của B. Vẽ trục x của B tại thời điểm Δt, chúng ta nhanh chóng tìm ra rằng trong hệ quy chiếu (thay đổi) của B, đồng hồ của A bị chậm lại bởi thừa số,

$$\frac{\Delta t_A}{\Delta t_B} = 1 - \frac{ad}{c^2}. \tag{11.137}$$

Chúng ta sẽ thấy nhiều hơn những kết quả này trong Chương 14.

NHẬN XÉT:

1. Trong tình huống thông thường của thuyết tương đối hẹp ở đó hai người quan sát bay qua nhau với vận tốc tương đối v, họ đều nhìn thấy thời gian của người còn lại chậm đi bởi cùng một thừa số. Điều này có vẻ là dễ dàng hiểu được bởi vì tình huống là đối xứng giữa hai người quan sát. Nhưng trong bài toán này, A quan sát thấy đồng hồ của B chạy nhanh hơn, còn B quan sát thấy đồng hồ của A chạy chậm lại. Sự khác nhau này có thể bởi vì tình huống là không đối xứng giữa A và B. vector gia tốc xác định một chiều trong không gian, và một người (cụ thể là B) là xa hơn dọc theo chiều này so với người còn lại.

2. Một cách thành lập khác của kết quả ad/c^2 này như sau. Xét trạng thái sau một thời gian ngắn sau khi bắt đầu. Một người quan sát bên ngoài nhìn thấy đồng hồ của A và đồng hồ của B chỉ cùng một thời gian. Do đó, theo kết quả thông thường đồng hồ phía sau chạy nhanh hơn vd/c^2 trong thuyết tương đối hẹp, đồng hồ của B phải chỉ nhanh hơn vd/c^2 so với đồng hồ của A trong hệ quy chiếu chuyển động. Do đó sự tăng trong mỗi đơn vị thời gian theo quan sát của A là $(vd/c^2)/t = ad/c^2$. Chú ý rằng bất kỳ ảnh hưởng nào về sự giãn nở thời gian hoặc sự co độ dài trong thuyết tương đối hẹp đều là bậc hai đối với v/c, và do đó có thể bỏ qua vì v là rất nhỏ ở đây. Tại bất kỳ thời gian nào sau đó, chúng ta có thể lặp lại (một cách ngắn gọn) cách làm này trong hệ quy chiếu nghỉ tức thời của A. ♣

11.26. Phá vỡ hay không phá vỡ

Có hai lý luận có thể, do đó chúng ta dường như có một sự nghịch lý:

- Đối với một người quan sát ở quan hệ quy chiếu nghỉ ban đầu, các con tàu không gian cách nhau cùng một khoảng cách d. Do đó, trong hệ quy chiếu của các con tàu, khoảng cách giữa d' giữa chúng phải bằng γd. Điều này là đúng bởi vì d' là khoảng cách thu được do sự co độ dài của d. Sau khoảng thời gian đủ lớn, γ sẽ khác đáng kể so với 1, do đó dây sẽ bị kéo ra bởi một thừa số lớn. Do đó nó sẽ bị đứt.

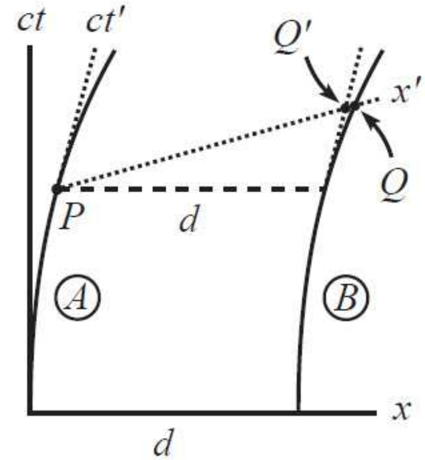
- Giả sử A là con tàu phía sau, và B là con tàu phía trước. Từ quan sát của A, dường như hành động của B giống hệt như hành động của anh ta (và ngược lại). A nói rằng B có cùng gia tốc như anh ta. Do đó B sẽ luôn luôn ở cùng một khoảng cách phía trước anh ta. Dẫn đến sợi dây sẽ không bị đứt.

Lý luận đầu tiên là chính xác (hoặc gần như là chính xác; xem nhận xét đầu tiên dưới đây). Sợi dây sẽ bị đứt. Dẫn đến đó là câu trả lời đối với bài toán của chúng ta. Nhưng cũng giống như bất kỳ sự trái ngược nào trong lý thuyết tương đối, chúng ta sẽ không cảm thấy thoải mái cho đến khi chúng ta giải thích được điều gì sai trong lý luận không chính xác.

Vấn đề đối với lý luận thứ hai đó là A không nhìn thấy B hành động giống như những gì anh ta hành động. Chính xác hơn, chúng ta đã biết từ bài tập 11.25 là A nhìn thấy đồng hồ của B chạy nhanh hơn (và B nhìn thấy đồng hồ của A chạy chậm hơn). Do đó A quan sát thấy động cơ của B chạy nhanh hơn, và dẫn đến kéo B ra xa khỏi A. Do đó, thực sự là sợi dây sẽ bị đứt.[44]

Mọi thứ sẽ trở lên rõ ràng nếu chúng ta vẽ sơ đồ Minkowski. Hình 11.71 chỉ ra các trục x' và ct' của hệ quy chiếu A. Trục x bị nghiêng lên trên, do đó nó sẽ cắt đường vũ trụ của B xa hơn về bên phải so với nhưng gì bạn có thể tưởng tượng. Khoảng cách PQ dọc theo trục x' là khoảng cách mà A đo chiều dài của sợi dây. Mặc dù không hiển nhiên rằng khoảng cách này trong hệ quy chiếu của A là lớn hơn d (bởi vì kích thước đơn vị trên trục x' là lớn hơn trong hệ quy chiếu gốc), chúng ta có thể chứng minh điều này như sau. Trong hệ quy chiếu của A, khoảng cách PQ lớn hơn khoảng cách PQ'. Nhưng PQ' chỉ đơn giản là độ dài của một vật nào đó trong hệ quy chiếu của A mà có độ dài d trong hệ quy chiếu gốc. Do đó PQ' là γd trong hệ quy chiếu của A. Và bởi vì $PQ > \gamma d > d$ trong hệ quy chiếu của A nên sợi dây sẽ bị đứt.

[44]Điều này cũng có thể suy ra từ nguyên lý tương đương và ảnh hưởng giãn nở thời gian trong thuyết tương đối tổng quát mà chúng ta sẽ thảo luận trong Chương 14. Bởi vì A và B tăng tốc, do đó họ có thể được xem như là ở trong một trường trọng lực (theo nguyên lý tương đương), với B cao hơn trong trường trọng lực đó. Nhưng các đồng hồ ở cao thì chạy nhanh hơn trong trường trọng lực. Do đó, A nhìn thấy đồng hồ của B chạy nhanh hơn (và B nhìn thấy đồng hồ của A chạy chậm hơn).



Hình 11.71:

NHẬN XÉT:

1. Chỉ có một thiếu sót nhỏ (không quan trọng) trong lý luận đầu tiên ở trên. Đó là không tồn tại một "hệ quy chiếu của các con tàu". Hệ quy chiếu của chúng là khác nhau, bởi vì có một vận tốc tương đối giữa chúng. Do đó, sẽ không rõ ràng là độ dài của sợi dây là trong hệ quy chiếu nào, bởi vì không biết là sự đo đạc được tiến hành trong hệ quy chiếu nào. Tuy nhiên sự mơ hồ này sẽ không thay đổi được thực tế rằng A và B quan sát thấy khoảng cách giữa họ (khoảng chừng) là γd.

   Nếu chúng ta muốn định nghĩa một cách rõ ràng "hệ quy chiếu của các con tàu", chúng ta có thể thay đổi bài toán bằng cách phát biểu rằng sau một khoảng thời gian các con tàu không gian dừng tăng tốc một cách đồng thời theo quan sát của một người nào đó trong hệ quy chiếu quán tính ban đầu. Một cách tương đương, A và B tắt động cơ của họ sau cùng một khoảng thời gian riêng. A sẽ quan sát thấy gì tiếp theo. B bị kéo ra xa A. Sau đó B tắt động cơ của anh ta. Khoảng cách tiếp tục kéo dài ra. Nhưng A tiếp tục chạy động cơ của anh ta cho đến khi đạt tới vận tốc của B. Khi đó họ chuyển động hướng về phía trước, trong một hệ quy chiếu thông thường, giữ một khoảng cách không đổi (khoảng cách này lớn hơn khoảng cách ban đầu bởi thừa số γ).

2. Vấn đề chính trong bài toán này đó là nó phụ thuộc hoàn toàn vào việc chúng ta chọn như thế nào để tăng tốc một vật thể ra xa. Nếu chúng ta tăng tốc một chiếc gậy bằng cách đẩy đầu phía sau (hoặc kéo đầu phía trước), độ dài của nó về cơ bản sẽ giữ không đổi trong hệ quy chiếu của bản thân nó, hoặc sẽ ngắn hơn trong hệ quy chiếu ban đầu. Nhưng nếu chúng ta sắp xếp đối với mỗi đầu (hoặc có thể một số điểm trên chiếc gậy) để tăng tốc bằng cách sao cho chúng luôn luôn chuyển động với cùng vận tốc đối với hệ quy chiếu ban đầu thì chiếc gậy sẽ bị gẫy.

3. Bài toán này đưa ra một nguyên tắc cơ bản đối với bài toán cổ điển của bánh xe, bài toán này có thể phát biểu như sau (bạn có thể muốn bỏ qua đoạn sau, do đó bạn có thể tự mình giải bài toán). Một bánh xe quay nhanh dần, cho đến khi các điểm trên vành chuyển động với vận tốc tương đối. Trong hệ quy chiếu quán tính, chu vị của bánh xe bị co độ dài, nhưng nan hoa không co lại (bởi vì chúng luôn luôn nằm vuông góc với chiều chuyển động.) Do đó nếu vành có độ dài $2\pi r$ trong hệ quy chiếu quán tính, thì nó sẽ có độ dài $2\pi\gamma r$ trong hệ quy chiếu của bánh xe. Do đó, trong hệ quy chiếu của bánh xe, tỷ số của chu vi bánh xe và đường kính lớn hơn π. Dẫn đến câu hỏi đặt ra là: Điều này có thực sự là chính xác? Và nếu đúng như vậy thì chu vi dài hơn trong hệ quy chiếu của bánh xe như thế nào?

   Tôi đặt câu này ở đây trong trường hợp bạn tình cờ nhìn thấy câu đầu tiên của đoạn này khi bạn đang cố gắng bỏ qua nó và tự mình giải bài toán; sẽ chắc chắn thậm chí là lâu hơn một chút nữa, có thể sẽ như vậy. Câu trả lời đó là quả thực là đúng. Nếu chúng ta tưởng tượng có các động cơ trên lửa nhỏ đặt xung quanh vành, và nếu chúng ta làm cho tất cả chúng cùng tăng tốc với cùng gia tốc riêng, thì từ các kết quả trên, khoảng cách giữa các động cơ sẽ dần dần tăng lên, dẫn đến độ dài của chu vi cũng tăng lên. Giả sử rằng vật liệu của vành không thể kéo dài ra vô hạn, do đó vành cuối cùng sẽ bị phá vỡ giữa mỗi động cơ. Trong hệ quy chiếu quay của bánh xe (và do đó là hệ quy chiếu không quán tính), tỷ số của chu vi và bán kính quả thực lớn hơn π. Nói một cách khác, không gian bị cong trong hệ quy chiếu bánh xe. Điều này là phù hợp với các thực tế rằng (1) nguyên lý tương đương (thảo luận trong Chương 14) phát biểu rằng gia tốc tương đương với trọng lực, và (2) các trường trọng lực trong thuyết tương đối tổng quát liên kết với không gian cong. ♣

11.27. Các phép biến đổi Lorentz liên tiếp

Tất nhiên sẽ không nhất thiết phải sử dụng ma trận trong bài toán này, nhưng mọi thứ nhìn sẽ đơn giản hơn nếu chúng ta sử dụng ký hiệu ma trận. Phép biến đổi Lorentz hợp mong muốn được thu được bằng cách nhân hai ma trận của mỗi phép biến đổi Lorentz riêng lẻ. Do đó ta có

$$\begin{aligned} L &= \begin{pmatrix} \cosh\phi_2 & \sinh\phi_2 \\ \sinh\phi_2 & \cosh\phi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh\phi_1 & \sinh\phi_1 \\ \sinh\phi_1 & \cosh\phi_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh\phi_1\cosh\phi_2 + \sinh\phi_1\sinh\phi_2 & \sinh\phi_1\cosh\phi_2 + \cosh\phi_1\sinh\phi_2 \\ \cosh\phi_1\sinh\phi_2 + \sinh\phi_1\cosh\phi_2 & \sinh\phi_1\sinh\phi_2 + \cosh\phi_1\cosh\phi_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh(\phi_1+\phi_2) & \sinh(\phi_1+\phi_2) \\ \sinh(\phi_1+\phi_2) & \cosh(\phi_1+\phi_2) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{11.138}$$

Đây là một phép biến đổi Lorentz với $v = \tanh(\phi_1 + \phi_2)$ như mong muốn. Ngoại trừ một vài dấu trừ, thì chứng minh này giống như phép chứng minh đối với các phép quay liên tiếp trong mặt phẳng.

11.28. Thời gian tăng tốc

Phương trình (11.64) dẫn đến vận tốc như là một hàm của thời gian của con tàu (thời gian chúng ta định nghĩa là t' ở đây) như sau

$$\beta(t') \equiv \frac{v(t')}{c} = \tanh(at'/c). \tag{11.139}$$

Người đứng trong hệ quy chiếu quán tính quan sát thấy đồng hồ của con tàu chậm hơn bởi thừa số $1/\gamma = \sqrt{1-\beta^2}$, điều này có nghĩa là $dt = dt'/\sqrt{1-\beta^2}$. Do đó chúng ta có

$$t = \int_0^t dt = \int_0^{t'} \frac{dt'}{\sqrt{1-\beta(t')^2}} = \int_0^{t'} \cosh(at'/c)dt' = \frac{c}{a}\sinh(at'/c). \tag{11.140}$$

Đối với giá trị nhỏ của a hoặc t' (chính xác hơn là đối với $at'/c \ll 1$), chúng ta thu được $t \approx t'$ như chúng ta đã có. Khi thời gian lớn, chúng ta có

$$t \approx \frac{c}{2a}e^{at'/c}, \quad \text{hoặc} \quad t' = \frac{c}{a}\ln(2at/c). \tag{11.141}$$

Một người đứng trong hệ quy chiếu quán tính sẽ quan sát thấy phi hành gia đọc toàn bộ cuốn tiểu thuyết *Moby Dick*, nhưng sẽ mất một thời gian rất lâu theo quy luật số mũ (chứ không phải là không thực hiện được).

Chương 12

Chuyển động tương đối (Động lực học)

Trong chương trước, chúng ta chỉ đề cập tới các phần tử trừu tượng chuyển động trong không gian và thời gian. Chúng ta không quan tâm đến tính tự nhiên của các phần tử, điều gì làm cho chúng chuyển động, hoặc điều gì sẽ xảy ra nếu các phần tử tương tác lẫn nhau. Trong chương này chúng ta sẽ bàn về nhưng vấn đề này. Cụ thể là chúng ta sẽ thảo luận về khối lượng, lực, năng lượng, động lượng, ... Hai kết quả chính của chương này đó là động lượng và năng lượng của một phần tử cho bởi

$$\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}, \quad \text{và} \quad E = \gamma m c^2, \tag{12.1}$$

trong đó $\gamma \equiv 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, và m là khối lượng của phần tử.[1] Khi $v \ll c$, biểu thức đối với $\mathbf{p}$ rút gọn thành $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, đây là trường hợp động lượng đối với phần tử không tương đối. Khi $v = 0$, biểu thức đối với E rút gọn thành công thức nổi tiếng $E = mc^2$.

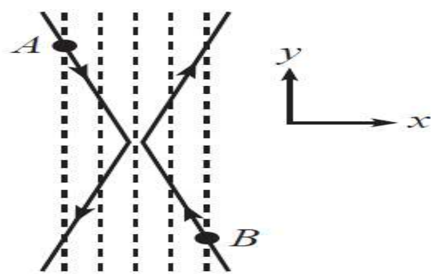
12.1 Năng lượng và động lượng

Trong mục này, chúng ta sẽ đưa ra một vài kiểm chứng đối với phương trình (12.1). Các lý luận ở đây sẽ thuyết phục bạn về tính đúng đắn của nó. Một cách khác, và có lẽ mang tính thuyết phục và rõ ràng hơn sẽ đến từ khái niệm về vectơ 4 chiều trong Chương 13.

[1] Có nhiều cách khác nhau mà mọi người hay sử dụng từ "khối lượng" trong chuyển động tương đối. Cụ thể, một số người nói về "khối lượng nghỉ" và "khối lượng tương đối". Nhưng chúng ta sẽ không sử dụng thuật ngữ này. Chúng ta sẽ sử dụng thuật ngữ "khối lượng" chỉ để đề cập tới cái mà mọi người gọi là "khối lượng nghỉ". Xem thảo luận ở trang 590 để tìm hiểu thêm về vấn đề này.

Tuy nhiên trong phần cuối, sự kiểm chứng phương trình (12.1) sẽ thu được thông qua các thí nghiệm. Và quả thực, các thí nghiệm trong máy gia tốc năng lượng cao đã liên tục chứng minh tính đúng đắn của các công thức này. (Một cách chính xác hơn, chúng chứng minh rằng năng lượng và động lượng này được bảo toàn trong bất kỳ dạng va chạm nào.) Do đó chúng ta có thể chắc chắn kết luận rằng phương trình (12.1) đưa ra các biểu thức chính xác đối với năng lượng và động lượng. Nhưng bên cạnh các thí nghiệm thực tế, chúng ta hãy xem xét một vài thí nghiệm tưởng tượng để xác minh các công thức trên.

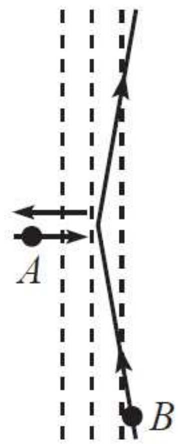
12.1.1 Động lượng



Hình 12.1:

Xét một mô hình sau đây. Trong hệ quy chiếu quán tính, hai phần tử A và B giống hệt nhau chuyển động như trong hình 12.1. Chúng chuyển động với các vận tốc có giá trị nhỏ, bằng nhau nhưng ngược chiều nhau theo phương x, và với các vận tốc có giá trị lớn, bằng nhau nhưng ngược chiều nhau theo phương y. Quỹ đạo của chúng được sắp xếp sao cho chúng chệch qua nhau và đảo chiều chuyển động của chúng theo phương x. Tưởng tượng rằng có một chuỗi các đường thẳng đứng cách đều nhau trong hệ quy chiếu của chúng ta. Giả sử rằng A và B có các đồng hồ giống hệt nhau kêu tích tắc mỗi lần chúng đi qua một trong các đường thẳng này.

Bây giờ chúng ta xét hệ quy chiếu chuyển động theo chiều y với cùng tốc độ v_y giống như A. Trong hệ quy chiếu này, tình huống được chỉ ra giống như trong hình 12.2. Sự va chạm đơn giản chỉ làm thay đổi dấu của các thành phần vận tốc theo phương x của các phần tử. Do đó, động lượng theo phương x của hai phần tử phải giống nhau. Điều này là chính xác bởi vì chẳng hạn nếu như p_x của A lớn hơn p_x của B thì tổng p_x sẽ hướng sang bên phải trước khi va chạm, và hướng sang bên trái sau khi va chạm. Bởi vì động lượng là đại lượng mà chúng ta muốn bảo toàn, do đó không thể xảy ra trường hợp này.



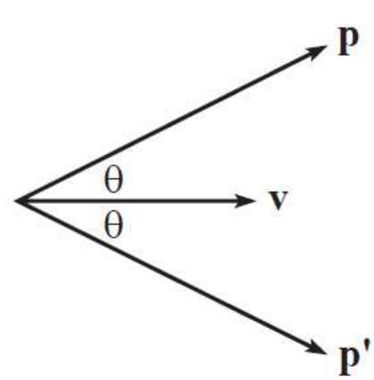
Hình 12.2:

Tuy nhiên, vận tốc theo phương x của hai phần tử không bằng nhau trong hệ quy chiếu này. A về bản chất là ở trạng thái nghỉ trong hệ quy chiếu này, và B chuyển động với vận tốc rất lớn v. Do đó, đồng hồ của B chạy chậm hơn đồng hồ của A bởi một thừa số về bản chất là bằng $1/\gamma \equiv \sqrt{1 - v^2/c^2}$. Và bởi vì đồng hồ của B tích tắc mỗi lần đối với mọi đường thẳng đứng mà nó ngang qua (điều thực tế này là độc lập với hệ quy chiếu), do đó B phải chuyển động chậm hơn theo chiều x bởi thừa số $1/\gamma$. Dẫn đến, công thức Newton $p_x = mv_x$ không thể còn đúng đối với động lượng, bởi vì động lượng của B sẽ nhỏ hơn động lượng của A (bởi thừa số $1/\gamma$) do sự khác nhau v_x của họ. Nhưng thừa số γ trong phương trình

$$p_x = \gamma m v_x \equiv \frac{m v_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{12.2}$$

phải rất thận trọng trong bài toán này bởi vì $\gamma \approx 1$ đối với A, và $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ đối với B, giá trị này bỏ qua ảnh hưởng của thành phần vận tốc v_x nhỏ của B.

Để thu được dạng ba chiều của $\mathbf{p}$, chúng ta có thể sử dụng thực tế rằng vectơ $\mathbf{p}$ phải có



Hình 12.3:

cùng chiều với vectơ **v**, bởi vì bất kỳ chiều khác nào của **p** sẽ vi phạm tính bất biến của sự quay. Nếu một người nào đó khẳng định rằng **p** hướng theo chiều như trong hình 12.3 thì anh ta sẽ gặp khó khăn khi giải thích tại sao nó lại không hướng theo chiều **p'** như trong hình vẽ. Tóm lại, chiều của **v** phải là hướng ưu tiên hơn trong không gian. Do đó phương trình (12.2) chỉ ra rằng vectơ động lượng phải là

$$\mathbf{p} = \gamma m\mathbf{v} \equiv \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{12.3}$$

giống như phương trình (12.1). Chú ý rằng tất cả các thành phần của **p** có cùng mẫu số, mẫu số này liên quan đến vận tốc toàn phần $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$. Mẫu số chẳng hạn của p_x sẽ không là $\sqrt{1 - v_x^2/c^2}$. Bởi vì điều này sẽ dẫn đến thu được một vectơ **p** không cùng chiều với **v**.

Mô hình trên chỉ là một mô hình dạng cụ thể của va chạm trong số lượng vô hạn các dạng va chạm có thể có. Chúng ta đã chỉ ra với mô hình này vectơ chỉ có thể có dạng $f(v)m\mathbf{v}$ (trong đó f là một hàm nào đó) mà được bảo toàn trong va chạm là $\gamma m\mathbf{v}$ (hoặc bằng một hằng số nào đó nhân với giá trị này). Chúng ta không chứng minh rằng nó thực tế được bảo toàn trong tất cả các va chạm. Đây là chỗ mà tập hợp các dữ liệu từ các thí nghiệm sẽ sử dụng để kiểm chứng. Nhưng chúng ta cũng đã chỉ ra ở trên rằng sẽ là lãng phí thời gian khi xem xét các hàm có dạng ví dụ như $\gamma^5 m\mathbf{v}$.

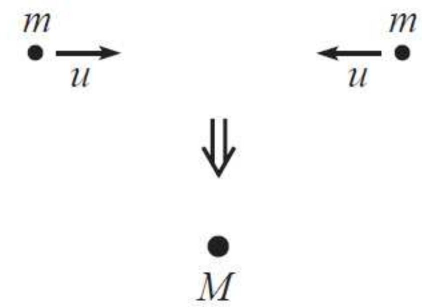
12.1.2 Năng lượng

Chúng ta đã đưa ra một vài kiểm chứng đối với công thức động lượng $\mathbf{p} = \gamma m\mathbf{v}$ trong phần trước, bây giờ chúng ta sẽ cố gắng kiểm tra công thức năng lượng,

$$E = \gamma mc^2 \tag{12.4}$$

Một cách chặt chẽ hơn, chúng ta sẽ chỉ ra rằng dạng ở trên của động lượng dẫn tới rằng γmc^2 được bảo toàn trong sự tương tác lẫn nhau (hoặc ít nhất trong sự tương tác cụ thể dưới đây). Có một vài cách khác nhau để làm điều này. Có lẽ cách tốt nhất là sử dụng công thức vectơ bốn chiều trong Chương 13. Nhưng chúng ta sẽ nghiên cứu một mô hình đơn giản ở đây để làm việc đó.

Xét hệ như sau đây. Hai phần tử giống hệt nhau với khối lượng m hướng vào nhau với cùng vận tốc u như trong hình 12.4. Chúng dính vào nhau và tạo thành một phần tử có khối lượng M. M ở trạng thái nghỉ do tính đối xứng của tình huống. Tại thời điểm đó

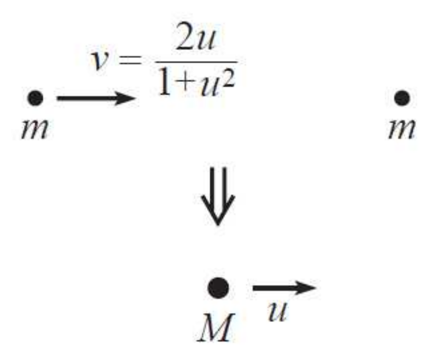


Hình 12.4:

chúng ta không thể giả thiết bất cứ điều gì về khối lượng của M, nhưng chúng ta sẽ tìm ra dưới đây rằng nó không bằng với giá trị thông thường $2m$. Mô hình này không thú vị lắm (bảo toàn động lượng dẫn đến $0 = 0$), do đó chúng ta sẽ xem xét thay thế bằng cách quan sát ít tầm thường hơn của mô hình này bằng cách quan sát trong hệ quy chiếu chuyển động sang bên trái với vận tốc u. Tình huống này được chỉ ra trong hình 12.5. Khối lượng bên phải ở trạng thái nghỉ, còn khối lượng bên trái chuyển động sang bên phải với vận tốc $v = 2u/(1 + u^2)$ theo công thức cộng vận tốc,[2] và khối lượng cuối cùng M chuyển động sang bên phải với vận tốc u. Chú ý rằng thừa số γ liên kết với vận tốc v là

$$\gamma_v \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2u}{1+u^2}\right)^2}} = \frac{1 + u^2}{1 - u^2}. \tag{12.5}$$

Sự bảo toàn động lượng trong va chạm này khi đó dẫn đến



Hình 12.5:

[2]Chúng ta sẽ đặt $c = 1$ khi tính toán ở đây bởi vì việc tính toán này nhìn sẽ rắc rối nếu chúng ta giữ c. Chúng ta sẽ thảo luận vấn đề đặt $c = 1$ chi tiết hơn tại phần cuối của mục này.

$$\begin{aligned}\gamma_v m v + 0 = \gamma_u M u \qquad &\Longrightarrow \qquad m\left(\frac{1+u^2}{1-u^2}\right)\left(\frac{2u}{1+u^2}\right) = \frac{Mu}{\sqrt{1-u^2}}\\ &\Longrightarrow \qquad M = \frac{2m}{\sqrt{1-u^2}}. \end{aligned} \tag{12.6}$$

Do đó sự bảo toàn động lượng chỉ ra cho chúng ta thấy rằng M không bằng $2m$. Nhưng nếu u là rất nhỏ thì M xấp xỉ bằng với $2m$ như chúng ta đã biết trong các thí nghiệm thông thường.

Sử dụng giá trị của M từ phương trình (12.6), bây giờ chúng ta sẽ kiểm tra rằng công thức của chúng ta đối với năng lượng $E = \gamma mc^2$ là bảo toàn trong va chạm này. Không có sự tự do trong bất kỳ hệ số nào, do đó γmc^2 hoặc là bảo toàn hoặc là không. Trong hệ quy chiếu ban đầu khi M ở trạng thái nghỉ, E được bảo toàn nếu

$$\gamma_0 Mc^2 = 2(\gamma_u mc^2) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{2m}{\sqrt{1-u^2}} = 2\left(\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\right)m, \tag{12.7}$$

điều này quả thực là đúng. Chúng ta cũng đi kiểm tra rằng E được bảo toàn trong hệ quy chiếu ở đó khối lượng bên phải ở trạng thái nghỉ. E được bảo toàn nếu như

$$\begin{aligned} \gamma_v mc^2 + \gamma_0 mc^2 &= \gamma_u Mc^2\\ \Longleftrightarrow \quad \left(\frac{1+u^2}{1-u^2}\right)m + m &= \frac{M}{\sqrt{1-u^2}}\\ \Longleftrightarrow \quad \frac{2m}{1-u^2} &= \left(\frac{2m}{\sqrt{1-u^2}}\right)\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}, \end{aligned} \tag{12.8}$$

điều này quả thực là đúng. Do đó E cũng được bảo toàn trong hệ quy chiếu này. Ví dụ sẽ thuyết phục bạn rằng ít nhất γmc^2 cũng là công thức đáng tin cậy đối với năng lượng của một phần tử. Nhưng cũng giống như trong trường hợp động lượng, chúng ta đã không chứng minh rằng γmc^2 thực tế được bảo toàn trong tất cả các va chạm. Đây là nhiệm vụ của các thí nghiệm. Nhưng chúng ta đã chỉ ra rằng sẽ lãng phí thời gian khi xem xét ví dụ như đại lượng $\gamma^4 mc^2$.

Một điều chắc chắn chúng ta cần phải kiểm tra đó là nếu E và p được bảo toàn trong một hệ quy chiếu thì chúng cũng phải bảo toàn trong bất kỳ hệ quy chiếu nào khác. Chúng ta sẽ chứng minh điều này trong Mục 12.2. Xét cho cùng thì một quy luật bảo toàn không thể phụ thuộc vào hệ quy chiếu mà chúng ta đang xem xét.

NHẬN XÉT:

1. Như đã đề cập ở trên, về mặt kỹ thuật chúng ta không cố gắng chứng minh phương trình (12.1) ở đây. Hai phương trình tự nó không có bất kỳ ý nghĩa gì. Tất cả những

gì chúng có là định nghĩa các chữ cái $\mathbf{p}$ và E. Mục đích của chúng ta là có được các phát biểu có ý nghĩa về mặt vật lý chứ không phải đơn thuần chỉ là những định nghĩa.

Phát biểu mang ý nghĩa vật lý mà chúng ta muốn có đó là các đại lượng $\gamma m\mathbf{v}$ và γmc^2 được bảo toàn trong sự tương tác giữa các phần tử (và đây là điều chúng ta cố gắng xác minh ở trên). Thực tế này khi đó làm cho các đại lượng này đáng được chú ý đặc biệt bởi vì các đại lượng bảo toàn là rất có ý nghĩa khi tìm hiều điều gì đang xảy ra trong một hệ vật lý cho trước. Và bất kỳ điều gì đáng được chú ý đặc biệt như thế chắc chắn được ghi nhớ và đánh dấu lại, do đó chúng ta có thể gắn những cái tên "động lượng" và "năng lượng" cho $\gamma m\mathbf{v}$ và γmc^2. Tất nhiên, bất kỳ cái tên nào khác cũng được nhưng chúng ta chọn hai tên này bởi vì trong giới hạn vận tốc nhỏ, thì $\gamma m\mathbf{v}$ và γmc^2 sẽ suy biến (như chúng ta sẽ chỉ ra ngay bây giờ) tới tới các đại lượng bảo toàn đẹp đẽ nào đó mà mọi người đã gắn với cái tên "động lượng" và "năng lượng" từ lâu.

2. Như chúng ta đã chú ý, thực tế là chúng ta không thể chứng minh rằng $\gamma m\mathbf{v}$ và γmc^2 là bảo toàn. Trong vật lý Newtơn, sự bảo toàn của $\mathbf{p} \equiv m\mathbf{v}$ công nhận dựa trên định luật thứ ba Newtơn, và chúng ta sẽ không thể làm được bất cứ điều gì ở đây. Tất cả những gì chúng ta có thể hy vọng để làm như các nhà vật lý đó là cung cấp một vài kiểm chứng khi xem xét $\gamma m\mathbf{v}$ và γmc^2 sau đó chỉ ra rằng $\gamma m\mathbf{v}$ và γmc^2 bảo toàn trong sự tương tác, và tiếp đó tập hợp một số lượng lớn các bằng chứng thí nghiệm mà tất cả chúng đều phù hợp với khẳng định $\gamma m\mathbf{v}$ và γmc^2 được bảo toàn. Và các bằng chứng thí nghiệm còn tiếp tục, chúng ta chỉ cần nói rằng máy gia tốc năng lượng cao, quan sát từ vũ trụ, và nhiều cách khác tiếp tục kiểm tra mọi thứ mà chúng ta nghĩ là đúng về động lực học tương đối. Nếu lý thuyết không chính xác thì chúng ta biết rằng nó phải là trường hợp giới hạn của một lý thuyết khác chính xác hơn.[3] Nhưng tất cả điều này phải có một giá trị gì đó . . .

3. Sự bảo toàn năng lượng trong cơ học tương đối thực sự là một khái niệm đơn giản hơn rất nhiều so với cơ học cổ điển, bởi vì $E = \gamma m$ được bảo toàn. Chúng ta không phải lo lắng bất cứ điều gì về việc sinh ra năng lượng trong (nhiệt hoặc thế năng trong) dẫn đến sự không bảo toàn của $E = mc^2/2$ cổ điển. Năng lượng trong chỉ đơn giản là một phần của năng lượng toàn phần. Trong ví dụ ở trên, hai khối lượng m va chạm và sinh ra năng lượng trong (nhiệt) trong khối lượng kết quả M. Năng lượng trong này xuất hiện như là một sự tăng khối lượng, điều này làm cho M lớn hơn $2m$. Năng lượng tương ứng với khối lượng tăng lên là do động năng trong của hai khối lượng.

4. Bài tập 12.1 đưa ra một cách thành lập khác của công thức năng lượng và động lượng trong phương trình (12.1). Sự thành lập này sử dụng các thực tế thêm là năng lượng và động lượng của photon cho bởi $E = h\nu$ và $p = h\nu/c$, trong đó ν là tần số của ánh

[3]Và thực tế nó là không chính xác bởi vì nó không phù hợp với cơ học lượng tử. Một lý thuyết đầy đủ bao gồm cả cơ học tương đối và cơ học lượng tử là lý thuyết trường lượng tử.

sáng và h là hằng số Planck. ♣

Tất nhiên bất kỳ bội số nào của γmc^2 cũng bảo toàn. Nhưng tại sao chúng ta lại chọn γmc^2 đến gắn cho "E" thay thế cho chẳng hạn là $5\gamma mc^3$? Xét dạng xấp xỉ mà γmc^2 dẫn đến giới hạn Newtơn, tức là trong giới hạn $v \ll c$. Sử dụng chuỗi Taylor mở rộng đối với $(1-x)^{-1/2}$, chúng ta có

$$\begin{aligned} E \equiv \gamma mc^2 &= \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ &= mc^2\left(1+\frac{v^2}{2c^2}+\frac{3v^4}{8c^4}+\cdots\right) \\ &= mc^2+\frac{1}{2}mv^2+\cdots . \end{aligned} \tag{12.9}$$

Dấu ba chấm biểu diễn bậc cao hơn của v^2/c^2, các bậc cao này có thể bỏ qua nếu $v \ll c$. Trong một va chạm đàn hồi trong vật lý Newtơn, không sinh ra nhiệt, do đó khối lượng được bảo toàn. Tức là đại lượng mc^2 có một giá trị cố định. Do đó chúng ta thấy rằng sự bảo toàn của $E = \gamma mc^2$ sẽ suy biến thành sự bảo toàn quen thuộc của động năng Newtơn $mv^2/2$ đối với va chạm đàn hồi trong giới hạn vận tốc nhỏ. Đây là một ví dụ của *nguyên lý tương ứng*, nguyên lý này nói rằng các công thức tương đối phải suy biến thành các công thức không tương đối quen thuộc trong giới hạn không tương đối. Tương tự, đối với động lượng chúng ta chọn $\mathbf{p} \equiv \gamma m\mathbf{v}$ thay vì chẳng hạn là $6\gamma mc^4\mathbf{v}$, bởi vì công thức đầu tiên sẽ suy biến thành động lượng Newtơn quen thuộc $m\mathbf{v}$ trong giới hạn vận tốc nhỏ.

Bất cứ khi nào chúng ta sử dụng thuật ngữ "năng lượng", chúng ta sẽ có ý muốn nói tới tổng năng lượng γmc^2. Nếu chúng ta sử dụng thuật ngữ "động năng", thì chúng ta sẽ có ý muốn đề cập tới phần năng lượng vượt quá của phần tử với năng lượng mà nó có khi nó không chuyển động. Nói một cách khác, động năng là $\gamma mc^2 - mc^2$. Động năng không nhất thiết phải bảo toàn trong va chạm bởi vì khối lượng không nhất thiết bảo toàn như chúng ta đã thấy trong phương trình (12.6) trong ví dụ trên. Trong hệ quy chiếu khối tâm, có động năng trước khi va chạm nhưng không có sau đó. Động năng là một khái niệm khá không tự nhiên trong chuyển động tương đối. Bạn sẽ gần như luôn luôn muốn sử dụng năng lượng toàn phần γmc^2 khi giải một bài tập.

Chú ý tới mối quan hệ quan trọng sau đây,

$$\begin{aligned} E^2 - |\mathbf{p}|^2c^2 &= \gamma^2m^2c^4 - \gamma^2m^2|\mathbf{v}|^2c^2 \\ &= \gamma^2m^2c^4\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) \\ &= m^2c^4. \end{aligned} \tag{12.10}$$

Đây là mối quan hệ cực kỳ quan trọng trong việc giải các bài toán về va chạm tương đối như chúng ta sẽ chỉ ra ngay sau đây. Nó thay thế mối quan hệ $K = p^2/2m$ giữa động năng và động lượng trong vật lý Newtơn. Nó có thể được rút ra bằng nhiều cách khác như chúng ta sẽ thấy trong Chương 13. Nó quan trọng đến nỗi tôi muốn gọi nó là "Mối quan hệ cực kỳ quan trọng". Hãy để nó trong một chiếc hộp:

$$\boxed{E^2 = p^2c^2 + m^2c^4}. \tag{12.11}$$

Bất cứ khi nào bạn biết hai trong ba đại lượng E, p và m, phương trình này sẽ đưa ra cho bạn đại lượng thứ ba. Trong trường hợp khi $m = 0$ (giống như photon), phương trình (12.11) trở thành

$$E = pc \quad \text{đối với photon.} \tag{12.12}$$

Đây là phương trình quan trọng đối với các vật thể không khối lượng. Đối với photon, hai phương trình $\mathbf{p} = \gamma m\mathbf{v}$ và $E = \gamma mc^2$ không cho chúng ta biết nhiều điều bởi vì $m = 0$ và $\gamma = \infty$, do đó tích của chúng là không xác định. Nhưng $E^2 - |\mathbf{p}|^2c^2 = m^2c^4$ là vẫn đúng, và chúng ta kết luận rằng $E = pc$. Chú ý rằng bất kỳ phần tử không khối lượng nào cũng phải có $\gamma = \infty$. Tức là nó phải chuyển động với vận tốc c. Bởi vì nếu ngược lại thì $E = \gamma mc^2$ sẽ bằng không, trong trường hợp đó phần tử sẽ không có ý nghĩa tồn tại. Chúng ta sẽ không tốn thời gian vô ích quan sát một thứ gì đó lại không có năng lượng.

Một mối liên hệ khác suy ra từ phương trình (12.1) và đúng với phần tử có khối lượng bất kỳ đó là

$$\frac{\mathbf{p}}{E} = \frac{\mathbf{v}}{c^2}. \tag{12.13}$$

Cho trước p và E, nhất định đây là cách nhanh nhất để tính v.

Kích thước thông thường của mc^2

Kích thước thông thường của mc^2 là bao nhiêu?[4] Nếu chúng ta lấy $m = 1$ kg thì chúng ta có $mc^2 = (1\text{ kg})(3 \cdot 10^8\text{ m/c})^2 \approx 10^{17}$ J. Giá trị này lớn như thế nào? Một hóa đơn tiền điện cho một hộ gia đình điển hình là khoảng 50 đôla mỗi tháng, hoặc 600 đôla một năm. Với giá khoảng 10 cent mỗi kilôoat giờ, dẫn đến khoảng 6000 kilôoat giờ mỗi năm. Bởi vì có 3600 giây trong một giờ nên chúng ta có $(6000)(10^3)(3600) \approx 2 \cdot 10^{10}$ oát giây. Tức là $2 \cdot 10^{10}$ J mỗi năm. Do đó chúng ta thấy rằng nếu một kilôgam bị biến đổi hoàn toàn thành năng lượng dùng được (tức là động năng, khi đó được sử dụng để quay tuabin),

[4]Xem Fadner (1988) để biết lịch sử mối quan hệ khối lượng - năng lượng

thì năng lượng này sẽ đủ để cung cấp điện cho khoảng $10^{17}/(2 \cdot 10^{10})$, hoặc 5 triệu hộ gia đình trong một năm. Đây quả thật là rất nhiều.

Trong phản ứng hạt nhân, chỉ có một phần nhỏ của khối lượng bị biến đổi thành năng lượng sử dụng (nhiệt). Hầu hết khối lượng còn lại trong các sản phẩm cuối cùng, sản phẩm này không giúp thắp sáng cho ngôi nhà của bạn. Nếu một hạt tổ hợp với phản hạt của nó thì có thể tất cả năng lượng khối lượng sẽ bị biến đổi thành năng lượng sử dụng được. Nhưng chúng ta vẫn chưa có khả năng thực hiện điều này một cách công nghiệp. Tuy nhiên, ngay cả một phần nhỏ của đại lượng rất lớn $E = mc^2$ có thể cũng lớn, bằng chứng là việc sử dụng điện hạt nhân và vũ khí hạt nhân. Bất kỳ đại lượng nào với một vài thừa số của c chắc chắn sẽ thay đổi diện mạo của thế giới.

Khối lượng

Một vài nghiên cứu về thuyết tương đối sử dụng thuật ngữ "khối lượng nghỉ," m_0 để nói tới khối lượng của phần tử không chuyển động, và "khối lượng tương đối" m_{rel} để nói tới đại lượng γm_0 của một phần tử chuyển động. Chúng ta sẽ không sử dụng các thuật ngữ này ở đây. Thứ duy nhất mà chúng ta sẽ gọi là "khối lượng" là thứ mà các cách nghiên cứu ở trên gọi là "khối lượng nghỉ." (Ví dụ, khối lượng của một electron là $9.11 \cdot 10^{-31}$ kg, và khối lượng của một lít nước là 1 kg, độc lập với vận tốc của chúng.) Và bởi vì chúng ta sẽ chỉ nói tới một dạng của khối lượng nên sẽ không cần thiết phải sử dụng từ bổ nghĩa "nghỉ" hoặc chỉ số dưới "0". Do đó chúng ta sẽ đơn giản sử dụng ký hiệu "m."

Tất nhiên, bạn có thể định nghĩa đại lượng γm là bất cứ thứ gì mà bạn muốn. Sẽ không có điều gì sai nếu gọi nó là "khối lượng tương đối." Nhưng điểm quan trọng ở đây là γm đã có một cái tên khác. Đó chính là năng lượng, sai khác thừa số của c. Do đó việc sử dụng từ "khối lượng" đối với đại lượng này mặc dù là được phép nhưng chắc chắn là không cần thiết.

Hơn nữa, từ khối lượng đã được sử dụng để mô tả vế phải của phương trình $E^2 - |\mathbf{p}|^2c^2 = m^2$. Đại lượng m^2 ở đây là bất biến, tức là nó độc lập với hệ quy chiếu. Mặc dù là E và $\mathbf{p}$ phụ thuộc vào hệ quy chiếu bởi vì chúng liên quan tới v, sự phụ thuộc đối với v này bị khử khi lấy hiệu bình phương của chúng, thu được m^2 độc lập với hệ quy chiếu. Nếu "khối lượng" được sử dụng theo cách rõ ràng này để mô tả một đại lượng bất biến thì sẽ không có ý nghĩa nếu cũng sử dụng nó để mô tả đại lượng γm, bởi vì đại lượng này phụ thuộc vào hệ quy chiếu. Các từ bổ nghĩa "nghỉ" và "tương đối" được giới thiệu để ngăn ngừa vấn đề này, nhưng kết quả của điều này chỉ là làm giảm bớt đi đại lượng bất biến vô cùng quan trọng "khối lượng."

Tuy nhiên, bởi vì trong thực tế không có gì thực sự sai khi sử dụng "khối lượng tương đối",do đó chủ yếu phụ thuộc vào ý kiến cá nhân của bạn thích hay không thích thuật ngữ này. Chắc chắn việc sử dụng γm như là một dạng khối lượng là để biểu thức đối với động lượng $p = \gamma m_0 v \equiv m_{rel} v$ giống như công thức Newtơn. Và biểu thức đối với năng lượng sẽ có dạng $E = \gamma m_0 c^2 \equiv m_{rel} c^2$. Nhưng chú ý rằng vật lý Newtơn chỉ là trường hợp giới hạn của vật lý tương đối, sẽ có câu hỏi đặt ra là sẽ thu được điều gì bằng cách làm cho một lý thuyết chính xác hơn lại trở thành có mô hình của lý thuyết ít chính xác hơn. Dù sao đi chăng nữa, quan điểm của tôi đó là những công thức đẹp đẽ này không có nhiều ảnh hưởng hơn việc sử dụng từ "khối lượng" để nói tới một đại lượng bất biến cực kỳ đặc biệt, và từ "năng lượng" để đề cập tới đại lượng phụ thuộc vào hệ quy chiếu γm. Các đại lượng bất biến có một vị trí cực kỳ quan trọng trong vật lý, do đó chúng nên được gắn với những cái tên không có bất kỳ ý nghĩa thay đổi rộng nào.

Phương pháp Lagrange

Một cách khác để thu được các công thức ở trên đối với E và p đó là sử dụng phương pháp Lagrange. Để thực hiện được điều này, tất nhiên là chúng ta phải mô tả Lagrange tương đối là như thế nào. Điều này có thể dường như là một nhiệm vụ khó khăn khi nhớ lại rằng phương pháp Lagrange mà chúng ta đề cập tới ở Chương 6 liên quan tới động năng, và chúng ta vẫn chưa biết động năng là như thế nào ở đây (xét cho cùng, đó là một trong những mục đích của chúng ta).

Tuy nhiên, điều này thành ra lại khá dễ dàng khi mô tả Lagrange tương đối, miễn là chúng ta xem xét bên ngoài chiếc hộp "$T - V$" và tập trung vào thực tế quan trọng rằng tác dụng là những thứ tĩnh đối với quỹ đạo cổ điển. Kết hợp thực tế này với tiên đề tương đối, tiên đề này phát biểu rằng không có hệ quy chiếu ưu tiên, chúng ta thấy rằng tác dụng phải tĩnh trong mọi hệ quy chiếu. Do đó, một đặc điểm có thể nhận ra để yêu cầu đối với tác dụng đó là nó phải độc lập với hệ quy chiếu. Bằng cách này, nếu nó tĩnh trong một hệ quy chiếu thì nó phải tĩnh trong bất kỳ hệ quy chiếu nào khác.[5]

Các đại lượng bất biến nào mà chúng ta biết? Tất nhiên, chắc chắn đó là m và c.

[5]Tôi cho rằng bạn có thể tưởng tượng một đại lượng mà phụ thuộc vào hệ quy chiếu, nhưng vẫn tĩnh trong bất kỳ hệ quy chiếu nào. Nhưng rõ ràng thứ đơn giản nhất là thử (điều này sẽ liên quan đến thực tế) đề cập tới điều gì đó độc lập với hệ quy chiếu.

Nhưng có một đại lượng thú vị hơn mà chúng ta quen thuộc đó là khoảng bất biến (thời gian riêng), $cd\tau \equiv \sqrt{c^2dt^2 - dx^2}$. Đây là gần như tất cả những gì mà chúng ta phải làm việc với, do đó chúng ta hãy thử một tác dụng có dạng (chúng ta sẽ chỉ đề cập tới một phần tử tự do),

$$S = -mc\int cd\tau = -mc\int \sqrt{c^2dt^2 - dx^2} = -mc\int \sqrt{c^2 - \dot{x}^2}dt. \tag{12.14}$$

Chúng ta đặt mc ra phía trước bên ngoài để thu được S là đơn vị năng lượng thông thường nhân với thời gian. Và dấu trừ (dấu trừ này không ảnh hưởng tới đặc điểm tĩnh) được đưa vào sao cho chúng ta sẽ thu được dấu chính xác đối với năng lượng và động lượng. Do đó hàm Lagrange của chúng ta sẽ là

$$L = -mc\sqrt{c^2 - \dot{x}^2}. \tag{12.15}$$

Dẫn đến phương trình Euler - Lagrange như sau

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{mc\dot{x}}{\sqrt{c^2 - \dot{x}^2}}\right) = 0. \tag{12.16}$$

Đại lượng trong ngoặc có thể viết lại như sau

$$p \equiv \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \equiv \gamma mv. \tag{12.17}$$

Đây đơn giản là động lượng mà chúng ta đã định nghĩa ở phần trước, do đó từ phương trình (12.16) dẫn đến động lượng được bảo toàn như chúng ta đã biết. Còn về năng lượng thì sao? Năng lượng liên kết với hàm Lagrange của chúng ta cho bởi (sử dụng phương trình (6.52))

$$\begin{aligned} E = \dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L &= \dot{x}\left(\frac{mc\dot{x}}{\sqrt{c^2 - \dot{x}^2}}\right) - \left(-mc\sqrt{c^2 - \dot{x}^2}\right) \\ &= \frac{mc^3}{\sqrt{c^2 - \dot{x}^2}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \equiv \gamma mc^2, \end{aligned} \tag{12.18}$$

kết quả này phù hợp với biểu thức của E mà chúng ta đã đưa ra. Chúng ta cũng có thể tính toán momen động lượng. Trong tọa độ cực, hàm Lagrange có thể viết lại như sau

$$L = -mc\sqrt{c^2 - (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)}. \tag{12.19}$$

Do đó phương trình Euler - Lagrange thu được đối với θ sẽ là

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \theta} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{mcr^2\dot{\theta}}{\sqrt{c^2 - (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)}}\right) = 0. \tag{12.20}$$

Đại lượng trong ngoặc mà chúng ta sẽ thấy rằng được bảo toàn có thể được viết lại thành $\gamma mr^2\dot{\theta}$. Bởi vì nó liên kết với góc θ nên chúng ta có thể gọi nó là momen động lượng. Và như mong đợi, nó sẽ suy biến về kết quả momen động lượng không tương đối khi $\gamma = 1$.

Tất nhiên, sự xác minh Lagrange này đối với E và p có thể dường như có một chút ngớ ngẩn, bởi vì chúng ta chỉ đề cập tới một phần tử tự do, và bất cứ đại lượng nào liên quan tới v cũng sẽ bảo toàn đối với một phần tử tự do. Nhưng thực tế rằng các đại lượng E và p ở trên có thể được rút ra từ một hàm Lagrange liên quan đến một đại lượng bất biến (đại lượng này là một đại lượng bất biến không tầm thường duy nhất mà chúng ta biết) và dẫn đến chúng làm cho chúng ta khá tin tưởng.

Nếu chúng ta muốn đi xa hơn một phần tử tự do và kết hợp thế năng vào hệ thì mọi thứ có vẻ trở lên rắc rối; xem Brehme (1971). Ý tưởng đầu tiên đó là trừ đi một thế năng trong hàm Lagrange, như chúng ta đã làm trong trường hợp không tương đối. Khi đó chúng ta có $L = -mc\sqrt{c^2 - \dot{x}^2} - V(x)$, và phương trình Euler - Lagrange trở thành

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{mc\dot{x}}{\sqrt{c^2 - \dot{x}^2}}\right) = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dp}{dt} = F(x). \tag{12.21}$$

Đây là phát biểu chính xác $F = dp/dt$, do đó dường như rằng chúng ta đã lấy hàm Lagrange chính xác. Tuy nhiên, có một điều gì đó không đúng ở đây; tác dụng bây giờ liên quan đến đại lượng $\int V(x)dt$ không bất biến, bởi vì thời gian trong một hệ quy chiếu không bằng thời gian trong hệ quy chiếu khác. Mặc dù hàm Lagrange ở trên quả thực thu được một phương trình chính xác của chuyển động trong một hệ quy chiếu cụ thể mà trong hệ quy chiếu đó hàm $V(x)$ được định nghĩa, nhưng nếu chúng ta thay đổi sang hệ quy chiếu khác thì sẽ không có gì là đảm bảo là nó sẽ lại có dạng giống như vậy. Để duy trì tác dụng bất biến, chúng ta phải xây dựng nó từ vectơ bốn chiều (thảo luận trong Chương 13), hoặc các tensor khác, nhân một cách thích hợp. Hệ kinh điển liên quan đến vectơ bốn chiều đó là một hạt tích điện trong trường điện từ. Các hệ khác liên quan đến các tensor phức tạp hơn xảy ra trong thuyết tương đối tổng quát. Nhưng chúng ta sẽ không đi sâu vào điều đó ở đây, bởi vì mục đích của chúng ta chỉ là thu được biểu thức của E và p.[6]

Đặt $c = 1$

[6]Trong hệ có nhiều phần tử, trong trường hợp tổng quát có thể tạo ra một công thức Lagrange tương đối phù hợp. Cách duy nhất thực hiện đó là làm việc đối với các trường thay vì với các hạt. Nhưng điều này vượt quá phạm vi mà chúng ta đang làm ở đây. Xem Goldstein và cộng sự (2002).

Đối với phần còn lại của nghiên cứu của chúng ta về thuyết tương đối, chúng ta sẽ luôn luôn làm việc trong các đơn vị trong đó $c = 1$. Ví dụ, thay vì một mét là đơn vị của khoảng cách, chúng ta có thể lấy $3 \cdot 10^8$ mét bằng một đơn vị. Hoặc chúng ta có thể giữ một mét là đơn vị độ dài và lấy $1/(3 \cdot 10^8)$ giây làm đơn vị thời gian. Trong các đơn vị như vậy, các công thức khác nhau của chúng ta trở thành

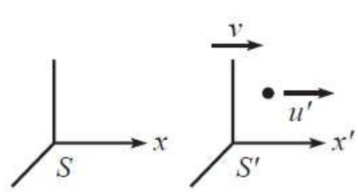
$$\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}, \quad E = \gamma m, \quad E^2 = p^2 + m^2, \quad \frac{\mathbf{p}}{E} = \mathbf{v}. \tag{12.22}$$

Nói một cách khác, đơn giản là bạn có thể bỏ qua ký hiệu c trong các tính toán của bạn (điều này nói chung sẽ giúp bạn tránh được rất nhiều sự rắc rối), và sau đó đưa nó trở lại vào câu trả lời cuối cùng của bạn để làm cho các đơn vị chính xác. Ví dụ, giả sử mục đích của một bài toán cho trước là đi tìm thời gian của một sự kiện nào đó. Nếu câu trả lời của bạn là ℓ, trong đó ℓ là độ dài cho trước thì bạn biết rằng câu trả lời chính xác (dưới dạng các đơn vị thông thường) phải là ℓ/c, bởi vì kết quả này có thứ nguyên là thời gian. Để hợp lệ đối với cách làm như thế này, phải có một cách duy nhất để đưa lại các ký hiệu của c tại giai đoạn cuối cùng. Sẽ phải như vậy bởi vì nếu có hai cách thì chúng ta sẽ có $c^a = c^b$ đối với các số $a \neq b$ nào đó. Nhưng điều này là không thể bởi vì c có thứ nguyên.

12.2 Các phép biến đổi của E và p

Xét tình huống một chiều như sau, trong đó tất cả chuyển động là dọc theo trục x. Một hạt có năng lượng E' và động lượng p' trong hệ quy chiếu S'. Hệ quy chiếu S' chuyển động với vận tốc v so với hệ quy chiếu S theo chiều dương của x (xem hình 12.6). Các đại lượng E và p trong hệ quy chiếu S bằng bao nhiêu?

Gọi u' là vận tốc của hạt trong hệ quy chiếu S'. Từ công thức cộng vận tốc, ta có vận



Hình 12.6:

tốc của hạt trong hệ quy chiếu S là (bỏ qua các thừa số của c)

$$u = \frac{u' + v}{1 + u'v}. \tag{12.23}$$

Đây là tất cả những gì chúng ta cần biết, bởi vì vận tốc của một hạt xác định năng lượng và động lượng của nó. Nhưng chúng ta sẽ cần một vài phép biến đổi đại số để làm mọi thứ nhìn đẹp đẽ hơn. Thừa số γ liên kết với vận tốc u là

$$\gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{u'+v}{1+u'v}\right)^2}} = \frac{1 + u'v}{\sqrt{(1-u'^2)(1-v^2)}} \equiv \gamma_{u'}\gamma_v(1 + u'v). \tag{12.24}$$

Năng lượng và động lượng trong hệ quy chiếu S' là

$$E' = \gamma_{u'} m, \quad \text{và} \quad p' = \gamma_{u'} m u', \tag{12.25}$$

trong khi đó sử dụng phương trình (12.24), năng lượng và động lượng trong S là

$$\begin{aligned} E &= \gamma_u m = \gamma_{u'}\gamma_v(1 + u'v)m, \\ p &= \gamma_u m u = \gamma_{u'}\gamma_v(1 + u'v)m \left(\frac{u'+v}{1+u'v}\right) = \gamma_{u'}\gamma_v(u'+v)m. \end{aligned} \tag{12.26}$$

Sử dụng E' và p' từ phương trình (12.25), chúng ta có thể viết lại E và p như sau (với $\gamma \equiv \gamma_v$)

$$\begin{aligned} E &= \gamma(E' + vp'), \\ p &= \gamma(p' + vE'). \end{aligned} \tag{12.27}$$

Đây là những phép biến đổi đối với E và p giữa các hệ quy chiếu. Nếu bạn muốn đặt các thừa số của c trở lại thì đại lượng vE' trở thành vE'/c^2 để làm cho các đơn vị chính xác. Các phép biến đổi này rất dễ nhớ bởi vì chúng giống hệt như phép biến đổi Lorentz đối với các tọa độ t và x trong phương trình (12.21). Một cách chính xác hơn với việc thêm vào c, biến đổi E và pc tương ứng giống như ct và x.[7] Đây không phải là sự trùng hợp ngẫu nhiên như chúng ta sẽ thấy trong Chương 13. Kiểm tra lại phương trình (12.27), nếu $u' = 0$ (dẫn đến $p' = 0$ và $E' = m$) thì $E = \gamma m$ và $p = \gamma m v$ như mong đợi. Cũng như vậy, nếu $u' = -v$ (dẫn đến $p' = -\gamma m v$ và $E' = \gamma m$) thì $E = m$ và $p = 0$ như mong muốn.

Bởi vì các phép biến đổi trong phương trình (12.27) là tuyến tính, nên chúng cũng đúng nếu E và p biểu diễn tổng năng lượng và tổng động năng của một tập hợp các hạt.

[7] Bởi vì phép biến đổi Lorentz là đối xứng đối với ct và x, và tương tự đối với E và pc, nên không rõ ràng lắm khi xác định tọa độ nào trong phép biến đổi Lorentz là tương ứng với tọa độ trong phép biến đổi của chúng ta ở đây. Nhưng bởi vì x và p là các thành phần vectơ, trong khi đó t và E không như vậy, nên sự tương ứng chính xác phải là $ct \longleftrightarrow E$ và $x \longleftrightarrow pc$.

Tức là,

$$\begin{aligned}\sum E &= \gamma \left(\sum E' + v \sum p' \right), \\ \sum p &= \gamma \left(\sum p' + v \sum E' \right).\end{aligned} \tag{12.28}$$

Thực tế, bất kỳ (tương ứng) tổ hợp tuyến tính nào của năng lượng và động lượng đều đúng đắn ở đây, thay vì các tổng. Ví dụ, chúng ta có thể sử dụng tổ hợp $E_1^b + 3E_2^a - 7E_5^b$ và $p_1^b + 3p_2^a - 7p_5^b$, trong đó các chỉ số dưới biểu thị phần tử, và các chỉ số trên biểu thị trước hoặc sau khi va chạm. Bạn có thể kiểm tra điều này đơn giản bằng cách lấy tổ hợp tuyến tính thích hợp của phương trình (12.27) đối với các hạt khác nhau. Hệ quả của sự tuyến tính này là rất quan trọng và là một kết quả hữu ích, và nó sẽ trở lên rõ ràng trong các nhận xét dưới đây.

Bạn có thể sử dụng phương trình (12.27) để chỉ ra rằng

$$E^2 - p^2 = E'^2 - p'^2, \tag{12.29}$$

giống như chúng ta đã chỉ ra rằng $t^2 - x^2 = t'^2 - x'^2$ trong phương trình (11.40). Chứng minh ở đó dựa trên thực tế là biến đổi t và x dưới phép biến đổi Lorentz, do đó chứng minh giống hệt như vậy ở đây đối với E và p bằng cách sử dụng phương trình (12.27) như phép biến đổi Lorentz. Đại lượng E và p trong phương trình (12.29) có thể biểu diễn (tương ứng) tổ hợp tuyến tính bất kỳ của E và p của các hạt khác nhau (ví dụ tổng năng lượng và tổng động lượng của các hạt), nguyên nhân là do sự tuyến tính của phương trình (12.27). Đối với một hạt, chúng ta đã biết rằng phương trình (12.29) là chính xác bởi vì cả hai vế đều bằng m^2 từ phương trình (12.10). Đối với trường hợp nhiều hạt, đại lượng bất biến $E^2_{total} - p^2_{total}$ bằng bình phương của tổng năng lượng trong hệ quy chiếu khối tâm (kết quả này suy biến thành m^2 đối với một phần tử), bởi vì $p_{total} = 0$ trong hệ quy chiếu khối tâm theo định nghĩa.

NHẬN XÉT:

1. Trong phần trước chúng ta đã nói rằng chúng ta cần chỉ ra rằng nếu E và p bảo toàn trong một hệ quy chiếu khi xảy ra va chạm, thì chúng cũng phải bảo toàn trong một hệ quy chiếu bất kỳ nào khác (bởi vì một luật bảo toàn sẽ không phụ thuộc vào hệ quy chiếu). Điều này có thể chỉ ra như sau. Tổng ΔE là tổ hợp tuyến tính của E ban đầu và cuối cùng, và tương tự như vậy đối với Δp. Do đó, bởi vì phương trình (12.27) là phương trình tuyến tính đối với E và p nên nó cũng đúng đối với ΔE và Δp. Tức

là,

$$\Delta E = \gamma(\Delta E' + v\Delta p'), \quad \text{và} \quad \Delta p = \gamma(\Delta p' + v\Delta E'). \tag{12.30}$$

Do đó nếu tổng $\Delta E'$ và $\Delta p'$ trong S' bằng không thì tổng ΔE và Δp trong S cũng phải bằng không.

2. Phương trình (12.30) dẫn đến một điều rõ ràng rằng nếu bạn chấp nhận thực tế $p = \gamma mv$ bảo toàn trong mọi hệ quy chiếu thì bạn cũng phải chấp nhận thực tế $E = \gamma m$ bảo toàn trong tất cả các hệ quy chiếu (và ngược lại). Điều này là sự thật bởi vì phương trình thứ hai trong tập hợp phương trình (12.30) nói rằng nếu Δp và $\Delta p'$ đều bằng không, thì $\Delta E'$ cũng phải bằng không. E và p không có sự lựa chọn nào khác ngoài việc liên quan chặt chẽ với nhau. ♣

Phương trình (12.27) áp dụng với thành phần x của động lượng. Còn các thành phần ngang p_y và p_z biến đổi như thế nào? Giống như với các tọa độ y và z trong phép biến đổi Lorentz, ở đây p_y và p_z không thay đổi giữa các hệ quy chiếu. Phân tích trong Chương 13 sẽ thực điều hiển nhiên này, do đó bây giờ chúng đơn giản chỉ cần phát biểu rằng nếu vận tốc tương đối giữa các hệ quy chiếu là theo chiều x thì

$$p_y = p'_y, \quad \text{và} \quad p_z = p'_z. \tag{12.31}$$

Nếu bạn thực sự muốn chỉ ra cụ thể rằng các thành phần ngang không thay đổi giữa các hệ quy chiếu, hoặc nếu bạn lo lắng rằng một vận tốc khác không theo chiều y sẽ làm thay đổi mối quan hệ giữa p_x và E mà chúng ta đã tính toán trong phương trình (12.27), thì bài tập 12.23 sẽ là của bạn. Nhưng nó khá là dài dòng, do đó hãy cảm thấy thoải mái và giải quyết bằng lý luận rõ ràng hơn nhiều trong Chương 13.

12.3 Va chạm và phân rã

Trình tự nghiên cứu va chạm tương đối cũng giống như nghiên cứu va chạm không tương đối. Bạn chỉ phải mô tả tất cả các sự bảo toàn của phương trình năng lượng và động lượng, và sau đó giải với đối với biến mà bạn muốn. Các nguyên lý bảo toàn giống như các nguyên lý mà chúng ta đã biết. Sự khác biệt duy nhất ở đây đó là năng lượng và động lượng có dạng mới như trong phương trình (12.1). Để mô tả sự bảo toàn phương trình năng lượng và động lượng, sẽ cực kỳ thuận tiện khi đặt E và $\mathbf{p}$ cùng nhau trong một vectơ bốn chiều,

$$P \equiv (E, \mathbf{p}) \equiv (E, p_x, p_y, p_z). \tag{12.32}$$

Vectơ này được gọi là *vectơ năng lượng - động lượng bốn chiều*, hoặc ngắn gọn là *động lượng bốn chiều*. Nếu chúng ta giữ lại các thừa số của c thì đại lượng đầu tiên sẽ là E/c, mặc dù một vài người thay thế bằng cách nhân $\mathbf{p}$ với c; nói chung là quy ước nào cũng được. Ký hiệu của chúng ta trong chương này sẽ là sử dụng chữ P hoa để ký hiệu động lượng bốn chiều và sử dụng chữ $\mathbf{p}$ hoặc p thường để ký hiệu động lượng ba chiều. Các thành phần của động lượng bốn chiều thường được đánh số từ 0 đến 3, sao cho $P_0 \equiv E$, và $(P_1, P_2, P_3) \equiv \mathbf{p}$. Đối với một hạt chúng ta có

$$P = (\gamma m, \gamma m v_x, \gamma m v_y, \gamma m v_z). \tag{12.33}$$

Động lượng bốn chiều đối với một tập hợp các hạt bao gồm tổng E và tổng $\mathbf{p}$ của tất cả các hạt đó. Đây là những lý do sâu xa cho việc xem xét động lượng bốn chiều như chúng ta sẽ thấy trong Chương 13, nhưng bây giờ chúng ta chỉ dùng nó để thuận tiện trong việc tính toán. Nếu không có gì thêm nữa thì nó giúp chúng ta trong việc tính toán. Sự bảo toàn năng lượng và động lượng trong một va chạm rút gọn thành phát biểu ngắn gọn như sau,

$$P_{before} = P_{after}, \tag{12.34}$$

trong đó đây là các động lượng bốn chiều tổng của tất cả các hạt.

Nếu chúng ta định nghĩa *tích trong* giữa hai động lượng bốn chiều, $A \equiv (A_0, A_1, A_2, A_3)$ và $B \equiv (B_0, B_1, B_2, B_3)$ là đại lượng

$$A \cdot B \equiv A_0 B_0 - A_1 B_1 - A_2 B_2 - A_3 B_3, \tag{12.35}$$

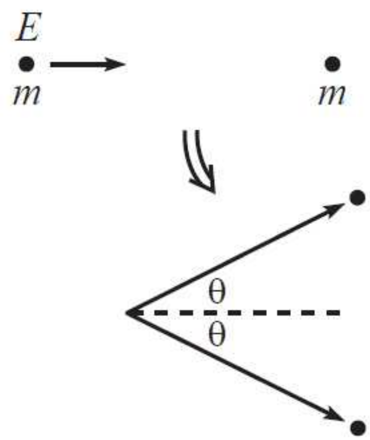
thì mối quan hệ cực kỳ quan trọng trong phương trình (12.11), $E^2 - p^2 = m^2$, mối quan hệ này đúng đối với một phần tử, có thể được viết lại một cách ngắn gọn thành

$$P \cdot P = m^2, \quad \text{hoặc} \quad P^2 = m^2, \tag{12.36}$$

trong đó $P^2 \equiv P \cdot P$. Nói một cách khác, bình phương của động lượng bốn chiều của một hạt bằng với bình phương khối lượng của nó. Mối liên hệ này sẽ là rất hữu ích trong các bài toán về va chạm. Chú ý rằng nó độc lập với hệ quy chiếu như chúng ta sẽ thấy trong phương trình (12.29).

Tích trong này là khác với tích mà chúng thường sử dụng trong không gian ba chiều. Nó có một dấu dương và ba dấu âm, trái ngược với ba dấu dương thông thường. Nhưng chúng ta có thể tự do định nghĩa nó như chúng ta mong muốn, và quả thực chúng ta có một định nghĩa tốt bởi vì tích trong của chúng ta là bất biến đối với phép biến đổi Lorentz, cũng giống như tích trong ba chiều thông thường bất biến đối với phép quay. Trường hợp tích trong của động lượng bốn chiều với chính nó (có thể là tổ hợp tuyến tính bất kỳ của các động lượng bốn chiều của các hạt khác nhau), sự bất biến này là phát biểu trong phương trình (12.29). Đối với tích trong của hai động lượng bốn chiều khác nhau, chúng ta sẽ chứng minh tính bất biến trong Mục 13.3.

Ví dụ (Trò chơi bida trong thuyết tương đối): Một phần tử với khối lượng m và năng lượng E tiến tới một phần tử giống hệt nó ở trạng thái nghỉ. Chúng va chạm đàn hồi[8] theo cách sao cho cả hai chúng đều lệch một góc θ đối với chiều chuyển động tới (xem hình 12.7). Góc θ bằng bao nhiêu theo E và m? Góc θ bằng bao nhiêu trong giới hạn tương đối và giới hạn không tương đối?



Hình 12.7:

Lời giải: Điều đầu tiên chúng ta nên làm là mô tả các động lượng bốn chiều. Động lượng bốn chiều trước khi va chạm là

$$P_1 = (E, p, 0, 0), \quad P_2 = (m, 0, 0, 0), \tag{12.37}$$

trong đó $p = \sqrt{E^2 - m^2}$. Động lượng bốn chiều sau khi va chạm là (dấu phẩy bây giờ định nghĩa "sau khi")

$$P_1' = (E', p'\cos\theta, p'\sin\theta, 0), \quad P_2' = (E', p'\cos\theta, -p'\sin\theta, 0), \tag{12.38}$$

[8]Một va chạm đàn hồi trong vật lý không tương đối được định nghĩa là va chạm ở đó không có nhiệt sinh ra. Trong thuyết tương đối, nhiệt được xem như là khối lượng. Do đó một va chạm đàn hồi trong vật lý tương đối được định nghĩa là va chạm trong đó không có sự thay đổi khối lượng.

trong đó $p' = \sqrt{E'^2 - m^2}$. Sự bảo toàn năng lượng dẫn đến $E' = (E+m)/2$, và sự bảo toàn động lượng p_x dẫn đến $p'\cos\theta = p/2$. Do đó, động lượng bốn chiều sau khi va chạm là

$$P'_{1,2} = \left(\frac{E+m}{2}, \frac{p}{2}, \pm\frac{p}{2}\tan\theta, 0\right). \tag{12.39}$$

Từ phương trình (12.36), bình phương của động lượng bốn chiều này phải bằng m^2. Do đó,

$$\begin{aligned} m^2 &= \left(\frac{E+m}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 \left(1+\tan^2\theta\right) \\ \Longrightarrow \quad 4m^2 &= (E+m)^2 - \frac{(E^2-m^2)}{\cos^2\theta} \\ \Longrightarrow \quad \cos^2\theta &= \frac{E^2-m^2}{E^2+2Em-3m^2} = \frac{E+m}{E+3m}. \end{aligned} \tag{12.40}$$

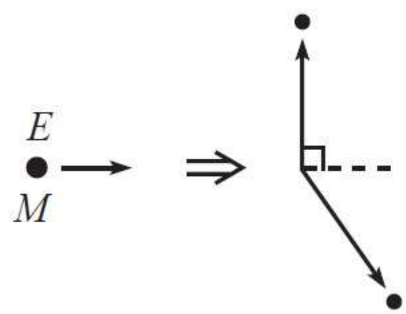
Giới hạn tương đối là $E \gg m$, giới hạn này dẫn đến $\cos\theta \approx 1$. Điều này có nghĩa là cả hai phần tử gần như thẳng về phía trước. Bạn có thể tự mình thấy rằng θ sẽ nhỏ bằng cách xem xét va chạm trong hệ quy chiếu khối tâm và sau đó thay lại hệ quy chiếu quán tính. Các vận tốc ngang giảm trong quá trình thay đổi hệ quy chiếu này.

Giới hạn không tương đối là $E \approx m$ (chứ không phải là $E \approx 0$), điều này dẫn đến $\cos\theta \approx 1/\sqrt{2}$. Do đó $\theta \approx 45°$, và các phần tử lệch với nhau một góc $90°$. Kết quả này phù hợp với kết quả từ ví dụ "Trò chơi bida" trong Mục 5.7.2, một kết quả rất quen thuộc với các tay chơi bida.

Chú ý rằng chúng ta không bao giờ mô tả bất kỳ điều gì liên quan đến v trong lời giải ở trên. Tức là chúng ta không sử dụng các mối liên hệ $E = \gamma mc^2$ và $p = \gamma mv$. Bởi vì chúng ta không cần phải tìm các vận tốc; làm như vậy về cơ bản giống như đi đường vòng. Sử dụng $E = \gamma mc^2$ và $p = \gamma mv$ chắc chắn sẽ đưa ra một cách giải bài toán này chính xác, nhưng trong nhiều tình huống giống như thế này, tức là không cần tính cụ thể các vận tốc thì cách làm như vậy sẽ rất là rắc rối. Một phương pháp sáng sủa hơn chính là việc sử dụng mối liên hệ $E^2 - p^2 = m^2$.

Bây giờ chúng ta hãy xem xét hiện tượng phân rã. Phân rã về cơ bản cũng giống như hiện tượng va chạm. Tất cả những gì bạn phải làm đó là bảo toàn năng lượng và động lượng như ví dụ sau đây.

Ví dụ (Phân rã với một góc lệch): Một hạt với khối lượng M và năng lượng E phần rã thành hai hạt giống hệt nhau. Trong hệ quy chiếu quán tính, một trong hai hạt được phát ra tại góc 90° như trong hình 12.8. Năng lượng của các hạt tạo thành bằng bao nhiêu? Chúng ta sẽ đưa ra hai lời giải. Lời giải thứ hai sẽ chỉ ra rằng động lượng bốn chiều có thể được sử dụng theo một cách hết sức đẹp đẽ và tiết kiệm thời gian.



Hình 12.8:

Lời giải đầu tiên: Động lượng bốn chiều trước khi phân rã là

$$P = (E, p, 0, 0), \tag{12.41}$$

trong đó $p = \sqrt{E^2 - M^2}$. Giải sử hai hạt tạo thành có khối lượng m, và giả sử hạt thứ hai tạo một góc θ đối với trục x. Động lượng bốn chiều sau khi phân rã là

$$P_1 = (E_1, 0, p_1, 0), \quad P_2 = (E_2, p_2\cos\theta, -p_2\sin\theta, 0). \tag{12.42}$$

Sự bảo toàn p_x ngay lập tức dẫn đến $p_2\cos\theta = p$, điều này khi đó chỉ ra rằng $p_2\sin\theta = p\tan\theta$. Sự bảo toàn p_y dẫn đến các p_y cuối cùng là ngược chiều nhau. Do đó, động lượng bốn chiều sau khi phân rã là

$$P_1 = (E_1, 0, p\tan\theta, 0), \quad P_2 = (E_2, p, -p\tan\theta, 0). \tag{12.43}$$

Sự bảo toàn năng lượng dẫn đến $E = E_1 + E_2$. Viết E_1 và E_2 dưới dạng động lượng và khối lượng, biểu thức này trở thành

$$E = \sqrt{p^2\tan^2\theta + m^2} + \sqrt{p^2(1+\tan^2\theta) + m^2}. \tag{12.44}$$

Chuyển căn thứ nhất sang vế trái, bình phương và giải đối với căn đó (đó là E_1) dẫn đến

$$E_1 = \frac{E^2 - p^2}{2E} = \frac{M^2}{2E}. \tag{12.45}$$

Bằng cách làm tương tự, chúng ta tìm được E_2 bằng

$$E_2 = \frac{E^2 + p^2}{2E} = \frac{2E^2 - M^2}{2E}. \tag{12.46}$$

Hai kết quả này cộng vào sẽ thu được E.

Lời giải thứ hai: Với động lượng bốn chiều định nghĩa như trong phương trình (12.41) và (12.42), sự bảo toàn năng lượng và động lượng có thể kết hợp lại thành phát biểu $P = P_1 + P_2$. Do đó,

$$\begin{aligned} P - P_1 &= P_2 \\ \Longrightarrow \quad (P - P_1) \cdot (P - P_1) &= P_2 \cdot P_2, \\ \Longrightarrow \quad P^2 - 2P \cdot P_1 + P_1^2 &= P_2^2, \\ \Longrightarrow \quad M^2 - 2EE_1 + m^2 &= m^2, \\ \Longrightarrow \quad E_1 &= \frac{M^2}{2E}. \end{aligned} \tag{12.47}$$

Và khi đó $E_2 = E - E_1 = (2E^2 - M^2)/2E$. Lời giải này sẽ làm cho bạn tin rằng động lượng bốn chiều có thể giúp bạn tiết kiệm được rất nhiều tính toán. Điều xảy ra ở đây đó là biểu thức của P_2 khá rắc rối, nhưng chúng ta đã sắp xếp mọi thứ sao cho nó chỉ xuất hiện trong dạng P_2^2, và dạng này đơn giản chỉ là m^2. Động lượng bốn chiều cung cấp một phương pháp tổ chức đặc biệt đối với việc bỏ qua những tính toán rườm rà không cần thiết.

12.4 Các đơn vị trong vật lý hạt

Một nhánh của vật lý sử dụng thuyết tương đối như là một công cụ chính của nó là vật lý hạt sơ cấp, đó là sự nghiên cứu các đơn vị cấu thành vật chất (electron, quark, neutrino, ...). Nhưng không may là hầu hết những hạt sơ cấp mà chúng ta muốn nghiên cứu lại không tồn tại một cách tự nhiên trong thế giới của chúng ta. Do đó chúng ta phải tạo ra chúng trong các máy gia tốc hạt bằng va chạm của các hạt khác nhau với năng lượng vô cùng lớn. Liên quan đến các vận tốc cao đòi hỏi phải sử dụng động lực học tương đối. Vật lý Newtơn về bản chất là không thể sử dụng ở đây.

Kích thước điển hình của năng lượng nghỉ mc^2 của một hạt cơ cấp là bao nhiêu? Năng lượng nghỉ của một proton (proton thực sự không phải là một hạt sơ cấp; nó được tạo thành từ các hạt quark, nhưng chúng ta không quan tâm đến điều đó ở đây) là

$$E_p = m_p c^2 = (1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg})(3 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2 = 1.5 \cdot 10^{-10} \text{ jun} \tag{12.48}$$

Tất nhiên, giá trị này là rất nhỏ. Do đó một jun chắc chắn không phải là đơn vị tốt nhất để sử dụng. Chúng ta sẽ rất mệt mỏi khi cứ phải viết số mũ âm liên tục. Có lẽ chúng ta sẽ sử dụng "nanojun", nhưng các nhà vật lý hạt muốn sử dụng đơn vị là "eV," *electron*

- *volt*. Đây là sự thay đổi năng lượng của một electron khi nó đi qua một thế năng một volt. Điện tích (âm) của electron là $e = 1.602 \cdot 10^{-19}$ C, và một volt được định nghĩa là 1 V = 1 J/C. Do đó sự chuyển đổi từ eV sang jun là[9]

$$1 \text{ eV} = (1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C})(1 \text{ J/C}) = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ J}. \tag{12.49}$$

Do đó, dưới dạng eV, năng lượng nghỉ của một proton là $938 \cdot 10^6$ eV. Bây giờ chúng ta có vấn đề ngược lại khi lại xuất hiện số mũ lớn. Nhưng điều này dễ dàng được khắc phục bởi tiền tố "M", tiền tố này thay cho "mega" hoặc "triệu". Do đó cuối cùng chúng ta có năng lượng nghỉ của một proton là

$$E_p = 938 \text{ MeV}. \tag{12.50}$$

Bạn có thể tự mình tính toán để thấy rằng một electron có năng lượng nghỉ là $E_e = 0.511$ MeV. Năng lượng nghỉ của các hạt khác nhau được cho trong bảng dưới đây. Giá trị năng lượng mà có dấu " $\approx$ " ở phía trước là giá trị trung bình của các hạt tích điện khác nhau mà năng lượng của chúng khác nhau một vài MeV. Các hạt sơ cấp này (và rất nhiều hạt khác) có các đặc tính riêng biệt (spin, điện tích, ...) nhưng với mục đích hiện tại chúng chỉ cần được xem xét như là một chất điểm có khối lượng hữu hạn.

Hạt	Năng lượng nghỉ (MeV)
electron (e)	0.511
muon (μ)	105.7
tau (τ)	1784
proton (p)	938.3
neutron (n)	939.6
lambda (Λ)	1115.6
sigma (Σ)	≈ 1193
delta (Δ)	≈ 1232
pion (π)	≈ 137
kaon (K)	≈ 496

Đối với trường hợp năng lượng cao, các tiền tố "G" (cho "giga", nghĩa là 10^9) và "T" (cho "tera", nghĩa là 10^{12}) được sử dụng.

[9] Mặc dù hơi cầu kỳ, nhưng "eV" về mặt kỹ thuật nên được viết là "eV" bởi vì khi mọi người viết "eV", họ thực sự có ý rằng hai thứ nhân với nhau (trái ngược với ví dụ như ký hiệu "kg" có nghĩa là "kilogram"). Một trong hai thứ này là điện tích của electron, điện tích này thường được ký hiệu bởi e.

Bây giờ chúng ta sẽ đến với việc hơi lạm dụng ngôn ngữ một chút. Khi các nhà vật lý hạt nói về khối lượng, họ nói mọi thứ giống như kiểu, "Khối lượng của một proton là 938 MeV." Tất nhiên điều này không có ý nghĩa bởi vì đơn vị là không chính xác; một khối lượng không thể bằng một năng lượng. Nhưng điều mà họ muốn nói đó là nếu bạn lấy năng lượng này chia cho c^2 thì bạn sẽ thu được khối lượng. Nó sẽ giống như cách nói, "Khối lượng là một năng lượng nào đó, chia cho c^2." Để đổi nhanh về đơn vị kilogram, bạn có thể chỉ ra rằng

$$1 \text{ MeV}/c^2 = 1.783 \cdot 10^{-30} \text{ kg}. \tag{12.51}$$

12.5 Lực

12.5.1 Lực trong trường hợp một chiều

Trong vật lý không tương đối, định luật hai Newton là $F = dp/dt$, phương trình này trở thành $F = ma$ nếu khối lượng là hằng số. Chúng ta sẽ mang định luật này sang thuyết tương đối và tiếp tục viết (bây giờ chúng ta chỉ đề cập tới chuyển động một chiều)

$$F = \frac{dp}{dt}. \tag{12.52}$$

Tuy nhiên, trong động lực học tương đối chúng ta có $p = \gamma mv$, và γ có thể thay đổi theo thời gian. Điều này làm phức tạp mọi thứ, và nó dẫn đến một điều là F không bằng ma. Nhưng nếu dp/dt và ma khác nhau, thì tại sao F lại bằng dp/dt thay vì bằng ma? Có lẽ lý do tốt nhất nảy sinh từ công thức vectơ bốn chiều trong Chương 13. Nhưng lý do khác đó là F trong phương trình (12.52) dẫn đến định lý công - năng lượng quen thuộc như chúng ta sẽ thấy trong phương trình (12.57).

Để xem F trong phương trình (12.52) sẽ lấy dạng nào theo gia tốc $a \equiv \dot{v}$, đầu tiên ta hãy tính $d\gamma/dt$:

$$\frac{d\gamma}{dt} \equiv \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\right) = \frac{v\dot{v}}{(1-v^2)^{3/2}} \equiv \gamma^3 va. \tag{12.53}$$

Giả sử m là hằng số, do đó chúng ta có

$$F = \frac{d(\gamma mv)}{dt} = m(\dot{\gamma}v + \gamma\dot{v}) = ma\gamma(\gamma^2v^2 + 1) = \gamma^3 ma. \tag{12.54}$$

Kết quả này nhìn không đẹp đẽ như $F = ma$ nhưng đó là kết quả mà chúng ta đã tính toán. Tuy nhiên, F đúng là suy biến thành ma trong giới hạn vận tốc nhỏ (ở đó $\gamma \approx 1$).

Bây giờ chúng ta xét đại lượng dE/dx, trong đó E là năng lượng, $E = \gamma m$. Chúng ta có

$$\frac{dE}{dx} = \frac{d(\gamma m)}{dx} = m\frac{d(1/\sqrt{1-v^2})}{dx} = \gamma^3 mv\frac{dv}{dx}. \qquad (12.55)$$

Nhưng $v(dv/dx) = (dx/dt)(dv/dx) = dv/dt = a$. Do đó, $dE/dx = \gamma^3 ma$. Kết hợp với phương trình phương trình (12.54) ta có

$$F = \frac{dE}{dx}. \qquad (12.56)$$

Chú ý rằng phương trình (12.52) và (12.56) có dạng giống hệt như trong vật lý không tương đối. Thứ mới duy nhất trong vật lý tương đối đó là biểu thức đối với p và E thay đổi.

NHẬN XÉT: Kết quả trong phương trình (12.56) đưa ra một cách khác để thành lập biểu thức $E = \gamma m$. Lý luận là giống hệt như cách thành lập của năng lượng không tương đối trong Mục 5.1. Định nghĩa F như chúng ta đã làm trong phương trình (12.52). Sau đó tích phân phương trình (12.54) từ x_1 đến x_2 chúng ta thu được

$$\int_{x_1}^{x_2} F dx = \int_{x_1}^{x_2} (\gamma^3 ma) dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(\gamma^3 mv\frac{dv}{dx}\right) dx = \int_{x_1}^{x_2} \gamma^3 mv dv = \gamma m\Big|_{v_1}^{v_2}, \qquad (12.57)$$

trong đó chúng ta đã sử dụng mối liên hệ $d\gamma = \gamma^3 v dv$ từ phương trình (12.55). Chúng ta thấy rằng nếu chúng ta định nghĩa năng lượng là $E = \gamma m$ thì định lý công - năng lượng, $\int F dx = \Delta E$ cũng đúng trong thuyết tương đối giống như trong vật lý Newtơn. Sự khác biệt duy nhất đó là E bằng γm thay vì bằng $mv^2/2$.[10] ♣

12.5.2 Lực trong trường hợp hai chiều

Trong trường hợp hai chiều, khái niệm về lực trở thành hơi lạ. Cụ thể, như chúng ta sẽ thấy, gia tốc của một vật thể không cần hướng theo chiều giống như của lực. Chúng ta bắt đầu với

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \qquad (12.58)$$

Đây là một phương trình vectơ. Khống mất tính tổng quát, chúng ta sẽ chỉ đề cập tới hai chiều không gian. Xét một phần tử chuyển động theo chiều x và chịu tác dụng của một

[10] Thực tế, lý luận này chỉ dẫn đến rằng E cho bởi γm sai khác một hằng số. Với tất cả những gì chúng ta biết thì E có thể có dạng $E = \gamma m - m$, giá trị này sẽ làm năng lượng của một phần tử không chuyển động bằng không. Một thảo luận về vấn đề này trong Mục 12.1.2 chỉ ra rằng hằng số này phải bằng không.

lực $\mathbf{F} = (F_x, F_y)$. Động lượng của phần tử là

$$\mathbf{p} = \frac{m(v_x, v_y)}{\sqrt{1 - v_x^2 - v_y^2}}. \tag{12.59}$$

Lấy đạo hàm phương trình này, và sử dụng thực tế là v_y ban đầu bằng không, chúng ta thu được

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} &= \frac{d\mathbf{p}}{dt}\Big|_{v_y=0} \\
&= m\left(\frac{\dot{v}_x}{\sqrt{1-v^2}} + \frac{v_x(v_x\dot{v}_x + v_y\dot{v}_y)}{(\sqrt{1-v^2})^3}, \frac{\dot{v}_y}{\sqrt{1-v^2}} + \frac{v_y(v_x\dot{v}_x + v_y\dot{v}_y)}{(\sqrt{1-v^2})^3}\right)\Big|_{v_y=0} \\
&= m\left(\frac{\dot{v}_x}{\sqrt{1-v^2}}\left(1 + \frac{v^2}{1-v^2}\right), \frac{\dot{v}_y}{\sqrt{1-v^2}}\right) \\
&= m\left(\frac{\dot{v}_x}{(\sqrt{1-v^2})^3}, \frac{\dot{v}_y}{\sqrt{1-v^2}}\right) \\
&\equiv m(\gamma^3 a_x, \gamma a_y).
\end{aligned} \tag{12.60}$$

Kết quả này là không tỷ lệ với (a_x, a_y). Thành phần đầu tiên giống như phương trình (12.54), nhưng thành phần thứ hai chỉ có một thừa số γ. Sự khác biệt đến từ thực tế rằng γ có thay đổi bậc nhất nếu v_x thay đổi, nhưng không thay đổi nếu v_y thay đổi, giả sử rằng ban đầu v_y bằng không. Do đó phần tử sẽ phản ứng khác nhau đối với lực theo chiều x và chiều y. Sẽ là dễ dàng hơn khi tăng tốc một thứ gì đó theo chiều ngang.

12.5.3 Phép biến đổi các lực

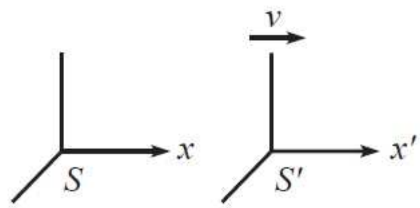
Xét một lực tác dụng lên một hạt. Các thành phần của lực trong hệ quy chiếu S' của hạt liên hệ với các thành phần của lực trong một hệ quy chiếu S khác như thế nào?[11] Giả sử chuyển động tương đối là dọc theo trục x và x' như trong hình 12.9. Trong hệ quy chiếu S, phương trình (12.60) có dạng

$$(F_x, F_y) = m(\gamma^3 a_x, \gamma a_y). \tag{12.61}$$

Và trong hệ quy chiếu S', thừa số γ đối với hạt bằng 1, do đó phương trình (12.60) rút gọn thành biểu thức thông thường,

$$(F'_x, F'_y) = m(a'_x, a'_y). \tag{12.62}$$

[11] Một cách chặt chẽ hơn, S' là hệ quy chiếu quán tính tức thời của hạt. Ngay khi lực tác dụng, hạt sẽ tăng tốc và do đó sẽ không còn ở trạng thái nghỉ trong S'. Nhưng với khoảng thời gian trôi qua rất nhỏ, về cơ bản hạt vẫn sẽ ở trong S'.



Hình 12.9:

Bây giờ chúng ta sẽ liên hệ hai lực này, bằng cách viết các gia tốc phẩy bên vế phải của phương trình (12.62) dưới dạng các gia tốc không phẩy.

Đầu tiên, chúng ta có $a'_y = \gamma^2 a_y$. Điều này là chính xác bởi vì các dịch chuyển ngang là như nhau trong hai hệ quy chiếu, nhưng thời gian là ngắn hơn trong S' bởi thừa số γ. Tức là $dt' = dt/\gamma$. Quả thực chúng ta đã để γ ở bên phải bởi vì hạt về bản chất là ở trạng thái nghỉ trong S', do đó sự giãn nở thời gian thông thường vẫn đúng. Dẫn đến, $a'_y \equiv d^2y'/dt'^2 = d^2y/(dt/\gamma)^2 \equiv \gamma^2 a_y$.

Thứ hai, chúng ta có $a'_x = \gamma^3 a_x$. Tóm lại, điều này đúng bởi vì sự giãn nở thời gian đưa vào hai thừa số của γ (như trong trường hợp a_y), và sự co độ dài mang vào một. Chi tiết hơn: Giả sử hạt chuyển động từ một điểm này đến một điểm khác trong hệ quy chiếu S' khi nó tăng tốc từ trạng thái nghỉ trong S'. Đánh dấu hai điểm này, hai điểm này về cơ bản là cách nhau một khoảng $a'_x(dt')^2/2$ trong S'. Khi S' chuyển động qua S, khoảng cách giữa hai điểm đánh dấu bị co độ dài lại bởi thừa số γ theo quan sát bởi S. Khoảng cách này (khoảng cách vượt quá khoảng cách mà hạt di chuyển được nếu nó không có gia tốc) là khoảng cách mà S thấy là bằng $a_x(dt)^2/2$. Do đó,

$$\frac{1}{2}a_x dt^2 = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{2}a'_x dt'^2\right) \quad \Longrightarrow \quad a'_x = \gamma a_x \left(\frac{dt}{dt'}\right)^2 = \gamma^3 a_x. \tag{12.63}$$

Phương trình (12.62) bây giờ có thể được viết lại như sau

$$(F'_x, F'_y) = m(\gamma^3 a_x, \gamma^2 a_y). \tag{12.64}$$

So sánh phương trình (12.61) và phương trình (12.64) sẽ dẫn đến

$$F_x = F'_x, \quad \text{và} \quad F_y = \frac{F'_y}{\gamma}. \tag{12.65}$$

Chúng ta thấy rằng lực theo chiều dọc là như nhau trong hai hệ quy chiếu nhưng lực theo chiều ngang lớn hơn bởi một thừa số γ trong hệ quy chiếu của hạt.

NHẬN XÉT:

1. Điều gì sẽ xảy ra nếu một người nào đó đi cùng và thay đổi ký hiệu hệ quy chiếu phẩy và không phẩy trong phương trình (12.65) và sau đó kết luận rằng lực ngang là nhỏ hơn trong hệ quy chiếu của hạt? Anh ta chắc chắn là không đúng mặc dù phương trình (12.65) là chính xác, nhưng sai lầm là ở đâu? Sai lầm nằm ở thực tế rằng chúng ta (đúng) đã sử dụng $dt' = dt/\gamma$ ở trên, bởi vì đây là công thức thích hợp liên quan tới hai sự kiện dọc theo đường vũ trụ của hạt. Chúng ta quan tâm đến hai sự kiện như vậy bởi vì chúng ta muốn xem xét xem hạt chuyển động như thế nào? Công thức ngược lại $dt = dt'/\gamma$ liên quan tới hai sự kiện xảy ra tại cùng một vị trí trong S, và do đó sẽ không có gì cần làm trong tình huống sắp tới. Lập luận tương tự cũng đúng cho mối liên hệ giữa dx và dx'. Bởi vì chúng ta đang đề cập tới một hạt cho trước, do đó quả thực có một hệ quy chiếu đặc biệt trong tất cả các hệ quy chiếu có thể có, cụ thể là hệ quy chiếu quán tính tức thời của hạt.

2. Nếu bạn muốn so sánh các lực trong hai hệ quy chiếu, không có hệ quy chiếu nào là hệ quy chiếu nghỉ của hạt, thì hãy sử dụng phương trình (12.65) hai lần và liên hệ mỗi lực với lực trong hệ quy chiếu nghỉ. Sẽ nhanh chóng dẫn tới rằng đối với hệ quy chiếu S'' khác, chúng ta có $F''_x = F_x$, và $\gamma'' F''_y = \gamma F_y$, trong đó γ được đo đối với hệ quy chiếu nghỉ S'. ♣

Ví dụ (Một hạt trên chiếc gậy): Một lò xo bị căng có một đầu gắn với đầu của một chiếc gậy, và đầu kia gắn với một hạt chỉ chuyển động dọc theo chiếc gậy. Chiếc gậy tạo một góc θ' đối với trục x' và được cố định ở trạng thái nghỉ trong hệ quy chiếu S' (xem hình 12.10). Hạt được giải phóng và bị kéo dọc theo gậy bởi lò xo. Ngay sau khi hạt được giải phóng, tình huống trong hệ quy chiếu S của một người nào đó chuyển động sang bên trái với vận tốc v sẽ như thế nào? Để trả lời câu hỏi này, vẽ chiều của

(a) chiếc gậy,

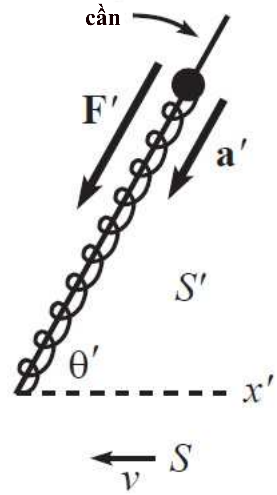
(b) gia tốc của hạt,

(c) lực tác dụng lên hạt.

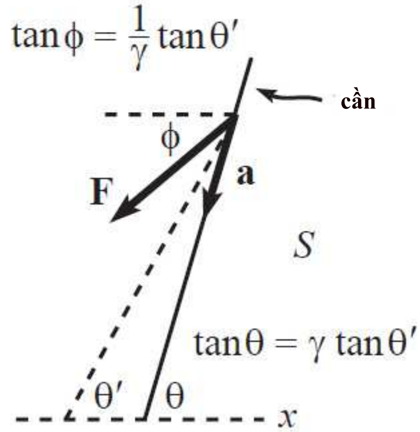
Trong hệ quy chiếu S, dây có xuất hiện lực nén không?

Lời giải: Trong hệ quy chiếu S:

(a) Khoảng ngang của chiếc gậy bị giảm đi bởi một thừa số γ do sự co độ dài, và khoảng thẳng đứng không thay đổi, do đó ta có $\tan\theta = \gamma \tan\theta'$ như trong hình 12.11.



Hình 12.10:



Hình 12.11:

(b) Gia tốc phải hướng dọc theo chiếc gậy bởi vì hạt luôn nằm trên gậy, và bởi vì chiếc gậy chuyển động với vận tốc không đổi trong S. Về mặt định lượng, vị trí của hạt trong S có dạng $(x, y) = (vt - a_x t^2/2, -a_y t^2/2)$ theo định nghĩa của gia tốc. Vị trí so với vị trí ban đầu trên chiếc gậy, vị trí ban đầu này có tọa độ $(vt, 0)$, khi đó sẽ là $(\Delta x, \Delta y) = (-a_x t^2/2, -a_y t^2/2)$. Điều kiện để hạt ở trên chiếc gậy đó là tỷ số của các tọa độ này phải bằng độ nghiêng của chiếc gậy trong hệ quy chiếu S. Do đó, $a_y/a_x = \tan\theta$, và gia tốc hướng dọc theo chiếc gậy.

(c) Thành phần theo phương y của lực tác dụng lên hạt giảm bởi một thừa số γ theo phương trình (12.65). Do đó, bởi vì lực tạo một góc θ' trong S' (bởi vì nó hướng dọc theo gậy trong hệ quy chiếu S'), nên góc trong S được cho bởi $\tan\phi = (1/\gamma)\tan\theta'$ như trong hình vẽ.

Để kiểm tra lại rằng a quả thực hướng dọc theo chiếc gậy, chúng ta có thể sử dụng phương trình (12.60) để viết $a_y/a_x = \gamma^2 F_y/F_x$. Khi đó phương trình (12.65) dẫn đến $a_y/a_x = \gamma F'_y/F'_x = \gamma \tan\theta' = \tan\theta$, đây là chiều của dây.

Dây không xuất hiện lực nén. Hạt không cần tiếp xúc với dây trong S', do đó nó không cần chạm vào dây trong S. Sẽ không cần phải có thêm một lực hợp với lực **F** để tạo thành hợp lực hướng theo **a** bởi vì **F** đơn giản không phải cộng tuyến với **a**.

12.6 Chuyển động tên lửa

Cho đến bây giờ, chúng ta đã đề cập tới những tình huống mà ở đó khối lượng của các hạt của chúng ta là không đổi, hoặc chúng thay đổi đột ngột (như trong hiện tượng phân rã, ở đó tổng khối lượng của các sản phẩm là nhỏ hơn khối lượng của hạt ban đầu). Nhưng trong nhiều trường hợp, khối lượng của một vật thể thay đổi liên tục. Một tên lửa là một ví dụ kinh điển về trường hợp này, do đó chúng ta sử dụng thuật ngữ "chuyển động tên lửa" để mô tả lớp bài toán tổng quát mà ở đó khối lượng thay đổi liên tục.

Tên lửa trong thuyết tương đối tự nó đã chứa đựng tất cả những ý tưởng quan trọng, do đó chúng ta sẽ nghiên cứu ví dụ đó ở đây. Nhiều ví dụ khác được bỏ qua đối với vấn đề này. Chúng ta sẽ đưa ra ba lời giải đối với bài toán tên lửa, lời giải cuối cùng khá khéo léo. Cuối cùng, tất cả các lời giải về cơ bản là giống nhau, nhưng sẽ rất hữu ích khi xem xét các cách nhìn khác nhau.

Ví dụ (Tên lửa trong thuyết tương đối): Giả sử rằng một tên lửa đẩy nó đi bằng cách liên tục biến đổi khối lượng thành các photon và bắn chúng ra phía sau. Gọi m là khối lượng tức thời của tên lửa, và v là vận tốc tức thời đối với mặt đất. Chỉ ra rằng

$$\frac{dm}{m} + \frac{dv}{1-v^2} = 0. \qquad (12.66)$$

Nếu khối lượng ban đầu là M, và vận tốc ban đầu v bằng không, tích phân phương trình (12.66) để thu được

$$m = M\sqrt{\frac{1-v}{1+v}}. \qquad (12.67)$$

LỜI GIẢI THỨ NHẤT: Cách làm của lời giải này là sẽ sử dụng sự bảo toàn động lượng trong hệ quy chiếu mặt đất. Xét ảnh hưởng của một khối lượng nhỏ bị biến đổi thành photon. Khối lượng của tên lửa từ m thành $m + dm$ (trong đó dm là âm). Do đó trong hệ quy chiếu của tên lửa, photon với tổng năng lượng $E_r = -dm$ (giá trị này dương) bị bắn về phía sau. Trong hệ quy chiếu của tên lửa, các photon này có động lượng $p_r = dm$ (giá trị này âm). Chúng ta sẽ bỏ qua ký hiệu c ở đây.

Giả sử tên lửa chuyển động với vận tốc v so với mặt đất. Khi đó động lượng của photon trong hệ quy chiếu mặt đất, p_g, có thể tìm được thông qua phép biến đổi Lorentz,

$$p_g = \gamma(p_r + vE_r) = \gamma(dm + v(-dm)) = \gamma(1-v)dm. \tag{12.68}$$

Tất nhiên giá trị này vẫn âm.

NHẬN XÉT: Một lỗi phổ biến là khi nói rằng năng lượng biến đổi $(-dm)$ có dạng photon của năng lượng $(-dm)$ trong hệ quy chiếu mặt đất. Điều này không chính xác, bởi vì mặc dù photon có năng lượng $(-dm)$ trong hệ quy chiếu tên lửa nhưng chúng bị thay đổi màu đỏ (do ảnh hưởng Doppler) trong hệ quy chiếu mặt đất. Từ phương trình (11.51), chúng ta thấy rằng tần số (và do đó là năng lượng) của photon giảm đi bởi một thừa số $\sqrt{(1-v)/(1+v)}$ khi đi từ hệ quy chiếu tên lửa sang hệ quy chiếu mặt đất. Thừa số này bằng thừa số $\gamma(1-v)$ trong phương trình (12.68). ♣

Bây giờ chúng ta có thể sử dụng sự bảo toàn động lượng trong hệ quy chiếu mặt đất để nói rằng

$$(m\gamma v)_{old} = \gamma(1-v)dm + (m\gamma v)_{new} \quad \Longrightarrow \quad \gamma(1-v)dm + d(m\gamma v) = 0. \tag{12.69}$$

Đại lượng $d(m\gamma v)$ có thể được mở rộng để dẫn tới

$$\begin{aligned} d(m\gamma v) &= (dm)\gamma v + m(d\gamma)v + m\gamma(dv) \\ &= \gamma v dm + m(\gamma^3 v dv)v + m\gamma dv \\ &= \gamma v dm + m\gamma(\gamma^2 v^2 + 1)dv \\ &= \gamma v dm + m\gamma^3 dv. \end{aligned} \tag{12.70}$$

Do đó, phương trình (12.69) trở thành

$$\begin{aligned} 0 &= \gamma(1-v)dm + \gamma v dm + m\gamma^3 dv \\ &= \gamma dm + m\gamma^3 dv. \end{aligned} \tag{12.71}$$

Dẫn đến,

$$\frac{dm}{m} + \frac{dv}{1-v^2} = 0, \tag{12.72}$$

phù hợp với phương trình (12.66). Bây giờ chúng ta phải tích phân phương trình này. Với các giá trị đầu đã cho, chúng ta có

$$\int_M^m \frac{dm}{m} + \int_0^v \frac{dv}{1-v^2} = 0. \tag{12.73}$$

Chúng ta có thể xem tích phân dv có sẵn trong bảng, nhưng hãy tính toán nó từ đầu.[12] Viết $1/(1-v^2)$ dưới dạng tổng của hai phân số, dẫn đến

$$\begin{aligned}\int_0^v \frac{dv}{1-v^2} &= \frac{1}{2}\int_0^v \left(\frac{1}{1+v}+\frac{1}{1-v}\right) dv \\ &= \frac{1}{2}\left(\ln(1+v)-\ln(1-v)\right)\Big|_0^v \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+v}{1-v}\right). \end{aligned} \tag{12.74}$$

Do đó, phương trình (12.73) trở thành

$$\ln\left(\frac{m}{M}\right) = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+v}{1-v}\right) \quad \Longrightarrow \quad m = M\sqrt{\frac{1-v}{1+v}}, \tag{12.75}$$

phù hợp với phương trình (12.67). Kết quả này là độc lập với tốc độ khối lượng biến đổi thành photon. Nó cũng độc lập với tần số của các photon phát ra. Chỉ có tổng khối lượng là bị giảm đi. Chú ý rằng phương trình (12.75) nhanh chóng cho chúng ta thấy rằng năng lượng của tên lửa, xem như là hàm của vận tốc, có dạng

$$E = \gamma m = \gamma M\sqrt{\frac{1-v}{1+v}} = \frac{M}{1+v}. \tag{12.76}$$

Kết quả này có một đặc điểm thú vị là sẽ tiến tới $M/2$ khi $v \to c$. Nói một cách khác, một nửa năng lượng ban đầu giữ lại với tên lửa, và một nửa chuyển hóa hoàn toàn thành photon (xem bài tập 12.38).

NHẬN XÉT: Từ phương trình (12.68), hoặc từ nhận xét trước, chúng ta thấy rằng tỷ số của năng lượng photon trong hệ quy chiếu mặt đất và photon trong hệ quy chiếu tên lửa là $\sqrt{(1-v)(1+v)}$. Thừa số này giống như thừa số trong phương trình (12.75). Nói một cách khác, năng lượng của photon trong hệ quy chiếu mặt đất giảm giống hệt như khối lượng của tên lửa (giả sử rằng các photon phát ra với cùng tần số trong hệ quy chiếu tên lửa trong suốt quá trình này). Do đó, trong hệ quy chiếu mặt đất, tỷ số của năng lượng photon và khối lượng của tên lửa không thay đổi theo thời gian. Phải có một sự giải thích mang tính trực quan cho điều này nhưng nó vượt quá sự hiểu biết của tôi. ♣

LỜI GIẢI THỨ HAI: Cách làm của lời giải này đó là sẽ sử dụng $F = dp/dt$ trong hệ quy chiếu mặt đất. Giả sử τ ký hiệu thời gian trong hệ quy chiếu tên lửa. Khi đó trong hệ quy chiếu tên lửa, $dm/d\tau$ là tốc độ giảm của khối lượng tên lửa chuyển hóa thành photon (dm là âm). Do đó photon thu được động lượng với tốc

[12] Bảng thường liệt kê tích phân $1/(1-v^2)$ dưới dạng $\tanh^{-1}(v)$. Bạn có thể chỉ ra rằng giá trị này tương đương với giá trị trong phương trình (12.74).

độ $dp/d\tau = dm/d\tau$ trong hệ quy chiếu tên lửa. Bởi vì lực là tốc độ thay đổi của động lượng nên chúng ta thấy rằng một lực $dm/d\tau$ đẩy photon lại phía sau, và do đó một lực bằng và ngược chiều $F = -dm/d\tau$ đẩy tên lửa về phía trước trong hệ quy chiếu tên lửa.

Bây giờ chúng ta đến với hệ quy chiếu mặt đất. Chúng ta biết từ phương trình (12.65) rằng lực dọc là giống nhau trong cả hai hệ quy chiếu, do đó $F = -dm/d\tau$ cũng là lực tác dụng lên tên lửa trong hệ quy chiếu mặt đất. Và bởi vì $dt = \gamma d\tau$, trong đó t là thời gian trên mặt đất (sự phát ra photon xảy ra tại cùng một vị trí trong hệ quy chiếu tên lửa, do đó chúng ta quả thực đã để hằng số giãn nở thời gian γ bên phía phải), nên chúng ta có

$$F = -\gamma \frac{dm}{dt}. \tag{12.77}$$

NHẬN XÉT: Chúng ta cũng có thể tính toán lực tác dụng lên tên lửa bằng cách chỉ sử dụng hệ quy chiếu mặt đất. Xét một khối lượng $-dm$ bị biến đổi thành photon. Ban đầu, khối lượng này chuyển động cùng với tên lửa, do đó nó có động lượng $(-dm)\gamma v$. Sau khi nó bị biến đổi thành photon, nó có động lượng $\gamma(1-v)dm$ (từ lời giải đầu tiên ở trên). Do đó sự thay đổi động lượng là $\gamma(1-v)dm - (-dm)\gamma v = \gamma dm$. Bởi vì lực là tốc độ thay đổi động lượng, một lực $\gamma dm/dt$ đẩy photon lại phía sau, và do đó một lực bằng và ngược chiều $F = -\gamma dm/dt$ đẩy tên lửa về phía trước. ♣

Bây giờ mọi thứ có một chút rắc rối. Tạm thời có thể mô tả $F = dp/dt = d(m\gamma v)/dt$, điều này dẫn đến $F = (dm/dt)\gamma v + md(\gamma v)/dt$. Tuy nhiên, điều này không chính xác bởi vì đại lượng dm/dt không liên quan ở đây. Khi lực tác dụng vào tên lửa tại thời điểm khi tên lửa có khối lượng m, thứ duy nhất mà lực liên quan đó là khối lượng của tên lửa tại thời điểm cho trước đó là m. Nó không liên quan tới việc m thay đổi như thế nào.[13] Do đó, công thức chính xác chúng ta muốn là

$$F = m\frac{d(\gamma v)}{dt}. \tag{12.78}$$

Như trong lời giải đầu tiên ở trên, hoặc trong phương trình (12.54), chúng ta có $d(\gamma v)/dt = \gamma^3 dv/dt$. Sử dụng F từ phương trình (12.77), chúng ta đi đến

$$-\gamma\frac{dm}{dt} = m\gamma^3\frac{dv}{dt}, \tag{12.79}$$

kết quả này tương đương với phương trình (12.71). Lời giải tiếp tục như ở trên.

[13]Nói một cách khác, động lượng liên kết với khối lượng giải phóng vẫn tồn tại. Chỉ có một điều là nó không còn là một phần của tên lửa; nó là động lượng của photon. Đây là vấn đề được mở rộng trong Phụ lục C.

LỜI GIẢI THỨ BA: Cách làm đối với lời giải này đó là sẽ sử dụng sự bảo toàn năng lượng và động lượng trong hệ quy chiếu mặt đất một cách khéo léo. Xét một chùm photon bắn lại phía sau. Năng lượng và động lượng của các photon này bằng độ lớn và ngược dấu (với quy ước rằng photon được bắn ra theo chiều âm). Sử dụng sự bảo toàn năng lượng và động lượng, phát biểu giống như vậy cũng phải đúng về sự thay đổi năng lượng và động lượng của tên lửa. Tức là,

$$d(\gamma m) = -d(\gamma m v) \quad \Longrightarrow \quad d(\gamma m + \gamma m v) = 0. \tag{12.80}$$

Do đó, $\gamma m(1+v)$ là hằng số. Chúng ta có giả thiết rằng $m = M$ khi $v = 0$. Dẫn đến, hằng số bằng M. Do đó,

$$\gamma m(1+v) = M \quad \Longrightarrow \quad m = M\sqrt{\frac{1-v}{1+v}}. \tag{12.81}$$

Bây giờ, đó là cách giải ngắn gọn nhất trong số các cách giải đã có.

12.7 Dây tương đối

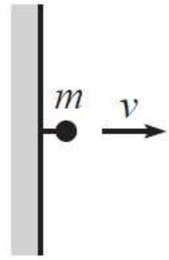
Xét một dây "không khối lượng" với sức căng không đổi, tức là độc lập với độ dài.[14] Chúng ta gọi vật thể như vậy là *dây tương đối*, và chúng ta sẽ nghiên cứu chúng bởi vì hai lý do. Đầu tiên, những dây này, hoặc sự xấp xỉ hợp lý của dây đó, thực sự xảy ra trong tự nhiên. Ví dụ, lực liên kết giữ các hạt quark cùng nhau xấp xỉ là hằng số đối với khoảng cách. Và thứ hai, chúng mở ra một lớp các mô hình mới mà chúng ta có thể nghiên cứu giống như hai ví dụ dưới đây. Dây tương đối có thể dường như khá kỳ lạ, nhưng bất kỳ bài toán một chiều nào liên quan đến chúng về cơ bản đều dẫn tới hai phương trình,

$$F = \frac{dp}{dt}, \quad \text{và} \quad F = \frac{dE}{dx}. \tag{12.82}$$

Ví dụ (Một khối lượng liên kết với tường): Một khối lượng m được liên kết với tường bởi một sợi dây tương đối có sức căng T. Khối lượng xuất phát cạnh tường và có vận tốc đầu v hướng ra ngoài (xem hình 12.12). Khối lượng đi được bao xa tính từ tường? Thời gian nó tới điểm này là bao lâu?

Lời giải: Gọi ℓ là khoảng cách lớn nhất so với tường. Năng lượng ban đầu của khối lượng là $E = \gamma m$. Năng lượng cuối cùng tại $x = \ell$ đơn giản là m, bởi vì khối lượng

[14] Với định nghĩa "không khối lượng", chúng ta có ý rằng sợi dây không có khối lượng trong trạng thái không giãn (tức là độ dài không). Ngay khi nó bị dãn, nó sẽ có năng lượng trong hệ quy chiếu nghỉ của nó, và do đó có khối lượng.



Hình 12.12:

ở trạng thái nghỉ tức thời tại đó. Tích phân $F = dE/dx$ và sử dụng thực tế rằng lực luôn luôn bằng $-T$ dẫn đến

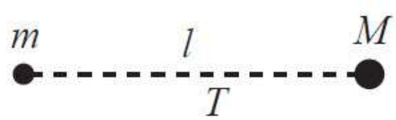
$$F\Delta x = \Delta E \quad \Longrightarrow \quad (-T)\ell = m - \gamma m \quad \Longrightarrow \quad \ell = \frac{m(\gamma - 1)}{T}. \tag{12.83}$$

Gọi t là thời gian khối lượng di chuyển tới điểm này. Động lượng ban đầu của khối lượng là $p = \gamma m v$. Tích phân $F = dp/dt$ và sử dụng thực tế rằng lực luôn luôn bằng $-T$, dẫn đến

$$F\Delta t = \Delta p \quad \Longrightarrow \quad (-T)t = 0 - \gamma m v \quad \Longrightarrow \quad t = \frac{\gamma m v}{T}. \tag{12.84}$$

Chú ý rằng chúng ta không thể sử dụng $F = ma$ để làm bài toán này. F không bằng ma. Nó bằng dp/dt (và cũng bằng dE/dx).

Ví dụ (Vị trí các khối lượng gặp nhau): Một dây tương đối có chiều dài ℓ và sức căng T liên kết khối lượng m và khối lượng M (xem hình 12.13). Các khối lượng được giải phóng từ trạng thái nghỉ. Chúng gặp nhau ở đâu?



Hình 12.13:

Lời giải: Giả sử các khối lượng gặp nhau tại khoảng cách x từ vị trí ban đầu của m. Tại điểm gặp nhau, $F = dE/dx$ chỉ ra cho chúng ta rằng năng lượng của m là $m + Tx$, và năng lượng của M là $M + T(\ell - x)$. Sử dụng $p = \sqrt{E^2 - m^2}$ chúng ta thấy rằng động lớn của động lượng tại điểm gặp nhau là

$$p_m = \sqrt{(m + Tx)^2 - m^2} \quad \text{và} \quad p_M = \sqrt{(M + T(\ell - x))^2 - M^2}. \tag{12.85}$$

Nhưng $F = dp/dt$ chỉ ra rằng các động lượng này phải bằng nhau, bởi vì lực giống nhau (bằng độ lớn nhưng ngược chiều) tác dụng lên hai khối lượng trong thời gian như nhau. Cho hai động lượng trên bằng nhau dẫn đến

$$x = \frac{\ell(M + T(\ell/2))}{M + m + T\ell}. \tag{12.86}$$

Kết quả này là chắn chắn đúng, bởi vì nó là vị trí khối tâm ban đầu của các khối lượng, với sợi dây được xử lý (khá chính xác) giống như một chiếc gậy dài ℓ và khối lượng $T\ell$ (chia c^2).

NHẬN XÉT: Chúng ta hãy kiểm tra một vài trường hợp giới hạn. Trong giới hạn T hoặc ℓ lớn (một cách chính xác hơn, trong giới hạn $T\ell \gg Mc^2$ và $T\ell \gg mc^2$), chúng ta có $x = \ell/2$. Điều này có ý nghĩa bởi vì trong trường hợp này các khối lượng được bỏ qua và do đó cả hai khối lượng chuyển động với vận tốc về bản chất là bằng c, và dẫn đến chúng gặp nhau ở giữa. Trong giới hạn khi T hoặc ℓ nhỏ (một cách chính xác hơn, trong giới hạn $T\ell \ll Mc^2$ và $T\ell \ll mc^2$), chúng ta có $x = M\ell/(M + m)$, đây đơn giản chỉ là kết quả Newton đối với sợi dây không khối lượng thông thường. ♣

12.8 Bài tập

Mục 12.1: Năng lượng và động lượng

12.1. Thành lập E và p **

Công nhận thực tế rằng năng lượng và động lượng của một photon là $E = h\nu$ và $p = h\nu/c$ (trong đó ν là tần số của sóng ánh sáng, và h là hằng số Planck), thành lập công thức trong thuyết tương đối cho năng lượng và động lượng của một hạt khối lượng, $E = \gamma mc^2$ và $p = \gamma mv$. *Gợi ý*: Xét một khối lượng m phân rã thành hai photon. Xem xét sự phân rã này trong hệ quy chiếu nghỉ của khối lượng, và sau đó trong hệ quy chiếu mà khối lượng có vận tốc v. Bạn sẽ phải sử dụng ảnh hưởng Doppler.

Mục 12.3: Va chạm và phân rã

12.2. Sự va chạm của các photon *

Hai photon đều có năng lượng E. Chúng va chạm tại góc θ và tạo thành một hạt có khối lượng M. Khối lượng M bằng bao nhiêu?

12.3. Sự tăng khối lượng *

Một khối lượng M lớn chuyển động với vận tốc V, và chạm và dính và một khối lượng m nhỏ ban đầu ở tráng thái nghỉ. Khối lượng của vật thể cuối cùng là bao nhiêu? Tính toán xấp xỉ trong đó $M \gg m$.

12.4. Sự phân rã thành hai khối lượng *

Một khối lượng nghỉ M_A phân rã thành các khối lượng M_B và M_C. Năng lượng của M_A và M_C bằng bao nhiêu? Động lượng của chúng bằng bao nhiêu?

12.5. Năng lượng giới hạn **

Một hạt khối lượng m và năng lượng E va chạm với một hạt giống hệt nó ở trạng thái tĩnh. Năng lượng giới hạn đối với trạng thái cuối cùng chứa N hạt khối lượng m là bao nhiêu? ("Năng lượng giới hạn" là năng lượng nhỏ nhất mà quá trình có thể xảy ra.)

12.6. Va chạm xuyên tâm **

Một quả bóng khối lượng M và năng lượng E va chạm xuyên tâm đàn hồi với một quả bóng ở trạng thái tĩnh có khối lượng m. Chỉ ra rằng năng lượng cuối cùng của khối lượng M là

$$E' = \frac{2mM^2 + E(m^2 + M^2)}{2Em + m^2 + M^2}. \tag{12.87}$$

Gợi ý: Bài toán này khá là rắc rối, nhưng bạn có thể tránh được bằng cách chú ý rằng $E' = E$ phải là một nghiệm của phương trình mà bạn có đối với E'. (Tại sao?) Như là một sự thưởng công đối với sự khó khăn khi vượt qua bài toán này, sẽ có rất nhiều giới hạn thú vị mà bạn có thể thu được.

12.7. Sự lệch Compton **

Một photon va chạm với một electron ở trạng thái tĩnh. Nếu photon lệch một góc θ (xem hình 12.14), chỉ rằng bước sóng sau va chạm λ' được cho dưới dạng bước sóng ban đầu λ như sau

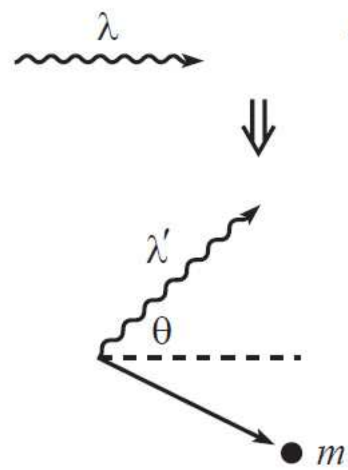
$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta), \tag{12.88}$$

trong đó m là khối lượng của electron. *Chú ý*: Năng lượng của một photon là $E = h\nu = hc/\lambda$.

Mục 12.5: Lực

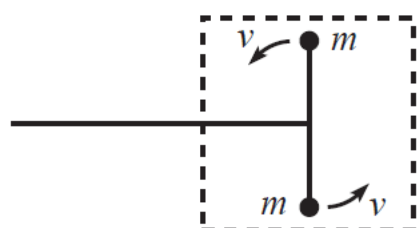
12.8. Hệ khối lượng **

Xét một quả tạ được làm bằng hai khối lượng m bằng nhau. Quả tạ quay tròn với tâm



Hình 12.14:

của nó gắn chặt vào đầu của một chiếc gậy (xem hình 12.15). Nếu vận tốc của khối lượng là v thì năng lượng của hệ là $2\gamma m$. Xem như là một khối, hệ ở trạng thái nghỉ. Do đó, khối lượng của hệ phải là $2\gamma m$. (Tưởng tượng rằng đóng kín hệ trong một chiếc hộp sao cho bạn không thể nhìn thấy bất kỳ thứ gì bên trong.) Bạn hãy tự mình thấy rằng hệ quả thực giống như một khối lượng $M = 2\gamma m$, bằng cách đẩy chiếc gậy (khi quả tạ ở vị trí "ngang" như trong hình vẽ) và chỉ ra rằng $F \equiv dp/dt = Ma$.



Hình 12.15:

12.9. Dao động điều hòa tương đối **

Một hạt có khối lượng m chuyển động dọc trục x dưới tác dụng của lực $F = -m\omega^2 x$. Biên độ là b. Chỉ ra rằng chu kỳ cho bởi

$$T = \frac{4}{c}\int_0^b \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}}dx, \quad \text{trong đó} \quad \gamma = 1 + \frac{\omega^2}{2c^2}(b^2 - x^2). \tag{12.89}$$

Mục 12.6: Chuyển động tên lửa

12.10. Tên lửa tương đối **

Xét tên lửa tương đối trong Mục 12.6. Giả sử khối lượng bị biến đổi thành photon với tốc độ σ trong hệ quy chiếu nghỉ của tên lửa. Tìm thời gian t trong hệ quy chiếu mặt đất như là hàm của v. (Đáng tiếc là không thể đảo ngược điều này, tức là không thể thu được v như là hàm của t.) Bạn sẽ cần đánh giá một tích phân khá khéo léo. Hãy chọn lấy công cụ ưa thích của bạn - bút chì, vở, hoặc máy tính.

12.11. Máy hút bụi tương đối I *

Một máy hút bụi khối lượng M được cho một vận tốc tương đối ban đầu. Nó hút bụi với mật độ khối lượng λ mỗi đơn vị chiều dài trên mặt sàn (đo trong hệ quy chiếu quán tính). Tại thời điểm vận tốc là v, tìm tốc độ (đo trong hệ quy chiếu quán tính) mà khối lượng của hệ máy hút bụi - bụi tăng.

12.12. Máy hút bụi tương đối II **

Xét mô hình trong bài tập 12.11. Nếu vận tốc ban đầu của máy hút bụi là V, tìm $v(x), v(t)$ và $x(t)$.Tất cả các đại lượng ở đây đều được đo với hệ quy chiếu quán tính.

12.13. Máy hút bụi tương đối III **

Xét mô hình như trong bài tập 12.11. Tính toán trong cả hệ quy chiếu của máy hút bụi và hệ quy chiếu quán tính lực tác dụng lên hệ máy hút bụi - bụi (do các hạt bụi mới thu va chạm vào nó) như là một hàm của v, và chỉ ra rằng các kết quả là bằng nhau.

12.14. Chiếc xe tương đối I ****

Một chiếc xe dài chuyển động với vận tốc tương đối v. Cát bị rơi vào xe với tốc độ $dm/dt = \sigma$ trong hệ quy chiếu mặt đất. Giả sử rằng bạn đứng trên mặt đất cạnh vị trí mà cát rơi xuống, và bạn đẩy chiếc xe để giữ nó chuyển động với vận tốc không đổi v. Lực giữa chân của bạn và mặt đất bằng bao nhiêu? Tính toán lực này trong cả hệ quy chiếu mặt đất (hệ quy chiếu của bạn) và hệ quy chiếu chiếc xe, và chỉ ra rằng các kết quả là bằng nhau.

12.15. Chiếc xe tương đối II ****

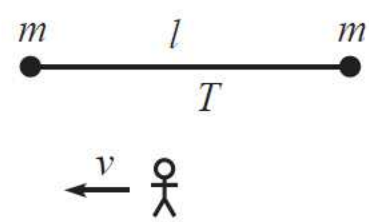
Một chiếc xe dài chuyển động với vận tốc tương đối v. Cát bị rơi vào xe với tốc độ $dm/dt = \sigma$ trong hệ quy chiếu mặt đất. Giả sử rằng bạn nắm phía trước của chiếc xe và kéo nó để giữ nó chuyển động với vận tốc không đổi v (trong khi chạy cùng nó). Lực mà tay bạn tác dụng vào chiếc xe là bao nhiêu? (Giả sử rằng chiếc xe được làm bằng vật liệu cứng nhất có thể.) Tính toán lực này trong cả hệ quy chiếu mặt đất và hệ quy chiếu chiếc xe (hệ quy chiếu của bạn), và chỉ ra rằng các kết quả là bằng nhau.

Mục 12.7: Dây tương đối

12.16. Các hệ quy chiếu khác nhau **

(a) Hai khối lượng m được liên kết với nhau bởi một sợi dây chiều dài ℓ có sức căng không đổi T. Các khối lượng được giải phóng đồng thời, chúng va chạm và dính vào nhau. Khối lượng M của hạt sau va chạm là bao nhiêu?

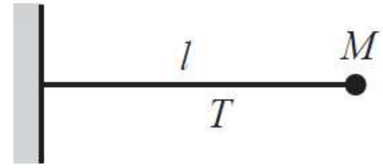
(b) Xét tình huống từ quan sát trong một hệ quy chiếu chuyển động sang bên trái với vận tốc v (xem hình 12.16). Năng lượng của hạt sau va chạm phải là γMc^2, từ phần (a). Chỉ ra rằng bạn thu được kết quả giống như vậy bằng cách tính toán công thực hiện trên hai khối lượng.



Hình 12.16:

12.17. Khối lượng bị tách **

Một sợi dây không khối lượng với sức căng không đổi T có một đầu gắn vào tường và đầu còn lại gắn vào một khối lượng M. Chiều dài ban đầu của sợi dây là ℓ (xem hình 12.17). Khối lượng được giải phóng. Nửa đường so với tường, nửa phía sau của khối lượng tách ra khỏi nửa phía trước (với vận tốc tương đối ban đầu bằng không). Tổng thời gian để nửa phía trước chạm vào tường là bao nhiêu?



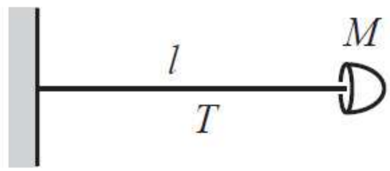
Hình 12.17:

12.18. Chiếc xô bị chảy cát trong thuyết tương đối ***

Giả sử khối lượng M trong bài tập 12.17 được thay thế bởi một chiếc xô không khối lượng chưa lượng cát có khối lượng ban đầu là M (xem hình 12.18). Trên đường đi tới tường, chiếc xô bị rò cát với tốc độ $dm/dx = M/\ell$, trong đó m ký hiệu khối lượng tại vị trí sau. Chú ý rằng dm và dx đều mang giá trị âm tại đây.

(a) Năng lượng của chiếc xô coi như là một hàm của khoảng cách đối với tường là bao nhiêu? Giá trị lớn nhất của nó là bao nhiêu? Giá trị lớn nhất của động năng là bao nhiêu?

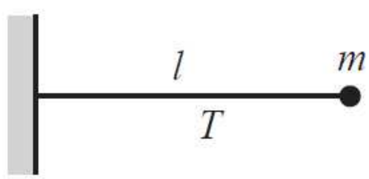
(b) Động lượng của chiếc xô coi như là một hàm của khoảng cách tới tường là bao nhiêu? Tại vị trí nào nó có giá trị lớn nhất?



Hình 12.18:

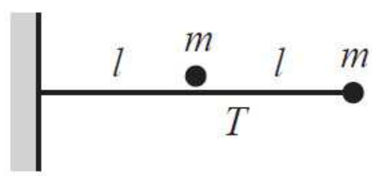
12.19. Chiếc xô trong thuyết tương đối ***

(a) Một sợi dây không khối lượng với sức căng không đổi T có một đầu gắn vào tường và đầu còn lại gắn vào một khối lượng m. Độ dài ban đầu của sợi dây là ℓ (xem hình 12.19). Khối lượng được giải phóng. Mất bao nhiêu thời gian để nó chạm vào tường?



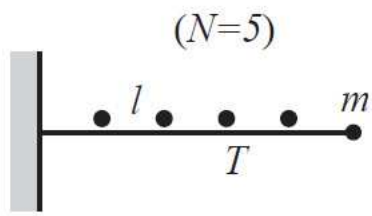
Hình 12.19:

(b) Giả sử sợi dây bây giờ có độ dài 2ℓ với khối lượng m gắn vào một đầu. Giả sử có một khối lượng m khác đặt cạnh vị trí ℓ trên sợi dây nhưng không chạm vào nó (xem hình 12.20). Khối lượng bên phải được giải phóng. Nó hướng về phía tường (trong khi khối lượng bên trái không chuyển động) và sau đó dính vào khối lượng bên trái để tạo thành một khối lượng lớn, khối lượng này sau đó hướng về phía tường.[15] Toàn bộ quá trình xảy ra trong bao nhiêu lâu? *Gợi ý:* Bạn có thể giải bài toán này theo nhiều cách khác nhau, nhưng một phương pháp khá tổng quát đối với phần (c) đó là chỉ ra rằng sự thay đổi p^2 từ vị trí xuất phát tới điểm ngay khi tới tường là $\Delta(p^2) = (E_2^2 - E_1^2) + (E_4^2 - E_3^2)$, trong đó các năng lượng của vật thể chuyển động (tức là khối lượng m ban đầu và khối lượng sau va chạm) là: E_1 ngay tại vị trí xuất phát, E_2 ngay trước khi va chạm, E_3 ngay sau khi va chạm và E_4 ngay trước khi chạm vào tường. Chú ý rằng phương pháp này không đòi hỏi cần phải biết khối lượng sau va chạm (khối lượng này không phải là $2m$).



Hình 12.20:

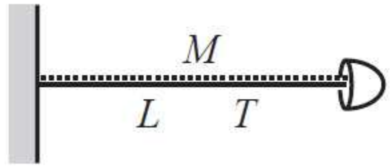
(c) Bây giờ giả sử có N khối lượng và một sợi dây có chiều dài $N\ell$ (xem hình 12.21). Toàn bộ quá trình xảy ra trong thời gian bao lâu?



Hình 12.21:

(d) Bây giờ xét một chiếc xô không khối lượng tại một đầu của sợi dây (chiều dài L), chiếc xô này gom dòng cát liên tục (với tổng khối lượng M) khi nó bị kéo vào tường (xem hình 12.22). Toàn bộ quá trình xảy ra trong bao nhiêu lâu? Khối lượng và vận tốc của chiếc xô ngay trước khi nó chạm vào tường là bao nhiêu?

[15] Khối lượng bên trái thực tế có thể gắn vào sợi dây, và chúng ta vẫn sẽ có tình huống tương tự. Khối



Hình 12.22:

12.9 Bài tập luyện tập

Mục 12.2: Phép biến đổi của E và p

12.20. Năng lượng của hai khối lượng *

Hai khối lượng M chuyển động với vận tốc V, một hướng về phía đông và một hướng về phía tây. Tổng năng lượng của hệ là bao nhiêu? Bây giờ xét mô hình khi quan sát trong một hệ quy chiếu chuyển động sang phía tây với vận tốc u. Tìm năng lượng của mỗi khối lượng trong hệ quy chiếu này. Năng lượng tổng lớn hơn hay nhỏ hơn năng lượng tổng trong hệ quy chiếu quán tính?

12.21. Hệ các hạt *

Cho trước p_{total} và E_{total} đối với một hệ hạt, sử dụng một phép biến đổi Lorentz để tìm vận tốc của khối tâm. Một cách chặt chẽ hơn, tìm vận tốc của hệ quy chiếu mà ở đó tổng động lượng bằng không.

12.22. Hệ quy chiếu khối tâm **

Một khối lượng m chuyển động với vận tốc $3c/5$, và một khối lượng m khác ở trạng thái nghỉ.

(a) Tìm năng lượng và động lượng của hai khối lượng trong hệ quy chiếu quán tính.

(b) Tìm vận tốc khối tâm của hệ bằng cách sử dụng lập luận về cộng vận tốc.

(c) Tìm năng lượng và động lượng của hai khối lượng trong hệ quy chiếu khối tâm mà không sử dụng phép biến đổi Lorentz.

(d) Kiểm tra rằng E và p liên hệ với nhau bằng phép biến đổi Lorentz thích hợp.

lượng không chuyển động trong phần đầu tiên của quá trình bởi vì luôn có sức căng T bằng nhau trên cả hai phía của nó.

(e) Kiểm tra rằng $E^2 - p^2c^2$ đối với mỗi khối lượng là như nhau trong cả hai hệ quy chiếu. Tương tự cho đại lượng $E_{total}^2 - p_{total}^2 c^2$.

12.23. Phép biến đổi đối với chuyển động hai chiều **

Một hạt có vận tốc (u'_x, u'_y) trong hệ quy chiếu S', hệ quy chiếu này chuyển động với vận tốc v theo chiều x đối với hệ quy chiếu S. Sử dụng công thức cộng vận tốc trong Mục 11.5.2 (phương trình (11.36) và (11.38)) để chỉ ra rằng

$$\gamma_u = \gamma_{u'}\gamma_v(1 + u'_x v), \quad \text{trong đó } u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} \quad \text{và } u' = \sqrt{u_x'^2 + u_y'^2} \qquad (12.90)$$

là các vận tốc trong hai hệ quy chiếu. Sau đó chứng minh rằng E và p_x biến đổi theo phương trình (12.27) và đồng thời $p_y = p'_y$.

Mục 12.3: Va chạm và phân rã

12.24. Va chạm photon và khối lượng *

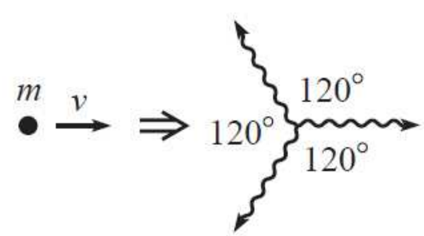
Một photon với năng lượng E va chạm với một khối lượng tĩnh m. Chúng tạo thành một hạt. Khối lượng của hạt này là bao nhiêu? Vận tốc của nó là bao nhiêu?

12.25. Một phân rã *

Một khối lượng tĩnh M phân rã thành hai một hạt và một photon. Nếu vận tốc của hạt là v thì khối lượng của nó bằng bao nhiêu? Năng lượng của photon bằng bao nhiêu?

12.26. Ba photon *

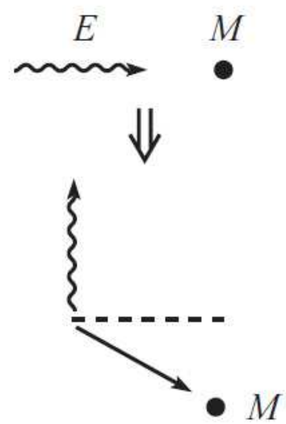
Một khối lượng m chuyển động với vận tốc v. Nó phân rã thành ba photon, một trong ba photon này chuyển động thẳng về phía trước, và hai photon còn lại chuyển động với góc 120° (trong hệ quy chiếu quán tính) như trong hình 12.23. Năng lượng của ba photon này bằng bao nhiêu?



Hình 12.23:

12.27. Photon vuông góc *

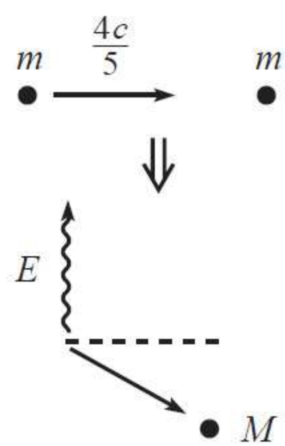
Một photon với năng lượng E va chạm với một khối lượng M. Khối lượng M bị lệch một góc. Nếu pho sau va chạm chuyển động vuông góc với chiều của photon tới ban đầu như trong hình 12.24 thì năng lượng của nó bằng bao nhiêu?



Hình 12.24:

12.28. Một trường hợp photon vuông góc khác *

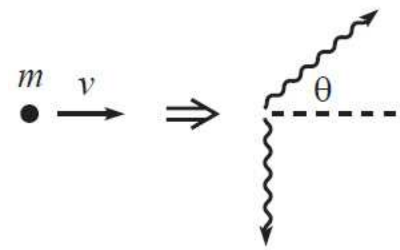
Một khối lượng m chuyển động với vận tốc $4c/5$ va chạm với một khối lượng m khác ở trạng thái nghỉ. Va chạm sinh ra một photon với năng lượng E chuyển động vuông góc với chiều ban đầu, và một khối lượng M chuyển động theo chiều khác như trong hình 12.25. Tính theo E và m, M bằng bao nhiêu? Giá trị lớn nhất của E (theo m) bằng bao nhiêu để mô hình này có khả năng xảy ra?



Hình 12.25:

12.29. Phân rã thành các photon *

Một khối lượng m chuyển động với vận tốc v phân rã thành hai photon. Một photon chuyển động vuông góc với chiều ban đầu, và photon còn lại chuyển động với góc θ như trong hình 12.26. Chỉ ra rằng nếu $\tan\theta = 1/2$ thì $v/c = (\sqrt{5}-1)/2$, kết quả này chỉ tình cờ trùng với nghịch đảo của tỷ lệ vàng.



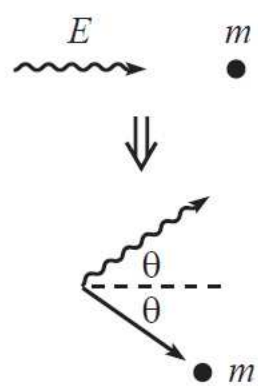
Hình 12.26:

12.30. Khối lượng lớn nhất *

Một photon và một khối lượng m chuyển động hướng vào nhau. Chúng va chạm và tạo thành một hạt mới. Nếu tổng năng lượng của hệ là E, thì nó sẽ phân chia giữa photon và khối lượng m như thế nào để khối lượng của hạt thu được là lớn nhất có thể?

12.31. Các góc bằng nhau *

Một photon với năng lượng E va chạm với một khối lượng tĩnh m. Nếu khối lượng m và photon sinh ra (năng lượng chưa biết) lệch các góc bằng nhau θ đối với chiều của photon ban đầu như trong hình 12.27, θ tính theo E và m bằng bao nhiêu? Góc θ bằng bao nhiêu trong giới hạn $E \ll mc^2$?



Hình 12.27:

Mục 12.4: Đơn vị vật lý hạt

12.32. Quãng đường pion - muon *

Một pion và một muon cùng đua trên một quãng đường dài 100 m. Nếu cả hai đều có năng lượng 10 GeV, thì muon sẽ thắng với khoảng cách hơn là bao nhiêu?

12.33. Sự sinh ra hạt Higgs *

Higgs boson là hạt cơ bản được đưa ra và sẽ nhận biết được bằng thí nghiệm trong một vài năm nữa, giả thiết rằng nó tồn tại. Một cách tạo ra nó là trong máy gia tốc hạt năng lượng cao cho proton va chạm với phản hạt proton. Lấy năng lượng nghỉ của một proton (và phản hạt proton) là khoảng 1 GeV, và giả sử rằng năng lượng nghỉ của Higgs là khoảng 100 GeV, năng lượng cần thiết để sinh ra hạt Higgs là bao nhiêu nếu:

(a) Một proton va chạm với một phản hạt proton tĩnh?

(b) Một proton và phản hạt proton có động lượng bằng và ngược chiều nhau?

12.34. Năng lượng lớn nhất **

(a) Một phần tử khối lượng M phân rã thành các hạt, một số trong số chúng là photon. Nếu một trong các hạt có khối lượng m, và nếu tổng khối lượng của tất cả phần còn lại là μ, năng lượng lớn nhất có thể mà m có thể có là bao nhiêu? *Gợi ý:* Viết phát biểu về sự bảo toàn năng lượng và động lượng như sau $P_M - P_m = P_\mu$, trong đó P_μ là tổng động lượng bốn chiều của phần còn lại, và sau đó bình phương. Cách làm của bài toán 12.5 có thể sẽ hữu ích.

(b) Trong phân rã beta, một neutron phân rã thành một proton, một electron, và một neutrino (neutrino này về bản chất là một photon đối với mục đích hiện tại của chúng ta). Năng lượng nghỉ là $E_n = 939.6$ MeV, $E_p = 938.3$ MeV, $E_e = 0.5$ MeV và $E_\nu \approx 0$. Năng lượng lớn nhất mà electron có thể có bằng bao nhiêu? Câu hỏi tương tự với neutrino? Giải thích các kết quả của bạn?

Mục 12.5: Lực

12.35. Lực và va chạm *

Hai khối lượng m giống hệt nhau ban đầu ở trạng thái nghỉ, và cách nhau một khoảng x. Một lực F không đổi tăng tốc một trong hai khối lượng hướng về khối lượng còn lại cho đến khi chúng va chạm và dính vào với nhau. Khối lượng của hạt sau va chạm là bao nhiêu?

12.36. Đẩy một khối lượng **

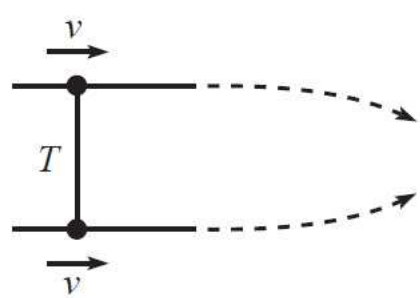
(a) Một khối lượng m xuất phát trạng thái nghỉ. Bạn đẩy nó với một lực F không đổi. Thời gian t để khối lượng di chuyển được một khoảng cách x bằng bao nhiêu? (Cả x và t ở đây đều đo trong hệ quy chiếu quán tính.)

(b) Sau một thời gian rất dài, vận tốc của m sẽ tiến tới c. Dẫn đến rằng nó tiến tới c đủ nhanh sao cho sau một thời gian dài, m sẽ giữ (xấp xỉ) một khoảng cách không đổi (đo trong hệ quy chiếu quán tính) sau một photon phát ra tại thời điểm $t = 0$ từ vị trí xuất phát ban đầu của m. Khoảng cách này bằng bao nhiêu?

12.37. Nghịch lý động lượng ****

Hai khối lượng bằng nhau liên kết bởi một sợi dây không khối lượng với sức căng T. Các khối lượng bị hạn chế để chỉ chuyển động với vận tốc v theo các đường thẳng song song, như trong hình 12.28. Sau đó sự hạn chế bị bỏ đi, và các khối lượng bị kéo lại cùng nhau. Chúng va chạm và tạo thành một khối lượng lớn hơn, khối lượng này tiếp tục chuyển động sang bên phải. Lý luận sau đây có chính xác hay không? Nếu câu trả lời của bạn là "không", hãy nói rõ chỗ nào là không đúng của bất cứ câu nào trong bốn câu sau.

"Các lực tác dụng lên các khối lượng hướng theo chiều y. Do đó, sẽ không có sự thay đổi của động lượng của các khối lượng theo chiều x. Nhưng khối lượng tạo thành lớn hơn tổng các khối lượng ban đầu (bởi vì chúng va chạm với vận tốc tương đối nào đó). Do đó, vận tốc của khối lượng sau va chạm phải nhỏ hơn v (để giữ p_x không đổi), dẫn đến toàn bộ thí nghiệm chậm lại theo chiều x."



Hình 12.28:

Mục 12.6: Chuyển động tên lửa

12.38. Năng lượng tên lửa **

Như đã đề cập trong phần gần cuối của lời giải đầu tiên đối với bài toán tên lửa trong

Mục 12.6, năng lượng của tên lửa trong hệ quy chiếu mặt đất bằng $M/(1+v)$. Thành lập lại kết quả này bằng cách tích phân tổng năng lượng mà các photon có trong hệ quy chiếu mặt đất.

Mục 12.7: Dây tương đối

12.39. Hai khối lượng *

Một khối lượng m được đặt tại ngay phía trước của một khối lượng khác giống y hệt nó. Chúng liên kết bởi một sợi dây tương đối với sức căng T. Khối lượng phía trước đột ngột có vận tốc $3c/5$. Các khối lượng sẽ va chạm với nhau tại khoảng cách bao xa so với vị trí xuất phát?

12.40. Chiếc xô tương đối **

Một trong những kết quả trong phần (d) của bài tập 12.19 đó là chiếc xô chuyển động về phía tường với vận tốc không đổi $\sqrt{T/(T+\rho)}$. Thành lập lại kết quả này mà không sử dụng kỹ thuật lấy giới hạn $N \longrightarrow \infty$ khi có nhiều khối lượng.

12.10 Lời giải

12.1. Thành lập E và p

Đầu tiên chúng ta sẽ thành lập công thức năng lượng, $E = \gamma mc^2$. Giả sử một khối lượng cho trước phân rã thành hai photon, và E_0 là năng lượng của khối lượng trong hệ quy chiếu nghỉ của nó. Khi đó mỗi photon hình thành có năng lượng $E_0/2$ trong hệ quy chiếu này.

Bây giờ xem xét sự phân rã trong một hệ quy chiếu ở đó khối lượng chuyển động với vận tốc v. Từ phương trình (11.51), tần số của các photon bị thay đổi do ảnh hưởng Doppler bởi các thừa số $\sqrt{(1+v)/(1-v)}$ và $\sqrt{(1-v)/(1+v)}$. Bởi vì năng lượng của các photon cho bởi công thức $E = h\nu$, nên chúng bị thay đổi bởi cùng thừa số Doppler so với giá trị $E_0/2$ trong hệ quy chiếu ban đầu. Tổng năng lượng của các photon trong hệ quy chiếu mà ở đó khối lượng chuyển động với vận tốc v do đó sẽ là

$$E = \frac{E_0}{2}\sqrt{\frac{1+v}{1-v}} + \frac{E_0}{2}\sqrt{\frac{1-v}{1+v}} = \frac{E_0}{\sqrt{1-v^2}} \equiv \gamma E_0. \tag{12.91}$$

Bằng sự bảo toàn năng lượng, dẫn đến đây là năng lượng của khối lượng m chuyển động với vận tốc v. Do đó chúng ta thấy rằng một khối lượng chuyển động có năng lượng bằng γ nhân với năng lượng nghỉ của nó.

Bây giờ chúng ta có thể sử dụng nguyên lý tương ứng (nguyên lý này nói rằng các công thức tương đối phải rút gọn thành các công thức không tương đối quen thuộc trong giới hạn không tương đối) để tìm ra E_0 dưới dạng m và c. Chúng ta vừa tìm ra rằng hiệu giữa năng lượng của một khối lượng chuyển động và một khối lượng tĩnh là $\gamma E_0 - E_0$. Kết quả này phải rút gọn thành động năng quen thuộc $mv^2/2$ trong giới hạn $v \ll c$. Nói một cách khác,

$$\frac{mv^2}{2} \approx \frac{E_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - E_0 \approx E_0\left(1+\frac{v^2}{2c^2}\right) - E_0 = \left(\frac{E_0}{c^2}\right)\frac{v^2}{2}, \tag{12.92}$$

trong đó chúng ta đã sử dụng chuỗi Taylor, $1/\sqrt{1-\epsilon} \approx 1+\epsilon/2$. Do đó $E_0 = mc^2$, và dẫn đến $E = \gamma mc^2$.

Chúng ta có thể thành lập công thức động lượng, $p = \gamma mv$, bằng các tương tự. Gọi độ lớn của các động lượng của các photon (bằng nhau và ngược chiều) trong hệ quy chiếu nghỉ của khối lượng là $p_0/2$.[16] Bởi vì động lượng của các photon cho bởi $E = h\nu/c$, chúng ta có thể sử dụng tần số thay đổi Doppler như chúng ta đã làm ở trên để nói rằng tổng động lượng của các photon trong hệ quy chiếu mà ở đó khối lượng chuyển động với vận tốc v là

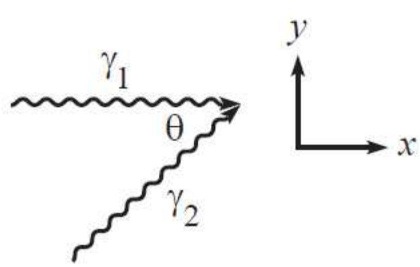
$$p = \frac{p_0}{2}\sqrt{\frac{1+v}{1-v}} - \frac{p_0}{2}\sqrt{\frac{1-v}{1+v}} = \gamma p_0 v. \tag{12.93}$$

Đặt ký hiệu c trở lại, chúng ta có $p = \gamma p_0 v/c$. Sử dụng bảo toàn động lượng, đây là động lượng của khối lượng m chuyển động với vận tốc v.

Bây giờ chúng ta có thể sử dụng nguyên lý tương ứng để tìm p_0 dưới dạng m và c. Nếu $p = \gamma(p_0/c)v$ suy biến thành công thức quen thuộc $p = mv$ trong giới hạn $v \ll c$ thì chúng ta phải có $p_0 = mc$. Do đó, $p = \gamma mv$.

12.2. Sự va chạm của các photon

Động lượng bốn chiều của các photon là (xem hình 12.29)



Hình 12.29:

$$P_{\gamma_1} = (E, E, 0, 0), \quad \text{và} \quad P_{\gamma_2} = (E, E\cos\theta, E\sin\theta, 0). \tag{12.94}$$

[16]Với các giả thiết rằng một photon có $E = h\nu$ và $p = h\nu/c$, chúng ta có thể sử dụng kết quả ở phần trước $E_0 = mc^2$ để nhanh chóng kết luận rằng $p_0 = mc$. Nhưng hãy coi như chúng ta chưa tìm ra E_0. Điều này sẽ đưa đến cho chúng ta lý do để sử dụng nguyên lý tương ứng một lần nữa.

Năng lượng và động lượng được bảo toàn, do đó động lượng bốn chiều của hạt cuối cùng là $P_M = (2E, E + E\cos\theta, E\sin\theta, 0)$. Do đó,

$$M^2 = P_M \cdot P_M = (2E)^2 - (E + E\cos\theta)^2 - (E\sin\theta)^2, \tag{12.95}$$

điều này dẫn đến

$$M = E\sqrt{2(1-\cos\theta)}. \tag{12.96}$$

Nếu $\theta = 180°$ thì $M = 2E$ (năng lượng cuối cùng hoàn toàn không bao gồm động năng). Và nếu $\theta = 0°$ thì $M = 0$ (tất cả năng lượng cuối cùng đều là động năng; chúng ta đơn giản chỉ có một photon với năng lượng gấp đôi).

12.3. Sự tăng khối lượng

Trong hệ quy chiếu quán tính, năng lượng của vật thể tạo thành là $\gamma M + m$, và động lượng là γMV. Do đó khối lượng của vật thể là

$$M' = \sqrt{(\gamma M + m)^2 - (\gamma MV)^2} = \sqrt{M^2 + 2\gamma Mm + m^2}. \tag{12.97}$$

Đại lượng m^2 có thể bỏ qua khi so sánh với hai đại lượng còn lại, do đó chúng ta có thể xấp xỉ M' như sau

$$M' \approx M\sqrt{1 + \frac{2\gamma m}{M}} \approx M\left(1 + \frac{\gamma m}{M}\right) = M + \gamma m, \tag{12.98}$$

trong đó ta đã sử dụng chuỗi Taylor, $\sqrt{1+\epsilon} \approx 1 + \epsilon/2$. Do đó, sự tăng khối lượng là γ nhân với khối lượng của vật thể ở trạng thái tĩnh. Sự tăng này lớn hơn câu trả lời trong trường hợp không tương đối của m, bởi vì nhiệt sinh ra trong quá trình va chạm, và nhiệt này xuất hiện như khối lượng trong vật thể cuối cùng.

NHẬN XÉT: Kết quả γm là rõ ràng nếu chúng ta làm việc trong hệ quy chiếu ở đó M ở trạng thái nghỉ ban đầu. Trong hệ quy chiếu này, khối lượng m chuyển động với năng lượng γm, và khi đó về bản chất tất cả năng lượng này xuất hiện như khối lượng trong vật thể cuối cùng. Tức là, về bản chất không có năng lượng xuất hiện như động năng của vật thể. Kết quả không có động năng này là một trường hợp tổng quát bất cứ khi nào một vật thể nhỏ va chạm vào một vật thể lớn ở trạng thái tĩnh. Nó đến từ thực tế rằng vận tốc của vật thể lớn là tỷ lệ với m/M, bằng sự bảo toàn động lượng (có thêm một thừa số γ nếu mọi thứ là tương đối), do đó động năng $Mv^2 \propto M(m/M)^2 \approx 0$, nếu $M \gg m$. Nói một cách khác, sự nhỏ của v đã lấn át sự lớn của M. Khi một nắm tuyết va vào một cái cây, tất cả (về cơ bản) năng lượng ban đầu biến thành nhiệt. Không có năng lượng nào biến thành và thay đổi động năng của trái đất. ♣

12.4. Sự phân rã thành hai khối lượng

B và C có động lượng bằng nhau nhưng ngược chiều. Do đó,

$$E_B^2 - M_B^2 = p^2 = E_C^2 - M_C^2. \tag{12.99}$$

Mặt khác, sự bảo toàn năng lượng dẫn đến

$$E_B + E_C = M_A. \tag{12.100}$$

Giải hai phương trình trên đối với E_B và E_C ta có (sử dụng viết tắt $a \equiv M_A, \dots$)

$$E_B = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}, \quad \text{và} \quad E_C = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}. \tag{12.101}$$

Phương trình (12.99) khi đó dẫn đến động lượng của các hạt là

$$p = \frac{1}{2a}\sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2}. \tag{12.102}$$

NHẬN XÉT: Thực tế rằng đại lượng dưới dấu căn có thể phân tích thành thừa số như sau

$$(a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(a - b - c). \tag{12.103}$$

Điều này rõ ràng rằng nếu $a = b + c$ thì $p = 0$, bởi vì không có năng lượng thừa để hạt có thể chuyển động. Thú vị là dạng của p trong phương trình (12.102) nhìn rất giống diện tích của tam giác với các cạnh a, b, c, diện tích này cho bởi công thức Heron như sau

$$A = \frac{1}{4}\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}. \quad \clubsuit \tag{12.104}$$

♣

12.5. Năng lượng giới hạn

Các động lượng bốn chiều ban đầu trong hệ quy chiếu quán tính là

$$(E, p, 0, 0), \quad \text{và} \quad (m, 0, 0, 0), \tag{12.105}$$

trong đó $p = \sqrt{E^2 - m^2}$. Do đó, tổng động lượng bốn chiều của hạt cuối cùng trong hệ quy chiếu quán tính là $(E + m, p, 0, 0)$. Đại lượng $E_{total}^2 - p_{total}^2$ là độc lập với hệ quy chiếu, và nó bằng bình phương năng lượng trong hệ quy chiếu khối tâm (trong đó $p = 0$). Do đó chúng ta có, với chỉ số dưới "f" có nghĩa là trạng thái cuối cùng,

$$\begin{aligned} (E + m)^2 - (\sqrt{E^2 - m^2})^2 &= (E_f^{CM})^2 \\ \Longrightarrow \quad 2Em + 2m^2 &= (E_f^{CM})^2. \end{aligned} \tag{12.106}$$

Chúng ta thấy rằng cực tiểu E tương đương với cực tiểu E_f^{CM}. Nhưng E_f^{CM} rõ ràng là cực tiểu khi tất cả các hạt cuối cùng ở trạng thái nghỉ trong hệ quy chiếu khối tâm, sao cho không có động năng thêm vào năng lượng nghỉ. Do đó năng lượng trong hệ quy chiếu khối tâm tại trạng thái tới hạn đơn giản chỉ là tổng tất các các năng lượng nghỉ. Nói một cách khác, $E_f^{CM} = Nm$. Dẫn đến chúng ta có

$$2Em + 2m^2 = (Nm)^2 \quad \Longrightarrow \quad E = \left(\frac{N^2}{2} - 1\right)m. \tag{12.107}$$

Bởi vì không có chuyển động tương đối giữa các hạt cuối cùng trong hệ quy chiếu khối tâm tại trạng thái tới hạn nên cũng không có chuyển động tương đối trong bất kỳ hệ quy chiếu nào khác. Điều này có nghĩa là tại trạng thái tới hạn, N khối lượng di chuyển cùng với nhau như một khối lượng trong hệ quy chiếu quán tính. Năng lượng tới hạn E lớn hơn câu trả lời $(N-1)m$, bởi vì trạng thái cuối cùng có năng lượng hao phí không thể tránh được dưới dạng động năng (điều này bắt buộc phải có theo sự bảo toàn động lượng) trong hệ quy chiếu quán tính. Chú ý rằng $E \propto N^2$ khi N lớn.

12.6. Va chạm xuyên tâm

Động lượng bốn chiều trước khi va chạm là

$$P_M = (E, p, 0, 0), \quad P_m = (m, 0, 0, 0), \tag{12.108}$$

trong đó $p = \sqrt{E^2 - M^2}$. Động lượng bốn chiều sau khi va chạm là

$$P'_M = (E', p', 0, 0), \quad P'_m = (\text{chúng ta sẽ không cần giá trị này}), \tag{12.109}$$

trong đó $p' = \sqrt{E'^2 - M^2}$. Sự bảo toàn năng lượng và động lượng dẫn đến $P_M + P_m = P'_M + P'_m$. Do đó,

$$\begin{aligned}
P'^2_m &= (P_M + P_m - P'_M)^2 \qquad (12.110)\\
\Longrightarrow P'^2_m &= P_M^2 + P_m^2 + P'^2_M + 2P_m \cdot (P_M - P'_M) - 2P_M \cdot P'_M\\
\Longrightarrow m^2 &= M^2 + m^2 + M^2 + 2m(E - E') - 2(EE' - pp')\\
\Longrightarrow -pp' &= M^2 - EE' + m(E - E')\\
\Longrightarrow 0 &= \left((M^2 - EE') + m(E - E')\right)^2 - \left(\sqrt{E^2 - M^2}\sqrt{E'^2 - M^2}\right)^2\\
\Longrightarrow 0 &= M^2(E^2 - 2EE' + E'^2) + 2(M^2 - EE')m(E - E') + m^2(E - E')^2.
\end{aligned}$$

Như đã nói, $E' = E$ là một nghiệm của phương trình này, bởi vì $E' = E$ và $p' = p$ chắc chắn thỏa mãn sự bảo toàn năng lượng và động lượng với các điều kiện đầu theo định nghĩa. Chia cho $(E - E')$ dẫn đến

$$M^2(E - E') + 2m(M^2 - EE') + m^2(E - E') = 0. \tag{12.111}$$

Giải ra đối với E' sẽ thu được kết quả mong muốn,

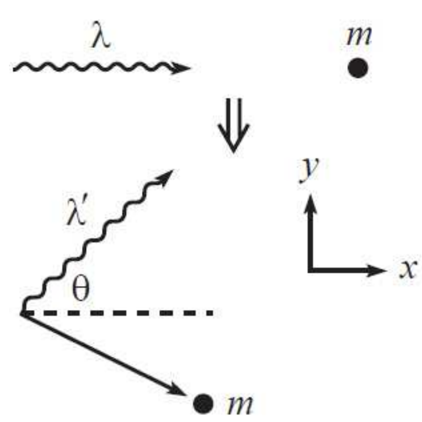
$$E' = \frac{2mM^2 + E(m^2 + M^2)}{2Em + m^2 + M^2}. \tag{12.112}$$

NHẬN XÉT: Chúng ta xem xét một vài giới hạn sau:

1. $E \approx M$ (gần như không chuyển động): khi đó $E' \approx M$, bởi vì M vẫn gần như không chuyển động.
2. $M = m$: khi đó $E' = M$, bởi vì M dừng lại và m lấy tất cả năng lượng mà M có.
3. $m \gg E\ (> M)$ (bức tường gạch): khi đó $E' \approx E$, bởi vì khối lượng nặng m về bản chất là không có năng lượng.
4. $(E >)\ M \gg m$ và $M^2 \gg EM$: khi đó $E' \approx E$, bởi vì về bản chất là không có sự xuất hiện của m ở đó.
5. $(E >)\ M \gg m$ nhưng $Em \gg M^2$: khi đó $E' \approx M^2/2m$. Điều này không hiển nhiên lắm, nhưng thú vị rằng nó không phụ thuộc vào E. Điều này có nghĩa rằng không quan trọng là bạn ném một vật thể lớn vào một vật thể nhỏ (xuyên tâm) nhanh như thế nào, vật lớn cuối cùng sẽ luôn luôn (miễn là bạn ném nó đủ mạnh) có cùng một năng lượng, $M^2/2m$. Và bởi vì chúng ta đã giả thiết rằng $M^2 \ll Em$, nên năng lượng này sẽ nhỏ hơn rất nhiều so với E. Do đó hầu hết (rất lớn) năng lượng ban đầu cuối cùng là ở trong mm.
6. $E \gg m \gg M$: khi đó $E' \approx m/2$. Kết quả này cũng không hiển nhiên, nhưng nó tương tự với giới hạn trong "Sự lệch Compton" của bài tập 12.7. Giống như ở trên, sẽ không quan trọng là bạn ném một vật nhỏ vào một vật lớn (xuyên tâm) nhanh như thế nào, vật thể nhỏ cuối cùng sẽ luôn luôn (miễn là bạn ném đủ mạnh) có cùng năng lượng, $m/2$. ♣

12.7. Sự lệch Compton

Động lượng bốn chiều trước khi va chạm là (xem hình 12.30)



Hình 12.30:

$$P_\gamma = \left(\frac{hc}{\lambda}, \frac{hc}{\lambda}, 0, 0\right), \quad P_m = (mc^2, 0, 0, 0). \tag{12.113}$$

Động lượng bốn chiều sau khi va chạm là

$$P'_\gamma = \left(\frac{hc}{\lambda'}, \frac{hc}{\lambda'}\cos\theta, \frac{hc}{\lambda'}\sin\theta, 0\right), \quad P'_m = (\text{chúng ta sẽ không cần giá trị này}). \tag{12.114}$$

Nếu chúng ta muốn, chúng ta có thể viết P'_m dưới dạng động lượng của nó và góc lệch. Nhưng chúng ta sẽ không đề cập tới các đại lượng này, và đối với phương pháp sau đây thì tốt hơn là chúng ta không cần thiết đưa chúng ra. Sự bảo toàn năng lượng và động lượng dẫn đến $P_\gamma + P_m = P'_\gamma + P'_m$. Do đó,

$$\begin{aligned} P'^2_m &= (P_\gamma + P_m - P'_\gamma)^2 \\ \Longrightarrow P'^2_m &= P^2_\gamma + P^2_m + P'^2_\gamma + 2P_m \cdot (P_\gamma - P'_\gamma) - 2P_\gamma \cdot P'_\gamma \\ \Longrightarrow m^2c^4 &= 0 + m^2c^4 + 0 + 2mc^2\left(\frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'}\right) - 2\frac{hc}{\lambda}\frac{hc}{\lambda'}(1-\cos\theta). \end{aligned} \tag{12.115}$$

Giản ước đại lượng m^2c^4 và nhân với $\lambda\lambda'/(2hcm^3)$ sẽ dẫn đến kết quả mong muốn,

$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{mc}(1-\cos\theta). \tag{12.116}$$

Điều thú vị trong lời giải này đó là tất cả những thứ chưa biết trong P'_m biến mất khi ta bình phương nó.

NHẬN XÉT: Chúng ta hãy xem xét một vài giới hạn sau:

1. Nếu $\theta \approx 0$ (tức là không bị lệch nhiều) thì $\lambda' \approx \lambda$ như mong đợi.
2. Nếu $\theta = \pi$ (tức là lệch ngược lại) thì $\lambda' = \lambda + 2h/mc$.
3. Nếu $\theta = \pi$ và thêm $\lambda \ll h/mc$ (tức là $mc^2 \ll hc/\lambda = E_\gamma$, dẫn đến năng lượng của photon lớn hơn nhiều năng lượng nghỉ của electron), thì $\lambda' \approx 2h/mc$, dẫn đến

$$E'_\gamma = \frac{hc}{\lambda'} \approx \frac{hc}{2h/mc} = \frac{1}{2}mc^2. \tag{12.117}$$

Do đó, photon bị bật lại phía sau với năng lượng về cơ bản là không đổi E'_γ, độc lập với năng lượng ban đầu E_γ (miễn là E_γ là đủ lớn). Điều này là không hiển nhiên. Thực tế thậm chí là không hiển nhiên là photon có thể bật thẳng trở lại. Bạn có thể nghĩ rằng nếu nó có đủ năng lượng, nó cuối cùng sẽ chuyển động về phía trước cùng với electron. Tuy nhiên, trong hệ quy chiếu khối tâm, photon bị bật lại phía sau trong va chạm xuyên tâm. Do đó nó phải bật lại phía sau trong mọi hệ quy chiếu, bởi vì chiều của photon không thể thay đổi khi đi từ hệ quy chiếu này sang hệ quy chiếu khác. ♣

12.8. Hệ khối lượng

Giả sử vận tốc của chiếc gậy đi từ không tới ϵ, trong đó $\epsilon \ll v$. Khi đó vận tốc cuối cùng của hai khối lượng thu được bằng cách cộng tương đối hoặc trừ tương đối ϵ từ v. (Giả thiết rằng thời gian liên qua là nhỏ, sao cho các khối lượng về bản chất vẫn chuyển động ngang). Lặp lại giống như cách thành lập phương trình (12.26), chúng ta thấy rằng động lượng cuối cùng của hai khối lượng có độ lớn $\gamma_v \gamma_\epsilon (v \pm \epsilon) m$. Nhưng bởi vì ϵ là nhỏ nên chúng ta có thể xấp xỉ $\gamma_\epsilon \approx 1$. Do đó, khối lượng chuyển động tới phía trước có động lượng $\gamma_v (v + \epsilon) m$, và khối lượng chuyển động lại phía sau có động lượng $\gamma_v (v - \epsilon) m$. Dẫn đến tổng động lượng tăng là $\Delta p = 2\gamma m \epsilon$, trong đó $\gamma \equiv \gamma_v$. Do đó,

$$F \equiv \frac{\Delta p}{\Delta t} = 2\gamma m \frac{\epsilon}{\Delta t} \equiv 2\gamma m a = Ma. \tag{12.118}$$

12.9. Dao động điều hòa tương đối

$F = dp/dt$ dẫn đến $-m\omega^2 x = d(m\gamma v)/dt$. Sử dụng phương trình (12.54), chúng ta có

$$-\omega^2 x = \gamma^3 \frac{dv}{dt}. \tag{12.119}$$

Dù thế nào đi nữa chúng ta cũng phải giải phương trình vi phân này. Một cách làm đó là nhân cả hai vế với v (điều này tương đương với việc viết dv/dt thành vdv/dt) và thu được $-\omega^2 x\dot{x} = \gamma^3 v\dot{v}$. Nhưng từ phương trình (12.53), vế phải của phương trình trên là $d\gamma/dt$. Tích phân hai vế dẫn đến $-\omega^2 x^2/2 + C = \gamma$, trong đó C là hằng số tích phân. Chúng ta biết rằng $\gamma = 1$ khi $x = b$, do đó ta tìm được

$$\gamma = 1 + \frac{\omega^2}{2c^2}(b^2 - x^2), \tag{12.120}$$

ở đó chúng ta đã đặt lại ký hiệu c để làm cho các đơn vị chính xác. Chu kỳ được cho bởi

$$T = 4\int_0^b \frac{dx}{v}. \tag{12.121}$$

Nhưng $\gamma \equiv 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, điều này dẫn đến $v = c\sqrt{\gamma^2 - 1}/\gamma$. Do đó,

$$T = \frac{4}{c}\int_0^b \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} dx. \tag{12.122}$$

NHẬN XÉT: Trong giới hạn $\omega b \ll c$ (sao cho $\gamma \approx 1$, từ phương trình (12.120), điều này có nghĩa rằng vận tốc luôn luôn nhỏ), chúng ta phải có lại giới hạn Newton. Và quả thực, tới bậc thấp nhất, $\gamma^2 \approx 1 + (\omega^2/c^2)(b^2 - x^2)$, do đó phương trình (12.122) dẫn đến

$$T \approx \frac{4}{c}\int_0^b \frac{dx}{(\omega/c)\sqrt{b^2 - x^2}}. \tag{12.123}$$

Đây là kết quả chính xác, bởi vì sự bảo toàn năng lượng đối với một lò xo không tương đối dẫn đến

$$\frac{1}{2}k(b^2 - x^2) = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Longrightarrow \quad \omega^2(b^2 - x^2) = v^2. \tag{12.124}$$

Sử dụng giá trị v này trong công thức tổng quát đối với T cho bởi phương trình (12.121) sẽ thu được phương trình (12.123). ♣

12.10. Tên lửa tương đối

Mối quan hệ giữa m và v thu được trong phương trình (12.67) là độc lập với tốc độ khối lượng biến đổi thành photon. Điểm quan trọng của bài toán này là giả sử tốc độ biết trước để thu được mối liên hệ giữa v và t.

Trong hệ quy chiếu của tên lửa, chúng ta có $dm = -\sigma d\tau$. Ảnh hưởng sự giãn nở thời gian thông thường dẫn đến $dt = \gamma d\tau$, do đó chúng ta có $dm = (-\sigma/\gamma)dt$ trong hệ quy chiếu mặt đất. Đạo hàm phương trình (12.67) để thu được công thức khác đối với dm, chúng ta có

$$dm = \frac{-M dv}{(1+v)\sqrt{1-v^2}}. \tag{12.125}$$

Cho hai biểu thức của dm bằng nhau dẫn đến

$$\int_0^t \frac{\sigma dt}{M} = \int_0^v \frac{dv}{(1+v)(1-v^2)}. \tag{12.126}$$

Chúng ta có thể sử dụng máy tính để tính tích phân dv này, nhưng hãy thực hiện điều đó ngay bây giờ. Sử dụng một vài thủ thuật biến đổi phân số, chúng ta có

$$\begin{aligned}
\int \frac{dv}{(1+v)(1-v^2)} &= \int \frac{dv}{(1+v)(1-v)(1+v)} \\
&= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1+v} + \frac{1}{1-v}\right)\frac{dv}{1+v} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{dv}{(1+v)^2} + \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{1+v} + \frac{1}{1-v}\right) dv \\
&= -\frac{1}{2(1+v)} + \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1+v}{1-v}\right).
\end{aligned} \tag{12.127}$$

Do đó phương trình (12.126) dẫn đến

$$\frac{\sigma t}{M} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(1+v)} + \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1+v}{1-v}\right) = \frac{v}{2(1+v)} + \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1+v}{1-v}\right). \tag{12.128}$$

NHẬN XÉT: Nếu $v \ll 1$ (hoặc đúng hơn là nếu $v \ll c$), chúng ta có thể sử dụng công thức Taylor mở rộng cho hai đại lượng trong phương trình (12.128) để thu được $\sigma t/M \approx v$, phương trình này có thể viết lại như sau $\sigma \approx M(v/t) \equiv Ma$. Nhưng σ bằng lực tác dụng lên tên lửa (hoặc đúng hơn là σc để làm cho các đơn vị chính xác), bởi vì $-\sigma$ là tốc độ thay đổi động lượng của photon (do động lượng của chúng là $p = -E/c = -(dmc^2)/c$). Dẫn đến chúng ta sẽ thu được phương trình không tương đối mà chúng ta mong đợi $F = ma$.

Nếu $v = 1 - \epsilon$, trong đó ϵ là rất nhỏ (tức là nếu v rất gần c), thì chúng ta có thể xấp xỉ phương trình (12.128) để thu được $\epsilon \approx (2e)e^{-4\sigma t/M}$. Chúng ta thấy rằng hiệu giữa v và 1 giảm theo quy luật số mũ của t. ♣

12.11. Máy hút bụi tương đối I

Bài toán này về bản chất là giống như bài tập 12.3. Gọi M là khối lượng của hệ máy hút bụi -

bụi (hệ này chúng ta sẽ gọi là hệ "S") khi vận tốc của nó là v. Sau một thời gian nhỏ dt trong hệ quy chiếu quán tính, S đã di chuyển một đoạn vdt, do đó về bản chất nó va chạm với một khối lượng vô cùng nhỏ λvdt. Dẫn đến năng lượng của nó tăng lên thành $\gamma M + \lambda vdt$. Động lượng của nó vẫn là γMv, do đó khối lượng của nó bây giờ là

$$M' = \sqrt{(\gamma M + \lambda vdt)^2 - (\gamma Mv)^2} \approx \sqrt{M^2 + 2\gamma M\lambda vdt}, \tag{12.129}$$

trong đó chúng ta đã bỏ qua đại lượng bậc hai dt^2. Sử dụng chuỗi Taylor $\sqrt{1+\epsilon} \approx 1 + \epsilon/2$, chúng ta có thể xấp xỉ M' như sau

$$M' \approx M\sqrt{1 + \frac{2\gamma\lambda vdt}{M}} \approx M\left(1 + \frac{\gamma\lambda vdt}{M}\right) = M + \gamma\lambda vdt. \tag{12.130}$$

Do đó tốc độ tăng khối lượng của S là $\gamma\lambda v$. Như trong bài tập **12.3**, sự tăng này là lớn hơn câu trả lời không tương đối "λv", bởi vì nhiệt được sinh ra trong quá trình va chạm, và nhiệt này xuất hiện như là khối lượng trong vật thể cuối cùng.

NHẬN XÉT: Như giải thích trong nhận xét của lời giải đối với bài tập 12.3, kết quả này là hiển nhiên nếu chúng ta tính toán trong hệ quy chiếu của máy hút bụi. Trong hệ quy chiếu này, khối lượng vô cùng nhỏ λvdt như đã nói tới ở trên đến với năng lượng $\gamma(\lambda vdt)$, và về bản chất tất cả các năng lượng này xuất hiện như là khối lượng trong vật thể cuối cùng.

Chú ý rằng tốc độ khối lượng tăng, đo trong hệ quy chiếu máy hút bụi, là $\gamma^2\lambda v$, do sự giãn nở thời gian. Sự kiện bụi đi vào máy hút bụi xảy ra tại cùng một vị trí trong hệ quy chiếu máy hút bụi, do đó quả thực chúng ta đã để thừa số γ ở vị trí chính xác. Một cách lựa chọn khác, bạn có thể xem xét bằng sự co độ dài. S quan sát thấy bụi bị co lại, do đó mật độ của nó tăng lên thành $\gamma\lambda$. Và thừa số γ khác đến từ thực tế rằng bụi đang chuyển động trong hệ quy chiếu máy hút bụi, do đó có một thừa số γ trong năng lượng. ♣

12.12. Máy hút bụi tương đối II

Động lượng ban đầu là $\gamma_V MV \equiv P$. Không có lực ngoài, do đó động lượng của hệ máy hút bụi - bụi (ký hiệu bởi "S") luông luôn bằng P. Tức là $\gamma mv = P$, trong đó m và v là khối lượng và vận tốc của S tại thời điểm bất kỳ sau đó.

Đầu tiên chúng ta hãy đi tìm $v(x)$. Năng lượng của S, cụ thể là γm, tăng do bụi tăng thêm. Do đó, $d(\gamma m) = \lambda dx$, phương trình này chúng ta có thể viết như sau

$$d\left(\frac{P}{v}\right) = \lambda dx. \tag{12.131}$$

Tích phân phương trình này, và sử dụng thực tế rằng vận tốc ban đầu là V, dẫn đến $P/v - P/V = \lambda x$. Do đó,

$$v(x) = \frac{V}{1 + (V\lambda x/P)}. \tag{12.132}$$

Đối với trường hợp x lớn, kết quả này tiến tới $P/(\lambda x)$. Điều này là có ý nghĩa bởi vì khối lượng của S về bản chất là bằng λx, và nó đang chuyển động chậm, vận tốc không tương đối.

Để tìm $v(t)$, viết dx trong phương trình (12.131) dưới dạng vdt để thu được $(-Pv^2)dv = \lambda vdt$. Điều này dẫn đến

$$-\int_V^v \frac{Pdv}{v^3} = \int_0^t \lambda \Longrightarrow \frac{P}{v^2} - \frac{P}{V^2} = 2\lambda t \Longrightarrow v(t) = \frac{V}{\sqrt{1+(2V^2\lambda t/P)}}. \tag{12.133}$$

Tích phân phương trình này sẽ thu được $x(t)$ như sau

$$x(t) = \frac{P}{V\lambda}\left(\sqrt{1+\frac{2V^2\lambda t}{P}} - 1\right). \tag{12.134}$$

Nếu bạn muốn, bạn có thể viết lại tất cả các câu trả lời này theo M thông qua mối liên hệ $P \equiv \gamma_V MV$.

NHẬN XÉT:

1. Bạn cũng có thể thu được kết quả trong phương trình (12.134) bằng cách cho hai biểu thức của v trong phương trình (12.132) và (12.133) bằng nhau. Hoặc bạn có thể viết v trong phương trình (12.132) dưới dạng dx/dt, và sau đó tách biến và tích phân.
2. Đối với trường hợp t nhỏ, bạn có thể chỉ ra rằng phương trình (12.134) sẽ suy biến thành $x = Vt$. Khi t lớn, x có một đặc tính thú vị đó là tỷ lệ với $\sqrt{t}$.
3. Cho trước P, tất cả các kết quả trong bài toán này (khi biểu diễn theo P) thực sự là giống như các kết quả thu được trong trường hợp không tương đối, bởi vì phương trình (12.131) vẫn đúng ở đó; sẽ rất đơn giản đối với biểu thức của sự thay đổi khối lượng trong trường hợp không tương đối. Từ cách nhìn đó, thuyết tương đối không bao giờ đi sâu vào trong các cách lập luận. ♣

12.13. Máy hút bụi tương đối III

HỆ QUY CHIẾU MÁY HÚT BỤI: Giả sử S ký hiệu hệ máy hút bụi - bụi tại thời điểm cho trước, và xem xét một khối lượng bụi rất nhỏ (gọi hệ này là hệ s) đi vào máy hút bụi. Trong hệ quy chiếu của S, mật độ của bụi là $\gamma\lambda$, do sự co độ dài. Do đó, trong thời gian $d\tau$ (trong đó τ là thời gian trong hệ quy chiếu máy hút bụi), một lượng nhỏ bụi với khối lượng $\gamma\lambda v d\tau$ va chạm vào S và làm mất động lượng âm của nó $-\gamma(\gamma\lambda v d\tau)v = -\gamma^2 v^2 \lambda d\tau$. Do đó lực tác dụng lên s là $F = dp/d\tau = \gamma^2 v^2 \lambda$. Lực mong muốn tác dụng lên S bằng và ngược chiều với lực này, do đó

$$F = -\gamma^2 v^2 \lambda. \tag{12.135}$$

HỆ QUY CHIẾU QUÁN TÍNH: Trong thời gian dt, trong đó t là thời gian trong hệ quy chiếu quán tính, một lượng nhỏ bụi với khối lượng $\lambda v dt$ bị hút bởi máy hút bụi. Sự thay đổi động lượng của s là bao nhiêu? Sẽ rất dễ nói rằng nó là $\gamma(\lambda v dt)v$, nhưng điều này sẽ dẫn đến lực $-\gamma v^2\lambda$ tác dụng lên máy hút bụi, kết quả này không giống như kết quả mà chúng ta đã tìm thấy ở trên trong hệ quy chiếu máy hút bụi. Đây sẽ là vấn đề bởi vì các lực dọc sẽ phải như nhau trong các hệ quy chiếu khác nhau.

Điểm mấu chốt ở đây đó là khối lượng tăng lên với tốc độ $\gamma\lambda v$ chứ không phải là λv (xem bài tập 12.11). Do đó, chúng ta thấy rằng sự thay đổi động lượng của khối lượng chuyển động là $\gamma(\gamma\lambda v dt)v = \gamma^2 v^2 \lambda dt$. Dẫn đến hệ chuyển động ban đầu S mất động lượng này, và do đó lực tác dụng lên nó là $F = dp/dt = -\gamma^2 v^2 \lambda$, giống như kết quả trong hệ quy chiếu máy hút bụi.

12.14. Chiếc xe tương đối I

HỆ QUY CHIẾU MẶT ĐẤT (HỆ QUY CHIẾU CỦA BẠN): Sử dụng lý luận giống như trong bài tập 12.3 và bài tập 12.11, chúng ta thấy rằng khối lượng của hệ xe - cát tăng với tốc độ $\gamma\sigma$. Do đó, động lượng của nó tăng với tốc độ (sử dụng thực tế rằng v là hằng số)

$$\frac{dp}{dt} = \gamma\left(\frac{dm}{dt}\right)v = \gamma(\gamma\sigma)v = \gamma^2\sigma v. \tag{12.136}$$

Bởi vì $F = dp/dt$, nên đây là lực mà bạn tác dụng vào chiếc xe. Do đó, nó cũng là lực mà hệ quy chiếu mặt đất tác dụng lên chân của bạn, bởi vì tổng lực tác dụng lên bạn bằng không (do động lượng của bạn là không đổi, và thực tế nó bằng không).

HỆ QUY CHIẾU CHIẾC XE: Sự kiện cát rơi vào xe xảy ra tại cùng một vị trí trong hệ quy chiếu mặt đất, do đó sự giãn nở thời gian dẫn đến rơi vào xe với tốc độ chậm hơn trong hệ quy chiếu của xe, tức là với tốc độ σ/γ. Cát chuyển động với vận tốc v, và sau đó ở trạng thái nghỉ trong chiếc xe, do đó động lượng của nó giảm với tốc độ $\gamma(\sigma/\gamma)v = \sigma v$. Dẫn đến đây phải là lực mà tay của bạn tác dụng lên chiếc xe.

Nếu đây là sự thay đổi động lượng duy nhất trong bài toán này thì chúng ta sẽ có một vấn đề, bởi vì lực tác dụng lên chân bạn sẽ là σv trong hệ quy chiếu của chiếc xe, trong khi đó chúng ta đã tìm thấy ở trên rằng nó bằng $\gamma^2\sigma v$ trong hệ quy chiếu mặt đất. Điều này mâu thuẫn với thực tế rằng các lực dọc là như nhau trong mọi hệ quy chiếu. Cách giải quyết đối với nghịch lý này như thế nào? Cách giải quyết ở đây đó là trong khi bạn đang đẩy chiếc xe, *khối lượng của bạn giảm*. Bạn đang chuyển động với vận tốc v trong hệ quy chiếu chiếc xe, và khối lượng tiếp tục bị chuyển từ bạn (người đang chuyển động) tới chiếc xe (vật ở trạng thái nghỉ), như chúng ta sẽ chỉ ra sau đây. Đây là sự thay đổi động lượng đã bỏ qua mà chúng ta cần. Lý luận định lượng như sau.

Chúng ta hãy quay trở lại hệ quy chiếu mặt đất một chút. Chúng ta đã thấy ở trên rằng khối lượng của hệ xe - cát (gọi hệ này là "C") tăng với tốc độ $\gamma\sigma$ trong hệ quy chiếu mặt đất. Do đó, năng lượng của C tăng với tốc độ $\gamma(\gamma\sigma)$ trong hệ quy chiếu mặt đất. Cát cung cấp σ

trong năng lượng này, do đó bạn phải cung cấp phần còn lại $(\gamma^2 - 1)\sigma$. Do đó, bởi vì bạn mất năng lượng với tốc độ này nên bạn cũng mất khối lượng với tốc độ này trong hệ quy chiếu mặt đất (bởi vì bạn đang ở trạng thái nghỉ trong hệ quy chiếu mặt đất).

Bây giờ hãy quay trở lại hệ quy chiếu chiếc xe. Do sự giãn nở thời gian, bạn sẽ mất khối lượng với tốc độ chỉ là $(\gamma^2 - 1)\sigma/\gamma$. Khối lượng này đến từ chuyển động với vận tốc v (tức là cùng với bạn), tới vận tốc không (tức là trạng thái nghỉ trong chiếc xe). Do đó, tốc độ giảm động lượng của khối lượng này là $\gamma((\gamma^2 - 1)\sigma/\gamma)v = (\gamma^2 - 1)\sigma v$. Cộng kết quả này vào kết quả σv mà chúng ta đã tìm được đối với cát, chúng ta thấy rằng tổng tốc độ giảm của động lượng là $\gamma^2\sigma v$. Do đó đây là lực mà mặt đất tác dụng vào chân bạn, kết quả này phù hợp với tính toán ở trên trong hệ quy chiếu mặt đất.

Chú ý rằng lý do tại sao chúng ta không phải lo lắng về sự thay đổi khối lượng của bạn khi tính toán trong hệ quy chiếu mặt đất đó là do vận tốc của bạn trong hệ quy chiếu mặt đất bằng không. Do đó động lượng của bạn luôn luôn bằng không, độc lập với bất cứ điều gì xảy ra với khối lượng của bạn.

12.15. Chiếc xe tương đối II

HỆ QUY CHIẾU MẶT ĐẤT: Sử dụng lý luận giống như bài tập 12.3 và bài tập 12.11, chúng ta thấy rằng khối lượng của hệ xe - cát tăng với tốc độ $\gamma\sigma$. Do đó, động lượng của nó tăng với tốc độ $\gamma(\gamma\sigma)v = \gamma^2\sigma v$. Tuy nhiên, đây không phải là lực mà tay bạn tác dụng lên xe. Lý do đó là tay của bạn lùi dần từ vị trí ở đó cát rơi vào xe , do đó tay của bạn không thể ngay lập tức biết được cần phải thêm động lượng. Không cần biết là chiếc xe cứng như thế nào, nó cũng không thể truyền thông tin nhanh hơn c. Về ý nghĩa, có một loại ảnh hưởng Doppler xảy ra, và tay của bạn cần phải chịu chỉ một phần trong sự tăng động lượng. Hãy tính toán định lượng về vấn đề này.

Xét hai hạt cát rơi vào xe cách nhau khoảng thời gian t. Hiệu giữa hai thời gian mà tay của bạn biết được rằng hai hạt cát đã rơi vào xe bằng bao nhiêu? Giả thiết rằng độ cứng là lớn nhất (tức là giả sử tín hiệu truyền dọc xe với vận tốc c), vận tốc tương đối (đo bởi một người nào đó trên mặt đất) của tín hiệu và tay của bạn là $c - v$. Khoảng cách giữa hai tín hiệu là ct. Do đó, chúng đến tay của bạn cách nhau một khoảng thời gian $ct/(c - v)$. Nói một cách khác, tốc độ mà bạn cảm thấy cát rơi vào xe là $(c - v)/c$ nhân với tốc độ σ cho trước. Đây là thừa số mà chúng ta phải nhân với kết quả $\gamma^2\sigma v$ đối với lực mà chúng ta tìm được ở trên. Dẫn đến lực mà bạn tác dụng là (bỏ qua ký hiệu c)

$$F = \left(1 - \frac{v}{c}\right)\gamma^2\sigma v = \frac{\sigma v}{1 + v}. \qquad (12.137)$$

HỆ QUY CHIẾU CHIẾC XE (HỆ QUY CHIẾU CỦA BẠN): Sự kiện cát rơi vào xe xảy ra tại cùng một vị trí trong hệ quy chiếu mặt đất, do đó sự giãn nở thời gian dẫn đến cát rơi vào xe với tốc độ chậm hơn trong hệ quy chiếu của xe, tức là với tốc độ σ/γ. Cát chuyển động với vận tốc v, và sau đó thực sự ở trạng thái nghỉ trong xe, do đó động lượng của nó giảm với tốc độ $\gamma(\sigma/\gamma)v = \sigma v$. Nhưng một lần nữa, đây không phải là lực mà tay của bạn tác dụng lên chiếc xe. Giống như ở phần trên, cát rơi vào xe tại vị trí lùi lại so với tay của bạn, do đó tay của bạn không thể ngay lập tức nhận ra động lượng thêm. Chúng ta hãy tính toán định lượng vấn đề này.

Xét hai hạt cát rơi vào xe cách nhau một khoảng thời gian t. Hiệu giữa hai thời gian mà tay của bạn biết được rằng hai hạt cát đã rơi vào xe bằng bao nhiêu? Giả thiết rằng độ cứng là lớn nhất (tức là giả sử tín hiệu truyền dọc xe với vận tốc c),vận tốc tương đối (đo bởi người nào đó trên xe) của tín hiệu và tay của bạn là c, bởi vì bạn ở trạng thái nghỉ. Khoảng cách giữa hai tín hiệu là $ct + vt$, bởi vì nguồn cát di chuyển ra xa bạn với vận tốc v. Do đó, tín hiệu đến tay của bạn cách một khoảng thời gian $(c + v)t/c$. Nói một cách khác, tốc độ mà bạn cảm thấy cát rơi vào xe là $c/(c + v)$ nhân với tốc độ giãn nở thời gian σ/γ. Đây là thừa số mà chúng ta phải nhân với kết quả σv đối với lực mà chúng ta tìm thấy ở phía trên. Do đó lực mà bạn tác dụng là (bỏ qua ký hiệu c)

$$F = \left(\frac{1}{1 + v/c}\right)\sigma v = \frac{\sigma v}{1 + v}, \tag{12.138}$$

giống như phương trình (12.137).

Nói tóm lại, hai kết quả trong hai hệ quy chiếu, $\gamma^2\sigma v$ và σv, khác nhau bởi bình phương của γ. Nhưng tỷ số của hai thừa số "ảnh hưởng Doppler" (sinh ra từ việc không thể có độ cứng tuyệt đối) lý giải một cách chính xác sự không giống nhau này. Lý do tại sao chúng ta không cần phải xét tới ảnh hưởng Doppler này trong bài tập 12.14 đó là tay của bạn luôn luôn ở ngay cạnh điểm mà ở đó cát rơi vào xe.

12.16. Các hệ quy chiếu khác nhau

(a) Năng lượng của vật sau va chạm là $2m + T\ell$. Bởi vì khối lượng sau va chạm này ở trạng thái nghỉ, nên chúng ta có

$$M = 2m + T\ell. \tag{12.139}$$

(b) Gọi hệ quy chiếu mới là S. Gọi hệ quy chiếu ban đầu là S'. Điểm then chốt để hiểu rõ đó là trong hệ quy chiếu S, khối lượng bên trái bắt đầu tăng tốc trước khi khối lượng bên phải thực hiện điều đó. Điều này là do sự mất tính đồng thời giữa các hệ quy chiếu.

Xét hai sự kiện mà tại đó hai khối lượng bắt đầu chuyển động. Giả sử khối lượng bên trái và khối lượng phải bắt đầu chuyển động tại các vị trí x_l và x_r trong S. Phép biến đổi Lorentz $\Delta x = \gamma(\Delta x' + v\Delta t')$ chỉ ra rằng $x_r - x_l = \gamma\ell$, bởi vì $\Delta x' = \ell$ và $\Delta t' = 0$ đối với các sự kiện này. Một cách khác, điều này có được do sự co độ dài, bởi vì nếu chúng ta vẽ mọi thứ trong hệ quy chiếu gốc S', thì độ dài $\gamma\ell$ trong S là độ dài sẽ co lại thành ℓ trong S'.

Giả sử các khối lượng va chạm tại vị trí x_c trong S. Khi đó năng lượng tăng thêm của khối lượng bên trái là $T(x_c - x_l)$, và năng lượng tăng thêm của khối lượng bên phải là $(-T)(x_c - x_r)$, giá trị này sẽ âm nếu như $x_c > x_r$. Chúng ta đã sử dụng thực tế rằng lực dọc là như nhau trong hai hệ quy chiếu, do đó các khối lượng vẫn chịu sức căng T trong hệ quy chiếu S. Tổng năng lượng tăng thêm của hai khối lượng do đó là

$$\Delta E = T(x_c - x_l) + (-T)(x_c - x_r) = T(x_r - x_l) = T\gamma\ell. \tag{12.140}$$

Tổng năng lượng ban đầu của hai khối lượng là $2\gamma m$, do đó năng lượng cuối cùng là

$$E = 2\gamma m + T\gamma\ell = \gamma M, \tag{12.141}$$

như mong muốn.

12.17. Khối lượng bị tách

Chúng ta sẽ tính toán thời gian xảy ra hai giai đoạn của quá trình. Năng lượng của khối lượng bên phải trước khi nó tách ra là (với chỉ số dưới b có nghĩa là "trước") $E_b = M + T(\ell/2)$, do đó động lượng là $p_b = \sqrt{E_b^2 - M^2} = \sqrt{MT\ell + T^2\ell^2/4}$. Sử dụng $F = dp/dt \Longrightarrow t = \Delta p/T$, thời gian của giai đoạn đầu của quá trình là

$$t_1 = \frac{\sqrt{MT\ell + T^2\ell^2/4}}{T} = \sqrt{\frac{M\ell}{T} + \frac{\ell^2}{4}}. \tag{12.142}$$

Động lượng của nửa phía trước của khối lượng ngay sau khi nó tách ra là $p_a = p_b/2 = (1/2)\sqrt{MT\ell + T^2\ell^2/4}$. Năng lượng tại tường là $E_w = E_b/2 + T(\ell/2) = M/2 + 3T\ell/4$, do đó động lượng tại tường là $p_w = \sqrt{E_w^2 - (M/2)^2} = (1/2)\sqrt{3MT\ell + 9T^2\ell^2/4}$. Sự thay đổi động lượng trong giai đoạn thứ hai của quá trình do đó sẽ là

$$\Delta p = p_w - p_a = (1/2)\sqrt{3MT\ell + 9T^2\ell^2/4} - (1/2)\sqrt{MT\ell + T^2\ell^2/4}. \tag{12.143}$$

Bởi vì chúng ta có $t = \Delta p/T$, nên thời gian của giai đoạn thứ hai là

$$t_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3M\ell}{T} + \frac{9\ell^2}{4}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{M\ell}{T} + \frac{\ell^2}{4}}. \tag{12.144}$$

Tổng thời gian là $t_1 + t_2$, kết quả này đơn giản chỉ là thay đổi dấu trừ trong biểu thức này thành dấu cộng.

12.18. Chiếc xô bị chảy cát trong thuyết tương đối

(a) Giả sử tường tại vị trí $x = 0$, và vị trí ban đầu là $x = \ell$. Xét một khoảng thời gian nhỏ khi chiếc xô chuyển động từ x tới $x + dx$ (ở đó dx âm). Năng lượng của chiếc xô thay đổi $(-T)dx$ do sợi dây (giá trị này dương), và cũng thay đổi một phân số dx/x, do bị rò (giá trị này âm). Do đó, $dE = (-T)dx + Edx/x$, hoặc

$$\frac{dE}{dx} = -T + \frac{E}{x}. \tag{12.145}$$

Khi giải phương trình vi phân này, sẽ thuận tiện khi đưa vào biến $y \equiv E/x$. Với định nghĩa này, chúng ta có $E' = (xy)' = xy' + y$, ở đó dấu phẩy ký hiệu đạo hàm đối với x. Khi đó phương trình (12.145) trở thành $xy' = -T$, hoặc $dy = -Tdx/x$. Tích phân phương trình này dẫn đến $y = -T\ln x + C$, kết quả này chúng ta cũng có thể viết như sau $y = -T\ln(x/\ell) + B$, để thu được đối số không thứ nguyên của hàm log. Bởi vì $E = xy$, do đó chúng ta có

$$E(x) = Bx - Tx\ln(x/\ell), \tag{12.146}$$

ở đó B là một hằng số tích phân. Lý luận cho đến lúc này là đúng cho cả tổng năng lượng và động năng bởi vì chúng đều thay đổi theo hai cách được mô tả ở trên. Hãy xem xét cụ thể từng trường hợp.

TỔNG NĂNG LƯỢNG: Phương trình (12.146) dẫn đến

$$E = M(x/\ell) - Tx\ln(x/\ell), \tag{12.147}$$

ở đó hằng số tích phân B đã được chọn bằng M/ℓ sao cho $E = M$ khi $x = \ell$. Dưới dạng phân số $z =\equiv x/\ell$, chúng ta có $E = Mz - T\ell z\ln z$. Cho $dE/dz = 0$ để tìm giá trị lớn nhất dẫn đến

$$\ln z_{max} = \frac{M}{T\ell} - 1 \quad\Longrightarrow\quad E_{max} = \frac{T\ell}{e}e^{M/T\ell}. \tag{12.148}$$

Phân số z phải thỏa mãn $z \le 1$, do đó chúng ta phải có $\ln z \le 0$. Dẫn đến, nghiệm z chỉ tồn tại chỉ khi $M \le T\ell$. Nếu $M \ge T\ell$, thì tổng năng lượng giảm khi đi tới tường.

> NHẬN XÉT: Nếu M là hơi nhỏ so với $T\ell$, thì z_{max} là hơi nhỏ so với 1, do đó E nhanh chóng đạt được giá trị lớn nhất lớn hơn M một chút, khi đó giảm đối với trạng thái nghỉ của quãng đường đi tới tường.
>
> Nếu $M \ll T\ell$, thì E đạt tới giá trị lớn nhất của nó tại $z_{max} \approx 1/e$, ở đó nó có giá trị $T\ell/e$. Về bản chất tất cả năng lượng là động năng trong trường hợp này, do đó kết quả phải giống như kết quả đối với động năng ở phần dưới đây, và quả thực đúng là như vậy. ♣

ĐỘNG NĂNG: Phương trình (12.146) dẫn đến

$$K = -Tx\ln(x/\ell), \tag{12.149}$$

ở đó hằng số tích phân B được chọn bằng không sao cho $K = 0$ khi $x = \ell$. Một cách tương đương, $E - K$ phải bằng khối lượng $M(x/\ell)$. Dưới dạng phân số $z \equiv x/\ell$, chúng ta có $K = -T\ell z \ln z$. Cho $dK/dz = 0$ để tìm giá trị lớn nhất dẫn đến

$$z_{max} = \frac{1}{e} \quad \Longrightarrow \quad K_{max} = \frac{T\ell}{e}, \tag{12.150}$$

giá trị này là độc lập với M. Kết quả này phải suy biến một cách hợp lý trong giới hạn không tương đối. Nhưng bởi vì không có điều gì cần suy biến (không có bất cứ đại lượng nào là nhỏ khi so sánh với các đại lượng khác khi $v \ll c$), nên kết quả này chính xác là bằng kết quả không tương đối. Và quả thực, bài toán "Chiếc xô bị chảy cát" tương tự trong Chương 5 (bài tập 5.17) dẫn đến câu trả lời giống như thế này.

(b) Với $z \equiv x/\ell$, động lượng của chiếc xô là $p = \sqrt{E^2 - m^2} = \sqrt{E^2 - (Mz)^2}$, do đó phương trình (12.147) dẫn đến

$$p = \sqrt{(Mz - T\ell z \ln z)^2 - (Mz)^2} = \sqrt{-2MT\ell z^2 \ln z + T^2\ell^2 z^2 \ln^2 z}. \tag{12.151}$$

Cho đạo hàm bằng không dẫn đến $T\ell \ln^2 z + (T\ell - 2M)\ln z - M = 0$. Do đó động lượng lớn nhất xảy ra tại

$$\ln z_{max} = \frac{2M - T\ell - \sqrt{T^2\ell^2 + 4M^2}}{2T\ell}. \tag{12.152}$$

Chúng ta đã bỏ qua một nghiệm khác, bởi vì nó dẫn đến $\ln z > 0 \Longrightarrow z > 1$.

(a) Nếu $M \ll T\ell$, thì $\ln z_{max} \approx -1 \Longrightarrow z_{max} \approx 1/e$. Trong trường hợp này chiếc xô ngay lập tức chuyển động với $v \approx c$, do đó chúng ta có $E \approx pc$. Dẫn đến, E và p sẽ đạt tới giá trị lớn nhất của chúng tại cùng một vị trí. Và quả thực, chúng ta đã thấy ở trên rằng E_{max} xảy ra tại $z_{max} \approx 1/e$.

(b) Nếu $M \gg T\ell$, thì $\ln z_{max} \approx -1/2 \Longrightarrow z_{max} \approx 1/\sqrt{e}$. Trong trường hợp này, chiếc xô là không tương đối, do đó kết quả này sẽ giống như kết quả trong bài tập 5.17.

(c) Nếu $M = T\ell$, thì $\ln z_{max} = (1 - \sqrt{5})/2$, giá trị này là giá trị âm của nghịch đảo tỷ số vàng. ♣

12.19. Chiếc xô trong thuyết tương đối

(a) Năng lượng của khối lượng bên phải trước khi nó va chạm vào tường là $E = m + T\ell$. Do đó, động lượng ngay trước khi nó va vào tường là $p = \sqrt{E^2 - m^2} = \sqrt{2mT\ell + T^2\ell^2}$. Do đó $F = dp/dt$ dẫn đến (sử dụng thực tế rằng sức căng là không đổi)

$$\Delta t = \frac{\Delta p}{F} = \frac{\sqrt{2mT\ell + T^2\ell^2}}{T}. \tag{12.153}$$

Nếu $m \ll T\ell$, thì $\Delta t \approx \ell$ (hoặc ℓ/c với đơn vị thông thường), điều này là có ý nghĩa bởi vì khối lượng di chuyển với tốc độ về bản chất là bằng c. Và nếu $m \gg T\ell$, thì $\Delta t \approx \sqrt{2m\ell/T}$.

Đây là giới hạn không tương đối, và nó phù hợp với kết quả thu được từ công thức quen thuộc $\ell = at^2/2$, ở đó $a = T/m$ là gia tốc.

(b) PHƯƠNG PHÁP TRỰC TIẾP: Năng lượng của hạt ngay trước khi nó va chạm vào tường là $E_w = 2m + 2T\ell$ (với chỉ số dưới w có nghĩa là "tường"). Nếu chúng ta có thể tìm khối lượng M của hạt thì chúng ta có thể sử dụng $p = \sqrt{E^2 - M^2}$ để thu được động lượng, và sau đó sử dụng $\Delta t = \Delta p/F$ để thu được thời gian.[17]

Từ phần (a), động lượng ngay trước khi va chạm là $p_b = \sqrt{2mT\ell + T^2\ell^2}$, và đây cũng là động lượng của hạt ngay sau khi va chạm p_a. Năng lượng của hạt ngay sau khi va chạm là $E_a = 2m + T\ell$. Do đó khối lượng của hạt sau va chạm là $M = \sqrt{E_a^2 - p_a^2} = \sqrt{4m^2 + 2mT\ell}$. Do đó, động lượng tại tường là $p_w = \sqrt{E_w^2 - M^2} = \sqrt{6mT\ell + 4T^2\ell^2}$, và dẫn đến

$$\Delta t = \frac{\Delta p}{F} = \frac{\sqrt{6mT\ell + 4T^2\ell^2}}{T}. \tag{12.154}$$

Nếu $m = 0$ thì $\Delta t = 2\ell$ như mong muốn.

PHƯƠNG PHÁP HAY HƠN: Như trong lời gợi ý của bài toán này, sự thay đổi của p^2 từ vị trí xuất phát ban đầu cho đến ngay trước khi va chạm là $\Delta(p^2) = E_2^2 - E_1^2$. Điều này là đúng bởi vì

$$E_1^2 - m^2 = p_1^2, \quad \text{và} \quad E_2^2 - m^2 = p_2^2, \tag{12.155}$$

và bởi vì m là như nhau trong suốt nửa đầu tiên của quá trình, chúng ta có $\Delta(E^2) = \Delta(p^2)$. Tương tự, sự thay đổi của p^2 trong nửa thứ hai của quá trình là $\Delta(p^2) = E_4^2 - E_3^2$, bởi vì

$$E_3^2 - M^2 = p_3^2, \quad \text{và} \quad E_4^2 - M^2 = p_4^2, \tag{12.156}$$

và bởi vì M là không đổi trong suốt nửa thứ hai của quá trình,[18] chúng ta có $\Delta(E^2) = \Delta(p^2)$. Tổng thay đổi của p^2 là tổng hai sự thay đổi ở trên, do đó p^2 cuối cùng là

$$\begin{aligned} p^2 &= (E_2^2 - E_1^2) + (E_4^2 - E_3^2) \\ &= ((m + T\ell)^2 - m^2) + ((2m + 2T\ell)^2 - (2m + T\ell)^2) \\ &= 6mT\ell + 4T^2\ell^2, \end{aligned} \tag{12.157}$$

như trong phương trình (12.154). Thực ra mà nói lời giải đầu tiên cũng thực hiện tính toán tương tự, nhưng theo một cách khó hiểu hơn.

[17] Mặc dù sức căng T tác dụng lên hai thứ khác nhau (khối lượng m ban đầu, và sau đó là hạt), nhưng vẫn đúng khi sử dụng tổng Δp để thu được tổng thời gian thông qua $\Delta t = \Delta p/F$, bởi vì nếu chúng ta muốn, chúng ta có thể chia Δp thành hai phần, và sau đó tìm hai thời gian thành phần, cuối cùng cộng chúng lại để thu được tổng Δt

[18] Từ lời giải đầu tiên, M bằng $\sqrt{4m^2 + 2mT\ell}$, nhưng điều thú vị trong lời giải này đó là chúng ta không cần biết giá trị này. Tất cả những gì mà chúng ta cần biết đó là nó là hằng số.

(c) Lý luận trong phần (b) chỉ ra rằng p^2 cuối cùng bằng tổng của các đại lượng $\Delta(E^2)$ trên N phần của quá trình. Do đó sử dụng ký hiệu chỉ số như trong phần (b), chúng ta có,

$$\begin{aligned} p^2 = \sum_{k=1}^{N}(E_{2k}^2 - E_{2k-1}^2) &= \sum_{k=1}^{N}\big((km + kT\ell)^2 - (km + (k-1)T\ell)^2\big) \\ &= \sum_{k=1}^{N}\big(2kmT\ell + (k^2 - (k-1)^2)T^2\ell^2\big) \\ &= N(N+1)mT\ell + N^2T^2\ell^2. \end{aligned} \quad (12.158)$$

Do đó,

$$\Delta t = \frac{\Delta p}{F} = \frac{\sqrt{N(N+1)mT\ell + N^2T^2\ell^2}}{T}. \quad (12.159)$$

Kết quả này phù hợp với kết quả từ phần (a) và (b) khi $N = 1$ và $N = 2$.

(d) Chúng ta muốn lấy giới hạn $N \to \infty,\ \ell \to 0,\ m \to 0$, với hạn chế rằng $N\ell = L$ và $Nm = M$. Viết dưới dạng M và L, phương trình (12.159) trở thành

$$\Delta t = \frac{\sqrt{(1 + 1/N)MTL + T^2L^2}}{T} \longrightarrow \frac{\sqrt{MTL + T^2L^2}}{T}, \quad (12.160)$$

khi $N \to \infty$. Đại lượng Δt này là giống như thời gian mà một hạt có khối lượng $m = M/2$ chạm vào tường từ phần (a). Khối lượng của chiếc xô tại tường là

$$\begin{aligned} M_w = \sqrt{E_w^2 - p_w^2} &= \sqrt{(M + TL)^2 - (MTL + T^2L^2)} \\ &= \sqrt{M^2 + MTL}. \end{aligned} \quad (12.161)$$

Nếu $TL \ll M$, thì $M_w \approx M$, điều này là có ý nghĩa. Nếu $M \ll TL$, thì $M_w \approx \sqrt{MTL}$, điều này có nghĩa rằng M_w là trung bình nhân của khối lượng cho trước và năng lượng chứa trong sợi dây. Điều này không hoàn toàn là hiển nhiên. Vận tốc của chiếc xô ngay trước khi nó va chạm vào tường là

$$\begin{aligned} v_w = \frac{p_w}{E_w} &= \frac{\sqrt{MTL + T^2L^2}}{M + TL} \\ &= \sqrt{\frac{TL}{M + TL}} = \sqrt{\frac{T}{T + \rho}} \longrightarrow c\sqrt{\frac{T}{T + \rho c^2}}, \end{aligned} \quad (12.162)$$

trong đó $\rho \equiv M/L$ là mật độ khối lượng.

NHẬN XÉT: Chú ý rằng v_w chỉ phụ thuộc vào T và ρ. Điều này có nghĩa rằng nếu chúng ta thay đổi L bằng cách di chuyển tường tới bất kỳ vị trí nào khác, thì vận tốc tại tường sẽ vẫn là v_w. Nói một cách khác, chiếc xô chuyển động hướng về phía tường với vận tốc không đổi v_w. (Nhiệm vụ của bài tập 12.40 đó là thành lập kết quả này mà không lấy giới hạn $N \to \infty$ khi có nhiều khối lượng.) Kết quả vận tốc hằng số này cũng phải đúng trong giới hạn không tương đối (tức là $T \ll \rho c^2$), đối với trường hợp này chúng ta có $v_w \approx \sqrt{T/\rho}$. Và quả thực, kết quả này phù hợp với kết quả đối với bài tập 5.27, bài tập này về bản chất là giống như vậy, chỉ có khác về ngôn ngữ. ♣

Chương 13

Vectơ bốn chiều

Bây giờ chúng ta sẽ đến với một khái niệm rất quan trọng trong thuyết tương đối, đó là *vectơ bốn chiều*. Mặc dù có thể thành lập mọi thứ trong thuyết tương đối hẹp mà không cần sử dụng đến khái niệm vectơ bốn chiều (và quả thực, đây là điều mà chúng ta đã làm trong hai chương trước), nhưng chúng sẽ cực kỳ hữu ích trong việc làm cho các tính toán đơn giản hơn và các khái niệm trở lên sáng sủa hơn.

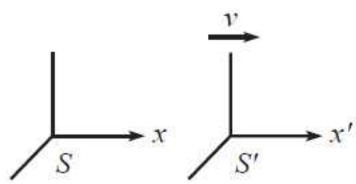
Tôi đã trì hoãn việc giới thiệu đầy đủ về khái niệm vectơ bốn chiều cho đến tận bây giờ, với mục đích cho thấy rằng mọi thứ trong thuyết tương đối hẹp có thể được thành lập và không cần sử dụng đến vectơ bốn chiều. Lần đầu tiên khi làm việc với thuyết tương đối, sẽ là tốt hơn khi biết rằng không có kỹ thuật đặc biệt nào được đòi hỏi. Nhưng bây giờ khi bạn đã quan sát mọi thứ trong thuyết tương đối, chúng ta hãy quay trở lại và thành lập các thứ khác nhau theo một cách đơn giản hơn.

Mặc dù thuyết tương đối hẹp không yêu cầu kiến thức về vectơ bốn chiều, và chủ đề của thuyết tương đối rộng chắc chắn phải yêu cầu một sự biểu biết khá sâu về *tensors*, đây là một khái niệm tổng quát hóa của vectơ bốn chiều. Chúng ta sẽ không có nhiều thời gian để đi quá sâu vào thuyết tương đối rộng trong Chương 14, do đó chúng ta sẽ phải chấp nhận thực tế này. Nhưng chỉ cần nói rằng rốt cuộc sự hiểu biết về thuyết tương đối rộng yêu cầu một nền tảng chắc chắn về khái niệm vectơ bốn chiều trong thuyết tương đối hẹp. Do đó chúng ta hãy xem xét cụ thể và chi tiết về khái niệm vectơ bốn chiều.

13.1 Định nghĩa vectơ bốn chiều

Định nghĩa 13.1. *Một đại lượng bốn thành phần* $A = (A_0, A_1, A_2, A_3)$ *là một vectơ bốn chiều nếu* A_i *thay đổi dưới một phép biến đổi Lorentz giống hệt như sự biến đổi của* (cdt, dx, dy, dz)*. Nói một cách khác,* A *là một vectơ bốn chiều nếu như nó biến đổi như sau (giả sử rằng phép biến đổi Lorentz là theo chiều* x*; xem hình 13.1):*

$$\begin{aligned} A_0 &= \gamma(A'_0 + (v/c)A'_1), \\ A_1 &= \gamma(A'_1 + (v/c)A'_0), \\ A_2 &= A'_2, \\ A_3 &= A'_3. \end{aligned} \tag{13.1}$$



Hình 13.1:

NHẬN XÉT:

1. Tất nhiên, các phương trình tương tự phải đúng đối với phép biến đổi Lorentz theo chiều y và chiều z.
2. Thêm vào đó, ba thành phần cuối cùng phải là một vectơ trong không gian ba chiều. Tức là chúng phải biến đổi giống như một vectơ thông thường dưới sự quay trong không gian ba chiều. Do đó định nghĩa đầy đủ của một vectơ bốn chiều đó là nó phải biến đổi giống như (cdt, dx, dy, dz) dưới phép biến đổi Lorentz và phép quay.
3. Chúng ta sẽ sử dụng chữ hoa in nghiêng để định nghĩa vectơ bốn chiều. Chữ in đậm sẽ định nghĩa một vectơ trong không gian ba chiều như thông thường.
4. Vì sợ rằng chúng ta sẽ cảm thấy mệt mỏi khi phải viết các ký hiệu c liên tục, nên do đó chúng ta sẽ làm việc với các đơn vị trong đó $c = 1$ từ bây giờ trở đi.
5. Thành phần đầu tiên của một vectơ bốn chiều được gọi là thành phần "thời gian". Ba thành phần còn lại các các thành phần "không gian".
6. Các thành phần (dt, dx, dy, dz) thỉnh thoảng được đề cập tới như (dx_0, dx_1, dx_2, dx_3). Một vài cách xử lý cũng sử dụng liệt kê từ "1" đến "4", với "4" là thành phần "thời gian". Nhưng chúng ta sẽ sử dụng từ "0" đến "3".

7. Đại lượng A_i có thể là hàm của v, dx_i, x_i và các đạo hàm của chúng, và bất kỳ đại lượng bất biến nào (tức là các đại lượng độc lập với hệ quy chiếu) ví dụ như khối lượng m.
8. Vectơ bốn chiều là sự tổng quát hóa của vectơ trong không gian thông thường. Xét cho cùng, một vectơ trong không gian ba chiều là một thứ gì đó biến đổi qua một phép quay giống như (dx, dy, dz). Chúng ta đã tổng quát hóa một cách đơn giản một phép quay ba chiều thành phép biến đổi Lorentz bốn chiều. ♣

13.2 Ví dụ về vectơ bốn chiều

Cho đến giờ, chúng ta mới chỉ có duy nhất một vectơ bốn chiều trong sự xếp đặt của chúng ta, cụ thể là (dt, dx, dy, dz). Một vài vectơ bốn chiều khác sẽ như thế nào? $(7dt, 7dx, 7dy, 7dz)$ tất nhiên cũng giống như bất kỳ hằng số nào khác nhân với (dt, dx, dy, dz). Quả thực $m(dt, dx, dy, dz)$ là một vectơ bốn chiều bởi vì m là một đại lượng bất biến. Nhưng đại lượng $A = (dt, 2dx, dy, dz)$ thì như thế nào? Không, nó không phải là một vectơ bốn chiều, bởi vì một mặt nó phải biến đổi (giả sử nó là một vectơ bốn chiều) giống như

$$\begin{aligned}
dt \equiv A_0 &= \gamma(A_0' + vA_1') \equiv \gamma(dt' + v(2dx')), \\
2dx \equiv A_1 &= \gamma(A_1' + vA_0') \equiv \gamma((2dx') + vdt'), \\
dy \equiv A_2 &= A_2' \equiv dy', \\
dz \equiv A_3 &= A_3' \equiv dz',
\end{aligned} \tag{13.2}$$

từ định nghĩa của vectơ bốn chiều. Nhưng mặt khác nó phải biến đổi như

$$\begin{aligned}
dt &= \gamma(dt' + vdx'), \\
2dx &= 2\gamma(dx' + vdt'), \\
dy &= dy', \\
dz &= dz',
\end{aligned} \tag{13.3}$$

bởi vì đây là cách mà dx_i biến đổi. Hai tập hợp phương trình trên là mâu thuẫn với nhau, do đó $A = (dt, 2dx, dy, dz)$ không phải là một vectơ bốn chiều. Chú ý rằng nếu chúng ta xem xét đại lượng bốn thành phần $A = (dt, dx, 2dy, dz)$ thì hai hệ phương trình trên sẽ phù hợp với nhau. Nhưng nếu chúng ta sau đó quan sát xem A biến đổi như thế nào qua một phép biến đổi Lorentz theo chiều y thì chúng ta sẽ thấy rằng nó không phải là một vectơ bốn chiều.

Bài học của câu chuyện này đó là định nghĩa ở trên của vectơ bốn chiều là không bình thường bởi vì có hai cách mà một đại lượng bốn thành phần có thể biến đổi. Nó có thể biến đổi theo định nghĩa về vectơ bốn chiều như trong phương trình (13.2). Mặt khác nó cũng có thể biến đổi đơn giản khi mỗi thành phần A_i riêng biệt biến đổi (sử dụng cách biến đổi của dx_i hoặc bất cứ thứ gì chúng có thể tạo thành) như trong phương trình (13.3). Chỉ đối với một đại lượng bốn thành phần đặc biệt cho trước thì hai cách biến đổi này mới cho cùng một kết quả. Theo định nghĩa, chúng ta gọi các đại lượng bốn thành phần đặc biệt này là một vectơ bốn chiều.

Bây giờ chúng ta sẽ xây dựng một vài ví dụ ít tầm thường hơn về vectơ bốn chiều. Khi xây dựng chúng, chúng ta sẽ nhiều lần sử dụng thực tế rằng khoảng thời gian riêng, $d\tau \equiv \sqrt{dt^2 - d\mathbf{r}^2}$, là một đại lượng bất biến.

- **Vectơ bốn chiều vận tốc:** Chúng ta có thể chia (dt, dx, dy, dz) cho $d\tau$, trong đó $d\tau$ là thời gian riêng giữa hai sự kiện (hai sự kiện giống nhau thu được $dt, \dots$). Kết quả quả thực là một vectơ bốn chiều, bởi vì $d\tau$ là độc lập với hệ quy chiếu mà trong đó nó được đo. Sử dụng $d\tau = dt/\gamma$, chúng ta thu được

$$V \equiv \frac{1}{d\tau}(dt, dx, dy, dz) = \gamma\left(1, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) = (\gamma, \gamma\mathbf{v}). \tag{13.4}$$

Đại lượng này được biết với tên là *vectơ bốn chiều vận tốc*. Trong hệ quy chiếu nghỉ của vật thể chúng ta có $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, do đó V suy biến thành $V = (1, 0, 0, 0)$. Thêm vào ký hiệu c chúng ta có $V = (\gamma c, \gamma\mathbf{v})$.

- **Vectơ bốn chiều năng lượng - động lượng:** Nếu chúng ta nhân vectơ bốn chiều vận tốc với đại lượng bất biến m, chúng ta thu được một vectơ bốn chiều khác,

$$P \equiv mV = (\gamma m, \gamma m\mathbf{v}) = (E, \mathbf{p}), \tag{13.5}$$

đại lượng này được biết với tên *vectơ bốn chiều năng lượng - động lượng* (hoặc ngắn gọn là *động lượng bốn chiều*) bởi vì các lý do đơn giản đó. Trong hệ quy chiếu nghỉ của vật thể, P rút gọn thành $P = (m, 0, 0, 0)$. Với ký hiệu c, chúng ta có $P = (\gamma mc, \gamma m\mathbf{v}) = (E/c, \mathbf{p})$. Một vài nghiên cứu nhân thêm với c, dẫn đến động lượng bốn chiều là $(E, \mathbf{p}c)$.

- **Vectơ bốn chiều gia tốc:** Chúng ta cũng có thể lấy đạo hàm của vectơ bốn chiều vận tốc đối với τ. Kết quả quả thực cũng là một vectơ bốn chiều, bởi vì lấy đạo hàm đưa đến lấy hiệu (vô cùng nhỏ) giữa hai vectơ bốn chiều (điều này dẫn đến kết quả là một vectơ bốn chiều bởi vì phương trình (13.1) là tuyến tính), và sau đó nhân với đại lượng bất biến

$d\tau$ (điều này một lần nữa thu được kết quả là một vectơ bốn chiều). Sử dụng $d\tau = dt/\gamma$, chúng ta thu được

$$A \equiv \frac{dV}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}(\gamma, \gamma \mathbf{v}) = \gamma \left(\frac{d\gamma}{dt}, \frac{d(\gamma \mathbf{v})}{dt} \right). \tag{13.6}$$

Sử dụng $d\gamma/dt = v\dot{v}/(1 - v^2)^{3/2} = \gamma^3 v\dot{v}$, chúng ta có

$$A = (\gamma^4 v\dot{v}, \gamma^4 v\dot{v}\mathbf{v} + \gamma^2 \mathbf{a}), \tag{13.7}$$

trong đó $\mathbf{a} \equiv d\mathbf{v}/dt$. A gọi là vectơ bốn chiều gia tốc. Trong hệ quy chiếu nghỉ của vật thể (hoặc đúng hơn là trong hệ quy chiếu quán tính tức thời), A suy biến thành $A = (0, \mathbf{a})$. Như chúng ta vẫn thường làm, chúng ta sẽ lấy vận tốc $\mathbf{v}$ hướng theo chiều x. Tức là $\mathbf{v} = (v_x, 0, 0)$. Điều này có nghĩa là $v = v_x$, và do đó cũng có $\dot{v} = \dot{v}_x \equiv a_x$.[1] Phương trình (13.7) khi đó trở thành

$$\begin{aligned} A &= (\gamma^4 a_x v_x, \gamma^4 v_x^2 a_x + \gamma^2 a_x, \gamma^2 a_y, \gamma^2 a_z) \\ &= (\gamma^4 v_x a_x, \gamma^4 a_x, \gamma^2 a_y, \gamma^2 a_z). \end{aligned} \tag{13.8}$$

Chúng ta có thể tiếp tục lấy đạo hàm đối với τ để tạo thành các vectơ bốn chiều khác, nhưng các đại lượng này không có liên quan nhiều đến thế giới thực.

- **Vectơ bốn chiều lực:** Chúng ta định nghĩa vectơ lực bốn chiều như sau

$$F \equiv \frac{dP}{d\tau} = \gamma \left(\frac{dE}{dt}, \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right) = \gamma \left(\frac{dE}{dt}, \mathbf{f} \right), \tag{13.9}$$

trong đó $\mathbf{f} = d(\gamma m \mathbf{v})/dt$ là vectơ lực ba chiều thông thường. Chúng ta sẽ sử dụng ký hiệu $\mathbf{f}$ thay thế cho $\mathbf{F}$ trong chương này để tránh nhầm lẫn với vectơ lực bốn chiều F. Trong trường hợp m không đổi,[2] F có thể được viết lại như sau $F = d(mV)/d\tau = mdV/d\tau = mA$. Do đó chúng ta vẫn có một định luật đẹp đẽ của vật lý "F bằng mA", nhưng bây giờ nó là phương trình vectơ bốn chiều thay vì trường hợp vectơ ba chiều thông thường. Dưới dạng vectơ bốn chiều gia tốc, chúng ta có thể sử dụng phương trình (13.7) và (13.8) để viết (nếu m là hằng số)

$$\begin{aligned} F = mA &= m(\gamma^4 v\dot{v}, \gamma^4 v\dot{v}\mathbf{v} + \gamma^2 \mathbf{a}) \\ &= m(\gamma^4 v_x a_x, \gamma^4 a_x, \gamma^2 a_y, \gamma^2 a_z). \end{aligned} \tag{13.10}$$

Kết hợp phương trình này với phương trình (13.9), chúng ta thấy rằng lực ba chiều là

$$\mathbf{f} = m(\gamma^3 a_x, \gamma a_y, \gamma a_z), \tag{13.11}$$

[1] Vectơ gia tốc $\mathbf{a}$ là tự do hướng theo hướng bất kỳ, nhưng bạn có thể kiểm tra rằng giá trị $\mathbf{v}$ bằng 0 theo phương y và z sẽ dẫn đến $\dot{v} = a_x$. Xem bài tập 13.5.

[2] Khối lượng m sẽ không là hằng số nếu vật thể bị đốt nóng, hoặc nếu một khối lượng phụ thêm vào nó. Chúng ta sẽ không đề cập tới nhưng trường hợp như vậy ở đây.

phù hợp với phương trình (12.60). Trong hệ quy chiếu nghỉ của vật thể (hoặc chính xác hơn là hệ quy chiếu quán tính tức thời), F trong phương trình (13.9) rút gọn thành $F = (0, \mathbf{f})$, bởi vì $dE/dt = 0$ khi $v = 0$, bạn có thể kiểm tra lại. Hơn nữa, trong hệ quy chiếu nghỉ của vật thể, đại lượng mA trong phương trình (13.10) rút gọn thành $mA = (0, m\mathbf{a})$. Do đó $F = mA$ suy biến thành mối liên hệ quen thuộc $\mathbf{f} = m\mathbf{a}$.

13.3 Tính chất của vectơ bốn chiều

Điều thú vị về vectơ bốn chiều là chúng có rất nhiều tính chất hữu ích. Chúng ta hãy xem xét một vài tính chất đó ở đây.

- **Tổ hợp tuyến tính:** Nếu A và B là các vectơ bốn chiều, thì $C \equiv aA + bB$ cũng là một vectơ bốn chiều. Điều này là đúng bởi vì sự biến đổi trong phương trình (13.1) là tuyến tính (như chúng ta đã chú ý ở trước khi thành lập vectơ bốn chiều gia tốc). Sự tuyến tính này chỉ ra rằng sự biến đổi của chẳng hạn thành phần thời gian là

$$\begin{aligned} C_0 \equiv (aA + bB)_0 = aA_0 + bB_0 &= a(A'_0 + vA'_1) + b(B'_0 + vB'_1) \\ &= (aA'_0 + bB'_0) + v(aA'_1 + bB'_1) \\ &\equiv C'_0 + vC'_1, \end{aligned} \tag{13.12}$$

đây là phép biến đổi riêng đối với thành phần thời gian của một vectơ bốn chiều. Tương tự đối với các thành phần còn lại. Tất nhiên tính chất này đúng giống hệt như tổ hợp tuyến tính của các vectơ trong không gian ba chiều.

- **Tính bất biến của tích trong:** Xét hai vectơ bốn chiều bất kỳ A và B. Định nghĩa tích trong của chúng là đại lượng

$$A \cdot B \equiv A_0B_0 - A_1B_1 - A_2B_2 - A_3B_3 \equiv A_0B_0 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}. \tag{13.13}$$

Khi đó $A \cdot B$ là bất biến. Tức là nó độc lập với hệ quy chiếu đo nó. Điều này có thể chỉ ra bằng tính toán trực tiếp, sử dụng phép biến đổi trong phương trình (13.1):

$$\begin{aligned}
A \cdot B &\equiv A_0B_0 - A_1B_1 - A_2B_2 - A_3B_3 \\
&= \big(\gamma(A_0' + vA_1')\big)\big(\gamma(B_0' + vB_1')\big) - \big(\gamma(A_1' + vA_0')\big)\big(\gamma(B_1' + vB_0')\big) \\
&\quad - A_2'B_2' - A_3'B_3' \\
&= \gamma^2\left(A_0'B_0' + v(A_0'B_1' + A_1'B_0') + v^2A_1'B_1'\right) \\
&\quad - \gamma^2\left(A_1'B_1' + v(A_1'B_0' + A_0'B_1') + v^2A_0'B_0'\right) - A_2'B_2' - A_3'B_3' \\
&= A_0'B_0'(\gamma^2 - \gamma^2v^2) - A_1'B_1'(\gamma^2 - \gamma^2v^2) - A_2'B_2' - A_3'B_3' \\
&= A_0'B_0' - A_1'B_1' - A_2'B_2' - A_3'B_3' \\
&= A' \cdot B'. \qquad (13.14)
\end{aligned}$$

Sự quan trọng của kết quả này không thể bị cường điệu hóa. Đại lượng bất biến này tương tự như tính bất biến của tích trong $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ đối với phép quay trong không gian ba chiều. Tích trong mà chúng ta đề cập tới ở trên cũng bất biến đối với phép quay trong không gian ba chiều bởi vì nó bao gồm tổ hợp $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$. Dấu trừ trong tích trong này có vẻ hơi lạ một chút. Nhưng điều mà chúng ta muốn đó là tổ hợp của hai vectơ bất kỳ mà bất biến đối với phép biến đổi Lorentz, bởi vì tổ hợp như vậy là rất hữu ích khi xem xét điều gì xảy ra trong một cơ hệ. Tính tự nhiên của phép biến đổi Lorentz đòi hỏi rằng phải có dấu trừ trong tích trong này.

- **Chuẩn:** Giống như hệ quả đối với tích bất biến của tích trong, chúng ta có thể xét tích trong của một vectơ với chính nó, giá trị này được định nghĩa là bình phương của chuẩn. Chúng ta thấy rằng

$$A^2 \equiv A \cdot A \equiv A_0A_0 - A_1A_1 - A_2A_2 - A_3A_3 = A_0^2 - |\mathbf{A}|^2 \qquad (13.15)$$

là bất biến. Điều này tương tự với tính bất biến của chuẩn $\sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}}$ đối với phép quay trong không gian ba chiều. Các trường hợp đặc biệt của tính bất biến của chuẩn vectơ bốn chiều là sự bất biến của $c^2dt^2 - dx^2$ và $E^2 - p^2c^2$.

- **Định lý:** Đây là một định lý khá đẹp đẽ:
Nếu một thành phần cho trước của các thành phần của một vectơ bốn chiều bằng 0 trong mọi hệ quy chiếu, thì tất cả bốn thành phần cũng bằng 0 trong mọi hệ quy chiếu.

Chứng minh. Nếu một trong các thành phần không gian (chẳng hạn A_1) bằng 0 trong mọi hệ quy chiếu, thì các thành phần không gian còn lại cũng phải bằng 0 trong mọi hệ quy chiếu, bởi vì nếu trái lại một phép quay sẽ làm cho $A_1 \neq 0$. Hơn nữa, thành phần thời gian A_0 cũng phải bằng 0 cũng phải bằng 0 trong mọi hệ quy chiếu, bởi vì ngược lại thì một phép biến đổi Lorentz theo chiều x sẽ làm cho $A_1 \neq 0$.

Nếu thành phần thời gian A_0 bằng 0 trong mọi hệ quy chiếu thì các thành phần không gian cũng phải bằng 0 trong mọi hệ quy chiếu, bởi vì ngược lại một phép biến đổi Lorentz theo chiều thích hợp sẽ làm cho $A_0 \neq 0$. □

Nếu một người nào đó di chuyển cùng và nói rằng cô ta có một vectơ trong không gian ba chiều mà không có thành phần x, không cần biết bạn quay theo trục nào, thì bạn sẽ chắn chắn nói rằng vectơ đó phải là vectơ không. Tình huống trong không gian bốn chiều Lorentz là tương tự, bởi vì tất cả các tọa độ là liên hệ chặt chẽ với nhau trong phép biến đổi (và phép quay) Lorentz.

13.4 Năng lượng, động lượng

13.4.1 Chuẩn

Rất nhiều thứ hữu ích nảy sinh từ thực tế rằng đại lượng P trong phương trình (13.5) là một vectơ bốn chiều. Tính bất biến của chuẩn chỉ ra rằng $P \cdot P = E^2 - |\mathbf{p}|^2$ là đại lượng bất biến. Nếu chúng ta chỉ để cập tới một phần tử, thì chúng ta có thể xác định giá trị của P^2 theo cách tiện lợi bằng việc tính toán trong hệ quy chiếu nghỉ của phần tử (sao cho $\mathbf{v} = 0$), điều này dẫn đến

$$E^2 - p^2 = m^2, \tag{13.16}$$

hoặc $E^2 - p^2c^2 = m^2c^4$ khi có thêm ký hiệu c. Tất nhiên, chúng ta đã biết điều này từ việc chỉ cần viết $E^2 - p^2 = \gamma^2 m^2 - \gamma^2 m^2 c^2 = m^2$.

Đối với một tập hợp các hạt, kiến thức về chuẩn là rất hữu dụng. Nếu một quá trình liên quan đến nhiều hạt, thì chúng ta có thể nói rằng đối với bất kỳ tập hợp con các hạt nào,

$$\left(\sum E\right)^2 - \left(\sum \mathbf{p}\right)^2 \quad \text{là bất biến,} \tag{13.17}$$

bởi vì đây là chuẩn của tổng các vectơ năng lượng - động lượng bốn chiều của các hạt đã chọn. Tổng này lại là một vectơ bốn chiều, do tính tuyến tính của phương trình (13.1). Giá trị của đại lượng bất biến trong phương trình (13.17) bằng bao nhiêu? Sự mô tả ngắn gọn nhất (cách mô tả này về bản chất là sự lặp lại) đó là bằng bình phương của năng lượng trong hệ quy chiếu khối tâm, tức là trong hệ quy chiếu mà $\sum \mathbf{p} = \mathbf{0}$. Đối với một phần tử, kết quả này rút gọn thành m^2. Chú ý rằng tổng được lấy trước khi bình phương trong phương trình (13.17). Bình phương trước khi cộng sẽ đơn giản chỉ đưa ra tổng bình phương của các khối lượng.

13.4.2 Phép biến đổi của E và p

Chúng ta đã biết năng lượng và động lượng biến đổi như thế nào (xem Mục 12.2), nhưng hãy thành lập lại sự biến đổi đó ở đây theo cách rất nhanh và dễ dàng. Chúng ta biết rằng (E, p_x, p_y, p_z) là một vectơ bốn chiều. Do đó nó phải biến đổi theo phương trình (13.1). Dẫn đến, đối với một phép biến đổi Lorentz theo chiều x, chúng ta có

$$\begin{aligned} E &= \gamma(E' + vp'_x), \\ p_x &= \gamma(p'_x + vE'), \\ p_y &= p'_y, \\ p_z &= p'_z, \end{aligned} \tag{13.18}$$

phù hợp với phương trình (12.27). Đó là tất cả những gì mà chúng ta phải làm. Thực tế rằng E và $\mathbf{p}$ là một phần của cùng với một vectơ bốn chiều, một cách dễ dàng để thấy rằng nếu một trong chúng là bảo toàn (trong mọi hệ quy chiếu) trong một va chạm thì các đại lượng khác cũng như vậy. Xét một sự tương tác giữa các phần tử trong một tập hợp và xét vectơ bốn chiều $\Delta P \equiv P_{after} - P_{before}$. Nếu E là bảo toàn trong mọi hệ quy chiếu thì thành phần thời gian của ΔP bằng 0 trong mọi hệ quy chiếu. Nhưng khi đó định lý trong Mục 13.3 nói rằng tất cả bốn thành phần của ΔP là bằng 0 trong mọi hệ quy chiếu. Do đó, $\mathbf{p}$ là bảo toàn. Tương tự đối với trường hợp trong đó một trong các p_i được biết là bảo toàn.

13.5 Lực và gia tốc

Trong mục này, chúng ta sẽ chỉ để cập tới các vật thể với khối lượng không đổi, các vật thể này chúng ta sẽ gọi là "các hạt". Cách xử lý ở đây có thể được tổng quát hóa đối với các trường hợp trong đó các khối lượng thay đổi (ví dụ, vật thể bị đốt nóng, hoặc khối lượng phụ được thêm vào nó), nhưng chúng ta sẽ không sẽ đề cập tới những trường hợp như vậy.

13.5.1 Sự biến đổi của lực

Đầu tiên chúng ta hãy xem xét vectơ bốn chiều lực trong hệ quy chiếu quán tính tức thời của một phần tử cho trước (hệ quy chiếu S'). Phương trình (13.9) dẫn đến

$$F' = \gamma\left(\frac{dE'}{dt}, \mathbf{f}'\right) = (0, \mathbf{f}'). \tag{13.19}$$

Thành phần đầu tiên bằng không bởi vì $dE'/dt = d(m/\sqrt{1-v'^2})/dt$, và biểu thức này chứa một thừa số của v', giá trị này lại bằng không trong hệ quy chiếu này. Một cách tương đương, bạn có thể sử dụng (13.10) với vận tốc bằng không.

Bây giờ chúng ta có thể mô tả hai biểu thức đối với lực bốn chiều F trong một hệ quy chiếu khác, S, trong đó phần tử chuyển động với vận tốc v theo chiều x. Đầu tiên, bởi vì F là một vectơ bốn chiều, nên nó phải biến đổi theo phương trình (13.1). Do đó sử dụng phương trình (13.19) chúng ta có

$$\begin{aligned}
F_0 &= \gamma(F_0' + vF_1') = \gamma v f_x', \\
F_1 &= \gamma(F_1' + vF_0') = \gamma f_x', \\
F_2 &= F_2' = f_y', \\
F_3 &= F_3' = f_z'.
\end{aligned} \tag{13.20}$$

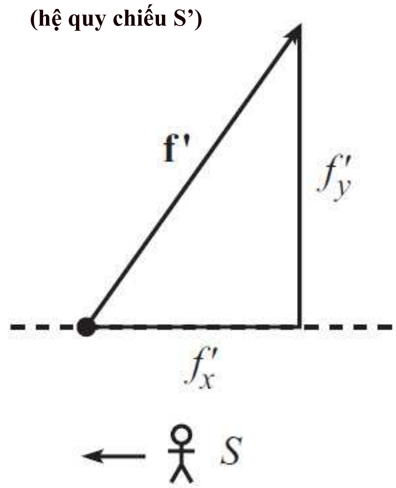
Thứ hai, từ định nghĩa trong phương trình (13.9), chúng ta cũng có

$$\begin{aligned}
F_0 &= \gamma dE/dt, \\
F_1 &= \gamma f_x, \\
F_2 &= \gamma f_y, \\
F_3 &= \gamma f_z.
\end{aligned} \tag{13.21}$$

Kết hợp phương trình (13.20) và (13.21), chúng ta thu được

$$\begin{aligned}
dE/dt &= v f_x', \\
f_x &= f_x', \\
f_y &= f_y'/\gamma, \\
f_z &= f_z'/\gamma
\end{aligned} \tag{13.22}$$

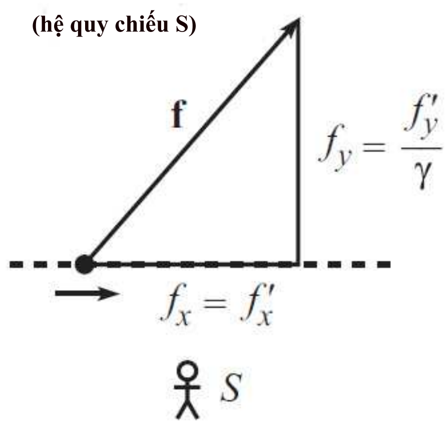
Do đó chúng ta thu được các kết quả trong Mục 12.5.3. Lực dọc là như nhau trong cả hai hệ quy chiếu, nhưng lực ngang lớn hơn bởi một thừa số của γ khi đi từ hệ quy chiếu của hạt tới hệ quy chiếu quán tính đang xét (xem hình 13.2 và hình 13.3). Và thêm vào đó,



Hình 13.2:

thành phần F_0 trong phương trình (13.22) chỉ ra rằng (sau khi nhân thêm dt) $dE = f_x dx$, đây là kết quả công - năng lượng. Nói một cách khác, sử dụng $f_x \equiv dp_x/dt$, chúng ta đã thành lập lại kết quả $dE/dx = f_x = dp/dt$ mà chúng ta đã thành lập trong Mục 12.5.1.

Như đã chú ý trong nhận xét đầu tiên trong Mục 12.5.3, chúng ta không thể chuyển hệ



Hình 13.3:

quy chiếu S và S' và viết $f'_y = f_y/\gamma$. Khi nói về lực trên một phần tử, quả thật có một hệ quy chiếu ưu tiên hơn, cụ thể là hệ quy chiếu của phần tử. Tất cả các hệ quy chiếu là không tương đương ở đây. Khi thành lập vectơ bốn chiều của chúng ta trong Mục 13.2, chúng ta rõ ràng đã sử dụng $d\tau, dt, dx, \ldots$ từ hai sự kiện, và được hiểu rằng hai sự kiện có vị trí tại phần tử.

13.5.2 Sự biến đổi của gia tốc

Cách thức tiến hành ở đây là giống như cách xử lý ở trên đối với lực. Đầu tiên hãy xem xét vectơ bốn chiều gia tốc trong hệ quy chiếu quán tính tức thời của một phần tử cho trước (hệ quy chiếu S'). Phương trình (13.7) hoặc (13.8) dẫn đến

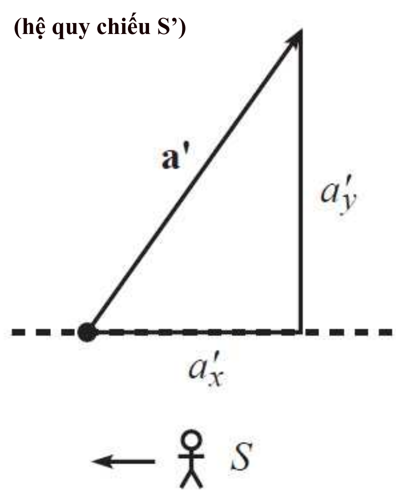
$$A' = (0, \mathbf{a}'), \tag{13.23}$$

bởi vì $v' = 0$ trong S'.

Bây giờ chúng ta có thể mô tả hai biểu thức đối với gia tốc bốn chiều A trong hệ quy chiếu khác, S. Đầu tiên, bởi vì A là một vectơ bốn chiều, nên nó phải biến đổi theo phương trình (13.1). Do đó sử dụng phương trình (13.23) chúng ta có,

$$\begin{aligned} A_0 &= \gamma(A'_0 + vA'_1) = \gamma v a'_x, \\ A_1 &= \gamma(A'_1 + vA'_0) = \gamma a'_x, \\ A_2 &= A'_2 = a'_y, \\ A_3 &= A'_3 = a'_z. \end{aligned} \tag{13.24}$$

Thứ hai, từ biểu thức trong phương trình (13.8), chúng ta cũng có



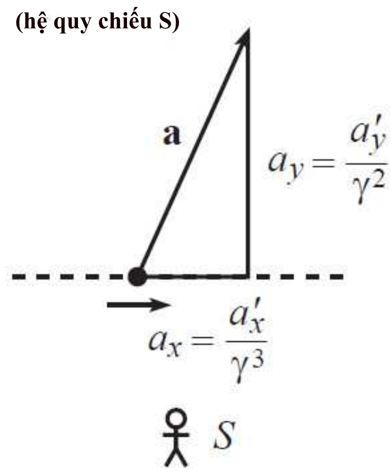
Hình 13.4:

$$\begin{aligned} A_0 &= \gamma^4 v a_x, \\ A_1 &= \gamma^4 a_x, \\ A_2 &= \gamma^2 a_y, \\ A_3 &= \gamma^2 a_z. \end{aligned} \tag{13.25}$$

Kết hợp phương trình (13.24) và (13.25), chúng ta thu được

$$\begin{aligned} a_x &= a'_x/\gamma^3, \\ a_x &= a'_x/\gamma^3, \\ a_y &= a'_y/\gamma^2, \\ a_z &= a'_z/\gamma^2. \end{aligned} \tag{13.26}$$

(Hai phương trình đầu tiên ở đây là thừa). Do đó chúng ta thu lại được các kết quả



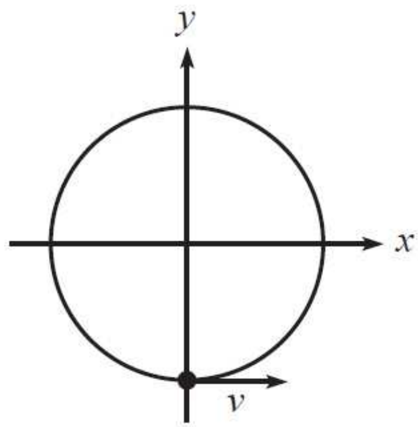
Hình 13.5:

trong Mục 12.5.3. Chúng ta thấy rằng a_y/a_x tăng bởi một thừa số $\gamma^3/\gamma^2 = \gamma$ khi đi từ hệ quy chiếu của phần tử sang hệ quy chiếu quán tính (xem hình 13.4 và hình 13.5). Điều này là trái ngược với ảnh hưởng của f_y/f_x.[3] Sự khác nhau này dẫn đến rõ ràng rằng quy luật $\mathbf{f} = m\mathbf{a}$ không có bất kỳ ý nghĩa nào. Nếu nó đúng trong một hệ quy chiếu thì nó sẽ không đúng trong hệ quy chiếu khác. Chú ý rằng sự tăng của a_y/a_x khi đi tới hệ quy chiếu quán tính là phù hợp với sự co độ dài, như trong ví dụ "Một hạt trên chiếc gậy" trong Mục 12.5.3 đã chỉ ra.

Ví dụ (Gia tốc trong chuyển động tròn): Một hạt chuyển động với vận tốc không đổi v quanh vòng tròn $x^2 + y^2 = r^2, z = 0$ trong hệ quy chiếu quán tính.

[3]Một cách ngắn gọn, sự khác nhau này là do thực tế rằng γ thay đổi theo thời gian. Khi nói về vectơ bốn chiều gia tốc, sẽ có đại lượng γ mà chúng ta phải lấy đạo hàm; xem phương trình (13.6). Đây không phải trường hợp với vectơ bốn chiều lực, bởi vì γ có mặt trong định nghĩa $\mathbf{p} \equiv \gamma m\mathbf{v}$; xem phương trình (13.9). Đây là lý do dẫn đến số mũ khác nhau của γ trong phương trình (13.25), trái ngược với số mũ giống nhau trong phương trình (13.21).

Tại một thời điểm hạt ngang qua phần âm của trục y (xem hình 13.6), tìm gia tốc ba chiều và gia tốc bốn chiều trong cả hệ quy chiếu quán tính đang xét và hệ quy chiếu quán tính tức thời của hạt (với các trục chọn song song với các trục của hệ quy chiếu đang xét).



Hình 13.6:

Lời giải: Gọi hệ quy chiếu quán tính đang xét là S, và hệ quy chiếu quán tính tức thời của hạt là S' khi nó ngang qua phần âm của trục y. Khi đó S và S' liên hệ với nhau bởi một phép biến đổi Lorentz theo chiều x. Vectơ ba chiều trong S đơn giản chỉ là

$$\mathbf{a} = (0, v^2/r, 0). \tag{13.27}$$

Không có gì khác thường xảy ra ở đây; cách chứng minh không tương đối của $a = v^2/r$ vẫn đúng trong trường hợp tương đối ở đây. Phương trình (13.7) hoặc (13.8) khi đó dẫn đến gia tốc bốn chiều trong S là

$$A = (0, 0, \gamma^2 v^2/r, 0). \tag{13.28}$$

Để tìm vectơ gia tốc trong S', chúng ta có thể sử dụng thực tế rằng S' và S liên hệ với nhau bởi một phép biến đổi Lorentz theo chiều x. Điều này có nghĩa rằng thành phần A_2 của gia tốc bốn chiều là không thay đổi. Do đó gia tốc bốn chiều trong S' cũng là

$$A' = A = (0, 0, \gamma^2 v^2/r, 0). \tag{13.29}$$

Trong hệ quy chiếu của hạt, $\mathbf{a}'$ là phần không gian của A (sử dụng phương trình (13.7) hoặc (13.8), với $v = 0$ và $\gamma = 1$). Do đó, gia tốc ba chiều trong S' là

$$\mathbf{a}' = (0, \gamma^2 v^2/r, 0). \tag{13.30}$$

Chú ý rằng các kết quả của chúng ta đối với $\mathbf{a}$ và $\mathbf{a}'$ là phù hợp với phương trình (13.26).

NHẬN XÉT: Chúng ta cũng có thể có được thừa số bậc hai của γ trong $\mathbf{a}'$ bằng cách sử dụng lý luận sự giãn nở thời gian đơn giản. Chúng ta có

$$a'_y = \frac{d^2y'}{d\tau^2} = \frac{d^2y'}{d(t/\gamma)^2} = \gamma^2\frac{d^2y}{dt^2} = \gamma^2\frac{v^2}{r}, \tag{13.31}$$

trong đó chúng ta đã sử dụng thực tế rằng các độ dài ngang là như nhau trong hai hệ quy chiếu. ♣

13.6 Dạng của các định luật vật lý

Một trong các tiên đề của thuyết tương đối hẹp đó là tất cả các hệ quy chiếu quán tính là tương đương. Do đó, nếu một định luật vật lý đúng trong một hệ quy chiếu thì nó cũng phải đúng trong tất cả các hệ quy chiếu. Nói một cách khác, có thể phân biệt giữa các hệ quy chiếu. Như đã chú ý trong phần trước, phát biểu "$\mathbf{f} = m\mathbf{a}$" không thể là một định luật vật lý. Hai vế của phương trình biến đổi khác nhau khi đi từ một hệ quy chiếu tới một hệ quy chiếu khác, do đó phát biểu là không đúng trong mọi hệ quy chiếu. Nếu một phát biểu có thể đúng trong mọi hệ quy chiếu thì nó phải chỉ liên quan đến vectơ bốn chiều. Xét một phương trình vectơ bốn chiều (chẳng hạn "$A = B$") đúng trong hệ quy chiếu S. Khi đó nếu chúng ta áp dụng phương trình này một phép biên đổi Lorentz (gọi là $\mathcal{M}$) từ S tới hệ quy chiếu S' khác, chúng ta có

$$\begin{aligned} A &= B \\ \Longrightarrow \quad \mathcal{M}A &= \mathcal{M}B \\ \Longrightarrow \quad A' &= B'. \end{aligned} \tag{13.32}$$

Do đó quy luật này cũng đúng trong hệ quy chiếu S'. Tất nhiên, có nhiều phương trình vectơ bốn chiều mà đơn giản là không đúng trong bất kỳ hệ quy chiếu nào (ví dụ, $F = P$, hoặc $2P = 3P$). Chỉ có một tập hợp nhỏ các phương trình như vậy (ví dụ $F = mA$) là đúng trong ít nhất một hệ quy chiếu, và do đó đúng trong tất cả các hệ quy chiếu.

Các định luật vật lý cũng có thể lấy dạng của các phương trình vô hướng giống như $P \cdot P = m^2$. Một vô hướng được định nghĩa là đại lượng mà độc lập với hệ quy chiếu (như chúng ta đã chỉ ra đối với tích trong như vậy). Do đó nếu một phát biểu vô hướng là đúng trong một hệ quy chiếu quán tính thì nó cũng đúng trong tất cả các hệ quy chiếu quán tính. Các định luật vật lý cũng có thể là một phương trình "tensor" hạng cao hơn giống như phương trình xuất hiện trong điện từ trường và thuyết tương đối tổng quát. Chúng ta sẽ không thảo luận tensor ở đây, nhưng chỉ cần nói rằng chúng có thể được xem như là được xây dựng từ vectơ bốn chiều. Vô hướng và vectơ bốn chiều là một trường hợp đặc biệt của tensor.

Tất cả những điều này là giống hệt như tình huống trong không gian ba chiều. Trong cơ học Newtơn, $\mathbf{f} = m\mathbf{a}$ có thể là định luật đúng, bởi vì cả hai vế đều là vectơ ba chiều. Nhưng $\mathbf{f} = m(2a_x, a_y, a_z)$ là định luật không đúng, bởi vì vế phải không là vectơ ba chiều; nó phụ thuộc vào trục mà bạn chọn là trục x. Nếu một phần tử có gia tốc a theo hướng đông, và nếu bạn lấy hướng này là hướng trục x của bạn thì lực là $2ma$ hướng đông. Nhưng nếu bạn lấy hướng đông là hướng trục y của bạn thì lực là ma hướng đông. Sẽ không có ý nghĩa nếu một định luật lại cho hai kết quả khác nhau khi bạn chọn bất kỳ cách đánh nhãn trục. Một ví dụ về phát biểu độc lập với hệ quy chiếu (qua phép quay) đó là khẳng định rằng một chiếc gậy cho trước có độ dài 2 mét. Điều này đúng bởi vì nó liên quan đến chuẩn, và chuẩn là đại lượng vô hướng. Nhưng nếu bạn nói rằng chiếc gậy có thành phần x bằng 1.7 mét, thì điều này không thể đúng trong tất cả các hệ quy chiếu.

13.7 Bài tập

13.1. Cộng vận tốc *

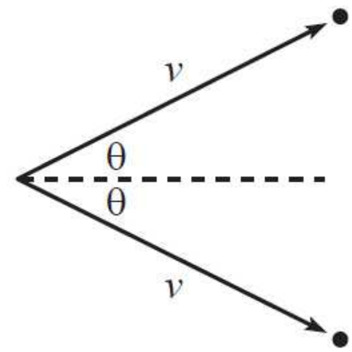
Trong hệ quy chiếu của A, B chuyển động sang bên phải với vận tốc u, và C chuyển động sang bên trái với vận tốc v. Hỏi vận tốc của B đối với C là bao nhiêu? Nói một cách khác, sử dụng vectơ bốn chiều để thành lập công thức cộng vận tốc.

13.2. Vận tốc tương đối *

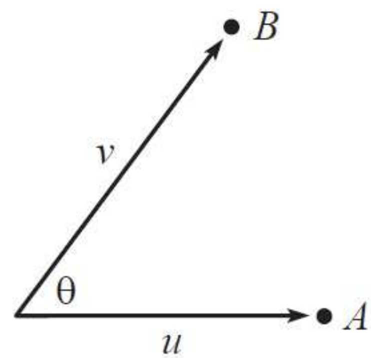
Trong hệ quy chiếu quán tính đang xét, hai hạt chuyển động với vận tốc v dọc theo các quỹ đạo như trong hình 13.7. Góc giữa hai đường là 2θ. Hỏi vận tốc của một hạt theo quan sát của hạt còn lại bằng bao nhiêu?

13.3. Vận tốc tương đối trường hợp khác *

Trong hệ quy chiếu quán tính đang xét, hạt A và B chuyển động với vận tốc u và v dọc theo quỹ đạo như trong hình 13.8. Góc giữa hai đường là θ. Hỏi vận tốc của một hạt theo quan sát của hạt kia bằng bao nhiêu?



Hình 13.7:



Hình 13.8:

13.4. Gia tốc trong chuyển động tuyến tính *

Một con tàu không gian xuất phát từ trạng thái nghỉ đối với hệ quy chiếu S và tăng tốc với gia tốc riêng không đổi a. Trong Mục 11.9, chúng ta đã chỉ ra rằng vận tốc của con tàu đối với S cho bởi $v(\tau) = \tanh(a\tau)$, trong đó τ là thời gian riêng của con tàu (chúng ta đã bỏ qua ký hiệu c). Gọi V là vận tốc bốn chiều của con tàu, và gọi A là gia tốc bốn chiều của nó. Dưới dạng thời gian riêng τ:

(a) Tìm V và A trong hệ quy chiếu S bằng cách sử dụng biểu thức đã biết $v(\tau) = \tanh(a\tau)$.

(b) Mô tả V' và A' trong hệ quy chiếu S' của con tàu.

(c) Chứng minh rằng V và V' biến đổi giống như vectơ bốn chiều giữa hai hệ quy chiếu. Tương tự đối với A và A'.

13.8 Bài tập luyện tập

13.5. Gia tốc tại trạng thái nghỉ

Chỉ ra rằng đạo hàm của $v \equiv \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ bằng a_x, độc lập với việc các v_i khác nhau biến đổi như thế nào, miễn là $v_y = v_z = 0$ tại thời điểm khảo sát.

13.6. Gia tốc tuyến tính *

Vận tốc và gia tốc của một hạt đều hướng theo chiều x, với độ lớn lần lượt là v và $\dot{v}$ (đo trong hệ quy chiếu quán tính đang xét). Giống như ví dụ trong Mục 13.5.2, tìm gia tốc ba chiều và gia tốc bốn chiều trong cả hệ quy chiếu quán tính đang xét và hệ quy chiếu quán tính tức thời của hạt. Chứng minh rằng các gia tốc ba chiều liên hệ với nhau theo phương trình (13.26).

13.7. Lực tuyến tính *

Đối với mô hình trong bài tập trước, tìm lực ba chiều và lực bốn chiều trong cả hệ quy chiếu quán tính đang xét và hệ quy chiếu quán tính tức thời của hạt. Chứng minh rằng các lực ba chiều liên hệ với nhau theo phương trình (13.22).

13.8. Lực chuyển động tròn *

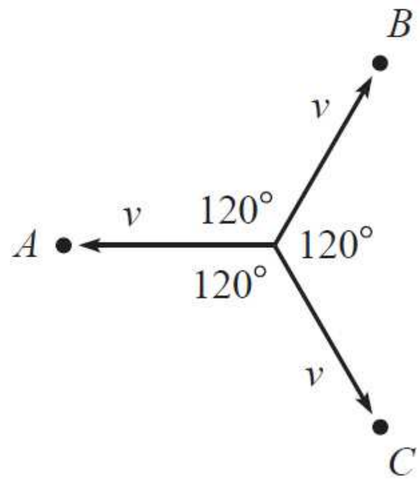
Đối với mô hình trong ví dụ ở Mục 13.5.2, tìm lực ba chiều và lực bốn chiều trong cả hệ quy chiếu quán tính đang xét và hệ quy chiếu quán tính tức thời của hạt. Chứng minh rằng các lực ba chiều liên hệ với nhau theo phương trình (13.22). (Giải bài toán này từ đầu; không sử dụng các kết quả đã có từ ví dụ.)

13.9. Vận tốc giống nhau *

Xét mô hình trong bài tập 13.2. Cho trước v, giá trị θ sẽ bằng bao nhiêu để vận tốc của một phần tử theo quan sát của phần tử còn lại cũng là v? (Dạng đầu tiên của vận tốc trong phương trình (13.38) sẽ làm tính toán của bạn đơn giản nhất.) Câu trả lời của bạn sẽ có ý nghĩa như thế nào đối với trường hợp $v \approx 0$ và $v \approx c$?

13.10. Ảnh hưởng Doppler *

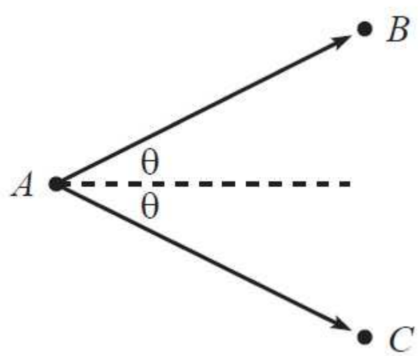
Xét một photon chuyển động theo chiều x. Bỏ qua thành phần y và z, và đặt $c = 1$, động lượng bốn chiều là (p, p). Với ký hiệu ma trận, phép biến đổi Lorentz là như thế nào đối với các hệ quy chiếu chuyển động sang trái và sang phải với vận tốc v? Động lượng bốn chiều mới của photon trong các hệ quy chiếu mới này bằng bao nhiêu? Chấp nhận thực tế rằng năng lượng của một photon là tỷ lệ với tần số của nó, chứng minh rằng các kết quả của bạn là phù hợp với các kết quả Doppler trong Mục 11.8.1.



Hình 13.9:

13.11. Ba hạt **

Ba hạt chuyển động hướng ra ngoài với cùng vận tốc v, tạo thành góc 120° đối với các hạt khác như trong hình 13.9? Tích trong của hai hạt bất kỳ của các vận tốc bốn chiều bằng bao nhiêu trong một hệ quy chiếu bất kỳ nào đó? Sử dụng kết quả của bạn để tìm góc θ (xem hình 13.10) và tại đó hai hạt chuyển động trong hệ quy chiếu của hạt thứ ba.

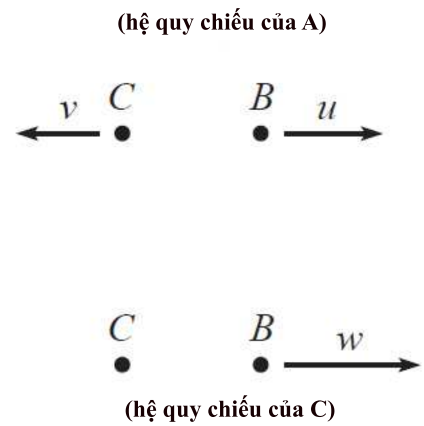


Hình 13.10:

13.9 Lời giải

13.1. Cộng vận tốc

Gọi vận tốc cần tìm của B đối với C là w (xem hình 13.11). Trong hệ quy chiếu của A, vận tốc



Hình 13.11:

bốn chiều của B là $(\gamma_u, \gamma_u u)$, và vận tốc bốn chiều của C là $\gamma_v, -\gamma_v v$, trong đó chúng ta đã bỏ qua các thành phần y và z. Trong hệ quy chiếu của C, vận tốc bốn chiều của B là $\gamma_w, \gamma_w w$, và vận tốc bốn chiều của C là $(1,0)$. Tính bất biến của tích trong dẫn đến

$$\begin{aligned}(\gamma_u, \gamma_u u)\cdot(\gamma_v, -\gamma_v v) &= (\gamma_w, \gamma_w w)\cdot(1,0)\\ \Longrightarrow \quad \gamma_u\gamma_v(1+uv) &= \gamma_w\\ \Longrightarrow \quad \frac{1+uv}{\sqrt{1-u^2}\sqrt{1-v^2}} &= \frac{1}{\sqrt{1-w^2}}.\end{aligned} \tag{13.33}$$

Bình phương và sau đó giải đối với w dẫn đến

$$w = \frac{u+v}{1+uv}. \tag{13.34}$$

13.2. Vận tốc tương đối

Trong hệ quy chiếu quán tính đang xét, vận tốc bốn chiều của các hạt là (bỏ qua thành phần z)

$$(\gamma_v, \gamma_v v\cos\theta, \gamma_v v\sin\theta) \quad \text{và} \quad (\gamma_v, \gamma_v v\cos\theta, -\gamma_v v\sin\theta). \tag{13.35}$$

Gọi w là vận tốc cần tìm của một hạt theo quan sát của hạt kia. Khi đó trong hệ quy chiếu của một hạt, các vận tốc bốn chiều là (bỏ qua hai thành phần không gian)

$$(\gamma_w, \gamma_w w) \quad \text{và} \quad (1,0), \tag{13.36}$$

trong đó chúng ta đã quay các trục sao cho chuyển động tương đối là dọc theo trục x trong hệ quy chiếu này. Bởi vì tích trong vectơ bốn chiều là bất biến đối với phép biến đổi Lorentz và phép quay nên chúng ta có (sử dụng $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$)

$$\begin{aligned}
(\gamma_v, \gamma_v v\cos\theta, \gamma_v v\sin\theta)\cdot(\gamma_v, \gamma_v v\cos\theta, -\gamma_v v\sin\theta) &= (\gamma_w, \gamma_w w)\cdot(1,0) \\
\Longrightarrow \quad \gamma_v^2(1 - v^2\cos 2\theta) &= \gamma_w.
\end{aligned} \tag{13.37}$$

Sử dụng định nghĩa của γ, bình phương, và giải đối với w dẫn đến

$$w = \sqrt{1 - \frac{(1-v^2)^2}{(1-v^2\cos 2\theta)^2}} = \frac{\sqrt{2v^2(1-\cos 2\theta) - v^4\sin^2 2\theta}}{1 - v^2\cos 2\theta}. \tag{13.38}$$

Nếu muốn, kết quả này có thể được viết lại (sử dụng một vài công thức góc nhân đôi) dưới dạng,

$$w = \frac{2v\sin\theta\sqrt{1 - v^2\cos^2\theta}}{1 - v^2\cos 2\theta}. \tag{13.39}$$

Xem lời giải của bài tập 11.14 đối với một vài trường hợp giới hạn.

13.3. Vận tốc tương đối trường hợp khác

Trong hệ quy chiếu quán tính đang xét, vận tốc bốn chiều của các hạt là (bỏ qua thành phần z)

$$V_A = (\gamma_u, \gamma_u u, 0) \quad \text{và} \quad V_B = (\gamma_v, \gamma_v v\cos\theta, \gamma_v v\sin\theta). \tag{13.40}$$

Gọi w là vận tốc cần tìm của một hạt theo quan sát của hạt còn lại. Khi đó trong hệ quy chiếu của một hạt, các vận tốc bốn chiều là (bỏ qua hai thành phần không gian)

$$(\gamma_w, \gamma_w w) \quad \text{và} \quad (1, 0), \tag{13.41}$$

trong đó chúng ta đã quay các trục sao cho chuyển động tương đối là dọc theo trục x trong hệ quy chiếu này. Bởi vì tích trong vectơ bốn chiều là bất biến đối với phép biến đổi Lorentz và phép quay nên chúng ta có

$$\begin{aligned}
(\gamma_u, \gamma_u u, 0)\cdot(\gamma_v, \gamma_v v\cos\theta, \gamma_v v\sin\theta) &= (\gamma_w, \gamma_w w)\cdot(1,0) \\
\Longrightarrow \quad \gamma_u\gamma_v(1 - uv\cos\theta) &= \gamma_w.
\end{aligned} \tag{13.42}$$

Sử dụng định nghĩa của γ, bình phương, và giải đối với w dẫn đến

$$w = \sqrt{1 - \frac{(1-u^2)(1-v^2)}{(1-uv\cos\theta)^2}} = \frac{\sqrt{u^2 + v^2 - 2uv\cos\theta - u^2v^2\sin^2\theta}}{1 - uv\cos\theta}. \tag{13.43}$$

Xem lời giải của bài tập 11.15 đối với một vài trường hợp giới hạn.

13.4. Gia tốc trong chuyển động tuyến tính

(a) Sử dụng $v(\tau) = \tanh(a\tau)$, chúng ta có $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2} = \cosh(a\tau)$. Do đó,

$$V = (\gamma, \gamma v) = (\cosh(a\tau), \sinh(a\tau)), \tag{13.44}$$

trong đó chúng ta đã bỏ qua hai thành phần ngang. Khi đó chúng ta có

$$A = \frac{dV}{d\tau} = a\left(\sinh(a\tau), \cosh(a\tau)\right). \tag{13.45}$$

(b) Con tàu ở trạng thái nghỉ trong hệ quy chiếu quán tính tức thời của nó, do đó

$$V' = (1, 0) \quad \text{và} \quad A' = (0, a). \tag{13.46}$$

Một cách tương đương, kết quả này thu được bằng cách đặt $\tau = 0$ trong các kết quả từ phần (a), bởi vì con tàu không xuất phát tại $\tau = 0$ như các trường hợp trong hệ quy chiếu nghỉ tức thời.

(c) Ma trận của phép biến đổi Lorentz từ S' sang S là

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma v \\ \gamma v & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(a\tau) & \sinh(a\tau) \\ \sinh(a\tau) & \cosh(a\tau) \end{pmatrix}. \tag{13.47}$$

Chúng ta phải kiểm tra rằng

$$\begin{pmatrix} V_0 \\ V_1 \end{pmatrix} = \mathcal{M} \begin{pmatrix} V_0' \\ V_1' \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \end{pmatrix} = \mathcal{M} \begin{pmatrix} A_0' \\ A_1' \end{pmatrix}. \tag{13.48}$$

Điều này là hiển nhiên đúng.

Chương 14

Thuyết tương đối tổng quát

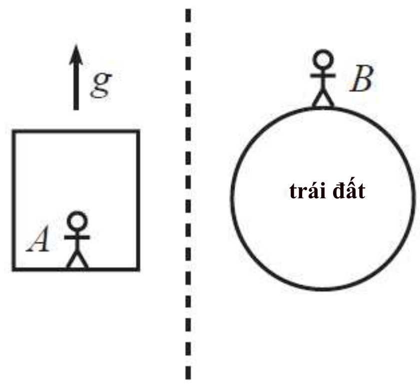
Đây sẽ là một chương hơi kỳ lạ một chút bởi vì chúng ta sẽ không có đủ thời gian để đi tới phần cốt lõi của thuyết tương đối tổng quát.[1] Nhưng chúng ta vẫn có thể thu được vài điều gì đó và một số kết quả thú vị của thuyết tương đối tổng quát. Một ý tưởng chủ đạo trong thuyết tương đối tổng quát đó là nguyên lý tương đương. Nguyên lý này phát biểu rằng trọng lực là tương đương với gia tốc. Hoặc một cách trực quan hơn, nó nói rằng bạn không thể chỉ ra được sự khác nhau giữa chúng. Chúng ta sẽ nói khá nhiều về điều này trong mục dưới đây. Một khái niệm quan trọng nữa trong thuyết tương đối đó là khái niệm về tính độc lập tọa độ: các định luật vật lý không thể phụ thuộc vào hệ tọa độ mà bạn chọn. Phát biểu có vẻ tầm thường này dẫn đến các hệ quả có ý nghĩa sâu sắc đáng ngạc nhiên. Tuy nhiên, chi tiết hơn về vấn đề này là một trong nhiều thứ chúng ta sẽ không có quá nhiều thời gian để xem xét. Chúng ta sẽ cần toàn bộ một cuốn sách về thuyết tương đối tổng quát để kiểm chứng các hệ quả này. Nhưng may mắn là chúng ta có thể thu được nhiều ý nghĩa về bản chất của thuyết tương đối tổng quát mà không cần đề cập đến các vấn đề như vậy. Đây là sẽ là cách thức mà chúng ta sẽ tiếp cận với chương này.

[1]Mười năm sau bài báo của mình năm 1905 về thuyết tương đối hẹp, Einstein đã hoàn thành thuyết tương đối tổng quát của ông ta vào năm 1915 với sự cộng tác của Marcel Grossmann suốt giai đoạn sau của thời gian này. David Hilbert cũng đã phát triển nhiều phần cuối của thuyết tương đối song song với Einstein; xem Medicus (1984). Để tìm hiểu những đóng góp đáng kể khác trong quá trình phát triển của thuyết tương đối tổng quát, xem Chandrasekhar (1979).

14.1 Nguyên lý tương đương

Nguyên lý tương đương của Einstein nói rằng không thể phân biệt một cách cục bộ giữa trọng lực và gia tốc. Điều này có thể phát biểu một cách chính xác hơn theo ít nhất ba cách sau đây.

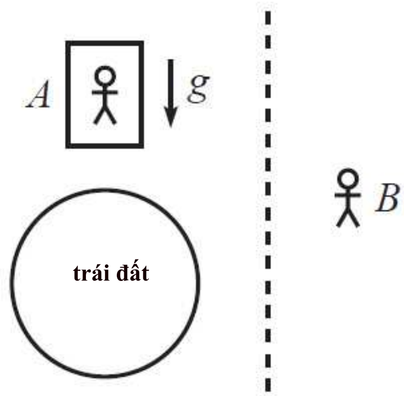
- Giả sử một người A được bao kín trong một hộp nhỏ, cách xa tất cả các vật thể có khối lượng, người này chịu một gia tốc không đổi (chẳng hạn là g). Có một người B đứng ở trạng thái nghỉ trên trái đất (xem hình 14.1). Nguyên lý tương đương nói rằng sẽ không có thí nghiệm cục bộ nào mà hai người này có thể thực hiện để chỉ ra được cho họ thấy rằng họ đang ở trong trường hợp nào. Vật lý trong cả hai trường hợp là như nhau.



Hình 14.1:

- Giả sử người A được bao kín trong một hộp nhỏ rơi tự do gần một hành tinh. Người B trôi tự do trong không gian, cách xa tất cả các vật thể có khối lượng (xem hình 14.2). Nguyên lý tương nói rằng không có thí nghiệm cục bộ nào hai người này có thể thực hiện mà sẽ chỉ ra cho họ rằng họ đang ở trong trường hợp nào. Vật lý trong cả hai trường hợp là như nhau.

- Khối lượng "hấp dẫn" bằng (hoặc tỷ lệ) với khối lượng "quán tính". Khối lượng hấp dẫn m_g xuất hiện trong công thức $F = GMm_g/r^2 \equiv m_g g$. Khối lượng quán tính là m_i xuất hiện trong công thức $F = m_i a$. Không có lý do suy diễn nào để biết được tại sao hai khối lượng này là bằng nhau (hoặc tỷ lệ). Một vật thể rơi tự do trên trái đất có gia tốc $a = (m_g/m_i)g$. Với tất cả những gì chúng ta biết thì tỷ số m_g/m_i của pluton có thể sẽ khác so với đồng. Nhưng các thí nghiệm đối với các vật liệu khác nhau đã chỉ ra rằng không có sự khác nhau đối với tỷ số này. Nguyên lý tương đương phát biểu rằng các tỷ số là bằng nhau đối với bất kỳ dạng khối lượng nào.



Hình 14.2:

> Định nghĩa này của nguyên lý tương đương về mặt bản chất là giống với, chẳng hạn dạng thứ hai mà chúng ta đã nói ở trên, bởi vì lý do sau đây. Hai khối lượng khác nhau xuất phát từ trạng thái nghỉ ở gần B sẽ ở ngay vị trí mà chúng trôi tự do trong không gian. Nhưng hai khối lượng khác nhau xuất phát ở gần A sẽ ở cạnh nhau nếu và chỉ nếu gia tốc của chúng bằng nhau, tức là khi và chỉ khi tỷ số m_g/m_i là như nhau. Nếu tỷ số này khác nhau đối với hai khối lượng thì chúng sẽ tách rời nhau, điều này có nghĩa là có thể phân biệt được hai trường hợp.

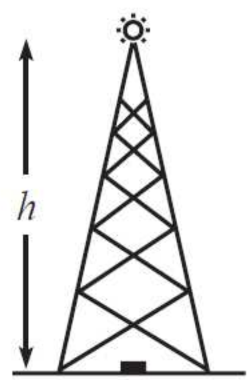
Tất cả các phát biểu này đều khá đáng tin cậy. Ví dụ xét phát biểu đầu tiên. Khi đứng trên trái đất, bạn phải giữ chắc chân của mình để không bị ngã. Khi đứng trong một hộp có gia tốc, bạn phải giữ chắc chân của mình để giữ vững vị trí đối với sàn (tức là để không bị ngã). Bạn chắc chắn không thể chỉ ra được sự khác nhau giữa hai trường hợp. Nguyên lý tương đương nói rằng không phải bạn không đủ khả năng để mô tả một cách nào đó để phân biệt giữa hai trường hợp mà là không thể có thí nghiệm cục bộ nào bạn có thể thực hiện để chỉ ra sự khác biệt cho dù bạn có thông minh thế nào đi chăng nữa.

> NHẬN XÉT: Chú ý tới các từ như "hộp nhỏ" và "cục bộ" ở trên. Trên bề mặt của trái đất, các lực hấp dẫn không song song; chúng đồng quy ở tâm trái đất. Các lực hấp dẫn cũng biến đổi theo độ cao. Do đó một thí nghiệm thực hiện trên một độ cao đáng kể (ví dụ hai quả bóng rơi cạnh nhau và chúng va chạm vào nhau, hoặc hai quả bóng rơi rất gần nhau và quan sát chúng tách ra khỏi nhau) sẽ có kết quả khác với thí nghiệm giống như vậy nhưng trong hộp có gia tốc. Nguyên lý tương đương nói rằng nếu nơi thí nghiệm của bạn có khoảng không gian đủ nhỏ, hoặc nếu trường hấp dẫn là đủ đồng nhất thì hai trường hợp về cơ bản là giống nhau. ♣

14.2 Sự giãn nở thời gian

Nguyên lý tương đương có một hệ quả nổi bật liên quan đến hoạt động của các đồng hồ trong một trường hấp dẫn. Nó chỉ ra rằng các đồng hồ ở cao sẽ chạy nhanh hơn các đồng hồ ở dưới thấp. Nếu một ai đó đặt một đồng hồ trên đỉnh của một tháp và bạn đứng trên mặt đất thì bạn sẽ quan sát thấy đồng hồ trên tháp chạy nhanh hơn một đồng hồ giống hệt như vậy trên tay của bạn. Nếu đồng hồ trên tháp bị tháo xuống và bạn so sánh với đồng hồ trên tay bạn thì nó sẽ chỉ thời gian nhanh hơn.[2] Tương tự, một ai đó đứng trên đỉnh của tháp sẽ nhìn thấy một chiếc đồng hồ trên mặt đất chạy chậm hơn. Để tính toán định lượng về vấn đề này, chúng ta hãy xem xét hai trường hợp sau đây.

- Một nguồn sáng trên đỉnh tháp có độ cao h phát ra các chớp sáng tại các khoảng thời gian t_s. Một máy thu trên mặt đất nhận được các chớp sáng tại các khoảng thời gian t_r (xem hình 14.3). Hỏi t_r tính theo t_s bằng bao nhiêu?

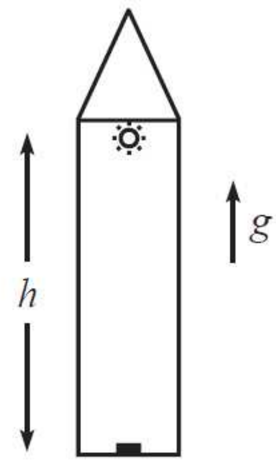


Hình 14.3:

- Một tên lửa chiều dài h tăng tốc với gia tốc g. Một nguồn sáng tại đầu phía trước phát ra các chớp sáng tại các khoảng thời gian t_s. Một máy thu tại đầu phía sau nhận được các chớp sáng tại các khoảng thời gian t_r (xem hình 14.4). Hỏi t_r tính theo t_s bằng bao nhiêu?

Nguyên lý tương đương chỉ ra cho chúng ta rằng hai trường hợp trên chính xác là giống như nhau đối với các nguồn sáng và các máy thu. Do đó, mối liên hệ giữa t_r và t_s trong

[2]Điều này chỉ đúng nếu như đồng hồ trên tháp được để ở đó trong một thời gian đủ dài (giả sử rằng các đồng hồ chỉ cùng một thời gian khi bạn bắt đầu quan sát), bởi vì sự di chuyển của đồng hồ khi nó bị tháo xuống sẽ làm cho nó chạy chậm lại do sự giãn nở thời gian quen thuộc trong thuyết tương đối hẹp. Nhưng ảnh hưởng của việc chạy nhanh do độ cao có thể được làm cho lớn bất kỳ so với ảnh hưởng của việc chạy chậm do sự chuyển động bằng cách đơn giản là giữ đồng hồ trên tháp với thời gian đủ lớn.



Hình 14.4:

mỗi trường hợp phải là như nhau. Điều này dẫn đến để mô tả mối liên hệ trong trường hợp đầu tiên, chúng ta sẽ nghiên cứu trường hợp thứ hai (bởi vì chúng ta có thể mô tả trường hợp này).

Xét một hệ quy chiếu quán tính tức thời S của tên lửa. Trong hệ quy chiếu này, tên lửa ở trạng thái nghỉ tức thời (chẳng hạn tại $t = 0$), và sau đó nó tăng tốc ra khỏi hệ quy chiếu này với gia tốc g. Lý luận sau đây sẽ được thực hiện đối với hệ quy chiếu S. Xét một chuỗi các chớp sáng được phát ra từ nguồn sáng, bắt đầu tại thời điểm $t = 0$. Khoảng cách mà tên lửa đã di chuyển ra khỏi S tại thời điểm t là $gt^2/2$, do đó nếu chúng ta giả sử rằng t_s là rất nhỏ thì ta có thể nói rằng nhiều chớp sáng đã được phát ra trước khi tên lửa di chuyển một khoảng đáng kể. Tương tự, vận tốc của nguồn sáng, cụ thể là gt, cũng là rất nhỏ. Do đó chúng ta có thể bỏ qua sự chuyển động của tên lửa khi nói tới nguồn sáng.

Tuy nhiên, ánh sáng cần một khoảng thời gian hữu hạn để chạm tới máy thu, và sau đó máy thu sẽ chuyển động. Do đó chúng ta không thể bỏ qua chuyển động của tên lửa khi đề cập tới máy thu. Thời gian ánh sáng chạm vào máy thu là h/c, tại điểm đó máy thu có vận tốc $v = g(h/c)$.[3] Do đó bằng cách sử dụng ảnh hưởng Doppler kinh điển, chúng

[3]Máy thu chuyển động một khoảng rất nhỏ trong thời gian này, do đó đại lượng "h" ở đây thực ra sẽ được thay thế bởi một khoảng cách nhỏ hơn. Nhưng điều này sẽ sinh ra một ảnh hưởng bậc hai không đáng kể trong đại lượng vô cùng bé gh/c^2 như bạn có thể tự mình chỉ ra. Tóm lại, tất cả các đại lượng như chuyển dịch của nguồn sáng, vận tốc của nguồn sáng, và chuyển dịch của máy thu đều đều không đáng kể. Nhưng vận tốc của máy thu thì chúng ta vẫn cần quan tâm.

ta có được thời gian giữa các chớp sáng thu được là[4]

$$t_r = \frac{t_s}{1 + (v/c)}. \tag{14.1}$$

Do đó các tần số $f_r = 1/t_r$ và $f_s = 1/t_s$ liên hệ với nhau bởi

$$f_r = \left(1 + \frac{v}{c}\right) f_s = \left(1 + \frac{gh}{c^2}\right) f_s. \tag{14.2}$$

Quay trở lại trường hợp đồng hồ trên tháp, nguyên lý tương đương chỉ ra cho chúng ta rằng một người quan sát trên mặt đất phải nhìn thấy đồng hồ trên tháp chạy nhanh hơn bởi một thừa số $1 + gh/c^2$. Điều này có nghĩa rằng đồng hồ trên cao thực ra chạy nhanh hơn đồng hồ dưới thấp.[5] Cụ thể là

$$\Delta t_h = \left(1 + \frac{gh}{c^2}\right) \Delta t_0. \tag{14.3}$$

Một người đến từ Denver sẽ già hơn người anh em sinh đôi của anh ta đến từ Boston khi họ gặp lại nhau trong cuộc gặp mặt gia đình (tất cả các điều khác có lẽ là sẽ giống nhau).

Chú ý rằng đại lượng gh trong phương trình (14.3) là thế năng hấp dẫn chia cho m.

> NHẬN XÉT: Bạn có thể phản đối cách tính toán ở trên bởi vì t_r là thời gian đo bởi người nào đó trong hệ quy chiếu quán tính S. Và bởi vì máy thu rốt cuộc là chuyển động đối với S, nên chúng ta sẽ phải nhân f_r trong phương trình (14.2) với một thừa số giãn nở thời gian trong thuyết tương đối hẹp thông thường $1/\sqrt{1-(v/c)^2}$ (bởi vì các đồng hồ của máy thu chạy chậm hơn so với S, do đó tần số đo bởi máy thu lớn hơn tần số đo được trong S). Tuy nhiên, đây là ảnh hưởng bậc hai của đại lượng vô cùng nhỏ $v/c = gh/c^2$. Chúng ta đã bỏ qua các ảnh hưởng khác với bậc hai giống như vậy, do đó chúng ta không phải giữ lại ảnh hưởng này. Tất nhiên, nếu ảnh hưởng chủ yếu trong kết quả cuối cùng của chúng ta lại

[4] Chứng minh ngắn gọn của ảnh hưởng Doppler kinh điển (đối với một máy thu chuyển động): Theo quan sát trong hệ quy chiếu S, khi máy thu và một chớp sáng cụ thể gặp nhau, chớp sáng tiếp theo ở phía sau một khoảng cách ct_s. Máy thu và chớp sáng tiếp theo này khi đó di chuyển hướng vào nhau với vận tốc tương đối $c + v$ (đo bởi một người nào đó trong hệ quy chiếu S). Do đó hiệu thời gian giữa hai lần gặp nhau này là $t_r = ct_s/(c + v)$.

[5] Không giống như tình huống hai người chạy qua nhau (cũng như với trường hợp trái ngược về anh em sinh đôi thông thường), ở đây chúng ta có thể nói rằng người quan sát nào cũng nhìn thấy cùng một hiện tượng. Chúng ta có thể nói điều này bởi vì mọi người ở đây đều ở trong cùng một hệ quy chiếu. Ảnh hưởng "quay vòng" xuất hiện trong trường hợp về anh em sinh đôi sẽ không xuất hiện ở đây. Hai đồng hồ có thể được chuyển động chậm cùng nhau mà không có điều gì quá đặc biệt xảy ra đối với số chỉ thời gian của chúng.

là bậc hai đối với v/c thì chúng ta sẽ biết rằng câu trả lời của chúng ta là không thích hợp. Tuy nhiên, ảnh hưởng chính xảy ra chỉ là bậc nhất, do đó chúng ta không cần quan tâm đến các ảnh hưởng bậc hai này. ♣

Sau một khoảng thời gian hữu hạn trôi qua, hệ quy chiếu S sẽ không còn được sử dụng. Nhưng chúng ta luôn luôn có thể chọn một hệ quy chiếu nghỉ tức thời của tên lửa, do đó chúng ta có thể lặp lại phân tích ở trên tại bất kỳ thời điểm nào sau đó. Dẫn đến kết quả trong phương trình (14.2) đúng với tất cả các thời điểm.

Ảnh hưởng giãn nở thời gian hấp dẫn này được tính toán lần đầu tiên bởi R. Pound và G. Rebka vào năm 1960. Bằng cách phát đi một tia gamma lên và xuống một tháp cao 22 m, họ có thể đo được sự thay đổi màu đỏ (tức là sự giảm tần số) tại đỉnh của tháp. Đây quả thực là một thành công đáng chú ý, bởi vì họ có thể đo được sự thay đổi tần số gh/c^2 (giá trị này chỉ là vài phần của 10^{15}) với độ chính xác 10%. Năm 1964, R. Pound và J. Snider cải tiến và độ chính xác lên tới 1%.

14.3 Hệ quy chiếu gia tốc không đổi

Trước khi đọc mục này, bạn nên xem xét cẩn thận bài tập "Phá vỡ hay không phá vỡ" trong Chương 11 (bài tập 11.26). Đừng nhìn vào lời giải ngay lập tức, bởi vì có thể tình cờ bạn sẽ thay đổi câu trả lời của bạn sau một vài phút suy nghĩ. Đây là một bài toán kinh điển, do đó đừng lãng phí nó bằng cách xem trước lời giải.

Một cách chính xác, hệ quy chiếu gia tốc không đổi mà chúng ta sẽ xây dựng ở đây sẽ không có gì để nghiên cứu đối với thuyết tương đối tổng quát. Chúng ta sẽ không cần bỏ đi phạm vi của thuyết tương đối hẹp đã có đối với phân tích trong mục này. Nhưng lý do mà chúng ta chọn để nghiên cứu chi tiết mô hình tương đối hẹp này đó là nó chỉ ra nhiều đặc điểm tương tự các trường hợp trong thuyết tương đối tổng quát thật, chẳng hạn như hiện tượng lỗ đen.

14.3.1 Chất điểm gia tốc không đổi

Để hiểu được hệ quy chiếu gia tốc không đổi, đầu tiên chúng ta cần biết về chất điểm gia tốc không đổi. Trong Mục 11.9, chúng ta đã thảo luận ngắn gọn về chuyển động của một hạt gia tốc không đổi, tức là một hạt chịu một lực không đổi trong hệ quy chiếu nghỉ tức thời của nó. Bây giờ chúng ta sẽ xem xét kỹ hơn về những hạt như vậy. Giả sử hệ quy chiếu nghỉ tức thời của hạt là S', và nó xuất phát từ trạng thái nghỉ trong hệ quy chiếu quán tính S. Gọi khối lượng của hạt là m. Chúng ta đã biết từ Mục 12.5.3 rằng lực dọc là như nhau trong hai hệ quy chiếu. Do đó bởi vì lực này là hằng số trong S' nên nó cũng là hằng số trong S. Gọi lực này là f. Nếu chúng ta đặt $g \equiv f/m$ (do đó g gọi là gia tốc riêng mà hạt phải chịu) và sử dụng thực tế rằng f là hằng số thì trong S chúng ta có,

$$f = \frac{dp}{dt} = \frac{d(m\gamma v)}{dt} \quad \Longrightarrow \quad gt = \gamma v \quad \Longrightarrow \quad v = \frac{gt}{\sqrt{1+(gt)^2}}, \tag{14.4}$$

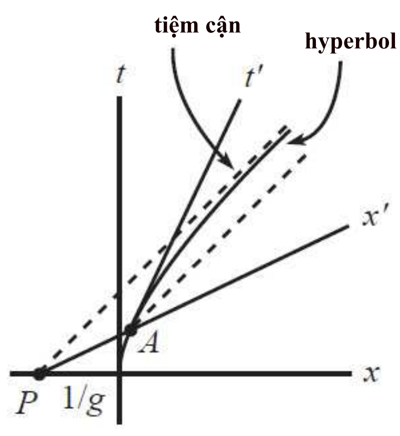
trong đó chúng ta đã đặt $c = 1$. Khi kiểm tra lại, giá trị này phải chính xác khi $t \longrightarrow 0$ và $t \longrightarrow \infty$. Nếu bạn muốn giữ lại ký hiệu c thì $(gt)^2$ sẽ trở thành $(gt/c)^2$ để làm chính xác đơn vị. Sau khi đã tìm được vận tốc trong S ở thời điểm t, thì vị trí trong S ở thời điểm t sẽ được cho bởi

$$x = \int_0^t v dt = \int_0^t \frac{gtdt}{\sqrt{1+(gt)^2}} = \frac{1}{g}\left(\sqrt{1+(gt)^2} - 1\right). \tag{14.5}$$

Để thuận tiện, giả sử P là điểm (xem hình 14.5)

$$(x_P, y_P) = (-1/g, 0). \tag{14.6}$$

Khi đó phương trình (14.5) dẫn đến



Hình 14.5:

$$(x - x_P)^2 - t^2 = \frac{1}{g^2}. \tag{14.7}$$

Đây là phương trình của một hyperbol với tâm của nó (định nghĩa là giao điểm của các đường tiệm cận) tại điểm P. Đối với trường hợp gia tốc g lớn, điểm P sẽ rất gần điểm xuất phát của hạt. Trường hợp gia tốc nhỏ, nó ở rất xa.

Mọi thứ dường như là khá bình thường cho đến thời điểm này, nhưng bây giờ sự thú vị của chúng ta sẽ bắt đầu. Xét một điểm A trên đường vũ trụ hyperbol của hạt tại thời điểm t. Từ phương trình (14.5), A có tọa độ

$$(x_A, t_A) = \left(\frac{1}{g}\left(\sqrt{1+(gt)^2} - 1\right), t\right). \tag{14.8}$$

Do đó độ nghiêng của đường PA sẽ là

$$\frac{t_A - t_P}{x_A - x_P} = \frac{gt}{\sqrt{1+(gt)^2}}. \tag{14.9}$$

Quan sát phương trình (14.4) chúng ta thấy rằng độ nghiêng này bằng với vận tốc v của hạt tại điểm A. Nhưng chúng ta biết rất rõ là vận tốc v là độ nghiêng của trục x' tức thời của hạt; xem phương trình (11.47). Do đó, đường thẳng PA và trục x' của hạt là trùng nhau. Điều này đúng đối với thời gian t bất kỳ. Do đó chúng ta có thể nói rằng tại bất kỳ điểm nào trên đường vũ trụ của hạt, đường thẳng PA là trục x' tức thời của hạt. Hoặc nói theo cách khác, cho dù hạt ở đâu đi chăng nữa thì sự kiện tại P là đồng thời với một sự kiện tại vị trí của hạt khi đo trong hệ quy chiếu tức thời của hạt. Một cách khác, hạt sẽ luôn nói rằng P xảy ra "bây giờ".[6]

Đây là một thực tế kỳ lạ khác. Khoảng cách từ P đến A đo trong hệ quy chiếu nghỉ tức thời S' của hạt là bao nhiêu? Sử dụng phương trình (14.4) ta có thừa số γ giữa hai hệ quy chiếu S và S' là $\gamma = \sqrt{1+(gt)^2}$. Khoảng cách giữa P và A trong hệ quy chiếu S là $x_A - x_P = \sqrt{1+(gt)^2}/g$. Do đó khoảng cách giữa P và A trong hệ quy chiếu S' là (sử dụng phép biến đổi Lorentz $\Delta x = \gamma(\Delta x' + v\Delta t')$, với $\Delta t' = 0$)

$$x'_A - x'_P = \frac{1}{\gamma}(x_A - x_P) = \frac{1}{g}. \tag{14.10}$$

Đây là đặc điểm không mong đợi trong tính độc lập của thời gian t. Do đó chúng ta không chỉ tìm ra rằng P luôn luôn đồng thời với hạt khi đo trong hệ quy chiếu nghỉ tức thời của hạt mà chúng ta cũng thấy rằng P luôn cách hạt một khoảng cách không đổi (cụ thể là $1/g$) trong hệ quy chiếu của hạt. Đây là một điều khá lạ. Hạt tăng tốc ra khỏi điểm P nhưng nó lại không thể tiến ra xa khi đo trong hệ quy chiếu của nó.

NHẬN XÉT: Chúng ta có thể đưa ra một cách lập luận tiếp theo để chỉ ra rằng một điểm P như vậy phải tồn tại. Nếu có một điểm ở gần bạn, và nếu bạn tăng tốc ra khỏi nó thì tất

[6] Điểm P rất giống với sự kiện tại cạnh của một lỗ đen. Thời gian dường như vẫn đứng yên tại P trong trường hợp này. Và nếu chúng ta đi sâu hơn vào thuyết tương đối rộng, chúng ta sẽ cũng thấy rằng thời gian dường như đứng yên tại biên của một lỗ đen (quan sát bởi một người nào đó ở rất xa).

nhiên bạn sẽ tiến ra xa nó. Kinh nghiệm thông thường là khá chính xác ở đây. Tuy nhiên nếu như có một điểm là đủ xa bạn và nếu bạn tăng tốc ra khỏi nó thì khoảng cách $at^2/2$ mà bạn đã di chuyển ra xa nó có thể dễ dàng được bù lại bởi sự giảm khoảng cách do co độ dài (gây ra bởi vận tốc mới đạt được của bạn). Ảnh hưởng này rõ rệt khi khoảng cách tăng, do đó đơn giản chỉ cần lấy một điểm đủ xa. Điều này có nghĩa là mọi thời điểm bạn đi ra khỏi chiếc ghế của bạn và đi về phía cửa, luôn có các ngôi sao ở xa phía sau bạn lại gần bạn hơn khi bạn đi ra xa chúng (đo trong hệ quy chiếu nghỉ tức thời của bạn). Khi đó sẽ phải tồn tại một điểm P luôn giữ cùng một khoảng cách với bạn (trong hệ quy chiếu của bạn) khi bạn tăng tốc ra xa nó. ♣

14.3.2 Hệ quy chiếu gia tốc không đổi

Bây giờ chúng ta hãy tập hợp các hạt gia tốc không đổi gần nhau để tạo thành một hệ quy chiếu gia tốc không đổi. Mục đích của chúng ta là tạo ra một hệ quy chiếu trong đó khoảng cách giữa hai phần tử (đo trong hệ quy chiếu nghỉ tức thời của bất kỳ phần tử nào) luôn được giữ không đổi. Tại sao đây lại là mục đích của chúng ta? Chúng ta đã biết từ bài toán "Phá vỡ hay không phá vỡ" trong Chương 11 rằng nếu tất cả các phần tử đều tăng tốc với cùng gia tốc riêng g thì các khoảng cách (đo trong hệ quy chiếu nghỉ tức thời của một phần tử) sẽ tăng lên. Trong khi đây có thể là hệ quy chiếu hoàn hảo để xây dựng thì nó lại không như mong muốn của chúng ta bởi vì lý do sau đây. Nguyên lý tương đương của Einstein nói rằng một hệ quy chiếu có gia tốc là tương đương với một hệ quy chiếu chẳng hạn ở trên trái đất. Do đó chúng ta có thể nghiên cứu ảnh hưởng của trọng lực bằng cách nghiên cứu một hệ quy chiếu có gia tốc. Nhưng nếu chúng ta muốn hệ quy chiếu này trông giống như bề mặt trên trái đất thì chắc chắn chúng ta không thể có khoảng cách thay đổi theo thời gian. Dẫn đến chúng ta muốn xây dựng một hệ quy chiếu *tĩnh*, tức là một hệ quy chiếu trong đó khoảng cách không thay đổi (đo trong hệ quy chiếu đó). Điều này sẽ cho phép chúng ta nói rằng nếu chúng ta đóng kín hệ quy chiếu đó trong một chiếc hộp không có khe hở thì đối với một người bên trong, tất cả mọi thứ anh ta biết là anh ta đang đứng không chuyển động trong một trường hấp dẫn tĩnh (trường hấp dẫn này có một dạng định nghĩa nào đó như chúng ta sẽ thấy sau đây).

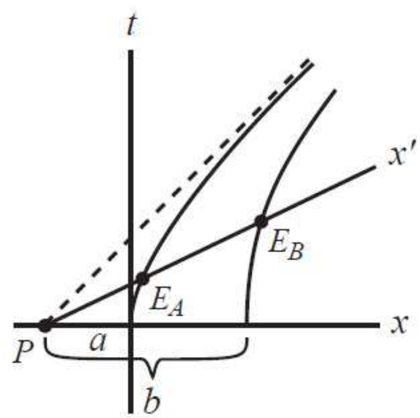
Chúng ta hãy mô tả cách xây dựng hệ quy chiếu gia tốc không đổi. Chúng ta sẽ thảo luận về gia tốc chỉ của hai phần tử ở đây. Các phần tử còn lại có thể thêm vào bằng cách tương tự. Cuối cùng, hệ quy chiếu mong muốn là toàn bộ các phần tử được xây dựng bằng cách tăng tốc mỗi nguyên tử của hệ quy chiếu với một gia tốc riêng cụ thể. Từ Mục 14.3.1 chúng ta đã có một phần tử A chuyển động quanh "tâm" là điểm P. (Đây sẽ là ký hiệu viết tắt cho "chuyển động theo một nhánh của hyperbol có tâm là điểm P.") Vì những lý do rõ ràng này, chúng ta khẳng định rằng mọi phần tử khác trong hệ quy chiếu cũng sẽ chuyển động quanh "tâm" là điểm P.

Xét phần tử B khác. Gọi a và b là các khoảng cách ban đầu từ P đến A và B. Nếu cả hai phần tử đều chuyển động quanh "tâm" P thì từ phương trình (14.6) ta có gia tốc riêng của chúng phải là

$$g_A = \frac{1}{a}, \quad \text{và} \quad g_B = \frac{1}{b}. \tag{14.11}$$

Do đó, để có được tất cả các điểm trong hệ quy chiếu đều chuyển động quanh "tâm" P thì đơn giản là chúng ta chỉ cần làm cho các gia tốc riêng của chúng tỷ lệ nghịch với khoảng cách ban đầu từ P của chúng.

Tại sao chúng ta lại muốn mọi phần tử chuyển động quanh "tâm" P? Xét hai sự kiện



Hình 14.6:

E_A và E_B sao cho P, E_A, và E_B thẳng hàng như trong hình 14.6. Từ Mục 14.3.1, chúng ta biết rằng đường thẳng PE_AE_B là trục x' đối với cả phần tử A và phần tử B tại các vị trí đã chỉ ra. Chúng ta cũng biết rằng A luôn cách P một khoảng a, và B luôn cách P một khoảng b (trong hệ quy chiếu của chúng). Kết hợp các điều này với thực tế rằng A và B đo khoảng cách của chúng theo trục x' của cùng một hệ quy chiếu (tại các sự kiện được chỉ ra trong hình vẽ), chúng ta thấy rằng cả A và B đều đo khoảng cách giữa chúng là $b - a$. Kết quả này độc lập với t, do đó A và B đo khoảng cách không đổi giữa chúng. Do đó chúng ta đã xây dựng được hệ quy chiếu tĩnh như mong muốn. Hệ quy chiếu này thường được gọi là "không gian Rindler". Nếu một người nào đó đi bộ trong hệ quy chiếu này, thì anh ta sẽ nghĩ rằng anh ta đang sống trong một thế giới tĩnh ở đó gia tốc do trọng lực có dạng $g(z) \propto 1/z$, trong đó z là khoảng cách tới một điểm ma thuật nào đó được đặt tại vị trí cuối cùng của "vũ trụ" đã biết.

Điều gì sẽ xảy ra nếu một người tự giải phóng khỏi hệ quy chiếu có gia tốc sao cho anh ta chuyển động mãi mãi trong không gian với vận tốc không đổi? Anh ta thấy rằng mình đang bị rơi. Anh ta rơi qua "điểm ma thuật" P trong một khoảng thời gian riêng hữu hạn, bởi vì đường vũ trụ hyperbol của một điểm rất gần P về bản chất là tiệm cận của tất cả các hyperbol, và đường vũ trụ thẳng của người đó cắt đường này. Nhưng những người bạn của anh ta vẫn ở trong hệ quy chiếu sẽ nhìn thấy anh ta mất một khoảng thời gian vô cùng dài để tới được P, bởi vì trục x' của các điểm trong hệ quy chiếu gần như không bao giờ quay tới đường tiệm cận. Điều này tương tự như tình huống với một lỗ đen. Một người quan sát ở bên ngoài sẽ quan sát thấy phải mất một khoảng thời gian vô cùng dài cho một người bị rơi để chạm tới "biên" của lỗ đen, mặc dù thực tế chỉ mất một khoảng thời gian riêng hữu hạn đối với người đó.

Phân tích của chúng ta chỉ ra rằng A và B chịu các gia tốc riêng khác nhau, bởi vì $a \neq b$. Không có cách nào xây dựng được một hệ quy chiếu tĩnh ở đó tất cả các điểm chịu cùng gia tốc, do đó không thể tạo ra một trường hấp dẫn không đổi (trên một khoảng cách hữu hạn) bằng cách sử dụng một hệ quy chiếu có gia tốc. Các bài tập trong chương này đưa ra rất nhiều cơ hội cho bạn tìm hiểu thêm các đặc điểm về hệ quy chiếu gia tốc không đổi của chúng ta.

14.4 Nguyên lý thời gian riêng cực đại

Nguyên lý thời gian riêng cực đại trong thuyết tương đối tổng quát nói rằng: cho trước hai sự kiện trong không thời gian, một phần tử chịu ảnh hưởng chỉ của trọng lực sẽ có quỹ đạo trong không thời gian sao cho thời gian riêng là cực đại. Ví dụ, nếu bạn ném một quả bóng từ tọa độ cho trước $(\mathbf{r}_1, t_1)$ và nó rơi xuống tọa độ $(\mathbf{r}_2, t_2)$ thì chúng ta khẳng định rằng quả bóng sẽ có quỹ đạo sao cho thời gian riêng là cực đại.[7]

[7]Nguyên lý này thực tế là "nguyên lý thời gian riêng dừng", bởi vì như với cách thức lập luận của Lagrange trong Chương 6 thì bất kỳ điểm dừng nào (cực đại, cực tiểu, hoặc điểm yên ngựa) đều đúng. Nhưng mặc dù chúng ta đã hết sức cẩn thận khi phát biểu mọi thứ một cách đúng đắn trong Chương 6, thì ở đây chúng ta sẽ hơi tùy tiện và chỉ sử dụng từ "cực đại", bởi vì đó là trường hợp thường thấy của tình huống mà chúng ta sẽ xem xét. Tuy nhiên, hãy chú ý tới bài tập 14.8

Điều này là rõ ràng đối với một quả bóng chuyển động tự do trong không gian bên ngoài, cách xa bất kỳ các vật thể có khối lượng nào. Quả bóng di chuyển với vận tốc không đổi từ một điểm tới một điểm khác, và chúng ta biết rằng sự chuyển động với vận tốc không đổi này là chuyển động với thời gian riêng cực đại. Điều này là đúng bởi vì một quả bóng A chuyển động với vận tốc không đổi sẽ quan sát thấy đồng hồ trên bất kỳ quả bóng B nào khác chạy chậm lại do sự giãn nở thời gian tương đối nếu có một vận tốc tương đối giữa chúng. (Chúng ta đang giả thiết rằng vận tốc thay đổi của B là nguyên nhân gây ra lực hấp dẫn thay đổi tác dụng lên nó.) Do đó B chỉ thời gian trôi qua ít hơn. Lý luận này ngược lại không đúng bởi vì B không ở trong một hệ quy chiếu quán tính và do đó không thể sử dụng kết quả về sự giãn nở thời gian tương đối trong thuyết tương đối hẹp.

Sự phù hợp với vật lý Newton

Nguyên lý thời gian riêng cực đại nghe qua giống như một ý tưởng đáng tin cậy, nhưng chúng ta đã biết từ Chương 6 rằng quỹ đạo của một vật thể là quỹ đạo dẫn đến giá trị dừng của tác dụng cổ điển $\int(T-V)$. Do đó chúng ta phải chứng minh rằng nguyên lý thời gian riêng cực đại sẽ suy biến thành nguyên lý tác dụng dừng trong giới hạn trường hợp vận tốc nhỏ. Nếu điều này không đúng thì chúng ta sẽ phải bỏ đi nguyên lý thời gian riêng cực đại.

Xét một quả bóng được ném thẳng đứng trên trái đất. Giả sử rằng các tọa độ ban đầu và cuối cùng được cố định là (y_1, t_1) và (y_2, t_2). Kế hoạch của chúng ta sẽ là giả thiết rằng nguyên lý thời gian riêng cực đại đúng, và sau đó chỉ ra rằng điều này sẽ dẫn đến nguyên lý tác dụng dừng. Trước khi tính toán cụ thể, chúng ta hãy nói tới một ý tưởng mang tính định tính về những gì sẽ xảy ra đối với quả bóng. Có hai ảnh hưởng trái ngược nhau khi chúng ta nói tới nguyên lý thời gian riêng cực đại. Một mặt, quả bóng muốn lên rất cao bởi vì đồng hồ của nó sẽ chạy nhanh hơn ở đó do sự giãn nở thời gian trong thuyết tương đối tổng quát. Nhưng một mặt khác, nếu nó lên quá cao thì nó phải chuyển động rất nhanh để tới đó (bởi vì tổng thời gian $t_2 - t_1$ là cố định), và điều này sẽ làm cho đồng hồ của nó bị chạy chậm lại do sự giãn nở thời gian trong thuyết tương đối hẹp. Do đó cần có sự thỏa hiệp. Chúng ta hãy xem xét tính toán chi tiết hàm ý của sự thỏa hiệp này. Mục tiêu đó là cực đại biểu thức

$$\tau = \int_{t_1}^{t_2} d\tau. \tag{14.12}$$

Do sự chuyển động của quả bóng nên chúng ta có sự giãn nở thời gian thông thường

$d\tau = \sqrt{1 - v^2/c^2}dt$. Nhưng do độ cao của quả bóng, chúng ta cũng có sự giãn nở thời gian hấp dẫn $d\tau = (1 + gy/c^2)dt$. Kết hợp hai ảnh hưởng này dẫn đến[8]

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left(1 + \frac{gy}{c^2}\right) dt. \tag{14.13}$$

Sử dụng khai triển Taylor đối với $\sqrt{1-\epsilon}$, và bỏ qua các số hạng từ bậc $1/c^4$ trở đi, chúng ta thấy rằng sẽ cần phải cực đại

$$\int_{t_1}^{t_2} d\tau \approx \int_{t_1}^{t_2} \left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right)\left(1 + \frac{gy}{c^2}\right) dt \approx \int_{t_1}^{t_2} \left(1 - \frac{v^2}{2c^2} + \frac{gy}{c^2}\right) dt. \tag{14.14}$$

Số hạng "1" sẽ dẫn đến một hằng số, do đó cực đại tích phân này là tương đương với cực tiểu tích phân

$$mc^2 \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{v^2}{2c^2} - \frac{gy}{c^2}\right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{mv^2}{2} - mgy\right) dt, \tag{14.15}$$

kết quả này là tác dụng cổ điển như mong muốn. Đối với một bài toán hấp dẫn một chiều như bài toán này thì tác dụng luôn luôn là cực tiểu (toàn cục), và thời gian riêng luôn luôn là cực đại (toàn cục), như bạn có thể chỉ ra bằng cách xem xét sự thay đổi bậc hai trong tác dụng (xem bài tập 14.23, bài tập này cũng giống như bài tập 6.32).

Nhìn lại toàn bộ thì sẽ không có gì ngạc nhiên khi động năng có mặt ở đây. Thừa số 1/2 xuất hiện giống hệt như cách thành lập trong phương trình (12.9), ở đó chúng ta đã chỉ ra rằng dạng tương đối của năng lượng sẽ suy biến thành các công thức Newton quen thuộc. Đối với thế năng, đại lượng gy ở đây có thể được mô tả như là gia tốc nhân với một thời gian cho trước, trong đó thời gian này là tỷ lệ với khoảng cách; xem lại phần trước phương trình (14.1). Điều này sinh ra thế năng là (khi nhân thêm mc^2) lực thông thường nhân với biểu thức khoảng cách.

Nguyên lý thời gian riêng cực đại ở đây tương đương với phát biểu rằng tác dụng đối với hàm Lagrange mà chúng ta giới thiệu gần phần cuối của Mục 12.1 là $S = -mc\int d\tau$. Trong cả hai trường hợp chúng ta đều muốn cực trị tích phân của thời gian riêng. Trong Mục 12.1 chúng ta chỉ đề cập tới một phần tử tự do, do đó cách xử lý ở đây là tổng quát hơn một chút bởi vì nó bao gồm cả ảnh hưởng của trọng lực. Nhưng chú ý rằng mặc dù phương trình (14.15) có sự giải thích rõ ràng về việc bao gồm thế năng hấp dẫn, nhưng điểm bắt đầu trong phương trình (14.12) không đề cập tới lực hấp dẫn. Trong cách giải

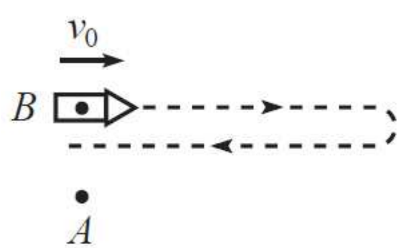
[8]Kết quả này thực ra là không chính xác bởi vì hai ảnh hưởng này kết hợp với nhau theo một cách phức tạp hơn (xem bài tập 14.20).. Nhưng nó vẫn đúng đến bậc nhất đối với v^2/c^2 và gy/c^2, và đây là tất cả những gì mà chúng ta đã đề cập tới ở đây.

quyết hiện tại, trong lực sẽ không được coi như một lực, nhưng thay vào đó sẽ coi như là một thứ gì đó ảnh hưởng tới thời gian riêng.[9]

14.5 Quay trở lại nghịch lý của anh em sinh đôi

Chúng ta hãy xem xét một cách nhìn khác về bài toán chuẩn nghịch lý của anh em sinh đôi, nhưng lần này là từ thuyết tương đối tổng quát. Chúng ta cũng nên nhấn mạnh rằng thuyết tương đối tổng quát không phải là biện pháp quá cần thiết mà chúng ta phải sử dụng để hiểu biết về sự thành lập ban đầu của nghịch lý (tình huống đầu tiên sau đây). Vì dù sao chúng ta cũng đã có thể giải quyết nghịch lý này trong Mục 11.3.2. Thảo luận hiện tại của chúng ta chỉ đơn giản là chỉ ra rằng câu trả lời đối với cách thành lập khác (tình huống thứ hai sau đây) là phù hợp với những gì mà chúng ta đã biết về thuyết tương đối tổng quát. Xét hai mô hình nghịch lý của anh em sinh đôi sau đây.

- Người anh em sinh đôi A trôi tự do trong không gian bên ngoài. Người anh em sinh đôi B bay qua A trong một con tàu không gian với vận tốc v_0 (xem hình 14.7). Tại thời điểm họ cạnh nhau, cả hai người đều chỉnh đồng hồ về không. Tại cùng thời điểm này, B bật ống đẩy dự trữ của con tàu và chạy chậm lại với gia tốc riêng giảm tốc độ g. B rốt cuộc đi tới một điểm xa nhất so với A và sau đó tăng tốc trở lại hướng về A, cuối cùng lại ngang qua A với vận tốc v_o. Khi họ ở bên cạnh nhau, họ so sánh số chỉ trên hai đồng hồ của họ. Người nào trẻ hơn?

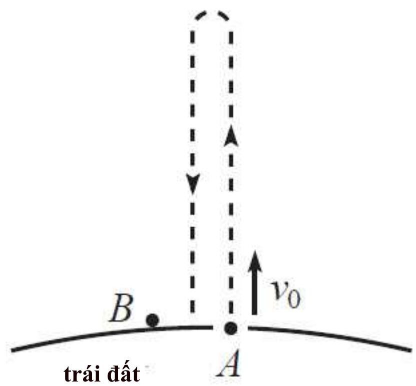


Hình 14.7:

- Người anh em sinh đôi B đứng trên trái đất. Người anh em sinh đôi A bị ném lên cao với vận tốc v_0 (giả sử anh ta bị phóng ra từ một khẩu đại bác trong một hố ở trên mặt đất; xem hình 14.8). Tại thời điểm họ ở bên cạnh nhau, cả hai đều chỉnh đồng hồ của mình về

[9]Về một bài báo thú vị nói về tác dụng cổ điển như thế nào, cùng với một vài điều về hình học vi phân có thể dẫn tới thuyết tương đối tổng quát, xem Rindler (1994).

không. A lên cao và sau đó rơi xuống, cuối cùng ngang qua B với vận tốc v_0 một lần nữa. Khi họ ở bên cạnh nhau, họ so sánh số chỉ trên hai đồng hồ của họ. Người nào trẻ hơn?



Hình 14.8:

Tình huống đầu tiên dễ dàng được giải quyết bằng cách sử dụng thuyết tương đối hẹp. Bởi vì A ở trong một hệ quy chiếu quán tính, do đó anh ta có thể áp dụng các kết quả của thuyết tương đối hẹp. Cụ thể, anh ta nhìn thấy đồng hồ của B chạy chậm do sự giãn nở thời gian thông thường trong thuyết tương đối hẹp. Do đó B cuối cùng sẽ trẻ hơn. B không thể sử dụng lý luận ngược lại bởi vì cô ta không ở trong một hệ quy chiếu quán tính.

Còn về trường hợp thứ hai thì sao? Điểm mấu chốt ở đây để hiểu rõ đó là nguyên lý tương đương nói rằng hai tình huống này chính xác là như nhau (bỏ qua tính không đồng nhất của lực hấp dẫn của trái đất) khi đề cập tới hai anh em sinh đôi. Người B không có cách nào để biết rằng cô ta đang ở trong con tàu không gian tăng tốc với gia tốc g hay là cô ta đang đứng trên bề mặt trái đất. Và người A cũng không có cách nào để biết rằng anh ta đang trôi tự do trong không gian bên ngoài hay là đang rơi tự do trong một trường hấp dẫn.[10] Do đó chúng ta kết luận rằng B cũng phải trẻ hơn trong tình huống thứ hai.

Nhìn thoáng qua lần đầu tiên, điều này dường như không chính xác, bởi vì trong tình huống thứ hai B không chuyển động trong khi đó A đang chuyển động. Dường như rằng B sẽ nhìn thấy đồng hồ của A chạy chậm do sự gian nở thời gian thông thường trong

[10]Như đã đề cập trong Mục 14.1, thực tế này xảy ra do sự tương đương của khối lượng quán tính và khối lượng hấp dẫn. Nếu không có điều này, các phần khác nhau của cơ thể A sẽ muốn tăng tốc với các tốc độ khác nhau trong trường hấp dẫn ở tình huống thứ hai. Điều này chắc chắn sẽ làm cho anh ta không thể trôi tự do trong không gian.

thuyết tương đối hẹp, và do đó A sẽ trẻ hơn. Lý luận này không chính xác bởi vì nó không tính đến sự giãn nở thời gian hấp dẫn. Thực tế của vấn đề đó là A ở vị trí cao hơn trong trường hấp dẫn, do đó đồng hồ của anh ta chạy nhanh hơn. Ảnh hưởng này quả thực đã thắng thế hơn so với sự giãn nở thời gian trong thuyết tương đối hẹp, và cuối cùng A sẽ già hơn. Bạn có thể chỉ ra cụ thể điều này trong bài tập 14.11.

Lý luận trong phần này sinh ra một cách khác để kết luận rằng nguyên lý tương đương chỉ ra rằng các đồng hồ ở trên cao phải chạy nhanh hơn. Nguyên lý tương đương khẳng định rằng A phải già hơn trong tình huống thứ hai, điều này có nghĩa là phải có ảnh hưởng độ cao nào đó làm cho đồng hồ của A chạy nhanh (đủ nhanh để thắng thế so với sự giãn nở thời gian trong thuyết tương đối hẹp). Nhưng sẽ mất thêm chút thời gian để chỉ ra rằng thừa số đó thực tế là $1 + gh/c^2$. Chú ý thực tế rằng việc A già hơn là phù hợp với nguyên lý thời gian riêng cực đại. Trong cả hai trường hợp, A đều chỉ chịu ảnh hưởng của trọng lực (trọng lực bằng không trong trường hợp đầu tiên), trong khi đó B chịu lực thông thường từ sàn tàu hoặc mặt đất.

14.6 Bài tập

Mục 14.2: Sự giãn nở thời gian

14.1. Vận tốc máy bay $\star$

Một máy bay bay ở độ cao không đổi h. Vận tốc của nó phải bằng bao nhiêu sao cho một người quan sát trên mặt đất nhìn thấy đồng hồ của máy bay chạy giống như đồng hồ trên mặt đất? (Giả sử $v \ll c$.)

14.2. Đồng hồ trên tháp $\star\star$

Một đồng hồ ban đầu ở trên mặt đất và sau đó di chuyển lên một tháp với vận tốc v không đổi. Nó ở trên đỉnh tháp trong khoảng thời gian T và sau đó được hạ xuống với vận tốc không đổi v. Nếu tháp có độ cao h thì khoảng thời gian đồng hồ ở trên đỉnh tháp là bao lâu sao cho sau khi nó trở lại nó chỉ thời gian giống như một chiếc đồng hồ được giữ nguyên trên mặt đất? (Giả sử $v \ll c$.)

14.3. Chuyển động tròn $\star\star$

B chuyển động với vận tốc v (với $v \ll c$) trong một vòng tròn bán kính r quanh A, cách xa tất cả các vật có khối lượng. Đồng hồ của B chạy chậm hơn đồng hồ của A bao nhiêu? Tính toán giá trị này theo ba cách. Làm việc trong:

(a) Hệ quy chiếu của A.

(b) Hệ quy chiếu có gốc là B và các trục giữ song song với một hệ các trục quán tính.

(c) Hệ quy chiếu quay có tâm tại A và quay với cùng tần số như của B.

14.4. Thêm một trường hợp chuyển động tròn ⋆⋆

A và B chuyển động với vận tốc v ($v \ll c$) trong một vòng tròn bán kính r tại các điểm đối xứng với nhau qua tâm, cách xa tất cả các khối lượng. Cả hai người đều nhìn thấy các đồng hồ của họ chạy cùng tốc độ. Chỉ ra điều này theo ba cách. Làm việc trong:

(a) Hệ quy chiếu quán tính có gốc là tâm của đường tròn.

(b) Hệ quy chiếu có gốc là B và có các trục được giữ song song với tập hợp các trục quán tính.

(c) Hệ quy chiếu quay đặt tâm tại gốc và quay với cùng tần số như A và B.

Mục 14.3: Hệ quy chiếu gia tốc không đổi

14.5. Quan sát của người đang tăng tốc ⋆⋆⋆

Một tên lửa xuất phát từ trạng thái nghỉ đối với một hành tinh cách xa một khoảng ℓ. Nó tăng tốc hướng về hành tinh với gia tốc riêng g. Gọi τ và t lần lượt là số chỉ trên đồng hồ của tên lửa và hành tinh.

(a) Chỉ ra rằng khi đồng hồ của phi hành gia chỉ τ, anh ta quan sát thấy khoảng cách x giữa tên lửa và hành tinh (đo trong hệ quy chiếu quán tính tức thời của anh ta) được cho bởi

$$1 + gx = \frac{1 + g\ell}{\cosh(g\tau)}. \tag{14.16}$$

(b) Chỉ ra rằng khi đồng hồ của phi hành gia chỉ τ, anh ta quan sát thấy thời gian t trên đồng hồ của hành tinh cho bởi

$$gt = (1 + g\ell)\tanh(g\tau). \tag{14.17}$$

Kết quả từ các bài tập 14.16 và 14.20 sẽ có ích ở đây.

14.6. Chỉ thời gian lớn hơn ⋆⋆⋆⋆

Một tên lửa có độ dài riêng L tăng tốc từ trạng thái nghỉ với gia tốc riêng g (ở đó

$gL \ll c^2$). Các đồng hồ được đặt tại phía trước và phía sau tên lửa. Nếu chúng ta xem xét mô hình này trong hệ quy chiếu tên lửa thì ảnh hưởng giãn nở thời gian trong thuyết tương đối tổng quát chỉ ra cho chúng ta rằng thời gian trên hai đồng hồ liên hệ với nhau bởi biểu thức $t_f = (1+gL/c^2)t_b$. Do đó, nếu chúng ta xem xét mọi thứ trong hệ quy chiếu mặt đất thì thời gian trên hai đồng hồ liên hệ với nhau bởi

$$t_f = t_b\left(1+\frac{gL}{c^2}\right) - \frac{Lv}{c^2}, \tag{14.18}$$

trong đó số hạng cuối cùng đến từ kết quả "đồng hồ phía sau chạy nhanh hơn" trong thuyết tương đối hẹp. Thành lập quan hệ trên bằng cách chỉ tính toán trong hệ quy chiếu mặt đất.[11]

14.7. Quay trở lại đại lượng Lv/c^2 ⋆⋆

Bạn đang đứng ở trạng thái nghỉ đối với một tên lửa, tên lửa này có các đồng hồ được chỉnh giống nhau ở hai đầu của nó. Sau đó mọi thứ được sắp xếp sao cho bạn và tên lửa chuyển động với vận tốc tương đối v. Một câu hỏi được đặt ra đó là: Theo quan sát của bạn, hiệu số chỉ của hai đồng hồ đặt tại hai đầu của tên lửa là bao nhiêu?

Tuy nhiên có một điều là câu hỏi này sẽ không trả lời được nếu như không có thông tin thêm rằng bạn và tên lửa chuyển động với vận tốc tương đối v như thế nào. Có hai cách cơ bản mà vận tốc tương đối này có thể xảy ra. Tên lửa có thể tăng tốc trong khi bạn đứng yên ở đó, hoặc bạn có thể tăng tốc trong khi tên lửa đứng yên. Sử dụng các kết quả từ bài tập 14.5 và 14.6 giải thích câu trả lời đối với câu hỏi ở trên trong hai trường hợp này.

Mục 14.4: Nguyên lý thời gian riêng cực đại

14.8. Chuyển động tròn trên trái đất ⋆⋆

Đồng hồ A ở trạng thái nghỉ trên trái đất và đồng hồ B chuyển động tròn trên trái đất theo một quỹ đạo là là mặt đất. Cả A và B về bản chất là có cùng bán kính do đó ảnh hưởng giãn nở thời gian trong thuyết tương đối tổng quát không sinh ra sự khác nhau về

[11] Bạn có thể nhận thấy mối quan hệ này là khá ngạc nhiên, bởi vì nó chỉ ra rằng đồng hồ phía trước cuối cùng sẽ chỉ thời gian lớn hơn một cách tùy ý so với đồng hồ phía sau khi đo trong hệ quy chiếu mặt đất. (Đại lượng mang dấu trừ Lv/c^2 bị chặn bởi L/c và do đó cuối cùng sẽ trở thành không đáng kể so với đại lượng không bị chặn mang dấu cộng $(gL/c^2)t_b$.) Nhưng dường như cả hai đồng hồ về cơ bản đều giống nhau đối với hệ quy chiếu mặt đất, do đó tại sao cuối cùng chúng lại khác nhau nhiều như vậy? Đây là nhiệm vụ mà bạn phải tìm ra câu trả lời.

thời gian của chúng. Nhưng B chuyển động đối với A, do đó A nhìn thấy B chạy chậm do ảnh hưởng của sự giãn nở thời gian thông thường trong thuyết tương đối hẹp. Do đó đồng hồ trên quỹ đạo B chỉ thời gian riêng trôi qua nhỏ hơn mỗi lần nó đi ngang qua A. Mặt khác, đồng hồ dưới ảnh hưởng của trọng lực (B) không chỉ thời gian riêng cực đại, mâu thuẫn với những gì chúng ta đã biết về nguyên lý thời gian riêng cực đại. Hãy giải thích.

Mục 14.5: Quay trở lại nghịch lý của anh em sinh đôi

14.9. Nghịch lý của anh em sinh đôi $\star$

Một con tàu không gian di chuyển với vận tốc v ($v \ll c$) tới một ngôi sao ở xa. Vào lúc tiến tới ngôi sao, nó giảm tốc và sau đó tăng tốc trở lại với vận tốc v theo chiều ngược lại (không thay đổi, và trong một thời gian ngắn khi so với toàn bộ thời gian của hành trình). Hỏi tuổi của người di chuyển nhỏ hơn tuổi của người anh em sinh đôi của cô ta trên mặt đất là bao nhiêu? (Bỏ qua trọng lực trên trái đất.) Làm việc trong:

(a) Hệ quy chiếu trái đất.

(b) Hệ quy chiếu con tàu.

14.10. Một trường hợp khác về nghịch lý của anh em sinh đôi $\star\star$

(a) Trả lời phần (b) của bài toán trước, ngoại trừ một điều là bây giờ giả sử con tàu không gian quay lại bằng cách chuyển động theo một nửa vòng tròn nhỏ trong khi vẫn giữ nguyên vận tốc v.

(b) Trả lời phần (b) của bài toán trước, ngoại trừ một điều là bây giờ giả sử con tàu quay trở lại bằng cách chuyển động theo một cách bất kỳ. Sự hạn chế duy nhất đó là sự quay trở lại được thực hiện rất nhanh (khi so sánh với tổng thời gian của cuộc hành trình) và trong một miền không gian rất nhỏ (khi so sánh với khoảng cách trái đất - mặt trăng).

14.11. Một trường hợp nữa về nghịch lý của anh em sinh đôi $\star\star\star$

(a) Trong tình huống đầu tiên trong Mục 14.5, tính toán tỷ số thời gian trôi qua của B với thời gian trôi qua của A theo v_0 và g. Làm việc trong hệ quy chiếu của A. Giả sử rằng $v_0 \ll c$, và bỏ qua các số hạng bậc cao.

(b) Làm tương tự đối với trường hợp thứ hai trong Mục 14.5. Thực hiện điều này từ đầu bằng cách sử dụng các sự giãn nở thời gian, và sau đó kiểm tra lại rằng kết quả của bạn là phù hợp (trong phạm vi sự chính xác của các tính toán) với phần (a) theo đòi hỏi của nguyên lý tương đương. Làm việc trong hệ quy chiếu của B.

14.7 Bài tập luyện tập

Mục 14.2: Sự giãn nở thời gian

14.12. Đi lên đồi ⋆

Bạn đi lên và đi xuống một quả đồi có chiều cao h với tốc độ không đổi. Quả đồi có hình dạng tam giác cân với chiều cao h. Vận tốc của bạn phải bằng bao nhiêu sao cho tuổi của bạn vẫn bằng với một người nào đó đứng tại chân đồi? (Giả sử rằng $v \ll c$.)

14.13. Lv/c^2 và gh/c^2 ⋆

Kết quả "đồng hồ phía sau chạy nhanh hơn" quen thuộc trong thuyết tương đối hẹp Lv/c^2 nhìn khá giống với đại lượng gh/c^2 trong kết quả về sự giãn nở thời gian trong thuyết tương đối tổng quát ở phương trình (14.3). Tưởng tượng rằng chúng ta đang đứng trên mặt đất gần phía trước của con tàu có chiều dài L. Khi vận tốc v nhỏ, đưa ra một thí nghiệm có thể giải thích kết quả Lv/c^2 theo kết quả gh/c^2.

14.14. Cả hai cách quan sát ⋆⋆

A và B ban đầu cách nhau một khoảng L, ở trạng thái nghỉ đối với nhau. Tại một thời điểm cho trước, B tăng tốc hướng về phía A với gia tốc riêng không đổi. Giả sử rằng $aL \ll c^2$.

(a) Làm việc trong hệ quy chiếu của A, tính toán hiệu số chỉ trên đồng hồ của A và số chỉ trên đồng hồ của B khi B tiến tới A.

(b) Làm tương tự trong hệ quy chiếu của B, và chỉ ra rằng kết quả đó là phù hợp (bỏ qua các ảnh hưởng bậc cao) với kết quả từ phần (a).

14.15. Chuyển động tròn ngược chiều ⋆⋆⋆⋆

A và B chuyển động với vận tốc v ($v \ll c$) theo hai chiều ngược nhau quanh một vòng tròn bán kính r (sao cho họ ngang qua nhau sau mỗi nửa vòng quay) và cách xa tất cả các vật có khối lượng. Cả hai người đều nhìn thấy đồng hồ của họ chạy cùng tốc độ sau mỗi lần gặp nhau. Tức là nếu họ so sánh các đồng hồ mỗi lần họ gặp nhau thì cả hai đồng hồ đều chỉ cùng một thời gian đã trôi qua. Chứng minh điều này theo ba cách. Làm việc trong:

(a) Hệ quy chiếu quán tính có gốc là tâm của vòng tròn.

(b) Hệ quy chiếu có gốc là B và các trục được giữ song song với tập hợp các trục quán tính.

(c) Hệ quy chiếu quay có tâm tại gốc và quay cùng với B. Phần này rất rắc rối; lời giải được cho trong Cranor và cộng sự (2000), nhưng hãy đừng xem lời giải ngay lập tức.

Mục 14.3: Hệ quy chiếu gia tốc không đổi

14.16. Các đại lượng khác nhau $\star$

Một hạt xuất phát từ trạng thái nghỉ và tăng tốc với gia tốc riêng g. Gọi τ là thời gian trên đồng hồ của hạt. Bắt đầu với v từ phương trình (14.4), sự dụng sự giãn nở thời gian để chỉ ra rằng thời gian t trong hệ quy chiếu quán tính ban đầu, vận tốc của hạt, và thừa số liên kết γ được cho bởi (với $c = 1$)

$$gt = \sinh(g\tau), \quad v = \tanh(g\tau), \quad \gamma = \cosh(g\tau). \tag{14.19}$$

14.17. Sử dụng tốc độ $\star$

Một cách khác để rút ra v trong phương trình (14.4) đó là sử dụng kết quả về tốc độ $v = \tanh(g\tau)$ (trong đó τ là thời gian riêng của hạt) từ Mục 11.9. Sử dụng sự giãn nở thời gian để chỉ ra rằng điều này dẫn đến $gt = \sinh(g\tau)$, kết quả này sau đó đưa đến phương trình (14.4).

14.18. Vận tốc trong hệ quy chiếu có gia tốc $\star$

Trong mô hình của bài tập 14.5, sử dụng phương trình (14.16) để tìm vận tốc $|dx/d\tau|$ của hành tinh trong hệ quy chiếu có gia tốc của tên lửa như là một hàm của τ. Giá trị lớn nhất của vận tốc này theo g và khoảng cách ban đầu ℓ là bao nhiêu?

14.19. Đồng hồ chạy nhanh, đồng hồ chạy chậm $\star\star$

Chúng ta nhận thấy từ Mục 14.2 rằng một đồng hồ tại phía sau của tên lửa nhìn thấy một đồng hồ ở phía trước chạy nhanh hơn bởi thừa số $1 + gh/c^2$. Tuy nhiên, chúng ta đã bỏ qua ảnh hưởng bậc cao hơn của $1/c^2$, do đó theo tất cả những gì mà chúng ta biết thì chúng ta chỉ tìm số hạng đầu tiên trong chuỗi Taylor, và thừa số này thực sự phải có dạng giống như e^{gh/c^2} hoặc có thể là $1 + \ln(1 + gh/c^2)$.

(a) Đối với hệ quy chiếu gia tốc không đổi trong Mục 14.3.2, chỉ ra rằng thừa số đó thực tế chính xác phải là $1 + g_r h/c^2$, trong đó g_r là gia tốc của phía sau tên lửa. Chỉ ra điều này bằng cách sắp xếp một chuỗi các đồng hồ và nhìn vào các thừa số liên tiếp giữa chúng. (*Gợi ý*: Lấy loga tích của các thừa số này.) Thừa số cuối cùng của chúng ta sẽ có dạng rất đẹp khi viết theo a và b trong phương trình (14.6); nó bằng bao nhiêu?

(b) Bằng cách lý luận tương tự như trong phần (a), dẫn đến là đồng hồ phía trước nhìn thấy đồng hồ phía sau chạy chậm hơn bởi thừa số $1 - g_f h/c^2$, trong đó g_f là gia tốc của phía trước tên lửa. Chỉ ra rằng dứt khoát phải có $(1 + g_r h/c^2)(1 - g_f h/c^2) = 1$, bởi vì một đồng hồ không thể chạy nhanh hơn chính nó (và bởi vì hai đồng hồ ở trạng thái nghỉ trong hệ quy chiếu của tên lửa; lý luận này sẽ không thể áp dụng đối với hai đồng hồ bay ngang qua nhau).

14.20. Kết hợp trọng lực và vận tốc $\star\star$

Dựa vào bài tập 11.25 ("Gia tốc và sự thay đổi màu đỏ"), hãy sử dụng một sơ đồ Minkowski để giải bài toán này. Một tên lửa tăng tốc với gia tốc riêng g hướng về một hành tinh. Đo trong hệ quy chiếu quán tính tức thời của tên lửa, hành tinh có khoảng cách x và chuyển động với vận tốc v. Mọi thứ là một chiều ở đây. Đo trong hệ quy chiếu *gia tốc* của tên lửa, chỉ ra rằng đồng hồ của hành tinh chạy với tốc độ (với $c = 1$),

$$dt_p = dt_r(1 + gx)\sqrt{1 - v^2}, \tag{14.20}$$

và vận tốc của hành tinh là

$$V = (1 + gx)v. \tag{14.21}$$

Chú ý rằng nếu chúng ta kết hợp hai kết quả này và khử v đi, và nếu sau đó chúng ta sử dụng nguyên lý tương đương, thì chúng ta sẽ đi đến một kết quả là một đồng hồ chuyển động với vận tốc V tại độ cao h trong một trường hấp dẫn được quan sát bởi một người nào đó trên mặt đất sẽ chạy với tốc độ (đưa trở lại ký hiệu c),

$$\sqrt{\left(1 + \frac{gh}{c^2}\right) - \frac{V^2}{c^2}}. \tag{14.22}$$

14.21. Sự co độ dài $\star\star$

Một chiếc bút chì hướng thẳng về phía bạn. Từ một khoảng cách nào đó so với nó, bạn bắt đầu từ trạng thái nghỉ và tăng tốc về phía chiếc bút với gia tốc a. Sau một khoảng thời gian t, chiếc bút chì bị co độ dài trong hệ quy chiếu của bạn bởi thừa số $\sqrt{1-v^2/c^2} \approx 1-(at)^2/2c^2$ khi t nhỏ (chặt chẽ hơn phải là khi $at \ll c$). Nhưng cách duy nhất mà chiếc bút có thể co lại là phần sau của nó chuyển động nhanh hơn phần phía trước khi đo trong hệ quy chiếu gia tốc của bạn. Sử dụng phương trình (14.21) chỉ ra rằng thừa số co độ dài có giá trị như ở trên khi t nhỏ.

14.22. Độ dài của chiếc gậy có gia tốc $\star\star$

Xét một hệ quy chiếu gia tốc không đổi chứa gồm một chiếc gậy, trong đó các đầu của gậy có các đường vũ trụ được cho bởi các đường cong như trong hình 14.6 (do đó chiếc gậy có độ dài riêng $b-a$). Tại thời điểm t trong hệ quy chiếu đang xét, chúng ta biết từ phương trình (14.5) và (14.6) rằng một điểm chịu gia tốc g có vị trí $\sqrt{1+(gt)^2}/g$ đối với điểm P trong hình 14.6. Một người quan sát trong hệ quy chiếu quán tính ban đầu nhìn thấy chiếc gậy bị co độ dài bởi các thừa số khác nhau dọc theo chiều dài của nó, bởi vì các điểm khác nhau chuyển động với các vận tốc khác nhau (tại một thời điểm cho trước trong hệ quy chiếu ban đầu). Bằng cách tính toán tích phân thích hợp, chỉ ra rằng người quan sát quán tính sẽ kết luận rằng chiếc gậy luôn có độ dài riêng $b-a$.

Mục 14.4: Nguyên lý thời gian riêng cực đại

14.23. Thời gian riêng cực đại $\star$

Chỉ ra rằng giá trị dừng của tác dụng hấp dẫn trong phương trình (14.15) luôn luôn là cực tiểu (điều này có nghĩa là thời gian riêng luôn là cực đại). Thực hiện điều này bằng cách xét hàm $y(t) = y_0(t) + \xi(t)$, trong đó y_0 là quỹ đạo sinh ra giá trị dừng, và ξ là một sự biến thiên nhỏ.

Mục 14.5: Quay trở lại nghịch lý của anh em sinh đôi

14.24. Không nghịch lý trong trường hợp hai anh em sinh đôi đối xứng $\star\star$

Hai anh em sinh đôi di chuyển về phía nhau với cùng vận tốc v ($v \ll c$) đối với một người quan sát quán tính. Họ đồng bộ hóa các đồng hồ của họ khi họ ngang qua nhau. Họ di chuyển tới các ngôi sao có các vị trí $\pm\ell$, và sau đó giảm tốc và tăng tốc trở lại tới vận tốc v theo chiều ngược nhau (giống nhau và trong một thời gian ngắn khi so với tổng thời gian của cuộc hành trình). Trong hệ quy chiếu của người quan sát quán tính, rõ ràng (bởi tính đối xứng) rằng cả hai người có cùng tuổi khi nó ngang qua nhau một lần nữa. Tính toán lại kết quả này bằng cách sử dụng hệ quy chiếu của một trong hai anh em sinh đôi.

14.8 Lời giải

14.1. Vận tốc máy bay

Một người quan sát trên mặt đất nhìn thấy đồng hồ của máy bay chạy chậm bởi thừa số $\sqrt{1-v^2/c^2}$ do sự giãn nở thời gian trong thuyết tương đối hẹp. Nhưng anh ta cũng thấy nó chạy nhanh bởi thừa số $(1+gh/c^2)$ do sự giãn nở thời gian trong thuyết tương đối rộng. Do đó chúng ta muốn tích của hai thừa số này bằng 1. Sử dụng xấp xỉ chuỗi Taylor cho các vận tốc nhỏ trong thừa số đầu tiên, chúng ta tìm được

$$\left(1-\frac{v^2}{2c^2}\right)\left(1+\frac{gh}{c^2}\right)=1 \quad\Longrightarrow\quad 1-\frac{v^2}{2c^2}+\frac{gh}{c^2}-O\left(\frac{1}{c^4}\right)=1. \tag{14.23}$$

Bỏ qua số hạng nhỏ $\frac{1}{c^4}$, và giản ước số 1 ở hai vế, chúng ta thu được $v=\sqrt{2gh}$. Rất thú vị là $\sqrt{2gh}$ cũng là câu trả lời đối với câu hỏi của vật lý Newton, cụ thể là bạn cần ném một quả bóng thẳng đứng lên với vận tốc bằng bao nhiêu để nó lên tới độ cao h?

14.2. Đồng hồ trên tháp

Thừa số giãn nở thời gian trong thuyết tương đối hẹp là $\sqrt{1-v^2/c^2}\approx 1-v^2/2c^2$. Do đó đồng hồ sẽ chạy chậm một khoảng thời gian $v^2/2c^2$ trong quá trình nó di chuyển lên và xuống tháp. Hành trình đi lên mất một khoảng thời gian h/v, và tương tự như vậy đối với quá trình đồng hồ đi xuống, do đó thời gian chạy chậm do ảnh hưởng của thuyết tương đối hẹp sẽ là

$$\left(\frac{v^2}{2c^2}\right)\left(\frac{2h}{v}\right)=\frac{vh}{c^2}. \tag{14.24}$$

Mục đích của chúng ta là cân bằng thời gian chạy chậm với thời gian chạy nhanh do sự giãn nở thời gian trong thuyết tương đối tổng quát. Nếu chiếc đồng hồ đứng yên ở trên đỉnh tháp trong khoảng thời gian T thì thời gian chạy nhanh là $(gh/c^2)T$.

Nhưng chúng ta không được quên sự tăng thời gian do độ cao khi đồng hồ di chuyển bởi vì khi đó đồng hồ chạy nhanh. Trong quá trình chuyển động của đồng hồ, độ cao trung bình của nó là $h/2$. Tổng thời gian chuyển động là $2h/v$, do đó thời gian chạy nhanh trong thuyết tương đối tổng quát khi đồng hồ chuyển động là (chúng ta có thể sử dụng độ cao trung bình ở đây, bởi vì ảnh hưởng trong thuyết tương đối tổng quát là tuyến tính đối với h)

$$\left(\frac{g(h/2)}{c^2}\right)\left(\frac{2h}{v}\right)=\frac{gh^2}{c^2v}. \tag{14.25}$$

Cho tổng toàn bộ sự thay đổi của thời gian này bằng không dẫn đến

$$-\frac{vh}{c^2}+\frac{gh}{c^2}T+\frac{gh^2}{c^2v}=0 \quad\longrightarrow\quad -v+gT+\frac{gh}{v}=0 \quad\longrightarrow\quad T=\frac{v}{g}-\frac{h}{v}. \tag{14.26}$$

NHẬN XÉT: Chú ý rằng chúng ta phải có $v>\sqrt{gh}$ để dẫn đến nghiệm T dương, khi đó ảnh hưởng của thuyết tương đối hẹp là quá nhỏ để có thể bỏ qua ảnh hưởng của thuyết tương đối tổng quát, ngay cả trong trường hợp đồng hồ không có khoảng thời gian ở trên đỉnh tháp. Nếu $v = \sqrt{gh}$ thì $T = 0$, và về bản chất chúng ta có tình huống giống như trong Bài tập 14.12. Cũng nên chú ý rằng nếu v là rất lớn so với $\sqrt{gh}$ (nhưng vẫn là nhỏ khi so với c sao cho xấp xỉ $\sqrt{1 - v^2/c^2} \approx 1 - v^2/2c^2$ của chúng ta vẫn đúng) thì $T \approx v/g$, giá trị này độc lập với h. ♣

14.3. Chuyển động tròn

(a) Trong hệ quy chiếu của A, chỉ có ảnh hưởng của sự giãn nở thời gian trong thuyết tương đối hẹp. A nhìn thấy B chuyển động với vận tốc v, do đó đồng hồ của B chạy chậm bởi một thừa số $\sqrt{1 - v^2/v^2}$. Và bởi vì $v \ll c$, nên chúng ta có thể sử dụng chuỗi Taylor để xấp xỉ giá trị này bằng $1 - v^2/2c^2$.

(b) Trong hệ quy chiếu này, có cả ảnh hưởng của sự giãn nở thời gian trong thuyết tương đối hẹp và thuyết tương đối tổng quát. A chuyển động với vận tốc v đối với B trong hệ quy chiếu này, do đó ảnh hưởng của thuyết tương đối hẹp đó là đồng hồ của A chạy chậm bởi một thừa số $\sqrt{1 - v^2/c^2} \approx 1 - v^2/2c^2$. Nhưng bởi vì B chịu gia tốc $a = v^2/r$ hướng vào A, do đó với tất cả những gì B biết thì anh ta đang sống trong một thế giới mà ở đó gia tốc do trọng lực là v^2/r. A "cao hơn" trong trường hấp dẫn, do đó ảnh hưởng của thuyết tương đối tổng quát đó là đồng hồ của A chạy nhanh hơn bởi một thừa số $1 + ar/c^2 = 1 + v^2/c^2$. Nhân các ảnh hưởng của thuyết tương đối hẹp và thuyết tương đối tổng quát này với nhau, chúng ta tìm ra (tới bậc thấp nhất) rằng đồng hồ của A chạy nhanh bởi một thừa số $1 + v^2/2c^2$. Điều này (tới bậc thấp nhất) có nghĩa là đồng hồ của B chạy chậm bởi một thừa số $1 - v^2/2c^2$, kết quả này phù hợp với câu trả lời ở phần (a).

(c) Trong hệ quy chiếu này không có chuyển động tương đối giữa A và B, do đó chỉ có ảnh hưởng của sự giãn nở thời gian trong thuyết tương đối tổng quát. Trường hấp dẫn (tức là gia tốc hướng tâm) tại vị trí x so với tâm là $g_x = x\omega^2$. Tưởng tượng rằng chúng ta sắp xếp thành hàng một chuỗi các đồng hồ dọc theo bán kính với khoảng cách liên tiếp dx. Khi đó kết quả của sự giãn nở thời gian trong thuyết tương đối tổng quát chỉ ra rằng mỗi đồng hồ sẽ chạy chậm một khoảng thời gian $g_x dx/c^2 = x\omega^2 dx/c^2$ so với đồng hồ bên cạnh phía trong. Tích phân các phần này từ $x = 0$ tới $x = r$ chỉ ra rằng đồng hồ của B chạy chậm một khoảng thời gian $r^2\omega^2/2c^2 = v^2/2c^2$ khi so với đồng hồ của A. Kết quả này phù hợp với các kết quả từ phần (a) và phần (b).

NHẬN XÉT: Nếu bạn muốn tưởng tượng một đường thẳng các đồng hồ tương tự trong phần (b) thì bạn có thể tưởng tượng một chiếc gậy thẳng giữa chúng và B ở một đầu của chiếc gậy. Điều dễ thấy để làm đối với chiếc gậy đó là nó không chuyển động đối với hệ quy chiếu của B (giống như đường thẳng các đồng hồ trong phần (c)). Nhưng điều này có nghĩa là chiếc gậy không quay đối với các trục quán tính bởi vì các trục của B cũng không quay. Do đó tất cả các đồng hồ đều chịu cùng gia tốc $r\omega^2 = v^2/r$, trái ngược với gia tốc giảm trong phần (c). Do đó tích phân tất cả các phân số này sẽ không thu được thừa số 2 như trong phần (c), và dẫn đến cuối cùng chúng ta đơn giản chỉ có v^2/c^2. Sau đó ảnh hưởng của thuyết tương đối hẹp xuất hiện trong phần (b) bởi vì A chuyển động ngang qua đồng hồ ở phía đầu kia của chiếc gậy, trong khi đó trong phần (c) A ở trạng thái nghỉ. ♣

14.4. Thêm một trường hợp chuyển động tròn

(a) Trong hệ quy chiếu quán tính có gốc là tâm đường tròn, tình huống là đối xứng với A và B. Do đó, nếu A và B giảm tốc độ bằng một cách đối xứng và gặp nhau thì các đồng hồ của họ phải chỉ cùng một thời gian.

Giả sử (để dẫn đến một sự mâu thuẫn) rằng A nhìn thấy đồng hồ của B chạy chậm. Khi đó sau một khoảng thời gian lớn tùy ý, A sẽ nhìn thấy đồng hồ của B chạy chậm hơn đồng hồ của anh ta một khoảng thời gian cũng lớn tùy ý. Bây giờ khi A và B dừng lại và gặp nhau. Sẽ không có cách nào dừng chuyển động mà có thể làm cho đồng hồ của B chỉ một thời gian lớn tùy ý theo quan sát của A. Điều này là đúng bởi vì mọi thứ xảy ra trong một miền không gian hữu hạn, do đó sẽ có cận trên đối với ảnh hưởng của sự giãn nở thời gian trong thuyết tương đối tổng quát (bởi vì nó có dạng giống như gh/c^2 và h bị chặn). Dẫn đến cuối cùng A sẽ quan sát thấy đồng hồ của B chỉ thời gian ít hơn. Điều này mâu thuẫn với kết quả trong kết luận của đoạn trước. Tương tự đối với trường hợp A nhìn thấy đồng hồ của B chạy nhanh.

NHẬN XÉT: Chú ý sự khác nhau giữa bài toán này với bài toán ở đó A và B chuyển động với các vận tốc bằng nhau từ cùng một vị trí và sau đó đảo chiều và hướng ngược lại để gặp lại nhau. Đối với bài toán "tuyến tính" mới này thì lập luận về sự đối xứng trong đoạn đầu tiên ở trên vẫn đúng, do đó A và B quả thực sẽ có cùng số chỉ thời gian trên các đồng hồ khi họ gặp lại nhau. Nhưng lập luận trong đoạn thứ hai thì không còn đúng nữa (nó phải không đúng bởi vì mỗi người *không* nhìn thấy đồng hồ của người còn lại chạy với cùng tốc độ). Sai lầm đó là trong tình huống tuyến tính này, thí nghiệm không bị hạn chế trong một miền không gian nhỏ, do đó ảnh hưởng của đại lượng bậc gh/c^2 sẽ trở thành lớn tùy tý khi thời gian chuyển động lớn tùy ý, bởi vì h tăng với thời gian (xem bài tập 14.9). ♣

(b) Trong hệ quy chiếu này, có cả ảnh hưởng của sự giãn nở thời gian trong thuyết tương đối hẹp và thuyết tương đối tổng quát. A chuyển động với vận tốc $2v$ đối với B trong hệ quy chiếu này (chúng ta không cần phải sử dụng công thức cộng vận tốc tương đối bởi vì $v \ll c$), do đó ảnh hưởng trong thuyết tương đối hẹp đó là đồng hồ của A chạy chậm bởi một thừa số $\sqrt{1-(2v)^2/c^2} \approx 1 - 2v^2/c^2$. Nhưng B chịu gia tốc $a = v^2/r$ hướng vào A, do đó ảnh hưởng trong thuyết tương đối tổng quát đó là đồng hồ của A chạy nhanh bởi một thừa số $1 + a(2r)/c^2 = 1 + 2v^2/c^2$ (bởi vì họ cách nhau một khoảng $2r$). Nhân hai ảnh hưởng của thuyết tương đối hẹp và thuyết tương đối tổng quát này với nhau chúng ta tìm thấy (tới bậc thấp nhất) rằng hai đồng hồ của họ chạy cùng tốc độ.

(c) Trong hệ quy chiếu này, không có chuyển động tương đối giữa A và B, do đó chỉ có (tối đa) ảnh hưởng của thuyết tương đối tổng quát. Nhưng A và B có cùng thế năng hấp dẫn bởi vì họ có cùng bán kính. Do đó họ đều nhìn thấy các đồng hồ chạy cùng tốc độ. Nếu bạn muốn, bạn có thể sắp xếp thành hàng một chuỗi các đồng hồ dọc theo đường kính giữa A và B như chúng ta đã làm dọc theo bán kính trong phần (c) của bài tập 14.3. Các đồng hồ sẽ chạy nhanh hơn khi bạn đi vào tâm, và sau đó chạy chậm và giảm cùng lượng thời gian như vậy khi bạn đi tới điểm đối xứng xuyên tâm phía bên kia của đường tròn.

14.5. Quan sát của người đang tăng tốc

(a) LỜI GIẢI THỨ NHẤT: Phương trình (14.5) chỉ ra rằng khoảng cách mà tên lửa di chuyển (đo trong hệ quy chiếu quán tính ban đầu) là một hàm của thời gian trong hệ quy chiếu quán tính này và bằng

$$d = \frac{1}{g}\left(\sqrt{1+(gt)^2} - 1\right). \tag{14.27}$$

Do đó một người quan sát quán tính trên hành tinh sẽ đo được khoảng cách tên lửa-hành tinh bằng

$$x = \ell - \frac{1}{g}\left(\sqrt{1+(gt)^2} - 1\right). \tag{14.28}$$

Người quan sát trong tên lửa nhìn thấy khoảng cách này bị co lại bởi một thừa số γ. Sử dụng kết quả của bài tập 14.16, chúng ta có $\gamma = \sqrt{1+(gt)^2} = \cosh(g\tau)$. Do đó khoảng cách tên lửa-hành tinh đo trong hệ quy chiếu quán tính tức thời của tên lửa sẽ là

$$x = \frac{\ell - \frac{1}{g}\left(\cosh(g\tau) - 1\right)}{\cosh(g\tau)} \quad \Longrightarrow \quad 1 + gx = \frac{1+g\ell}{\cosh(g\tau)}. \tag{14.29}$$

LỜI GIẢI THỨ HAI: Phương trình (14.21) đưa ra vận tốc của hành tinh trong hệ quy chiếu gia tốc của tên lửa. Sử dụng các kết quả của bài tập 14.16 để viết v theo τ, chúng ta có (với $c = 1$)

$$\frac{dx}{d\tau} = -(1+gx)\tanh(g\tau). \tag{14.30}$$

Tách biến và sau đó tích phân dẫn đến

$$\int \frac{dx}{1+gx} = \int \tanh(g\tau)d\tau \quad \Longrightarrow \quad \ln(1+gx) = -\ln(\cosh(g\tau)) + C$$
$$\Longrightarrow \quad 1+gx\frac{A}{\cosh(g\tau)}. \tag{14.31}$$

Do điều kiện đầu là $x = \ell$ khi $\tau = 0$ nên chúng ta phải có $A = 1 + g\ell$, kết quả này dẫn đến phương trình (14.16) như mong muốn của chúng ta.

(b) Phương trình (14.20) chỉ ra rằng đồng hồ của hành tinh chạy nhanh (hoặc chậm) theo liên hệ

$$dt = d\tau(1+gx)\sqrt{1-v^2}. \tag{14.32}$$

Kết quả của bài tập 14.16 dẫn đến $\sqrt{1-v^2} = 1/\cosh(g\tau)$. Kết hợp điều này với kết quả của $1 + gx$ ở trên và sau đó tích phân chúng ta thu được

$$\int dt = \int \frac{(1+g\ell)d\tau}{\cosh^2(g\tau)} \quad \Longrightarrow \quad gt = (1+g\ell)\tanh(g\tau). \tag{14.33}$$

14.6. Chỉ thời gian lớn hơn

Lời giải thích tại sao đồng hồ lại chỉ các thời gian khác nhau trong hệ quy chiếu mặt đất được chỉ ra sau đây. Tên lửa bị co dần độ dài trong hệ quy chiếu mặt đất, điều này có nghĩa là đầu phía trước không di chuyển nhanh như đầu phía sau. Do đó, thừa số giãn nở thời gian đối với đồng hồ phía trước không lớn bằng thừa số của đồng hồ phía sau. Dẫn đến đồng hồ phía trước mất ít thời gian đối với mặt đất hơn, và do đó cuối cùng chạy nhanh hơn so với đồng hồ phía sau. Tất nhiên, không phải hiển nhiên rằng mọi thứ đều được mô tả định lượng và rằng đồng hồ phía trước rốt cuộc cuối cùng sẽ chỉ thời gian lớn tùy ý so với đồng hồ phía sau. Thực tế, sẽ hơi ngạc nhiên là trường hợp này đúng như vậy bởi vì sự khác nhau ở trên về vận tốc là rất nhỏ. Nhưng bây giờ chúng ta sẽ chỉ ra rằng sự giải thích ở trên quả thực là đúng đối với sự khác nhau trong số chỉ của hai đồng hồ.

Giả sử phía sau của tên lửa đặt tại vị trí x. Khi đó phía trước sẽ ở vị trí $x + L\sqrt{1-v^2}$, do sự co độ dài. Lấy đạo hàm theo thời gian của hai vị trí này, chúng ta thu được các vận tốc của phía trước và phía sau là (với $v \equiv dx/dt$)[12]

$$v_b = v, \quad \text{và} \quad v_f = v(1 - L\gamma\dot{v}). \tag{14.34}$$

[12]Bởi vì hai vận tốc này không bằng nhau nên sẽ có một sự mơ hồ là vận tốc nào chúng ta sẽ sử dụng trong thừa số co độ dài $\sqrt{1-v^2}$. Một cách tương đương, tên lửa không có một hệ quy chiếu quán tính riêng lẻ mà có thể mô tả được toàn bộ nó. Nhưng bạn có thể chỉ ra rằng bất kỳ sự khác biệt nào nảy sinh từ sự mơ hồ này đều có bậc lớn hơn gL/c^2 mà chúng ta quan tâm.

Nếu chúng ta giả thiết rằng đầu phía sau là phần có gia tốc g (sẽ không quan trọng là chúng ta chọn đầu nào) thì chúng ta có thể sử dụng kết quả trong phương trình (14.4),

$$v_b = v = \frac{gt}{\sqrt{1+(gt)^2}}, \tag{14.35}$$

trong đó t là thời gian trong hệ quy chiếu mặt đất. Để mô tả v, bây giờ chúng ta phải tìm các thừa số γ liên kết với vận tốc của phía trước và phía sau tên lửa. Thừa số γ liên kết với vận tốc v của phía sau là

$$\gamma_b = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = \sqrt{1+(gt)^2}. \tag{14.36}$$

Thừa số γ liên kết với vận tốc $v_f = v(1 - L\gamma\dot{v})$ của phía trước thì phức tạp hơn một chút. Đầu tiên chúng ta phải tính toán $\dot{v}$. Từ phương trình (14.35) chúng ta thu được $\dot{v} = g/(1+g^2t^2)^{3/2}$, điều này dẫn đến

$$v_f = v(1 - L\gamma\dot{v}) = \frac{gt}{\sqrt{1+(gt)^2}}\left(1 - \frac{gL}{1+g^2t^2}\right). \tag{14.37}$$

Thừa số γ (hoặc đúng hơn là $1/\gamma$ vì đây là đại lượng chúng ta sẽ đề cập tới) liên kết với vận tốc này được cho sau đây. Trong dòng đầu tiên dưới đây, chúng ta bỏ qua đại lượng bậc cao hơn $(gL)^2$ bởi vì nó thực sự là $(gL/c^2)^2$ và chúng ta đã giả thiết rằng gL/c^2 là nhỏ. Và trong dòng thứ ba thu được, chúng ta sử dụng xấp xỉ chuỗi Taylor $\sqrt{1-\epsilon} \approx 1 - \epsilon/2$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma_f} = \sqrt{1-v_f^2} \;\; &\approx \;\; \sqrt{1 - \frac{g^2t^2}{1+g^2t^2}\left(1 - \frac{2gL}{1+g^2t^2}\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+g^2t^2}}\sqrt{1 + \frac{2g^3t^2L}{1+g^2t^2}} \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{1+g^2t^2}}\left(1 + \frac{g^3t^2L}{1+g^2t^2}\right). \end{aligned} \tag{14.38}$$

Bây giờ chúng ta có thể tính toán thời gian mà mỗi đồng hồ chỉ tại thời điểm t trong hệ quy chiếu mặt đất.Thời gian của đồng hồ phía sau thay đổi theo mối liên hệ $dt_b = dt/\gamma_b$, do đó phương trình (14.36) dẫn đến

$$t_b = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1+g^2t^2}}. \tag{14.39}$$

Tích phân của $dx/\sqrt{1+x^2}$ là $\sinh^{-1} x$ (để có được kết quả này bạn hãy đổi biến $x \equiv \sinh\theta$). Đặt $x \equiv gt$, chúng ta có

$$gt_b = \sinh^{-1}(gt). \tag{14.40}$$

Thời gian của đồng hồ phía trước thay đổi theo $dt_f = dt/\gamma_f$, do đó phương trình (14.38) dẫn đến

$$t_f = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1+g^2t^2}} + \int_0^t \frac{g^3t^2L\,dt}{(1+g^2t^2)^{3/2}}. \tag{14.41}$$

Tích phân của $x^2dx/(1+x^2)^{3/2}$ là $\sinh^{-1}x - x/\sqrt{1+x^2}$ (để có được kết quả này bạn hãy thực hiện phép đổi biến $x \equiv \sinh\theta$, và sau đó sử dụng $\int d\theta/\cosh^2\theta = \tanh\theta$). Đặt $x \equiv gt$, chúng ta có

$$gt_f = \sinh^{-1}(gt) + (gL)\left(\sinh^{-1}(gt) - \frac{gt}{\sqrt{1+g^2t^2}}\right). \tag{14.42}$$

Sử dụng phương trình (14.35) và (14.40) chúng ta có thể viết lại kết quả này như sau

$$gt_f = gt_b(1+gL) - gLv. \tag{14.43}$$

Chia hai vế cho g và đưa trở lại ký hiệu c để làm chính xác các đơn vị, cuối cùng chúng ta có

$$t_f = t_b\left(1+\frac{gL}{c^2}\right) - \frac{Lv}{c^2}, \tag{14.44}$$

như chúng ta mong muốn. Nếu chúng ta xem xét sự tính toán này theo quan điểm ngược lại thì chúng ta sẽ thấy rằng bằng cách chỉ sử dụng các khái niệm trong thuyết tương đối hẹp, chúng ta đã chứng minh rằng một người nào đó tại phía sau của tên lửa nhìn thấy đồng hồ phía trước chạy nhanh hơn bởi một thừa số $(1+gL/c^2)$. Tuy nhiên, có rất nhiều cách dễ dàng hơn để thu được kết quả này như chúng ta đã thấy trong Mục 14.2 và trong bài tập 11.25 ("Gia tốc và sự thay đổi màu đỏ").

14.7. Quay trở lại đại lượng Lv/c^2

Xét trường hợp đầu tiên ở đó tên lửa tăng tốc trong khi bạn đứng yên. Bài tập 14.6 là giống hệt ở đây, và bài tập này chỉ ra rằng trong hệ quy chiếu của bạn các số chỉ trên các đồng hồ liên hệ với nhau bởi

$$t_f = t_b\left(1+\frac{gL}{c^2}\right) - \frac{Lv}{c^2}. \tag{14.45}$$

Cuối cùng bạn sẽ nhìn thấy đồng hồ phía trước chỉ một lượng thời gian lớn hơn tùy ý so với đồng hồ ở phía sau. Nhưng chú ý rằng khi các thời gian là nhỏ (trước khi mọi thứ xảy ra tương đối) thì kết quả trong vật lý Newton là vẫn đúng, do đó chúng ta có

$$t_f \approx \left(t_b + \frac{Lv}{c^2}\right) - \frac{Lv}{c^2} = t_b. \tag{14.46}$$

Do đó trong trường hợp này khi tên lửa tăng tốc, về bản chất thì cả hai đồng hồ cùng chỉ một thời gian khi gần với thời điểm xuất phát. Điều này có ý nghĩa, cả hai đồng hồ về bản chất có cùng vận tốc tại thời điểm bắt đầu, do đó tới bậc thấp nhất thì các thừa số γ của chúng là như nhau, dẫn đến các đồng hồ chạy cùng tốc độ. Nhưng cuối cùng đồng hồ phía trước sẽ chạy nhanh hơn đồng hồ phía sau.

Bây giờ chúng ta hãy xét trường hợp bạn tăng tốc trong khi tên lửa đứng yên. Trường hợp này giống như bài tập 14.5 nếu bây giờ chúng ta để tên lửa trong bài toán đó trở thành bạn và hai hành tinh cách nhau một khoảng L là hai đầu của tên lửa. Sử dụng phương trình (14.33) và giả thiết rằng bạn đang tăng tốc hướng về phía tên lửa, khi đó các thời điểm mà bạn quan sát đồng hồ phía trước và đồng hồ phía sau sẽ là

$$gt_f = (1 + g\ell)\tanh(g\tau), \quad \text{và} \quad gt_b = (1 + g(\ell + L))\tanh(g\tau). \tag{14.47}$$

Nhưng từ bài tập 14.16 chúng ta biết rằng vận tốc của bạn đối với tên lửa là $v = \tanh(g\tau)$. Do đó phương trình (14.47) dẫn đến $t_b = t_f + Lv$, hoặc $t_b = t_f + Lv/c^2$ khi đưa vào ký hiệu c. Do đó trong trường hợp này chúng ta đi đến kết quả "đồng hồ phía sau chạy nhanh hơn" Lv/c^2 đã biết.

Điểm mấu chốt ở đây đó là trong trường hợp thứ hai các đồng hồ được đồng bộ hóa trong hệ quy chiếu tên lửa, và đây là giả thiết mà chúng ta đã xét để đưa ra kết quả Lv/c^2 trong Chương 11. Trong trường hợp đầu tiên ở trên khi tên lửa tăng tốc, các đồng hồ *không* được đồng bộ hóa trong hệ quy chiếu tên lửa (ngoại trừ thời điểm ngay khi xuất phát), do đó sẽ không có gì ngạc nhiên là chúng ta không thu được kết quả Lv/c^2.

14.8. Chuyển động tròn trên trái đất

Đây là một trường hợp mà chúng ta sẽ thực sự cần sử dụng thuật ngữ chính xác, nguyên lý thời gian riêng *dừng*. Quỹ đạo của B sẽ sinh ra một điểm yên ngựa đối với thời gian riêng. Giá trị tại điểm yên ngựa này nhỏ hơn thời gian riêng của A, nhưng điều này không quan trọng bởi vì chúng ta chỉ quan tâm tới các điểm dừng địa phương chứ không phải là cực trị toàn cục.

Để chỉ ra rằng chúng ta có một điểm yên ngựa, chúng ta phải chỉ ra (1) hiệu thời gian riêng là bậc hai, và (2) tồn tại các quỹ đạo lân cận sinh ra cả thời riêng lớn hơn và thời gian riêng nhỏ hơn. Điều đầu tiên là đúng bởi vì hiệu bậc nhất triệt tiêu do thực tế rằng quỹ đạo phải thỏa mãn phương trình Euler-Lagrange đối với hàm Lagrange trong phương trình (14.15) bởi vì các quỹ đạo quả thực là quỹ đạo vật lý.

Điều thứ hai cũng đúng bởi vì thời gian riêng có thể được làm nhỏ hơn bằng cách làm cho B chuyển động nhanh dần hoặc chậm dần. Điều này sẽ dẫn đến sự tăng trong ảnh hưởng của giãn nở thời gian theo quan sát của A, do đó sinh ra thời gian riêng nhỏ hơn.[13] Và thời gian riêng có thể được làm lớn hơn bằng cách làm cho B có quỹ đạo lân cận không có dạng đường tròn lớn trên trái đất. (Tưởng tượng rằng đường cong được xác định bằng một mẩu cao su trượt từ

[13] Điều này đúng với những lý do giống như một người chuyển động với vận tốc không đổi theo một đường thẳng giữa hai điểm sẽ chỉ ra thời gian riêng lớn hơn một người thứ hai chuyển động nhanh dần và chậm dần. Điều này có được trực tiếp từ sự giãn nở thời gian trong thuyết tương đối hẹp theo quan sát của người đầu tiên. Nếu bạn muốn bạn có thể tưởng tượng rằng bạn trải quỹ đạo tròn của B thành một đường thẳng, và sau đó sử dụng kết quả mà chúng ta vừa đề cập đến. Theo cách quan sát của đồng hồ của A thì sẽ không ảnh hưởng gì nếu đường tròn được trải ra thành một đường thẳng.

vị trí đường tròn lớn.) Quỹ đạo này ngắn hơn, do đó B sẽ không phải di chuyển nhanh để quay trở lại trong một thời điểm cho trước, dẫn đến theo quan sát của A ảnh hưởng sự giãn nở thời gian sẽ là nhỏ hơn, điều này sẽ sinh ra thời gian riêng lớn hơn.

14.9. Nghịch lý của anh em sinh đôi

(a) Trong hệ quy chiếu trái đất, tàu không gian về bản chất là di chuyển với vận tốc v trong toàn bộ hành trình. Do đó tuổi của người di chuyển sẽ nhỏ hơn bởi một phân số $\sqrt{1-v^2/c^2} \approx 1-v^2/2c^2$. Dẫn đến phần thời gian bị mất là $v^2/2c^2$. Ảnh hưởng của sự giãn nở thời gian là khác nhau trong giai đoạn ngắn khi mà con tàu quay đầu lại nhưng điều này là không đáng kể.

(b) Gọi khoảng cách tới ngôi sao là ℓ khi đo trong hệ quy chiếu của trái đất (nhưng sự sai khác về độ dài trong hai hệ quy chiếu là không đáng kể trong bài toán này), và giả sử thời gian quay đầu lại là T. Khi đó giả thiết nói rằng $T \ll (2\ell)/v$.

Trong giai đoạn vận tốc không đổi của hành trình, người di chuyển nhìn thấy đồng hồ trên trái đất chạy chậm bởi một phân số $\sqrt{1-v^2/2c^2} \approx 1-v^2/2c^2$. Thời gian đối với giai đoạn vận tốc không đổi này về bản chất là $2\ell/v$, do đó đồng hồ trên trái đất bị chậm một khoảng thời gian $(v^2/2c^2)(2\ell/v) = v\ell/c^2$.

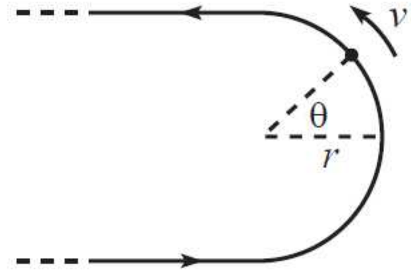
Tuy nhiên, trong thời gian quay đầu trở lại, con tàu tăng tốc hướng về trái đất, do đó người di chuyển nhìn thấy đồng hồ trên trái đất chạy nhanh bởi vì ảnh hưởng của sự giãn nở thời gian trong thuyết tương đối tổng quát. Độ lớn của gia tốc là $a = 2v/T$ bởi vì con tàu thay đổi vận tốc từ v tới $-v$ trong thời gian T. Do đó đồng hồ trên trái đất chạy nhanh bởi một thừa số $1 + a\ell/c^2 = 1 + 2v\ell/Tc^2$. Điều này xảy ra trong thời gian T, do đó đồng hồ trên trái đất chạy nhanh thêm một khoảng thời gian $(2v\ell/Tc^2)T = 2v\ell/c^2$.

Kết hợp hai kết quả này lại chúng ta thấy rằng đồng hồ trên trái đất sẽ chạy nhanh thêm một khoảng thời gian $2v\ell/c^2 - v\ell/c^2 = v\ell/c^2$. Giá trị này là phân số $(v\ell/c^2)/(2\ell/v) = v^2/2c^2$ khi so với thời gian tổng trong toàn bộ hành trình, kết quả này giống như kết quả trong phần (a).

14.10. Một trường hợp khác về nghịch lý của anh em sinh đôi

(a) Sự khác biệt duy nhất giữa bài toán này và bài toán trước đó là bản chất của quá trình quay đầu lại, do đó tất cả những gì mà chúng ta cần chỉ ra ở đây đó là người di chuyển vẫn nhìn thấy đồng hồ trên trái đất chạy nhanh thêm một khoảng thời gian $2v\ell/c^2$ trong quá trình quay đầu lại.

Giả sử bán kính của nửa đường tròn là r. Khi đó độ lớn của gia tốc là $a = v^2/r$. Gọi θ là



Hình 14.9:

góc như được chỉ ra trong hình 14.9. Đối với một góc θ cho trước, về bản chất thì trái đất ở độ cao $\ell\cos\theta$ trong trường hấp dẫn mà con tàu phải chịu. Phần thời gian mà đồng hồ trái đất chạy nhanh khi người di chuyển ở vị trí góc θ do đó sẽ là $ah/c^2 = (v^2/r)(\ell\cos\theta)/c^2$. Tích phân biểu thức này trên toàn bộ thời gian quay đầu lại, và sử dụng $dt = rd\theta/v$, chúng ta thấy rằng đồng hồ trên trái đất chạy nhanh một khoảng thời gian đúng như chúng ta mong muốn là

$$\Delta t = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{v^2\ell\cos\theta}{rc^2}\right)\left(\frac{rd\theta}{v}\right) = \frac{2v\ell}{c^2}. \tag{14.48}$$

(b) Gọi vectơ gia tốc tại một thời điểm cho trước là $\mathbf{a}$ và giả sử $\boldsymbol{\ell}$ là vectơ hướng từ con tàu tới trái đất. Chú ý rằng bởi vì quá trình con tàu quay đầu lại xảy ra trong một miền không gian nhỏ nên về bản chất thì $\boldsymbol{\ell}$ ở đây là không đổi. Trái đất có độ cao $\hat{\mathbf{a}}\cdot\boldsymbol{\ell}$ trong trường hấp dẫn mà con tàu phải chịu; tích chấm ở đây chỉ đại lượng cos trong lời giải ở phần (a) ở trên. Do đó phần thời gian chạy nhanh ah/c^2 sẽ bằng $|\mathbf{a}|(\hat{\mathbf{a}}\cdot\boldsymbol{\ell})/c^2 = \mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\ell}/c^2$. Tích phân biểu thức này trên toàn bộ thời gian khi con tàu quay đầu lại, chúng ta thấy rằng đồng hồ trên trái đất chạy nhanh hơn một khoảng thời gian

$$\begin{aligned}\Delta t = \int_{t_i}^{t_f} \frac{\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\ell}}{c^2}dt &= \frac{\boldsymbol{\ell}}{c^2}\cdot\int_{t_i}^{t_f}\mathbf{a}dt \\ &= \frac{\boldsymbol{\ell}}{c^2}\cdot(\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_i) \\ &= \frac{\boldsymbol{\ell}\cdot(2\mathbf{v}_f)}{c^2} \\ &= \frac{2v\ell}{c^2},\end{aligned} \tag{14.49}$$

như chúng ta mong muốn chỉ ra. Điểm mấu chốt ở đây đó là cho dù sự di chuyển trong quá trình con tàu quay đầu phức tạp thế nào đi chăng nữa thì tổng ảnh hưởng cũng chỉ đơn giản là sự thay đổi vận tốc từ $\mathbf{v}$ hướng ra ngoài thành $\mathbf{v}$ hướng vào trong.

14.11. Một trường hợp nữa về nghịch lý của anh em sinh đôi

(a) Theo quan sát của A, mối liên hệ giữa thời gian của hai anh em sinh đôi sẽ là

$$dt_B = \sqrt{1-v^2}dt_A. \tag{14.50}$$

Giả sử $v_0 \ll c$, chúng ta có thể nói rằng $v(t_A)$ về bản chất là bằng $v_0 - gt_A$, do đó mỗi giai đoạn đi và về của cuộc hành trình sẽ mất một khoảng thời gian bản chất là bằng v_0/g trong hệ quy chiếu của A. Dẫn đến tổng thời gian trôi qua trên đồng hồ của A là

$$\begin{aligned} T_B = \int dt_B &\approx 2\int_0^{v_0/g} \sqrt{1-v^2}dt_A \\ &\approx 2\int_0^{v_0/g} \left(1-\frac{v^2}{2}\right)dt_A \\ &\approx 2\int_0^{v_0/g} \left(1-\frac{1}{2}(v_0-gt)^2\right)dt \\ &= 2\left(t+\frac{1}{6g}(v_0-gt)^3\right)\Big|_0^{v_0/g} \\ &= \frac{2v_0}{g}-\frac{v_0^3}{3gc^2}, \end{aligned} \tag{14.51}$$

trong đó chúng ta đã đưa trở lại ký hiệu c để làm cho các đơn vị chính xác. Do đó tỷ số thời gian trôi qua trên đồng hồ của B và của A sẽ là

$$\frac{T_B}{T_A} \approx \frac{T_B}{2v_0/g} \approx 1-\frac{v_0^2}{6c^2}. \tag{14.52}$$

(b) Theo quan sát của B, mối liên hệ giữa thời gian của hai anh em sinh đôi được cho bởi phương trình (14.13),

$$dt_A = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\left(1+\frac{gy}{c^2}\right)dt_B. \tag{14.53}$$

Giả sử rằng $v_0 \ll c$, chúng ta có thể nói rằng $v(t_B)$ về bản chất là bằng $v_0 - gt_B$, và độ cao của A là $v_0t_B - gt_B^2/2$. Mỗi giai đoạn đi lên và đi xuống của cuộc hành trình mất một khoảng thời gian v_0/g trong hệ quy chiếu của B. Do đó, tổng thời gian trôi qua trên đồng hồ của A là (sử dụng xấp xỉ trong phương trình (14.14) và bỏ qua ký hiệu c)

$$\begin{aligned} T_A = \int dt_A &\approx 2\int_0^{v_0/g} \left(1-\frac{v^2}{2}+gy\right)dt_B \\ &\approx 2\int_0^{v_0/g} \left(1-\frac{1}{2}(v_0-gt)^2+g(v_0t-gt^2/2)\right)dt \\ &= 2\left(t+\frac{1}{6g}(v_0-gt)^3+g\left(\frac{v_0t^2}{2}-\frac{gt^3}{6}\right)\right)\Big|_0^{v_0/g} \\ &= \frac{2v_0}{g}-\frac{v_0^3}{3g}+g\left(\frac{v_0^3}{g^2}-\frac{v_0^3}{3g^2}\right) \\ &= \frac{2v_0}{g}+\frac{v_0^3}{3gc^2}, \end{aligned} \tag{14.54}$$

trong đó chúng ta đã đưa trở lại ký hiệu c để làm cho các đơn vị chính xác. Do đó chúng ta có

$$\frac{T_A}{T_B} \approx \frac{T_A}{2v_0/g} \approx 1+\frac{v_0^2}{6c^2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{T_B}{T_A} \approx 1-\frac{v_0^2}{6c^2}, \tag{14.55}$$

chính xác đến sai số bậc cao hơn. Kết quả này phù hợp với kết quả mà chúng ta đã tìm thấy trong phần (a), điều này đúng như những gì mà nguyên lý tương đương đòi hỏi.

Phụ lục A

Các công thức cần thiết

A.1 Chuỗi Taylor

Dạng tổng quát của một chuỗi Taylor là

$$f(x_0 + x) = f(x_0) + f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}x^3 + \cdots , \tag{A.1}$$

mà nó có thể được kiểm tra bằng cách lấy các đạo hàm và sau đó cho $x = 0$. Ví dụ như, lấy đạo hàm bậc nhất và sau đó cho $x = 0$ nhận được $f'(x_0)$ ở vế trái, và cũng như $f'(x_0)$ ở vế phải, bởi vì số hạng đầu tiên là một hằng số và cho ta giá trị bằng không, và số hạng thứ hai cho ta $f'(x_0)$, và tất cả các số hạng còn lại sẽ bằng không một khi chúng ta cho $x = 0$ bởi vì tất cả chúng đều có ít nhất một số mũ của x trong biểu thức của chúng. Tương tự như vậy, nếu chúng ta lấy đạo hàm cấp hai của mỗi vế và sau đó cho $x = 0$, chúng ta sẽ nhận được $f''(x_0)$ ở cả hai vế. Và tiếp tục như vậy với mọi cấp của đạo hàm. Do đó, bởi vì hai hàm số ở hai vế của phương trình trên là bằng nhau tại $x = 0$ và cũng có đạo hàm cấp n của chúng bằng nhau tại $x = 0$ với mọi n, chúng thực ra phải cùng là một hàm số (với giả thiết rằng chúng là những hàm khả vi vô hạn lần, là giả thiết mà chúng ta hay sử dụng trong vật lý).

Một vài chuỗi Taylor đặc trưng mà hay xuất hiện được liệt kê bên dưới. Tất cả chúng đều có thể nhận được qua phương trình (A.1), nhưng đôi khi có những cách nhanh hơn để nhận được chúng. Ví dụ như, phương trình (A.3) sẽ dễ dàng nhận được nhất bằng việc lấy đạo hàm của phương trình (A.2), là phương trình mà bản thân nó đơn giản là tổng của một chuỗi cấp số nhân.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \tag{A.2}$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots \tag{A.3}$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots \tag{A.4}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \tag{A.5}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \tag{A.6}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \tag{A.7}$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \cdots \tag{A.8}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + \cdots \tag{A.9}$$

$$(1+x)^n = 1 + nx + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \cdots \tag{A.10}$$

A.2 Những công thức đẹp đẽ

Công thức đầu tiên ở đây có thể được chứng minh một cách nhanh chóng bằng cách chỉ ra rằng chuỗi Taylor của cả hai vế là bằng nhau.

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{A.11}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}), \quad \sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \tag{A.12}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}, \quad \sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} \tag{A.13}$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} \tag{A.14}$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta, \quad \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta \tag{A.15}$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \tag{A.16}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \tag{A.17}$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} \tag{A.18}$$

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \tag{A.19}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \tag{A.20}$$

$$\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x, \quad \frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x \tag{A.21}$$

A.3 Các công thức tích phân

$$\int \ln x dx = x \ln x - x \tag{A.22}$$

$$\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \tag{A.23}$$

$$\int xe^x dx = e^x(x-1) \tag{A.24}$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x, \quad \text{hay} \quad -\cot^{-1} \mathrm{x} \tag{A.25}$$

$$\int \frac{dx}{x(1+x^2)} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x^2}{1+x^2} \right) \tag{A.26}$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \quad \text{hay} \quad \tanh^{-1} \mathrm{x} \quad (\mathrm{x}^2 < 1) \tag{A.27}$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) \quad \text{hay} \quad \coth^{-1} \mathrm{x} \quad (\mathrm{x}^2 > 1) \tag{A.28}$$

$$\int \sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{1+x^2} + \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \right) \tag{A.29}$$

$$\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x}} dx = -\frac{2}{3}(5+x)\sqrt{1-x} \tag{A.30}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x \quad \text{hay} \quad -\cos^{-1} \mathrm{x} \tag{A.31}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \quad \text{hay} \quad \sinh^{-1} \mathrm{x} \tag{A.32}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) \quad \text{hay} \quad \cosh^{-1} \mathrm{x} \tag{A.33}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1} x \quad \text{hay} \quad -\csc^{-1} \mathrm{x} \tag{A.34}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = -\ln(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}) \quad \text{hay} \quad -\mathrm{csch}^{-1}\mathrm{x} \tag{A.35}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = -\ln(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}) \quad \text{hay} \quad -\text{sech}^{-1}\text{x} \tag{A.36}$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right) \tag{A.37}$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left(\frac{1-\cos x}{\sin x}\right) \tag{A.38}$$

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = -\ln\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right) \tag{A.39}$$

Phụ lục B

Giải tích hàm nhiều biến, giải tích vector

Phụ lục này cho ta một tóm lược về giải tích hàm nhiều biến, cũng như được biết đến như là giải tích vector. Ba chủ đề đầu tiên ở bên dưới (tích vô hướng, tích có hướng, các đạo hàm riêng) được sử dụng một cách thường xuyên trong cuốn sách này, vì vậy nếu bạn chưa xem chúng trước đó bao giờ, bạn nên đọc các phần này một cách cẩn thận. Nhưng ba chủ đề cuối (gradient, divergence, curl) chỉ được sử dụng đôi lần, vì vậy sẽ không cần thiết lắm để bạn phải hiểu rõ về chúng (ít nhất là đối với cuốn sách này). Đối với tất cả các chủ đề, hoàn toàn có thể để trình bày chúng một cách sâu hơn, nhưng tôi sẽ chỉ trình bày những nội dung cơ bản ở đây. Nếu bạn muốn biết kỹ hơn, bất kỳ cuốn sách về giải tích hàm nhiều biến nào cũng có thể giúp bạn.

B.1 Tích vô hướng

Tích vô hướng giữa hai vector được định nghĩa là

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \equiv a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \tag{B.1}$$

Tích vô hướng tác động lên hai vector và cho kết quả là một số vô hướng, đó là lý do tại sao nó có tên là như vậy. Bạn có thể sử dụng phương trình (B.1) một cách nhanh chóng để chỉ ra rằng tích vô hướng có tính chất giao hoán và phân phối. Nghĩa là, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$, và $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$. Chú ý rằng tích vô hướng của một vector với chính nó là $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$, đơn giản là cho bình phương độ dài của nó, $|\mathbf{a}|^2 \equiv a^2$.

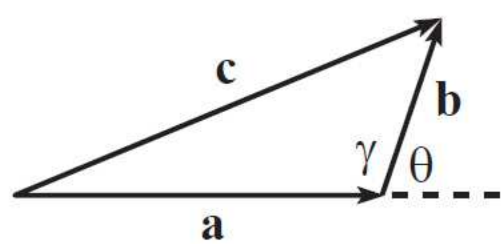
Việc lấy tổng các tích của các thành phần tương ứng của hai vector, như chúng ta đã làm trong phương trình (B.1), có thể giống như là một việc làm ngớ ngẩn và tùy ý. Tại sao chúng ta lại không đi xét tổng của các tích của các thành phần tương ứng được lấy mũ bậc ba lên? Lý do là tích vô hướng như là chúng ta đã định nghĩa có rất nhiều tính chất đẹp, mà tính chất có ích nhất trong số các tính chất này là nó có thể được viết dưới dạng

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\theta \equiv ab\cos\theta, \tag{B.2}$$

trong đó θ là góc giữa hai vector. Chúng ta có thể minh họa điều này như sau. Xét tích vô hướng của vector $\mathbf{c} \equiv \mathbf{a} + \mathbf{b}$ với chính nó, mà đơn giản cho kết quả là bình phương độ dài của $\mathbf{c}$. Sử dụng các tính chất giao hoán và phân phối, chúng ta có

$$c^2 = (\mathbf{a}+\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = a^2 + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + b^2. \tag{B.3}$$

Nhưng từ định luật cosine áp dụng cho tam giác trong Hình B.1, chúng ta có



Hình B.1:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta, \tag{B.4}$$

bởi vì $\gamma = \pi - \theta$. So sánh kết quả này với phương trình (B.3) chúng ta nhận được $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = ab\cos\theta$, là điều mà chúng ta mong muốn. Góc giữa hai vector do đó được cho bởi

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}. \tag{B.5}$$

Một hệ quả đẹp đẽ của kết quả này là nếu tích vô hướng của hai vector bằng không, thì $\cos\theta = 0$, mà có nghĩa là hai vector đó là vuông góc với nhau. Nếu một người nào đó cho bạn vector $(1, -2, 3)$ và $(4, 5, 2)$, thì nó sẽ không rõ ràng một chút nào rằng là chúng vuông góc với nhau. Nhưng bạn biết từ phương trình (B.5) thì chúng vuông góc với nhau thật.

Về mặt hình học, tích vô hướng $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = ab\cos\theta$ bằng với độ dài của $\mathbf{a}$ nhân vơi thành phần của $\mathbf{b}$ dọc theo $\mathbf{a}$. Hoặc ngược lại, phụ thuộc vào độ dài nào mà bạn muốn nhóm nó với hệ số $\cos\theta$. Nếu chúng ta xoay hệ tọa độ của chúng ta, thì tích vô hướng của hai vector vẫn không thay đổi, bởi vì nó chỉ phụ thuộc vào độ dài của chúng và góc giữa chúng, và những đại lượng này không bị ảnh hưởng bởi sự quay. Nói cách khác, tích vô hướng là một số vô hướng. Điều này không hiển nhiên từ việc xem xét định nghĩa ban đầu trong phương trình (B.1), bởi vì các tọa độ tất cả sẽ bị rối rắm lên trong quá trình xoay hệ tọa độ.

Ví dụ (Khoảng cách trên mặt đất): Cho góc kinh độ ϕ và góc cực θ (được đo từ cực bắc, vì vậy θ bằng 90^o trừ đi góc vĩ độ) của hai điểm trên mặt đất, hỏi khoảng cách giữa chúng bằng bao nhiêu khi được đo dọc theo mặt đất?

Lời giải: Mục đích của chúng ta là đi tìm góc β giữa hai vector bán kính của hai điểm, bởi vì khoảng cách cần tính khi đó bằng $R\beta$. Đây là một vấn đề khó nếu chúng ta không sử dụng tích vô hướng, nhưng mọi thứ sẽ dễ dàng hơn nếu chúng ta sử dụng phương trình (B.5) để nói rằng $\cos\beta = \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2/R^2$. Vấn đề khi đó sẽ trở thành đi tìm $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2$. Các tọa độ Đề Các của hai vector này là

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= R(\sin\theta_1\cos\phi_1, \sin\theta_1\sin\phi_1, \cos\theta_1), \\ \mathbf{r}_2 &= R(\sin\theta_2\cos\phi_2, \sin\theta_2\sin\phi_2, \cos\theta_2). \end{aligned} \tag{B.6}$$

Khoảng cách cần tính khi đó là $R\beta = R\cos^{-1}(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2/R^2)$, trong đó

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2/R^2 &= \sin\theta_1\sin\theta_2(\cos\phi_1\cos\phi_2 + \sin\phi_1\sin\phi_2) + \cos\theta_1\cos\theta_2 \\ &= \sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\phi_2 - \phi_1) + \cos\theta_1\cos\theta_2. \end{aligned} \tag{B.7}$$

Chúng ta có thể kiểm tra một vài trường hợp giới hạn: Nếu $\phi_1 = \phi_2$, thì điều này cho ta $\beta = \theta_2 - \theta_1$ (hoặc $\theta_1 - \theta_2$, tùy thuộc vào đại lượng nào lớn hơn), như mong đợi. Và nếu $\theta_1 = \theta_2 = 90^o$, thì nó cho ta $\beta = \phi_2 - \phi_1$ (hoặc $\phi_1 - \phi_2$), như mong đợi.

B.2 Tích có hướng

Tích có hướng, hay là *tích vector*, giữa hai vector được định nghĩa qua một định thức và có dạng

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &\equiv \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \\ &= \hat{\mathbf{x}}(a_y b_z - a_z b_y) + \hat{\mathbf{y}}(a_z b_x - a_x b_z) + \hat{\mathbf{z}}(a_x b_y - a_y b_x). \end{aligned} \tag{B.8}$$

Tích có hướng tác dụng lên hai vector và cho kết quả là một vector khác. Cũng như tích vô hướng, bạn có thể chỉ ra rằng tích có hướng là có tính chất phân phối. Tuy nhiên, nó là *không* giao hoán (nghĩa là, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$), mà điều này là rõ rằng từ phương trình (B.8). Vì vậy tích có hướng của bất kỳ vector nào với chính nó là bằng không.

Cũng giống như tích vô hướng, lý do tại sao chúng ta lại xét tổ hợp các thành phần theo cách đặc biệt này là do nó có nhiều tính chất đẹp, và tính chất có ích nhất trong các tính chất này là chiều của nó vuông góc với cả hai vector $\mathbf{a}$ và $\mathbf{b}$ (theo hướng được xác định bởi quy tắc bàn tay phải; xem bên dưới), và độ lớn của nó là

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin\theta \equiv ab \sin\theta, \tag{B.9}$$

Đầu tiên hãy chỉ ra rằng $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ thực sự là vuông góc với cả hai vector $\mathbf{a}$ và $\mathbf{b}$. Chúng ta sẽ làm điều này bằng cách sử dụng thực tế thuận tiện ở phần trên là nếu tích vô hướng của hai vector bằng không, thì hai vector đó là vuông góc với nhau. Chúng ta có

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = a_x(a_y b_z - a_z b_y) + a_y(a_z b_x - a_x b_z) + a_z(a_x b_y - a_y b_x) = 0, \tag{B.10}$$

là điều mà ta mong muốn. Tương tự như vậy đối với $\mathbf{b}$. Tuy nhiên, vẫn còn một việc không rõ ràng ở đây, bởi vì mặc dù chúng ta biết rằng $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ có hướng chỉ theo phương vuông góc với mặt phẳng chứa hai vector $\mathbf{a}$ và $\mathbf{b}$, nhưng có hai hướng có thể xảy ra dọc theo đường thẳng này. Giả sử rằng hệ tọa độ của chúng ta đã chọn là "định hướng theo bàn tay phải" (nghĩa là, nếu bạn chĩa các ngón tay của bàn tay phải của bạn theo chiều của $\hat{\mathbf{x}}$ và sau đó xoay chúng đến chiều của $\hat{\mathbf{y}}$, thì ngón tay cái của bạn sẽ chỉ dọc theo chiều của $\hat{\mathbf{z}}$), thì chiều của $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ sẽ được xác định bằng quy tắc bàn tay phải. Nghĩa là, nếu bạn chĩa các ngón tay của bàn tay phải của bạn theo phương của vector $\mathbf{a}$ và rồi xoay chúng đến phương của vector $\mathbf{b}$ (theo góc mà nhỏ hơn 180^o), ngón tay cái của bạn sẽ chỉ dọc theo vector $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Điều này là nhất quán với thực tế rằng phương trình (B.8) cho ta $(1, 0, 0) \times (0, 1, 0) = (0, 0, 1)$, hoặc $\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}}$.

Bây giờ hãy đi minh họa kết quả $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = ab \sin\theta$, mà là kết quả tương đương với $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = a^2 b^2 (1 - \cos^2\theta)$, và kết quả này lại tương đương với $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = a^2 b^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$. Khi được viết qua các thành phần, phương trình cuối cùng này là

$$\begin{aligned} &(a_y b_z - a_z b_y)^2 + (a_z b_x - a_x b_z)^2 + (a_x b_y - a_y b_x)^2 \\ &= (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2) - (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z)^2. \end{aligned} \tag{B.11}$$

Nếu bạn nhìn phương trình này đủ lâu, bạn sẽ thấy rằng nó là một kết quả đúng. Ba loại các số hạng khác nhau ở cả hai vế là như nhau. Ví dụ như, cả hai vế đều có một số hạng $a_y^2 b_z^2$, một số hạng $-2a_y b_y a_z b_z$, và không có số hạng $a_x^2 b_x^2$.

B.3 Các đạo hàm riêng

Khi làm việc với một hàm chỉ phụ thuộc vào một biến, thì sẽ không phải lo về sự không rõ ràng khi lấy đạo hàm hàm đó. Tuy nhiên, với một hàm có nhiều biến, chúng ta phải xác định chúng ta đang lấy đạo hàm đối với biến nào. Nếu chúng ta có một hàm, ví dụ như, hai biến, $f(x, y)$, và nếu chúng ta muốn lấy đạo hàm theo biến x, thì chúng ta sử dụng thuật ngữ "*đạo hàm riêng* đối với biến x," với ký hiệu là $\partial f/\partial x$. Để tính đạo hàm riêng này, chúng ta không phải làm bất cứ cái gì lạ lùng cả. Chúng ta chỉ phải lấy đạo hàm theo cách thông thường đối với biến x, trong khi giả thiết rằng biến y là không đổi. Ví dụ như, nếu $f(x, y) = x - 2y + x^2y^3$, thì $\partial f/\partial x = 1 + 2xy^3$, và $\partial f/\partial y = -2 + 3x^2y^2$. Nếu chúng ta vẽ giá trị của f như là độ cao trên mặt phẳng $x - y$, thi khi chúng ta lấy đạo hàm riêng theo biến x, chúng ta đơn giản là đang tìm độ dốc của đường cong là giao của mặt cong của hàm đó với mặt phẳng thẳng đứng song song với trục x và đi qua điểm trong câu hỏi. Tương tự như vậy đối với y.

Nếu chúng ta muốn tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của một hàm có nhiều hơn một biến, chúng ta cần phải cho tất cả các đạo hàm riêng bằng không. Điều này là đúng, bởi vì nếu đạo hàm riêng đối với một biến nào đó không bằng không, thì độ dốc của hàm đó theo hướng đó sẽ không bằng không, mà điều này có nghĩa là điểm đó không thể là một giá trị lớn nhất địa phương hoặc là giá trị nhỏ nhất địa phương được. Lập luận này là giống như lập luận trong trường hợp hàm một biến. Nó chỉ là bây giờ chúng ta có thể lập luận đối với mỗi một biến một cách độc lập.

Việc yêu cầu tất cả các đạo hàm riêng bằng không thực ra không đảm bảo để có một cực đại hay cực tiểu địa phương. Điểm tìm được có thể là một *điểm yên ngựa*, mà có nghĩa rằng hàm đó có một điểm cực đại địa phương theo một số hướng nào đó và có một điểm cực tiểu địa phương theo một số hướng khác (vì vậy trong trường hợp hai chiều hàm đó trông giống như là một cái yên ngựa; do vậy nó mới có tên là như vậy). Ví dụ như, xét hàm hai biến, $f(x, y) = 3x^2 - y^2$. Khi đó điểm $(0, 0)$ là một điểm cực tiểu địa phương theo phương x và là một điểm cực đại địa phương theo phương y.

Đối với hàm hai biến, nếu các đạo hàm riêng cấp hai có dấu dương tại một điểm mà tại đó các đạo hàm cấp riêng cấp một bằng không, thì chúng ta có một điểm yên ngựa, bởi vì có một đường parabol hướng lên trên theo một hướng và một parabol hướng xuống dưới theo một hướng khác. Tuy nhiên, chúng ta có thể có một điểm yên ngựa thậm chí là nếu các đạo hàm riêng cấp hai có cùng dấu. Ví dụ như, nếu chúng ta làm một phép đổi các biến $x \equiv \omega - z$ và $y \equiv \omega + z$ trong $f(x, y) = 3x^2 - y^2$, thì nó trở thành $f(\omega, z) = 2\omega^2 + 2z^2 - 8\omega z$. Nếu chúng ta đã không biết rằng từ dạng của phương trình $f(x, y)$ thì điểm $(0, 0)$ là một điểm yên ngựa, chúng ta có thể đã suy ra điều này theo cách sau đây. Tưởng tượng rằng z đã được cho trước, và sau đó giải ra tìm ω mà cho $f(\omega, z) = 0$. Kết quả của việc giải phương trình bậc hai này là ω sẽ có dạng một hệ số nào đó nhân với z. Nghĩa là, $\omega = Az$, trong đó A vô tình bằng $2 \pm \sqrt{3}$ trong trường hợp này. Bởi vì có hai nghiệm (thực) của A ở đây, sẽ có hai đường thẳng, là $\omega = (2 \pm \sqrt{3})z$, bắt nguồn từ $(0, 0)$ sao cho $f(\omega, z) = 0$. Vì vậy $(0, 0)$ không thể là một điểm cực đại hoặc cực tiểu địa phương. Do đó nó phải là một điểm yên ngựa.[1]

Nói chung, sẽ có hai nghiệm thực của A khi và chỉ khi tam thức của phương trình bậc hai trên có giá trị dương. Đối với một hàm số hai biến bất kỳ, hình dạng của nó trong lân cận của một điểm (là điểm mà chúng ta sẽ chọn là điểm $(0, 0)$ sau một phép dịch chuyển các tọa độ) tại đó cả hai đạo hàm riêng cấp một đều bằng không có thể được xấp xỉ bởi một chuỗi Taylor đến bậc hai (là điều mà bạn có thể kiểm tra bằng cách lấy đạo hàm một số lần, giống như bạn đã làm với một hàm số một biến),

$$f(x, y) = C + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)x^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)y^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)xy + \cdots, \qquad \text{(B.12)}$$

trong đó sẽ được ngầm hiểu rằng các đạo hàm riêng ở đây được tính tại $(0, 0)$. Điều kiện

[1]Điều này là đúng bởi vì dọc theo hai đường thẳng này, các đạo hàm riêng cấp một không bằng không, mà có nghĩa là bề mặt của mặt cong biểu diễn hàm này là bị nghiêng ở đây. Vì vậy hàm đó sẽ có giá trị dương tại một phía của mỗi đường thẳng và có giá trị âm tại phía kia, mà chính xác là điều xảy ra đối với một điểm yên ngựa. Tuy nhiên, có trường hợp đặc biệt trong đó tam thức của phương trình bậc hai bằng không (ví dụ như, trong hàm $f(x, y) = (x - y)^2$), trong trường hợp này chỉ có một nghiệm của A và do đó chỉ có một đường thẳng mà làm cho hàm bằng không. Trong trường hợp này, hàm trông giống như một cái máng (có thể bị úp ngược). Nó bằng không (hoặc bằng một giá trị hằng số đã cho nào đó) dọc theo đường thẳng, ít nhất là đến bậc hai. Và nó vòng đi lên (hoặc đi xuống) theo dạng bậc hai khi bạn di chuyển ra xa đường thẳng (với giả thiết rằng là có ít nhất một sự phụ thuộc bậc hai nào đó trong hàm số).

để cho tam thức bậc hai có giá trị dương do đó là

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) > 0. \tag{B.13}$$

Nếu điều này là đúng, thì điểm đó sẽ là một điểm yên ngựa. Nếu vế trái là nhỏ hơn không, thì điểm đó sẽ là một điểm cực tiểu hay một điểm cực đại địa phương, bởi vì sẽ không có những điểm xung quanh sao cho $f(x, y) = C$; chúng tất cả hoặc là lớn hơn C hoặc là nhỏ hơn C. Nếu vế trái bằng không, thì hàm sẽ trông giống như một cái máng, ít nhất là trong lân cận của điểm đang xét (với giả thiết rằng có ít nhất một sự phụ thuộc bậc hai nào đó trong hàm số.)

B.4 Gradient

Cho một hàm số $f(x, y, z)$ (chúng ta sẽ làm việc chủ yếu với ba biến số từ bây giờ trở đi), chúng ta có thể tạo ra một vector có các thành phần là các đạo hàm riêng của f, gọi là $(\partial f/\partial x, \partial f/\partial y, \partial f/\partial z)$. Vector này được gọi là *gradient*. Nếu chúng ta định nghĩa toán tử vi phân vector ∇ (thông thường được gọi là "delta") có dạng $\nabla \equiv (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$, thì gradient đơn giản là

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right). \tag{B.14}$$

Gradient tác động lên một hàm số và sinh ra một vector. Ví dụ như, nếu $f(x, y, z) = xy^2 - yz^3$, thì $\nabla f = (y^2, 2xy - z^3, -3yz^2)$. Chúng ta gọi ∇ là một "toán tử" bởi vì nó cần tác động lên một hàm số để sinh ra một vector gradient.

Ý nghĩa vật lý của gradient là gì? Gradient cho ta hướng mà bạn phải đi theo nếu bạn muốn f tăng giá trị với một tốc độ lớn nhất. Lý do của điều này là như sau. Xét giá trị của một hàm số $f(x, y, z)$ tại một điểm nào đó, và sau đó xem xét giá trị của hàm tại một điểm gần đó cách điểm vừa rồi bởi một vector (dx, dy, dz). Hỏi sự thay đổi (một cách xấp xỉ tới bậc nhất) của f giữa hai điểm bằng bao nhiêu? Khi bạn di chuyển một khoảng dx theo phương của x, thì sự thay đổi (bậc nhất) của f là $(\partial f/\partial x)dx$, theo định nghĩa của đạo hàm riêng (cũng giống như là đối với trường hợp hàm một biến). Nếu sau đó bạn di chuyển một khoảng dy theo phương y, hàm số sẽ thay đổi thêm một lượng $(\partial f/\partial y)dy$ nữa. Và tương tự như vậy theo phương của z sẽ cho một thay đổi bằng $(\partial f/\partial z)dz$. Cộng cả ba sự thay đổi của f này vào, chúng ta thấy rằng tổng thay đổi bậc nhất của f là[2]

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz. \tag{B.15}$$

Sử dụng tích vô hướng, phương trình này có thể được viết một cách cô đọng dưới dạng

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \cdot (dx, dy, dz) \equiv \nabla f \cdot d\mathbf{r}. \tag{B.16}$$

Chúng ta bây giờ có thể sử dụng phương trình (B.2) để nói rằng sự thay đổi của f là $df = |\nabla f||d\mathbf{r}|\cos\theta$, trong đó θ là góc giữa ∇f và $d\mathbf{r}$. Ý nghĩa của điều này là như sau. Xét một điểm cho trước (x, y, z). Vector gradient ∇f tại điểm này là một vector nào đó. Hãy tưởng tượng là đi dọc theo vector $d\mathbf{r}$ rất nhỏ theo các hướng khác nhau và xem f thay đổi giá trị như thế nào (giả thiết rằng tất cả các vector $d\mathbf{r}$ đều có cùng chiều dài, để cho nhất quán). Hỏi bạn nên đi theo hướng nào để cho f thay đổi giá trị nhiều nhất? Hoặc không thay đổi giá trị chút nào? Trong biểu thức $df = |\nabla f||d\mathbf{r}|\cos\theta$, $|\nabla f|$ có một giá trị hữu hạn tại điểm đang xét, và chúng ta đang giả thiết rằng chúng ta chọn $|d\mathbf{r}|$ là luôn luôn cùng một giá trị, vì vậy sẽ xét đến hệ số $\cos\theta$. Do đó, nếu bạn đi thẳng hướng dọc theo vector gradient ∇f tại điểm đó, thì f sẽ tăng giá trị lên nhiều nhất. Và nếu bạn đi theo bất kỳ phương nào trong mặt phẳng vuông góc với ∇f, thì f không thay đổi giá trị chút nào (cho tới bậc nhất). Và nếu bạn đi theo hướng song song nhưng ngược chiều với ∇f, thì f sẽ giảm giá trị nhiều nhất.

Điều này sẽ được hình dung một cách dễ dàng hơn trong trường hợp một hàm chỉ có hai biến, $f(x, y)$, bởi vì khi đó chúng ta có thể vẽ hình giá trị của f như là hàm độ cao theo phương z. Đồ thị của f chỉ là một bề mặt của các ngọn núi và các thung lũng nằm trên (hoặc nằm dưới) mặt phẳng $x - y$. Gradient $\nabla f = (\partial f/\partial x, \partial f/\partial y)$ khi đó cho ta hướng của đường đi lên dốc nhất. Nghĩa là, f thay đổi giá trị với tốc độ lớn nhất nếu bạn đi theo hướng của ∇f trong mặt phẳng $x - y$; độ dốc của bề mặt theo hướng này trong mặt phẳng $x - y$ là lớn hơn bất kỳ độ dốc theo hướng nào khác. Và nếu bạn đi theo một trong hai hướng dọc theo đường thẳng vuông góc với ∇f, thì f sẽ không thay đổi gì. Bằng việc tiếp tục đi theo hướng dọc theo đường vuông góc với ∇f tại bất kỳ vị trí nào

[2]Về mặt kỹ thuật sẽ có một sự không rõ ràng là mỗi đạo hàm riêng này sẽ được tính tại điểm nào, bởi vì trong ba bước thực hiện vừa rồi bạn bạn đều xuất phát tại ba điểm khác nhau. Nhưng các sai khác của đạo hàm cấp một tại ba điểm này đều chỉ là ở bậc nhát, và bởi vì các đạo hàm này đã được nhân với các số hạng bậc nhất dx, dy và dz trong phương trình (B.15), nên bất kỳ sai khác nào cũng sẽ chỉ gây ra một ảnh hưởng ở bậc hai và do đó có thể được bỏ qua.

của bạn, bạn sẽ tạo ra một đường cong trong mặt phẳng $x-y$ mà tất cả mọi điểm trên nó đều cho cùng một giá trị của f. Nói cách khác, nếu bạn cắt bề mặt cong của f với một mặt phẳng nằm ngang có độ cao bằng với giá trị này của f, và nếu bạn nhìn giao của mặt phẳng này với mặt cong, thì hình chiếu của đường giao nhau này lên trên mặt phẳng $x-y$ chính là đường cong trong mặt phẳng $x-y$ mà bạn đã tạo ra ở trên.

B.5 Divergence

Xét một vector có các thành phần là các hàm của tọa độ. Ví dụ như, gọi $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z) = (3xz, 2y^2 + xyz, x^2 + z^3)$. Khi đó *divergence* của $\mathbf{F}$ được định nghĩa là tích vô hướng của toán tử ∇ với $\mathbf{F}$, nghĩa là,

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}. \tag{B.17}$$

Divergence tác động lên một vector và sinh ra một số. Hàm $\mathbf{F}$ ở trên có divergence bằng $(3z) + (4y + xz) + (3z^2)$.

Ý nghĩa vật lý của divergence là như thế nào? Xét một hình hộp vô cùng nhỏ có độ dài các cạnh là dx, dy, và dz. Khi đó divergence sẽ đo tổng thông lượng của trường vector đi ra khỏi hộp, chia cho thể tích của hộp. (Thông lượng đi qua một bề mặt được định nghĩa là tích phân của diện tích nhân với thành phần của vector vuông góc với bề mặt.) Ví dụ như, nếu một trường vector nào đó cho ta vận tốc tại mỗi điểm trong dòng chảy chất lỏng, và nếu divergence không bằng không, thì phải có một nguồn cấp (hay một chỗ thấm) để cung cấp (hoặc triệt tiêu đi) dòng chảy, bởi vì nếu không thì bất cứ lượng chất lỏng nào đi vào trong chiếc hộp nhỏ đó sẽ phải đi ra khỏi nó tại một chỗ nào đó, và việc này sẽ nhận được tổng thông lượng bằng không.

Hãy xem tại sao divergence lại bằng thông lượng trên một đơn vị thể tích. Xét mặt "bên trái" $dy \times dx$ của chiếp hộp nhỏ. Lượng thông lượng từ trường vector vào trong hộp đi qua mặt này bằng với diện tích $dydz$ nhân với thành phần F_x. (Các thành phần F_y và F_z là song song với mặt này và do đó không đóng góp gì vào thông lượng đi qua nó.) Lượng thông lượng *đi ra* khỏi bề mặt "bên phải" $dy \times dz$ bằng với diện tích $dydz$ nhân với giá trị của thành phần F_x tại đó. Nhưng giá trị này bằng với F_x ban đầu (tới bậc xấp xỉ bậc nhất) cộng với $(\partial F_x/\partial x)dx$, theo định nghĩa của đạo hàm riêng. Phần F_x của giá trị này triệt tiêu với thông lượng đi vào từ mặt bên trái, vì vậy tổng thông lượng đi ra khỏi chiếc hộp nhỏ thông qua hai mặt này là $((\partial F_x/\partial x)dx)dydz$. Tính toán tương tự đối với hai cặp các mặt song song còn lại, vì vậy tổng thông lượng đi ra khỏi hộp là

$$\text{Tổng thông lượng} = \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right) dxdydz. \tag{B.18}$$

Do đó, tổng thông lượng trên một đơn vị thể tích bằng với divergence. Dạng tích phân của kết quả này là *định lý divergence*, hay là *định lý Gauss*, mà có dạng

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}. \tag{B.19}$$

Tích phân ở vế trái chạy trên toàn toàn bộ thể tích đã cho, và tích phân ở vế phải chạy trên bề mặt bao của thể tích này. Vector $d\mathbf{A}$ có độ lớn bằng với một mảnh diện tích vô cùng nhỏ của S và có hướng được định nghĩa là vuông góc với mặt phẳng chứa mảnh này (với chiều dương là chiều hướng ra ngoài khỏi phần thể tích). Việc lấy tích vô hướng của $d\mathbf{A}$ với $\mathbf{F}$ có tác dụng là chỉ lấy ra thành phần của $\mathbf{F}$ mà vuông góc với mảnh nhỏ trên (mà là thành phần liên quan đến việc tính toán thông lượng).

Chúng ta sẽ bỏ qua các chi tiết ở đây, nhưng ý tưởng cơ bản của chứng minh của phương trình (B.19) là đi chia nhỏ phần thể tích thành rất nhiều hình hộp vô cùng nhỏ và xem xét tổng thông lượng đi qua tất cả các hình hộp này. Từ phương trình (B.18), tích phân của divergence trên một hình hộp nhỏ (mà về cơ bản là bằng divergence nhân với thể tích, bởi vì divergence về cơ bản là hằng số trên một phần thể tích rất nhỏ) bằng với thông lượng đi qua hộp đó. Tích phân của divergence trên toàn bộ thể tích do đó bằng tổng của các phần thông lượng đi qua tất cả các hộp. Nhưng tất cả các mặt của các hình hộp nằm bên trong phần thể tích là mặt của hai hình hộp, vì vậy thông lượng đi qua các mặt này triệt tiêu nhau khi lấy tổng (bởi vì thông lượng đi qua một mặt đã cho được tính là có giá trị dương đối với một hình hộp và có giá trị âm đối với hình hộp kia). Vì vậy chúng ta chỉ còn lại thông lượng đi qua các mặt trên biên của phần thể tích (bởi vì các mặt này chỉ xuất hiện một lần trong tổng tích phân). Chúng ta do đó còn lại với phần thông lượng đi qua bề mặt S, chính là phần xuất hiện trong vế phải của phương trình (B.19).

Ví dụ (Thông lượng đi qua một hình cầu): Hãy kiểm tra định lý divergence trong trường hợp trong đó mặt cong là một mặt cầu bán kính R có tâm tại điểm gốc tọa độ, và $\mathbf{F} = (x, y, z)$.

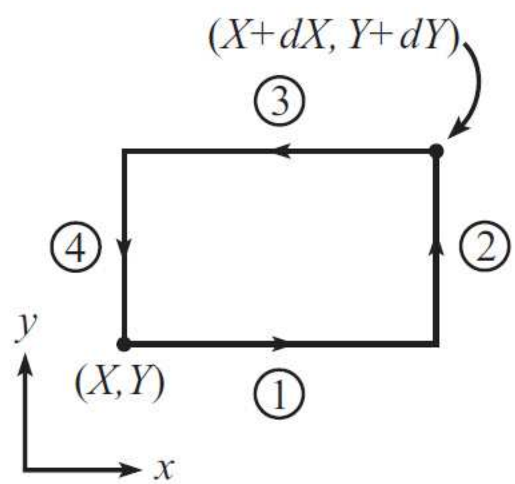
Lời giải: Ở vế trái của phương trình (B.19), divergence của (x, y, z) là $1+1+1 = 3$, vì vậy tích phân của đại lượng này trên toàn bộ thể tích của hình cầu đơn giản là bằng $3(4\pi R^3/3) = 4\pi R^3$. Ở vế phải, vector đơn vị vuông góc với bề mặt là $(x, y, z)/R$, vì vậy $d\mathbf{A} = (dA)(x, y, z)/R$. Tích vô hướng của đại lượng này với (x, y, z) là $(dA)(x^2 + y^2 + z^2)/R = (dA)R$. Tích phân của đại lượng này trên toàn bộ bề mặt của hình cầu là $(4\pi R^2)R = 4\pi R^3$. Hai vế do đó là bằng nhau, là điều mà chúng ta muốn chứng minh.

B.6 Curl

Xét một vector có các thành phần là các hàm số của các tọa độ. Ví dụ như, gọi $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z) = (3xz, x^2yz, x + z)$. Khi đó *curl* của $\mathbf{F}$ được định nghĩa là tích có hướng của toán tử ∇ với $\mathbf{F}$, nghĩa là,

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{F} &\equiv \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right). \qquad \text{(B.20)}\end{aligned}$$

Curl tác dụng lên một vector và sinh ra một vector khác. Vector $\mathbf{F}$ ở trên có một curl bằng $(-x^2y, 3x - 1, 2xyz)$.



Hình B.2:

Ý nghĩa vật lý của curl là gì? Xét một hình chữ nhật vô cùng nhỏ như được chỉ ra trong Hình B.2. Hình chữ nhật này nằm trong mặt phẳng $x - y$, vì vậy tại thời điểm này chúng ta để cho tiện sẽ bỏ đi thành phần z của tất cả các tọa độ. Hóa ra rằng thành phần theo phương z của curl bằng tích phân $\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ lấy theo chiều ngược chiều kim đồng hồ xung quanh đường cong kín, chia cho diện tích bên trong của đường cong đó (các mệnh đề tương đương cũng đúng đối với các thành phần theo phương y và x và tương ứng với các hình chữ nhật nhỏ trong mặt phẳng $x-z$ và $y-z$). Hãy xem tại sao điều này là đúng.

Tổng tích phân theo chiều ngược chiều kim đồng hồ của $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ xung quanh vòng kín phải đi về bên phải của đoạn 1 và về bên trái đoạn 3, và đi lên trên trong đoạn 2 và đi xuống dưới ở đoạn 4. Trên các đoạn 1 và 3, cả dy và dz đều bằng không, vì vậy chỉ có số hạng $F_x dx$ còn lại trong tích vô hướng $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$. Tương tự như vậy, $F_y dy$ là số hạng duy nhất khác không trên các đoạn 2 và 4. Nếu chúng ta lấy cặp mỗi hai cạnh song song một, thì tổng tích phân theo chiều ngược chiều kim đồng hồ là

$$\begin{aligned}\int \mathbf{F}d\mathbf{r} &= \int_X^{X+dX} (F_x(x,Y) - F_x(x,Y+dY))dx \\ &+ \int_Y^{Y+dY} (F_y(X+dX,y) - F_y(X,y))dy.\end{aligned} \tag{B.21}$$

Hãy lấy xấp xỉ các hiệu trong các dấu ngoặc đơn này. Khi lấy xấp xỉ tới bậc nhất, chúng ta có

$$F_x(x,Y+dY) - F_x(x,Y) \approx dY\frac{\partial F_x(x,y)}{\partial y}\,|_{(x,Y)} \approx dY\frac{\partial F_x(x,y)}{\partial y}\,|_{(X,Y)}\,. \tag{B.22}$$

Việc lấy xấp xỉ lần thứ nhất ở đây thực hiện được do định nghĩa của đạo hàm riêng. Lần lấy xấp xỉ thứ hai (bằng việc thay thế x bởi X) là thực hiện được bởi vì hình vuông của chúng ta là đủ nhỏ sao cho x về cơ bản là bằng với X. Bất kỳ sai số nào trong việc lấy xấp xỉ này chỉ là có độ lớn rất nhỏ bậc hai, bởi vì chúng ta đã có một hệ số của dY trong số hạng của chúng ta. Làm tương tự đối với các số hạng F_y, vì vậy phương trình (B.21) trở thành

$$\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_Y^{Y+dY} dX\frac{\partial F_y(x,y)}{\partial x}\,|_{(X,Y)}\,dy - \int_X^{X+dX} dY\frac{\partial F_x(x,y)}{\partial y}\,|_{(X,Y)}\,dx. \tag{B.23}$$

Các hàm trong tích phân là các hằng số, vì vậy chúng ta nhanh chóng thực hiện việc lấy tích phân để nhận được

$$\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = dXdY\left(\frac{\partial F_y(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial F_x(x,y)}{\partial y}\right)|_{(X,Y)}\,. \tag{B.24}$$

Như đã nói ở trên, thành phần theo phương z của curl bằng với tích phân theo chiều ngược chiều kim đồng hồ của $\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ xung quanh vòng kín, chia cho diện tích của vòng kín đó. Tất nhiên những phân tích ở trên cũng đúng đối với các hình chữ nhật nhỏ trong mặt phẳng $x - z$ và $y - z$. Do đó chúng ta nhận được hai thành phần phần khác của curl.

Sự tổng quát hóa của kết quả trên cho các bề mặt bị nghiêng và uốn lượn là *định lý Stoke*, mà nó phát biểu rằng

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{A} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \tag{B.25}$$

Tích phân ở vế trái được lấy trên mặt cong đã cho, và tích phân trong vế phải được lấy trên đường cong mà là biên của mặt cong này. Vector $d\mathbf{A}$ có độ lớn bằng diện tích của một mảnh vô cùng nhỏ của S và có hướng được xác định là vuông góc với mặt phẳng chứa mảnh này (với chiều của nó được xác định thông qua sự định hướng dọc theo đường cong C và theo quy tắc bàn tay phải). Chúng ta sẽ bỏ qua các chi tiết ở đây, nhưng ý tưởng cơ bản của việc chứng minh định lý này là tương tự với ý tưởng trong việc chứng minh định lý divergence ở trên, ngoại trừ một số từ được thay thế bởi một số từ khác ("thể tích" sẽ trở thành "bề mặt", và "bề mặt" sẽ trở thành "đường cong," vân vân ...). Chúng ta sẽ chia mặt cong này thành rất nhiều hình chữ nhật vô cùng nhỏ và xem xét tổng tích phân vòng quanh tất cả các hình chữ nhật này. Để cho đơn giản, hãy chỉ xét một mặt phẳng trong mặt phẳng $x - y$.

Từ phần trên, chúng ta biết rằng tích phân của thành phần z của vector curl lấy trên một hình chữ nhật bằng với tích phân của $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ vòng quanh các cạnh của hình chữ nhật. Tích phân của thành phần z của curl trên toàn bộ mặt phẳng do đó bằng với tổng của các tích phân xung quanh tất cả các hình chữ nhật. Nhưng tất cả các cạnh của các hình chữ nhật nằm bên trong mặt phẳng này đều là cạnh chung của hai hình chữ nhật, vì vậy tích phân dọc theo các cạch này bị triệt tiêu khi thực hiện việc lấy tổng (bởi vì tích phân dọc theo một cạnh đã cho được tính là có giá trị dương đối với một hình chữ nhật và có giá trị âm đối với hình chữ nhật kia). Vì vậy chúng ta chỉ còn lại tích phân dọc theo các cạnh trên biên của mặt phẳng (bởi vì các cạnh này chỉ xuất hiện duy nhất một lần trong tổng tích phân). Chúng ta do đó còn lại tích phân dọc theo đường cong C, là đại lượng xuất hiện ở vế phải của phương trình (B.25).

Chú ý rằng nếu mặt cong là đóng, sao cho nó không có biên (nói cách khác, không có đường cong C), thì vế phải của phương trình (B.25) là bằng không, và do vậy vế trái cũng bằng không. Ví dụ của trường hợp này là một hình cầu. Việc không có biên nghĩa là nếu bạn là một con bọ nhỏ đang bước đi trên bề mặt này, thì bạn không thể bước ra khỏi nó.

Ví dụ (Tích phân xung quanh một đường tròn): Hãy kiểm tra định lý Stoke trong trường hợp trong đó đường cong là một đường tròn có bán kính R trong mặt phẳng $x-y$, có tâm tại gốc tọa độ, và $\mathbf{F} = (-y, x, 0)$.

Lời giải: Trong vế trái phương trình (B.25), curl của $(-y, x, 0)$ là $(0, 0, 2)$. Vector $d\mathbf{A}$ cũng có hướng chỉ theo phương z, vì vậy tích vô hướng chỉ là $2(dA)$. Tích phân của đại lượng này trên toàn bộ phần bên trong đường tròn đơn giản là $2(\pi R^2)$. Ở trong vế phải, tích vô hướng bằng $-ydx + xdy$. Việc lấy tích phân dọc theo chu vi của đường tròn sẽ là dễ nhất khi được thực hiện trong hệ tọa độ cực. Với $x = R\cos\theta$ và $y = R\sin\theta$, chúng ta có $dx = -R\sin\theta d\theta$ và $dy = R\cos\theta d\theta$. Vì vậy $-ydx + xdy = R^2 d\theta$. Tích phân của đại lượng này khi θ biến thiên từ 0 đến 2π là $R^2(2\pi)$. Hai vế do đó bằng nhau, là điều mà chúng ta muốn chỉ ra.

Có một vài thực tế có ích mà liên quan đến các tổ hợp của gradient, divergence, và curl. Một trong các tổ hợp này là curl của một gradient là đồng nhất bằng không. Nghĩa là, $\nabla \times \nabla f = 0$. Bạn có thể kiểm tra điều này một cách rõ ràng bằng cách sử dụng các định nghĩa của curl và gradient, và cũng sử dụng một thực tế là phép lấy đạo hàm riêng là giao hoán (nghĩa là, $\partial^2 f/\partial x \partial y = \partial^2 f/\partial y \partial x$). Ngoài ra, bạn có thể cho $\mathbf{F} \equiv \nabla f$ trong định lý Stoke, mà cho ta $\int_S (\nabla \times \nabla f) \cdot d\mathbf{A} = \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r}$. Vế phải của phương trình này đơn giản là tổng thay đổi của hàm số f xung quanh đường cong kín C, mà luôn luôn bằng không. Hàm tích phân trong vế trái do đó phải đồng nhất bằng không.

Hơn nữa, divergence của một curl là đồng nhất bằng không. Nghĩa là, $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$. Một lần nữa, bạn có thể kiểm tra điều này một cách rõ ràng bằng cách sử dụng các định nghĩa của divergence và curl, cùng với thực tế rằng phép lấy đạo hàm riêng có tính chất giao hoán. Ngoài ra, bạn có thể kết hợp định lý Gauss và định lý Stoke để viết $\int_V \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) dV = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Vế phải là luôn luôn bằng không, bởi vì mặt biên S của bất kỳ một thể tích cho trước V nào cũng là đóng, vì vậy không có đường cong C. Hàm tích phân trong vế trái do đó phải đồng nhất bằng không.

Phụ lục C

F=ma hay là F=dp/dt

Trong lý thuyết cơ học không tương đối,[1] các phương trình $F = ma$ và $F = dp/dt$ sẽ là như nhau nếu m là không đổi. Nhưng nếu m không phải là hằng số, thì $dp/dt = d(mv)/dt = ma + (dm/dt)v$, và nó không còn bằng ma nữa. Vì vậy nếu một hệ có một khối lượng thay đổi, thì chúng ta phải dùng $F = ma$ hay là $F = dp/dt$? Phương trình nào sẽ miêu tả chính xác tính chất vật lý? Câu trả lời điều này phụ thuộc vào việc bạn chọn hệ như thế nào và gán các đại lượng m, p, và a tới hệ đó như thế nào. Nói chung bạn có thể làm một bài tập bằng cách sử dụng $F = ma$ hoặc là $F = dp/dt$, nhưng bạn phải rất cẩn thận về việc bạn lựa chọn các đại lượng và việc bạn xử lý chúng như thế nào. Những công việc tinh tế này tốt nhất là được hiểu thông qua hai ví dụ sau.

Ví dụ 1 (Cát rơi vào trong một xe đẩy): Xét một xe đẩy mà có cát đang bị rơi theo phương thẳng đứng vào trong nó với tốc độ $dm/dt = \sigma$. Hỏi bạn phải tác dụng vào xe đẩy một lực bằng bao nhiêu để cho xe đẩy chuyển động theo phương ngang với vận tốc không đổi v? (Đây là cơ cấu trong ví dụ đầu tiên của Mục 5.8.)

Lời giải thứ nhất: Gọi $m(t)$ là khối lượng của hệ gồm xe đẩy và cát bên trong nó (mà chúng ta sẽ chỉ gọi nó là "xe đẩy"). Nếu chúng ta sử dụng $F = ma$ (trong đó a là gia tốc của xe đẩy, có giá trị bằng không), thì chúng ta nhận được $F = 0$, mà là kết quả không chính xác. Biểu thức chính xác là đi sử dụng $F = dp/dt$. Biểu thức này cho ta

$$F = \frac{dp}{dt} = ma + \frac{dm}{dt}v = 0 + \sigma v. \tag{C.1}$$

[1] Chúng ta sẽ không cần dùng đến thuyết tương đối ở trong phụ lục này, bởi vì thuyết cơ học không tương đối chứa tất cả các khía cạnh then chốt mà chúng ta muốn đề cập tới.

Điều này là hợp lý, bởi vì lực của bạn là lực làm tăng động lượng của xe đẩy, và động lượng này tăng dần đơn giản là bởi vì khối lượng của xe đẩy là đang tăng.

Lời giải thứ hai: Có thể giải bài toán này bằng cách sử dụng $F = ma$ nếu chúng ta chọn hệ của chúng ta là một mảnh khối lượng nhỏ mà đang được cho thêm vào xe đẩy. Lực của bạn là lực làm tăng tốc phần khối lượng này từ việc ban đầu đứng yên lên đến vận tốc v. Xét một khối lượng Δm mà rơi vào trong xe đẩy trong khoảng thời gian Δt. Tưởng tượng rằng nó rơi vào trong xe đẩy tính cả thảy là tại thời điểm bắt đầu của Δt, và sau đó tăng tốc lên đến vận tốc v trong khoảng thời gian Δt. (Nó tăng tốc là do lực ma sát. Nhưng nếu bạn muốn, bạn có thể bỏ đi xe đẩy như là một vật thể trung gian và sẽ tác dụng lực đẩy trực tiếp vào phần khối lượng.) Quá trình này lặp đi lặp lại trong mỗi khoảng thời gian liên tiếp Δt. Chúng ta có thể sử dụng $F = ma$ ở đây bởi vì khối lượng của mảnh khối lượng nhỏ là không đổi. Vì vậy chúng ta có $F = ma = \Delta m(v/\Delta t)$. Việc viết đại lượng này dưới dạng $(\Delta m/\Delta t)v$ cho ta kết quả σv như chúng ta đã tìm được ở trên.

Lời giải thứ ba: Như là trong lời giải thứ hai, hãy tưởng tượng quá trình đang xảy ra trong các bước rời rạc, nhưng bây giờ xe đẩy là hệ chúng ta đang xét. Giải sử rằng một khối lượng Δm rơi vào trong xe đẩy mà ngay tức thời làm giảm tốc độ của nó (do định luật bảo toàn động lượng) xuống còn $v' = mv/(m + \Delta m)$, mà là $\Delta v = v - v' = v\Delta m/(m+\Delta m)$ nhỏ hơn giá trị ban đầu v. Giả sử rằng bạn sau đó đẩy vào xe đẩy trong một khoảng thời gian Δt (trong khoảng thời gian này khối lượng vẫn là hằng số và bằng $m+\Delta m$, vì vậy $F = ma$ là biểu thức thích hợp) và sẽ làm cho nó có lại vận tốc v. Gia tốc là $a = \Delta v/\Delta t = v(\Delta m/\Delta t)/(m+\Delta m) = \sigma v/(m+\Delta m)$, vì vậy lực của bạn là

$$F = (m + \Delta m)a = (m + \Delta m)\left(\frac{\sigma v}{m + \Delta m}\right) = \sigma v. \qquad \text{(C.2)}$$

Ví dụ 2 (Cát bị rò ra từ một xe đẩy): Xét một xe đẩy mà đang bị rò rỉ cát ra ngoài từ đáy của nó với tốc độ $dm/dt = \sigma$. Nếu bạn tác dụng một lực F vào xe đẩy, hỏi gia tốc của nó là bao nhiêu?

Lời giải: Gọi $m(t)$ là khối lượng của hệ xe đẩy và cát bên trong nó (mà sẽ gọi là "xe đẩy"). Trong ví dụ này, biểu thức chính xác để sử dụng là $F = ma$, vì vậy gia tốc sẽ là

$$a = \frac{F}{m}. \qquad \text{(C.3)}$$

Chú ý rằng bởi vì m đang giảm theo thời gian, nên a sẽ tăng theo thời gian. Chúng ta đã sử dụng $F = ma$ ở đây bởi vì tại bất kỳ thời điểm nào, khối lượng m là phần đang bị gia tốc bởi lực F. Như ở trên, bạn có thể tưởng tượng quá trình đang xảy ra theo các bước rời rạc: Bạn đẩy vào khối lượng trong một khoảng thời gian ngắn, sau đó một mảnh khối lượng nhỏ ngay lập tức bị rò rỉ rơi ra ngoài; và cứ như vậy. Trong viễn cảnh rời rạc hóa này, rõ ràng là $F = ma$ là công thức phù hợp, bởi vì nó đúng đối với mỗi bước trong quá trình. Sự không rõ ràng duy nhất ở đây là sẽ đi sử dụng m hay là $m + dm$ tại một thời điểm nào đó, nhưng điều này chỉ nhận được một sai số có thể bỏ qua.

NHẬN XÉT: Thực ra $F = dp/dt$ cũng sử dụng được trong ví dụ thứ hai này, miễn là bạn cho F là lực *tổng*, và cho p là *tổng* động lượng. Trong ví dụ này, F là lực duy nhất. Tuy nhiên, tổng động lượng bao gồm cả cát trong xe đẩy và cát mà đã rơi ra ngoài và đang rơi xuống trong không khí.[2] Một sai lầm hay gặp đó là đi sử dụng $F = dp/dt$, với p chỉ là động lượng của xe đẩy. Phần cát rơi ra ngoài cũng có động lượng.

Có một ví dụ đơn giản minh họa tại sao $F = dp/dt$ không sử dụng được khi p chỉ là động lượng của xe đẩy. Chọn $F = 0$, sao cho xe đẩy di chuyển với vận tốc không đổi v. Cắt xe đẩy làm đôi, và coi phần đằng sau là "phần cát bị rơi ra" và phần đằng trước như là "xe đẩy." Nếu bạn muốn p của xe đẩy có $dp/dt = F = 0$, thì vận tốc của xe đẩy phải tăng lên gấp đôi nếu khối lượng của nó bị giảm đi một nửa. Nhưng điều này là vô lý. Cả hai nửa đơn giản là tiếp tục chuyển động với cùng vận tốc. ♣

Tóm lại, $F = dp/dt$ sẽ luôn luôn dùng được, miễn là bạn sử dụng lực *tổng* và *tổng* động lượng của một hệ các phần tử cho trước. Tuy nhiên cách tiếp cận này có thể sẽ trở nên rắc rối trong một vài tình huống nào đó. Vì vậy trong một vài trường hợp nó sẽ là dễ dàng hơn khi sử dụng lập luận $F = ma$, nhưng bạn phải cẩn thận để xác định đúng hệ mà đang bị gia tốc bởi lực tác dụng. Tính không đối xứng trong hai ví dụ ở trên là trong ví dụ đầu tiên, lực thực ra là làm tăng tốc cho phần cát đang rơi vào trong. Nhưng trong ví dụ thứ hai, lực *không* làm tăng tốc (hoặc làm giảm tốc) của phần cát đang rơi ra ngoài. F không có việc gì phải làm đối với phần cát đã bị rơi ra ngoài.

[2]Nếu có lực cản của không khí, chúng ta sẽ phải lo về ảnh hưởng của nó lên phần cát đang rơi nếu chúng ta muốn sử dụng $F = dp/dt$ để giải bài toán, trong đó p là tổng động lượng. Đây rõ ràng không phải là cách tốt nhất để làm bài toán này. Nếu có những thứ phức tạp xảy ra với phần cát trong không khí, thì sẽ là ngớ ngẩn để đi xét phần cát này trong khi chúng ta không cần phải làm như vậy.

Phụ lục D

Sự tồn tại các trục chính

Trong phụ lục này, chúng ta sẽ đi chứng minh Định lý 9.4. Nghĩa là, chúng ta sẽ chỉ ra rằng một tập các trục chính trực chuẩn là tồn tại đối với bất kỳ vật thể nào, và đối với bất kỳ sự lựa chọn điểm gốc tọa độ nào. Nó không phải là yếu tố quyết định rằng bạn phải nghiên cứu chứng minh này. Nếu bạn muốn chỉ chấp nhận thực tế rằng các trục chính là tồn tại, thế là đủ. Nhưng phương pháp chúng ta sẽ sử dụng trong chứng minh này là một phương pháp mà bạn sẽ thấy đi thấy lại trong các nghiên cứu vật lý của bạn, đặc biệt là khi bạn nghiên cứu cơ học lượng tử (xem phần nhận xét sau chứng minh).

Định lý D.1. *Cho một ma trận thực đối xứng cấp* 3×3*,* $\mathbf{I}$*, khi đó tồn tại ba vector thực trực chuẩn,* $\hat{\omega}_k$*, và ba số thực,* I_k*, với tính chất sau*

$$\mathbf{I}\hat{\omega}_k = I_k \hat{\omega}_k. \tag{D.1}$$

Chứng minh. Định lý này vẫn đúng trong trường hợp tổng quát hơn khi thay giá trị 3 bởi N (tất cả các bước chứng minh bên dưới đơn giản là sẽ được tổng quát hóa lên), nhưng chúng ta sẽ làm việc với $N = 3$ để cho nó cụ thể. Xét một ma trận cấp 3×3 nói chung, $\mathbf{I}$ (chúng ta không cần phải giả thiết bây giờ là chúng thực hay là đối xứng). Giả sử rằng $\mathbf{I}\mathbf{u} = I\mathbf{u}$ đối với một vector $\mathbf{u}$ và một số I nào đó.[1] Phương trình này có thể được viết lại dưới dạng

$$\begin{pmatrix} (I_{xx} - I) & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & (I_{yy} - I) & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & (I_{zz} - I) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{D.2}$$

[1]Một vector $\mathbf{u}$ như vậy được gọi là một *vector riêng* của $\mathbf{I}$, và giá trị I tương ứng được gọi là một *giá trị riêng*. Nhưng đừng để những cái tên này làm bạn sợ. Chúng đơn giản chỉ là những định nghĩa.

Để có một nghiệm không tầm thường đối với vector $\mathbf{u}$ (nghĩa là, một vector trong đó $\mathbf{u} \neq (0,0,0)$), định thức của ma trận này phải bằng không.[2] Bằng việc lấy định thức, chúng ta thấy rằng chúng ta sẽ nhận được một phương trình đối với I có dạng

$$aI^3 + bI^2 + cI + d = 0. \tag{D.3}$$

Các hằng số a, b, c, và d là các hàm của các số hạng I_{ij} của ma trận, nhưng chúng ta không cần dạng chính xác của chúng để chứng minh định lý tồn tại này. Điều duy nhất chúng ta cần đến phương trình này là để nói rằng thực sự tồn tại ba nghiệm (nói chung là phức) đối với I, bởi vì phương trình này là phương trình bậc ba.

Chúng ta bây giờ sẽ chỉ ra rằng các nghiệm đối với I là các nghiệm thực. Điều này sẽ suy ra rằng tồn tại ba vector thực $\mathbf{u}$ thỏa mãn $\mathbf{I}\mathbf{u} = I\mathbf{u}$, bởi vì chúng ta có thể thay các giá trị thực của I ngược lại vào trong phương trình (D.2) và giải ra đối với các thành phần thực u_x, u_y, và u_z, với sai khác bởi một nhân tử bằng hằng số. Chúng ta sau đó sẽ chỉ ra rằng những vector này là trực giao.

- *Chứng minh rằng các giá trị của I là thực:* Việc chứng minh này là dựa trên các điều kiện là ma trận $\mathbf{I}$ là thực và đối xứng. Bắt đầu với phương trình $\mathbf{I}\mathbf{u} = I\mathbf{u}$, và sau đó lấy tích vô hướng với $\mathbf{u}^*$ để nhận được

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{I}\mathbf{u} &= \mathbf{u}^* \cdot I\mathbf{u} \\ &= I\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u}. \end{aligned} \tag{D.4}$$

  Vector $\mathbf{u}^*$ là vector nhận được bằng cách lấy liên hợp các thành phần của vector $\mathbf{u}$ (chúng ta vẫn chưa biết là $\mathbf{u}$ có thể được chọn là vector thực). Ở vế phải, I là một số vô hướng, vì vậy chúng ta có thể đưa nó ra ngoài tích của $\mathbf{u}^*$ và $\mathbf{u}$. Thực tế rằng $\mathbf{I}$ là ma trận thực suy ra rằng nếu chúng ta lấy liên hợp phức phương trình $\mathbf{I}\mathbf{u} = I\mathbf{u}$, chúng ta sẽ nhận được $\mathbf{I}\mathbf{u}^* = I^*\mathbf{u}^*$ (chúng ta biết rằng $\mathbf{I}$ là thực, nhưng chúng ta chưa biết rằng I là số thực). Nếu sau đó chúng ta lấy tích vô hướng của phương trình này với $\mathbf{u}$, chúng ta nhận được

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{I}\mathbf{u}^* = I^*\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^*. \tag{D.5}$$

[2]Nếu định thức không bằng không, thì chúng ta sẽ xây dựng được một cách tường minh ma trận nghịch đảo của ma trận này, mà liên quan đến các phần phụ đại số của ma trận trên chia cho định thức. Nhân hai vế cho ma trận nghịch đảo này sẽ nhận được $\mathbf{u} = 0$.

Chúng ta bây giờ đi chứng minh rằng nếu $\mathbf{I}$ là đối xứng, thì $\mathbf{a} \cdot \mathbf{I}\mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{I}\mathbf{a}$, đối với bất kỳ các vector $\mathbf{a}$ và $\mathbf{b}$ nào. (Chúng ta sẽ để dành điều này cho độc giả chứng minh bằng cách đơn giản là nhân chúng ra.) Đặc biệt, $\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{I}\mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{I}\mathbf{u}^*$, vì vậy các phương trình (D.4) và (D.5) cho ta

$$(I - I^*)\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^* = 0, \tag{D.6}$$

và bởi vì $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^* = |u_1|^2 + |u_2|^2 + |u_3|^2 \neq 0$, chúng ta phải có $I = I^*$. Do đó, I là số thực.

- *Chứng minh rằng các* $\mathbf{u}$ *là trực giao:* Điều này sẽ được chứng minh dựa trên tính chất đối xứng của $\mathbf{I}$. Gọi $\mathbf{I}\mathbf{u}_1 = I_1\mathbf{u}_1$, và $\mathbf{I}\mathbf{u}_2 = I_2\mathbf{u}_2$. Lấy tích vô hướng của phương trình đầu tiên với $\mathbf{u}_2$ để nhận được

$$\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{I}\mathbf{u}_1 = I_1\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_1, \tag{D.7}$$

và lấy tích vô hướng của phương trình sau với $\mathbf{u}_1$ để nhận được

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{I}\mathbf{u}_2 = I_2\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2. \tag{D.8}$$

Như ở trên, tính chất đối xứng của $\mathbf{I}$ suy ra rằng các vế trái của các phương trình (D.7) và (D.8) là bằng nhau. Do đó,

$$(I_1 - I_2)\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = 0. \tag{D.9}$$

Có hai khả năng ở đây: (1) Nếu $I_1 \neq I_2$, thì chúng ta đã chứng minh xong, bởi vì $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = 0$, mà có nghĩa là $\mathbf{u}_1$ và $\mathbf{u}_2$ là trực giao. (2) Nếu $I_1 = I_2 \equiv I$, thì chúng ta có $\mathbf{I}(a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2)$, đối với bất kỳ a và b nào. Vì vậy bất cứ tổ hợp tuyến tính nào của $\mathbf{u}_1$ và $\mathbf{u}_2$ đều có cùng tính chất với $\mathbf{u}_1$ và $\mathbf{u}_2$ (là tính chất mà việc tác dụng $\mathbf{I}$ vào cũng cho cùng giá trị với việc chỉ nhân với I). Chúng ta do đó có toàn bộ một mặt phẳng các vector, vì vậy chúng ta có thể chọn bất kỳ hai vector trực giao nào trong mặt phẳng này để gọi chúng là $\mathbf{u}_1$ và $\mathbf{u}_2$.

$\square$

Định lý này chứng minh sự tồn tại của các trục chính, bởi vì tensor quán tính trong phương trình (9.8) thực sự là một ma trận thực và đối xứng.

NHẬN XÉT: (Khuyến cáo: Nhận xét này không có gì liên quan đến cơ học cổ điển. Nó đơn giản là một lý do che đậy cho việc đề cập tóm tắt một chút về cơ học lượng tử vào trong cuốn sách.) Trong cơ học lượng tử, hóa ra rằng bất cứ đại lượng có thể quan sát được nào, như là vị trí, năng lượng, động lượng, moment động lượng, vân vân ..., đều có thể được biểu diễn bởi một ma trận *Hermitian*, với giá trị được quan sát là một giá trị riêng của ma trận. Một ma trận Hermitian là một ma trận (nói chung là phức) với tính chất là chuyển vị của ma trận đó bằng với liên hợp phức của nó. Ví dụ như, một ma trận Hermitian cấp 2×2 phải có dạng,

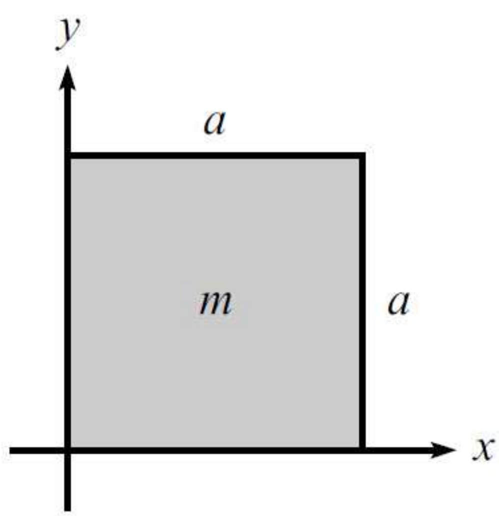
$$\begin{pmatrix} a & b+ic \\ b-ic & d \end{pmatrix}, \tag{D.10}$$

với các số thực a, b, c, và d. Bây giờ, nếu các giá trị quan sát được được cho bởi các giá trị riêng của một ma trận như vậy, thì các giá trị riêng phải có giá trị là thực, bởi vì không ai (ít nhất là trên trái đất này) sẽ đi bộ với một quãng đường là $4+3i$ dặm, hoặc trả một hóa đơn tiền điện là $17-43i$ kilowatt-giờ. Và thực vậy, bạn có thể chỉ ra, thông qua một cách làm thay đổi một chút với quá trình "Chứng minh các I là thực" ở trên, rằng các giá trị riêng của bất kỳ ma trận Hermitian nào thực ra là có giá trị thực. (Và tương tự như vậy, các vector riêng là trực giao.) Kết quả này có thể nói rằng là rất may mắn cho chúng ta. ♣

Phụ lục E

Chéo hóa các ma trận

Phụ lục này là liên quan đến Mục 9.3, nói về các trục chính. Quá trình chéo hóa các ma trận (nghĩa là, tìm ra *các vector riêng* và *các giá trị riêng*, được định nghĩa ở bên dưới) có vô số các ứng dụng trong một loạt các ngành khác nhau. Chúng ta sẽ miêu tả quá trình này ở đây bởi vì nó áp dụng cho việc tìm các trục chính và các moment chính. Hãy đi tìm



Hình E.1:

ba trục chính và moment quán tính chính của một hình vuông với độ dài cạnh là a, khối lượng m, và một góc của nó là điểm gốc tọa độ. Hình vuông nằm trong mặt phẳng $x-y$, với các cạnh nằm dọc trên các trục x và y (xem Hình E.1). Chúng ta sẽ chọn các trục đã cho x, y, và z là các trục cơ sở ban đầu của chúng ta. Sử dụng phương trình (9.8), bạn có thể chỉ ra rằng ma trận $\mathbf{I}$ (đối với cơ sở ban đầu này) là

$$\mathbf{I} = \rho \begin{pmatrix} \int y^2 & -\int xy & 0 \\ -\int xy & \int x^2 & 0 \\ 0 & 0 & \int(x^2+y^2) \end{pmatrix} = ma^2 \begin{pmatrix} 1/3 & -1/4 & 0 \\ -1/4 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}, \tag{E.1}$$

trong đó ρ là khối lượng trên một đơn vị diện tích, sao cho $a^2\rho = m$. Chúng ta đã sử dụng thực tế là $z = 0$, và chúng ta không viết ra $dxdy$ trong các tích phân.

Mục tiêu của chúng ta là đi tìm cơ sở trong đó $\mathbf{I}$ có dạng đường chéo. Nghĩa là, chúng ta muốn đi tìm ba nghiệm[1] đối với $\mathbf{u}$ (và I) của phương trình $\mathbf{Iu} = I\mathbf{u}$. Bằng cách đặt $I \equiv \lambda ma^2$ để làm cho mọi thứ nhìn gọn hơn, và bằng cách sử dụng dạng tường minh của $\mathbf{I}$ ở trên, phương trình $(\mathbf{I} - I)\mathbf{u} = 0$ trở thành

$$ma^2 \begin{pmatrix} 1/3-\lambda & -1/4 & 0 \\ -1/4 & 1/3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2/3-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{E.2}$$

Để cho có một nghiệm khác không đối với các thành phần u_x, u_y, u_z, định thức của ma trận này phải bằng không (xem Nhận xét cuối trang D.2). Phương trình bậc ba nhận được đối với λ sẽ rất dễ tìm nghiệm, bởi vì định thức bằng $[(1/3-\lambda)^2 - (1/4)^2](2/3-\lambda) = 0$. Các nghiệm là $\lambda = 1/3 \pm 1/4$, và $\lambda = 2/3$. Vì vậy ba moment chính của chúng ta, $I \equiv \lambda ma^2$, là

$$I_1 = \frac{7}{12}ma^2, \quad I_2 = \frac{1}{12}ma^2, \quad I_3 = \frac{2}{3}ma^2. \tag{E.3}$$

Đây là *các giá trị riêng* của $\mathbf{I}$.

Các vector $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, và $\mathbf{u}_3$, tương ứng với mỗi I này là như thế nào? Thay $\lambda = 7/12$ vào trong phương trình (E.2) cho ta ba phương trình (mỗi phương trình là đối với một thành phần), $-u_x - u_y = 0, -u_x - u_y = 0$, và $u_z = 0$. Số phương trình này là thừa vì chúng không độc lập tuyến tính (đây là vấn đề của việc cho định thức bằng không). Vì vậy $u_x = -u_y$, và $u_z = 0$. Vector do đó có thể được viết dưới dạng $\mathbf{u}_1 = (c, -c, 0)$, trong đó c là một hằng số bất kỳ nào đó.[2] Nếu chúng ta muốn chuẩn hóa một vector, thì $c = 1/\sqrt{2}$. Theo

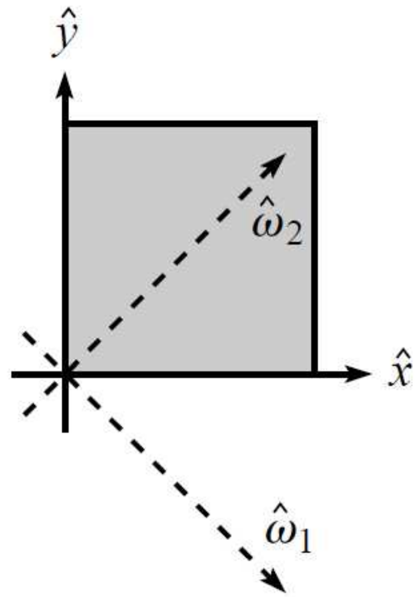
[1]Một nghiệm rất hiển nhiên là $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{z}}$, bởi vì $\mathbf{I}\hat{\mathbf{z}} = (2/3)ma^2\hat{\mathbf{z}}$. Từ kết quả về tính trực giao trong Định lý 9.4, chúng ta biết rằng hai vector khác phải nằm trong mặt phẳng $x - y$. Vì vậy chúng ta có thể nhanh chóng đưa bài toán này về một bài toán hai chiều, nhưng hãy tiến thêm bước nữa bằng cách sử dụng phương pháp tổng quát.

[2]Chúng ta có thể giải ra $\mathbf{u}$ chỉ sai khác với một hệ số nhân là hằng số, bởi vì nếu $\mathbf{Iu} = I\mathbf{u}$ là đúng đối với một $\mathbf{u}$ nào đó, thì nó cũng đúng rằng $\mathbf{I}(c\mathbf{u}) = I(c\mathbf{u})$, trong đó c là một hằng số bất kỳ.

một cách tương tự, thay $\lambda = 1/12$ vào trong phương trình (E.2) cho ta $\mathbf{u_2} = (c, c, 0)$. Và cuối cùng, thay $\lambda = 2/3$ vào trong phương trình (E.2) cho ta $\mathbf{u_3} = (0, 0, c)$, như đã được phát biểu trong phụ lục cuối trang ở trên. Ba trục chính trực chuẩn của chúng ta tương ứng với các moment trong phương trình (E.3) do đó là

$$\hat{\omega}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \quad \hat{\omega}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \quad \hat{\omega}_3 = (0, 0, 1). \tag{E.4}$$

Đây là *các vector riêng* của **I**. Chúng được biểu diễn trong Hình E.2. Trong cơ sở các



Hình E.2:

trục chính mới (trong đó $\hat{\omega}_\mathbf{1} = (1, 0, 0)$, vân vân...), ma trận **I** sẽ có dạng,

$$\mathbf{I} = ma^2 \begin{pmatrix} 7/12 & 0 & 0 \\ 0 & 1/12 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}. \tag{E.5}$$

Nói cách khác, chúng ta vừa đã "chéo hóa" ma trận. Ý tưởng cơ bản là từ bây giờ chúng ta nên sử dụng các trục chính như là các vector cơ sở của chúng ta. Chúng ta có thể quên đi rằng chúng ta đã từng làm bất cứ cái gì với các trục x, y, và z ban đầu.

NHẬN XÉT:

1. $I_1 + I_2 = I_3$, như là định lý trục vuông góc đã cho chúng ta biết.
2. I_2 là moment quanh một đường chéo đi qua tâm của hình vuông, mà tất nhiên là bằng với moment quanh đường chéo còn lại đi qua tâm hình vuông. Nhưng giá trị moment sau liên quan đến I_1 bởi định lý trục song song. Và thực vậy, $I_1 = I_2 + m(a/\sqrt{2})^2$.

3. Bất kỳ trục nào đi qua tâm của hình vuông, nằm trong mặt phẳng của hình vuông, đều có moment như nhau (do Định lý 9.5 và 9.6). Vì vậy I_2 bằng với moment xung quanh một trục đi qua tâm, song song với một cạnh. Nhưng giá trị này là giống với moment của một thanh có chiều dài a xung quanh tâm của nó (sự mở rộng của hình chữ nhật theo chiều của trục là không có liên quan gì). Do vậy có hệ số bằng 1/12 trong I_3. ♣

Phụ lục F

Các câu hỏi định tính về thuyết tương đối

1. Liệu có một vật được coi là một vật thể tuyệt đối cứng?

   Trả lời: Không có. Bởi vì thông tin không thể di chuyển nhanh hơn vận tốc của ánh sáng, nó sẽ mất thời gian để cho các nguyên tử trong vật thể liên lạc với nhau. Nếu bạn đẩy vào một đầu của một thanh, thì đầu kia sẽ không chuyển động ngay lập tức. Nếu nó chuyển động ngay lập tức, thì những sự kiện "đẩy" và "chuyển động" này sẽ bị tách riêng rẽ trong không gian (xem Mục 11.6), mà điều này có nghĩa là sẽ tồn tại một hệ tọa độ trong đó sự kiện "chuyển động" xảy ra trước sự kiện "đẩy". Điều này vi phạm thuyết nhân quả, vì vậy chúng ta kết luận rằng đầu kia sẽ không chuyển động ngay tức thì.

2. Làm thế nào để bạn đồng bộ hóa hai đồng hồ mà đang đứng yên so với nhau?

   Trả lời: Một cách là đặt một nguồn sáng vào điểm giữa hai đồng hồ và gửi đi các tín hiệu của chúng ta, và sau đó thiết lập các đồng hồ có một giá trị nào đó khi các tín hiệu đến chúng. Cách làm khác là đặt một đồng hồ đeo tay ngay bên cạnh một trong hai đồng hồ trên và đồng bộ hóa nó với chiếc đồng hồ này, và sau đó di chuyển cái đồng hồ đeo tay này rất chậm sang phía bên chiếc đồng hồ kia và đồng bộ chiếc đồng hồ đó với nó. Bất cứ hiệu ứng giãn nở thời gian nào cũng có thể được làm cho có giá trị nhỏ bất kỳ bằng cách di chuyển chiếc đồng hồ đeo tay đủ chậm, bởi vì hiệu ứng giãn nở thời gian là có bậc hai theo v.

3. Các đồng hồ đang chuyển động sẽ chạy chậm hơn. Liệu kết quả này có liên quan gì

đến thời gian mà ánh sáng di chuyển từ đồng hồ đến mắt của bạn?

Trả lời: Không. Khi chúng ta đang nói về một chiếc đồng hồ đang chạy nhanh như thế nào trong một hệ tọa độ đã cho, thì chúng ta đang đề cập đến cái gì mà chiếc đồng hồ thực sự hiển thị trong hệ tọa độ đó. Chắc chắn là sẽ mất thời gian để cho ánh sáng từ đồng hồ đi đến mắt của một người quan sát, nhưng nó sẽ được hiểu rằng người quan sát sẽ trừ đi thời gian trung chuyển này để tính toán thời gian tại đó đồng hồ thực sự đang hiển thị. Tương tự như vậy, các hiệu ứng tương đối khác, như là sự co lại của chiều dài và sự mất tính đồng thời, không có gì liên quan đến thời gian mà ánh sáng đi đến mắt của bạn. Chúng chỉ liên quan đến cái gì thực sự *đang xảy ra*, trong hệ tọa độ của bạn. Một cách để tránh sự phức tạp của thời gian chuyển động của ánh sáng là sử dụng lưới các đồng hồ và các gậy mét được miêu tả trong phần cuối của Mục 11.3.3.

4. Liệu sự giãn nở của thời gian có phụ thuộc vào việc một chiếc đồng hồ đang di chuyển đi qua tầm nhìn của bạn hay là đang di chuyển ra xa bạn?

   Trả lời: Không. Một chiếc đồng hồ đang di chuyển sẽ chạy chậm hơn, không phụ thuộc vào việc nó đang di chuyển theo hướng nào. Điều này sẽ rõ ràng hơn nếu bạn suy xét theo lưới các đồng hồ và các gậy mét từ Mục 11.3.3. Nếu bạn tưởng tượng một triệu người đang đứng tại các điểm của lưới, thì tất cả những người đó sẽ đều quan sát thấy chiếc đồng hồ đang chạy chậm hơn. Giãn nở thời gian là một hiệu ứng phụ thuộc vào *hệ tọa độ* và vận tốc của một đồng hồ đối với hệ tọa đó. Nó không phụ thuộc vào bạn đang đứng ở đâu trong hệ tọa độ đó (miễn là bạn đang đứng yên trong hệ tọa độ đó).

5. Liệu việc giãn nở thời gian theo thuyết tương đối đặc biệt có phụ thuộc vào gia tốc của chiếc đồng hồ đang chuyển động?

   Trả lời: Không. Hệ số giãn nở thời gian là $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, không phụ thuộc gì vào a. Đại lượng duy nhất liên quan ở đây là v tại thời điểm đã cho. Không có vấn đề gì nếu v là đang thay đổi. Nhưng nếu *bạn* đang chuyển động có gia tốc, thì bạn không thể áp dụng các kết quả của Thuyết tương đối đặc biệt một cách ngây thơ như thế được. (Để làm mọi việc một cách chính xác, có thể cách dễ nhất là suy nghĩ theo Thuyết tương đối tổng quát. nhưng Thuyết tương đối tổng quát thực ra là không cần thiết ở đây; xem Chương 14 để biết về một thảo luận về điều này.) Nhưng miễn là bạn đã đưa ra một hệ quy chiếu quán tính, thì chiếc đồng hồ bạn đang quan sát nó có thể trải qua bất kỳ chuyển động nào nó muốn, và bạn sẽ quan sát nó chạy chậm hơn bởi một hệ số đơn giản là γ.

6. Một ai đó nói rằng, "Một thanh mà có chiều dài bị co lại *thực ra* là không bị ngắn lại, nó chỉ *trông giống như* là ngắn lại mà thôi." Bạn sẽ đáp lại người này như thế nào?

   Trả lời: Thanh thực sự *là* ngắn lại trong hệ tọa độ của bạn. Sự co chiều dài không có gì liên quan đến việc thanh trông như thế nào. Nó chỉ liên quan đến việc các đầu của thanh đang ở đâu tại cùng các thời điểm trong tọa độ của bạn. (Nghĩa là, nói cho cùng, bạn đo chiều dài của một vật như thế nào.) Tại một thời điểm đã cho trong hệ tọa độ của bạn, khoảng cách giữa các đầu của thanh thực ra là nhỏ hơn chiều dài thực của nó.

7. Xét một thanh mà đang chuyển động theo chiều của nó. Liệu chiều dài bị co lại của nó có phụ thuộc vào việc hướng chuyển động này là đi qua tầm nhìn của bạn hay là đang đi thẳng vào chỗ của bạn?

   Trả lời: Không. Thanh đều bị co lại theo chiều dài trong cả hai trường hợp. Tất nhiên, nếu bạn nhìn thanh trong trường hợp sau, thì tất cả những gì bạn nhìn thấy chỉ là một đầu của thanh, mà nó chỉ là một điểm. Nhưng thanh thực ra là ngắn lại trong hệ tọa độ của bạn. Như là trong Câu hỏi 4 ở trên, sự co chiều dài phụ thuộc vào hệ tọa độ, không phụ thuộc vào vị trí bạn đang đứng trong nó.

8. Một tấm gương đang chuyển động về phía bạn với vận tốc v. Bạn chiếu một tia sáng về phía nó và luồng sáng sẽ phản xạ trở lại phía bạn. Hỏi vận tốc của tia sáng phản xạ là bao nhiêu?

   Trả lời: Vận tốc đó là c, luôn luôn là như vậy. Bạn sẽ quan sát thấy tia sáng có một tần số lớn hơn, do hiệu ứng Doppler. Nhưng vận tốc vẫn sẽ là c.

9. Trong thuyết tương đối, thứ tự của hai sự kiện trong một hệ tọa độ có thể đảo ngược trong hệ tọa độ khác. Liệu điều này có suy ra rằng tồn tại một hệ tọa độ trong đó tôi đi xuống một chiếc xe bus trước khi tôi đi lên nó không?

   Trả lời: Không. Thứ tự của hai sự kiện có thể đảo ngược trong một hệ tọa độ khác chỉ khi hai sự kiện đó là bị tách biệt trong không gian. Nghĩa là, nếu $\Delta x > c\Delta t$ (nói cách khác, các sự kiện là quá xa nhau để cho thậm chí là ánh sáng đi từ một sự kiện đến sự kiện kia.) Hai sự kiện liên quan đến nhau ở đây (đi lên xe bus, và đi xuống xe bus) là không bị tách trong không gian, bởi vì xe bus di chuyển với một vận tốc nhỏ hơn c, tất nhiên là như vậy. Chúng là các sự kiện tách biệt về thời gian. Do đó, trong mọi hệ tọa độ sẽ là đúng là tôi đi xuống xe bus sau khi tôi đi lên nó.

Sẽ là vấn đề thuyết nhân quả nếu tồn tại một hệ tọa độ trong đó tôi đi xuống xe bus trước khi tôi đi lên nó. Nếu tôi bị gãy mắt cá chân khi đi xuống xe bus, thì tôi sẽ không thể chạy nhanh để bắt kịp chiếc xe bus mà đi lên được, mà trong trường hợp này thì tôi sẽ không có cơ hội để bị gãy mắt cá chân khi đi xuống xe bus đó, mà trong trường hợp này tôi đã có thể chạy rất nhanh để bắt kịp chiếc xe bus đó và lên kịp nó, và , thôi, bạn đã hiểu ý tôi muốn nói.

10. Bạn đang ở trong một tầu không gian đang đi trong không gian vũ trụ. Liệu có cách nào để bạn có thể đo được vận tốc của bạn mà không nhìn ra bên ngoài?

    Trả lời: Có hai vấn đề cần làm rõ ở đây. Thứ nhất, câu hỏi này là không có nghĩa, bởi vì vận tốc tuyệt đối là không tồn tại. Con tàu không có vận tốc; nó chỉ có vận tốc đối với một cái gì khác thôi. Thứ hai, thậm chí là nếu câu hỏi hỏi về vận tốc đối với, ví dụ như, một mảnh bụi của ngôi sao nào đó, câu trả lời sẽ là "không." Vận tốc đều không thể đo được từ bên trong con tàu. Gia tốc, mặt khác, thì có thể đo được (với giả thiết rằng không có trọng trường ở xung quanh mà có thể làm cho việc đo đạc bị sai).

11. Nếu bạn chuyển động với vận tốc của ánh sáng, hỏi hình dạng vũ trụ sẽ có hình dạng như thế nào trong hệ tọa độ của bạn?

    Trả lời: Câu hỏi là không có nghĩa, bởi vì bạn không thể chuyển động với vận tốc của ánh sáng. Một câu hỏi có nghĩa để hỏi là: Hình dạng của vũ trụ sẽ như thế nào nếu bạn chuyển động với vận tốc gần bằng c? Câu trả lời là trong hệ tọa độ của bạn mọi thứ sẽ bị nén lại dọc theo chiều chuyển động của bạn, do sự co của chiều dài. Bất cứ vùng nào của vũ trụ cũng sẽ bị nén thành một vật phẳng.

12. Hai vật bay về phía bạn, một vật từ phía đông với vận tốc u, và vật kia từ phía tây với vận tốc v. Có đúng là vận tốc tương đối của chúng, khi được đo bởi bạn, là $u + v$? Hoặc bạn phải dùng công thức cộng vận tốc, $V = (u + v)/(1 + uv/c^2)$? Liệu có thể để vận tốc tương đối giữa chúng, khi được đo bởi bạn, vượt quá c?

    Trả lời: Đúng, không phải, có thể. Nó sẽ là đúng khi chỉ đơn giản là cộng hai vận tốc để nhận được $u + v$. Không cần thiết phải sử dụng công thức cộng vận tốc, bởi vì cả hai vận tốc là được đo đối với *cùng một vật*, đó là bạn. Sẽ hoàn toàn là không vấn đề gì để cho kết quả sẽ lớn hơn c, nhưng nó phải nhỏ hơn (hoặc bằng, đối với hai photon) $2c$.

Bạn cần phải sử dụng công thức cộng vận tốc khi, ví dụ như, bạn được cho vận tốc của một quả bóng đối với một con tàu, và cũng được cho vận tốc của con tàu đối với mặt đất, và mục tiêu của bạn là đi tìm vận tốc của quả bóng đối với mặt đất. Vấn đề ở đây là bây giờ hai vận tốc đã cho là được đo đối với hai vật *khác nhau*, là con tàu và mặt đất.

13. Hai đồng hồ tại hai đầu của một con tàu được đồng bộ hóa với nhau đối với con tàu. Nếu con tàu chuyển động qua bạn, hỏi đồng hồ nào sẽ chỉ thời gian lớn hơn?

Trả lời: Đồng hồ đặt tại cuối con tàu sẽ chỉ thời gian lớn hơn. Nó sẽ chỉ một khoảng thời gian Lv/c^2 lớn hơn đồng hồ đằng trước con tàu, trong đó L là chiều dài của con tầu.

14. Một con tàu chuyển động với vận tốc $4c/5$. Một đồng hồ được ném từ đằng sau con tàu ra đằng trước nó. Khi được đo trong hệ tọa độ mặt đất, thời gian của chuyển động ném này là 1 giây. Liệu lập luận sau đây có đúng không? "Hệ số γ giữa con tàu và mặt đất là $\gamma = 1/\sqrt{1-(4/5)^2} = 5/3$. Và bởi vì đồng hồ đang chuyển động sẽ chạy chậm đi, nên khoảng thời gian chỉ trên đồng hồ trong quá trình chuyển động ném là 3/5 của một giây."

Trả lời: Không. Nó không đúng, bởi vì kết quả của sự giãn nở thời gian chỉ đúng đối với hai sự kiện mà xảy ra tại *cùng một nơi* trong hệ tọa độ liên quan (ở đây là con tàu). Chiếc đồng hồ chuyển động đối với con tàu, vì vậy lập luận ở trên là không có giá trị.

Một cách khác để thấy tại sao nó là không đúng là như sau. Một cách chắc chắn là đúng đắn để đi tính khoảng thời gian trên đồng hồ là đi tìm vận tốc của đồng hồ đối với mặt đất (phải có thêm thông tin để xác định được vận tốc này), và sau đó đơn giản là áp dụng sự giãn nở thời gian với hệ số γ tương ứng để nhận được kết quả là $(1\text{ s})/\gamma$. Bởi vì vận tốc v của chiếc đồng hồ chắc chắn là không phải $4c/5$, kết quả sẽ chắc chắn không phải là 3/5 s.

15. Người A đuổi theo người B. Khi được đo trong hệ tọa độ mặt đất, hai người đó có vận tốc tương ứng là $4c/5$ và $3c/5$. Nếu ban đầu khoảng cách giữa hai người là L

(được đo trong hệ tọa độ mặt đất), hỏi sau bao lâu (được đo trong hệ quy chiếu mặt đất) thì người A sẽ đuổi kịp người B?

Trả lời: Khi được đo trong hệ quy chiếu mặt đất, vận tốc tương đối là $4c/5-3c/5 = c/5$. Người A phải vượt được khoảng cách L ban đầu, vì vậy thời gian cần thiết là $L/(c/5) = 5L/c$. Không cần thiết phải sử dụng bất kỳ công thức cộng vận tốc lạ lùng hay là các công thức co độ dài ở đây, bởi vì tất cả các đại lượng trong bài toán này là được đo đối với *cùng* một hệ quy chiếu. Vì vậy nó sẽ nhanh chóng chuyển thành bài toán đơn giản "(vận tốc)(thời gian)=(quãng đường)".

16. Liệu định đề "vận tốc của ánh sáng là như nhau trong mọi hệ quy chiếu quán tính" thực sự là cần thiết? Nghĩa là, có phải là nó vẫn chưa được suy ra bởi định đề "các định luật vật lý là như nhau trong mọi hệ quy chiếu quán tính"?

    Trả lời: Có, nó là cần thiết. Định đề về vận tốc của ánh sáng chắc chắn là không được suy ra bởi định đề về các định luật vật lý. Định đề về các định luật vật lý không suy ra rằng các quả bóng chày có cùng vận tốc trong mọi hệ quy chiếu quán tính, vì vậy nó tương tự như vậy là không suy ra tính chất đó đối với ánh sáng.

    Hóa ra rằng hầu như tất cả các kết quả trong Thuyết tương đối đặc biệt có thể được suy ra bằng cách chỉ sử dụng định đề về các định luật vật lý. Cái mà bạn có thể tìm (sau khi thực hiện một vài tính toán) là có một vận tốc giới hạn nào đó, mà có thể là hoặc phải có giá trị là vô hạn (xem Mục 11.10). Nhưng bạn vẫn phải nói là vận tốc này hoặc là hữu hạn hoặc là vô hạn. Định đề về vận tốc ánh sáng đã làm được điều này.

17. Tưởng tượng đang đóng một cái kéo rất lớn. Hoàn toàn có thể để cho điểm giao giữa hai lưỡi kéo chuyển động nhanh hơn vận tốc của ánh sáng. Liệu điều này có vi phạm gì trong lý thuyết tương đối không?

    Trả lời: Không. Nếu như góc giữa hai lưỡi kéo là đủ nhỏ, thì hai đầu của hai lưỡi kéo (và tất cả các nguyên tử khác trong chiếc kéo) có thể chuyển động với một vận tốc nhỏ hơn c, trong khi điểm giao điểm chuyển động nhanh hơn c. Nhưng điều này không vi phạm với bất cứ trong thuyết tương đối. Điểm giao điểm không phải là một vật gì có thực, vì vậy không có gì sai với việc nó chuyển động nhanh hơn c.

    Bạn có thể sẽ phải lo lắng là kết quả này sẽ cho phép bạn gửi đi một tín hiệu xuống chiếc kéo với một vận tốc nhanh hơn c. Tuy nhiên, bởi vì không có cái gì là một vật thể rắn tuyệt đối cả, nên nó sẽ là không thể để làm cho đầu kia của chiếc kéo chuyển động ngay lập tức, khi bạn tác dụng một lực vào tay cầm của nó. Chiếc kéo có thể là đã đang chuyển động, mà trong trường hợp này chuyển động đó là độc lập với bất kỳ quyết định nào mà bạn có đối với tay cầm để làm thay đổi chuyển động của hai lưỡi kéo.

18. Hai anh em sinh đôi di chuyển ra xa nhau với vận tốc tương đối nào đó. Kết quả về sự giãn nở thời gian nói rằng mỗi người sẽ nhìn thấy đồng hồ của người kia chạy chậm hơn, vì vậy mỗi người sẽ nói rằng người kia sẽ có tuổi ít hơn. Bạn sẽ trả lời một người nào đó như thế nào khi người đó hỏi, "Nhưng người nào trong hai anh em sinh đôi đó sẽ *là người* trẻ hơn?"

    Trả lời: Sẽ không có ý nghĩa gì cả khi hỏi người nào là thực sự trẻ hơn, bởi vì hai anh em sinh đôi đó là không ở trong cùng một hệ quy chiếu; họ đang sử dụng các tọa độ khác nhau để đo thời gian. Nó cũng ngớ ngẩn cũng giống như có hai người chạy ra xa nhau theo khoảng cách (sao cho mỗi người nhìn thấy người kia trở nên nhỏ hơn), và sau đó hỏi: Ai sẽ là thực sự nhỏ hơn?

19. Một sự kiện nào đó có các tọa độ (x, t) trong một hệ quy chiếu. Bạn sẽ sử dụng một phép biến đổi Lorentz như thế nào để tìm ra các tọa độ của sự kiện này trong một hệ quy chiếu khác?

    Trả lời: Bạn sẽ không làm như vậy. Các phép biến đổi Lorentz không liên quan gì tới các sự kiện riêng lẻ. Chúng chỉ làm việc với *các cặp* các sự kiện và *sự chia tách* giữa chúng. Khi một sự kiện xảy ra, các tọa độ của nó trong một hệ tọa độ khác có thể là bất cứ cái gì bạn muốn, đơn giản là do bạn định nghĩa điểm gốc tọa độ của bạn tại bất cứ đâu và bất cứ thời điểm nào mà bạn muốn. Nhưng đối với các cặp sự kiện, sự chia tách của chúng là một đại lượng được xác định, không phụ thuộc vào bất kỳ sự xác định nào của điểm gốc tọa độ. Do đó nó là một câu hỏi có nghĩa để hỏi về các phân tách trong hai hệ quy chiếu khác nhau liên hệ với nhau như thế nào, và các phép biến đổi Lorentz sẽ trở lời được câu hỏi này.

20. Khi sử dụng các phép biến đổi Lorentz, làm thế nào để bạn nói rằng hệ quy chiếu nào là hệ quy chiếu "phẩy" đang chuyển động?

    Trả lời: Bạn không cần. Không có hệ quy chiếu nào được ưu tiên cả, vì vậy sẽ không có ý nghĩa gì để hỏi hệ quy chiếu nào đang chuyển động. Chúng ta sử dụng ký hiệu "phẩy" trong các bước nhận được các kết quả trong Mục 11.4.1 để tiện cho việc ký hiệu, nhưng không có nghĩa là suy ra rằng có một hệ quy chiếu S được ưu tiên và một hệ quy chiếu S' kém cơ bản hơn. Nói chung, một ký hiệu tốt hơn là đi sử dụng các chỉ số dưới để miêu tả hai hệ quy chiếu, ví dụ như "g" cho mặt đất và "t" cho con tàu. Ví dụ như, nếu bạn biết các giá trị của Δt_t và Δx_t trên một con tàu (mà chúng ta sẽ giả sử là đang chuyển động theo chiều dương của x đối với mặt đất), và nếu bạn muốn tìm các giá trị của Δt_g và Δx_g trên mặt đất, thì bạn có thể viết:

$$\Delta x_g = \gamma(\Delta x_1 + v\Delta t_1),$$
$$\Delta t_g = \gamma(\Delta t_1 + v\Delta x_1/c^2) \qquad \text{(F.1)}$$

Dấu ở đây là dấu "+" bởi vì hệ quy chiếu tương ứng với vế trái của phương trình (mặt đất) sẽ nhìn thấy hệ quy chiếu tương ứng với vế phải (con tàu) đang chuyển động về bên phải. Nếu đáng lẽ bạn biết về các khoảng giá trị trên mặt đất và bạn muốn đi tìm chúng trên con tàu, thì bạn chỉ cần đổi các chỉ số dưới "g" và "t" và đổi dấu trên thành dấu "-", với lý do trong câu phía trên.

21. Động lượng của một vật thể có khối lượng m và vận tốc v là $p = \gamma mv$. "Một photon có khối lượng bằng không, vì vậy nó có động lượng bằng không." Điều này là đúng hay không đúng?

    Trả lời: Không đúng. Đúng là m bằng không, nhưng hệ số γ là bằng vô cùng bởi vì $v = c$. Vô cùng nhân với không là không xác định. Một photon thực ra là có động lượng, và nó bằng E/c (mà vô tình bằng $h\nu/c$, trong đó ν là tần số của ánh sáng).

22. Không cần thiết phải đưa ra một định đề về việc không thể gia tốc một vật đạt đến vận tốc c. Nó là hệ quả của dạng theo thuyết tương đối của năng lượng. Hãy giải thích.

    Trả lời: $E = \gamma mc^2$, vì vậy nếu $v = c$ thì $\gamma = \infty$, và vật thể phải có một phần năng lượng vô hạn (trừ khi $m = 0$, đối với một photon). Tất cả năng lượng của vũ trụ không thể nào làm gia tốc cho một cái gì đó đạt được vận tốc c.

Phụ lục G

Các cách dẫn đến kết quả Lv/c^2

Trong Mục 11.3.1, chúng ta đã chỉ ra rằng nếu một con tàu với độ dài riêng L chuyển động với vận tốc v so với mặt đất, thì trong hệ quy chiếu mặt đất thì đồng hồ phía sau sẽ chỉ thời gian nhanh hơn một khoảng Lv/c^2 so với đồng hồ phía trước (giả thiết rằng cả hai đồng hồ được đồng bộ hóa trong hệ quy chiếu con tàu). Có rất nhiều cách khác nhau để dẫn đến kết quả này, do đó để thú vị tôi sẽ liệt kê ra ở đây tất cả các cách mà tôi có thể nghĩ ra. Tất cả các sự giải thích đều rất ngắn gọn, nhưng tôi sẽ chỉ cho bạn tới những bài toán hoặc những mục cụ thể mà ở đó có sự giải thích chi tiết hơn nếu bạn quan tâm. Nhiều cách chỉ là sự thay đổi nhỏ từ các cách khác, do đó có lẽ các cách này không nên được tính như là một cách riêng biệt, và đây là các cách của tôi:

1. **Nguồn sáng trên con tàu:** Đặt một nguồn sáng trên một con tàu ở vị trí cách phía trước con tàu một khoảng $d_f = L(c-v)//2c$ và cách phía sau $d_b = L(c+v)/2c$. Bạn có thể chỉ ra rằng các photon chạm vào hai đầu của con tàu một cách đồng thời trong hệ quy chiếu mặt đất. Nhưng chúng sẽ chạm vào hai đầu tại các thời điểm khác nhau trong hệ quy chiếu con tàu; sự khác nhau của số chỉ trên các đồng hồ tại hai đầu khi các photon chạm vào chúng là $(d_b - d_f)c = Lv/c^2$. Do đó, tại một thời điểm cho trước trong hệ quy chiếu mặt đất (ví dụ tại thời điểm khi các đồng hồ tại hai đầu con tàu được chiếu sáng đồng thời bởi các photon), một người đứng trên mặt đất sẽ nhìn thấy đồng hồ phía sau chỉ nhanh hơn một khoảng Lv/c^2 so với đồng hồ phía trước. (Xem ví dụ trong Mục 11.3.1.)

2. **Phép biến đổi Lorentz:** Phương trình thứ hai trong (11.17) là $\Delta t_g = \gamma(\Delta t_t + v\Delta x_t/c^2)$, ở đó các chỉ số dưới đề cập tới hệ quy chiếu mặt đất và hệ quy chiếu con tàu. Nếu hai sự kiện (ví dụ hai đồng hồ lóe sáng số chỉ của chúng) tại hai đầu của

con tàu xảy ra đồng thời trong hệ quy chiếu mặt đất thì ta có $\Delta t_g = 0$. Và tất nhiên $\Delta x_t = L$. Phép biến đổi Lorentz ở trên do đó sẽ dẫn đến $\Delta t_t = -Lv/c^2$. Dấu trừ ở đây có nghĩa là sự kiện với giá trị x_t lớn hơn sẽ có giá trị t_t nhỏ hơn. Nói một cách khác, đồng hồ phía trước sẽ chỉ thời gian chậm hơn một khoảng Lv/c^2 so với đồng hồ phía sau tại một thời điểm cho trước trong hệ quy chiếu mặt đất.

3. **Khoảng bất biến:** Đây thực sự chỉ là một cách làm không hoàn chỉnh, bởi vì nó chỉ xác định độ lớn của kết quả Lv/c^2 mà không xác định được dấu. Khoảng bất biến chỉ ra rằng $c^2\Delta t_g^2 - \Delta x_g^2 = c^2\Delta t_t^2 - \Delta x_t^2$, ở đó chỉ số dưới đề cập tới hệ quy chiếu mặt đất và hệ quy chiếu con tàu. Nếu hai sự kiện (ví dụ hai đồng hồ lóe sáng số chỉ của chúng) tại hai đầu của con tàu xảy ra đồng thời trong hệ quy chiếu mặt đất thì ta có $\Delta t_g = 0$. Và tất nhiên $\Delta x_t = L$. Đồng thời chúng ta cũng biết từ kết quả co độ dài là $\Delta x_g = L/\gamma$. Do đó khoảng bất biến dẫn đến $c^2(0)^2 - (L/\gamma)^2 = c^2\Delta t_t^2 - L^2$, điều này suy ra $c^2\Delta t_t^2 = L^2(1 - 1/\gamma^2) \Longrightarrow c^2\Delta t_t^2 = L^2v^2/c^2 \Longrightarrow \Delta t_t = \pm Lv/c^2$. Như đã nói tới ở phần đầu, dấu của kết quả không xác định được bằng phương pháp này.

4. **Sơ đồ Minkowski:** Nhiệm vụ của Bài tập luyện tập 11.63 là sử dụng sơ đồ Minkowski để suy ra kết quả Lv/c^2. Mục tiêu cơ bản là xác định xem ct' bằng bao nhiêu đơn vị trong đoạn thẳng BC ở Hình 11.27, ct bằng bao nhiêu đơn vị trong đoạn thẳng BE ở Hình 11.28.

5. **Di chuyển chậm trên một con tàu:** Trong Bài tập luyện tập 11.58, một người di chuyển rất chậm với vận tốc u từ phía sau con tàu có độ dài riêng L tới phía trước của nó. Trong hệ quy chiếu con tàu, ảnh hưởng của sự giãn nở thời gian là bậc hai đối với u/c và do đó có thể bỏ qua (bởi vì tổng thời gian chỉ là bậc nhất đối với $1/u$). Nhưng trong hệ quy chiếu mặt đất, ảnh hưởng của sự giãn nở thời gian là bậc nhất đối với u/c (như bạn có thể chỉ ra) và do đó sẽ tồn tại ảnh hưởng; một người quan sát trên mặt đất sẽ nhìn thấy đồng hồ của người đó chạy chậm hơn một đồng hồ cố định trên tàu. Bây giờ, đồng hồ của người đó sẽ chỉ giống như các đồng hồ đặt tại phía sau và phía trước con tàu tại thời điểm bắt đầu và kết thúc quá trình di chuyển, bởi vì chúng ta bỏ qua sự giãn nở thời gian trong hệ quy chiếu con tàu. Do đó, bởi vì thời gian trên đồng hồ của người đó trôi qua chậm hơn so với đồng hồ phía trước (trong hệ quy chiếu mặt đất) nên đồng hồ của người đó phải bắt đầu

chỉ thời gian lớn hơn so với đồng hồ phía trước (trong hệ quy chiếu mặt đất). Điều này cố nghĩa là đồng hồ phía sau phải chỉ thời gian nhiều hơn đồng hồ phía trước. Một phân tích định lượng chỉ ra rằng khoảng thời gian vượt quá này thực tế sẽ là Lv/c^2.

6. **Các cách lập luận nhất quán:** Có rất nhiều mô hình (một vài ví dụ là Bài tập 11.2, 11.3, 11.8, và Bài tập luyện tập 11.35) ở đó kết quả Lv/c^2 là một phần trong việc giải thích các kết quả khác. Nếu không có nó, chúng ta sẽ gặp phải sự mâu thuẫn, ví dụ như hai hệ quy chiếu khác nhau sẽ dẫn đến hai câu trả lời khác nhau cho cùng một câu hỏi mà câu hỏi này thực tế là độc lập với hệ quy chiếu. Do đó nếu các bạn muốn, các bạn có thể lập luận lại (dưới giải thiết rằng mọi thứ là nhất quán trong thuyết tương đối) và gọi ảnh hưởng đồng hồ phía sau chạy nhanh hơn là thời gian T chưa biết nào đó (với tất cả những gì bạn biết thì nó có thể bằng không), và sau đó giải theo T để mọi thứ là nhất quán. Bạn sẽ đi đến kết quả là $T = Lv/c^2$.

7. **Sự giãn nở thời gian hấp dẫn:** Nhiệm vụ của Bài tập 14.13 là dẫn ra (với giá trị v nhỏ) kết quả Lv/c^2 bằng cách sử dụng thực tế rằng kết quả Lv/c^2 nhìn có vẻ rất giống với đại lượng gh/c^2 trong kết quả sự giãn nở thời gian hấp dẫn. Nếu bạn đứng trên mặt đất gần với phía trước con tàu có độ dài L và tăng tốc về phía sau con tàu với gia tốc g, bạn sẽ nhìn thấy đồng hồ ở phía sau chạy nhanh hơn một thừa số $(1 + gL/c^2)$, điều này là nguyên nhân dẫn đến đồng hồ phía sau chỉ nhanh hơn một khoảng thời gian $(gL/c^2)t = Lv/c^2$ so với đồng hồ phía trước. (Giả thiết rằng bạn tăng tốc trong khoảng thời gian ngắn sao cho $v \approx gt$ và khoảng cách trong đại lượng gL/c^2 được giữ bằng L.)

8. **Tên lửa tăng tốc:** Nhiệm vụ của Bài tập 14.6 là chỉ ra rằng nếu một tên lửa với độ dài riêng L tăng tốc với gia tốc riêng g và đạt tới vận tốc v, thì trong hệ quy chiếu mặt đất số chỉ của các đồng hồ phía sau và phía trước liên hệ với nhau bởi biểu thức $t_f = t_b(1 + gL/c^2) - Lv/c^2$. Nói một cách khác, trong hệ quy chiếu mặt đất đồng hồ phía sau chỉ $t_b(1 + gL/c^2) - Lv/c^2$ đồng thời với đồng hồ phía trước chỉ t_b. Nhưng trong hệ quy chiếu tên lửa, sự giãn nở thời gian hấp dẫn chỉ ra rằng đồng hồ phía trước chỉ $t_b(1 + gL/c^2)$ đồng thời với đồng hồ phía sau chỉ t_b. Hiệu số chỉ thời gian (phía trước trừ phía sau)trong hệ quy chiếu mặt đất do đó sẽ nhỏ hơn

trong hệ quy chiếu tên lửa một khoảng bằng Lv/c^2. Đây là kết quả chúng ta mong muốn.

Phụ lục H

Các cách giải bài toán nghịch lý của anh em sinh đôi

Bài toán về nghịch lý của anh em sinh đôi xuất hiện trong Chương 11 và 14, cả trong phần lý thuyết và trong phần bài tập. Bài toán này liên quan đến hai anh em sinh đôi, người A ở trên trái đất[1], và người B di chuyển rất nhanh đến một ngôi sao ở xa sau đó quay lại. Khi họ gặp lại nhau, họ phát hiện ra rằng người B trẻ hơn. Điều nay là sự thật bởi vì người A có thể sử dụng kết quả về sự giãn nở thời gian trong thuyết tương đối hẹp để chỉ ra rằng đồng hồ của người B chạy chậm hơn một thừa số γ.

"Nghịch lý" nảy sinh từ thực tế rằng tình huống này dường như là đối xứng. Cụ thể là dường như mỗi người đều có khả năng nghĩ rằng bản thân họ ở trạng thái nghỉ, do đó cô ta sẽ thấy đồng hồ của người kia bị chậm lại. Vì vậy tại sao rốt cuộc B lại trẻ hơn? Cách lý giải cho nghịch lý này đó là mô hình thực tế là không đối xứng, bởi vì B phải chuyển động vòng lại và do đó phải chịu gia tốc. Như vậy cô ta không phải luôn luôn ở trong một hệ quy chiếu quán tính, do đó cô ta không thể áp dụng kết quả đơn giản về sự giãn nở thời gian trong thuyết tương đối hẹp.

Trong khi lập luận ở trên là đủ để xóa bỏ đi sự nghịch lý thì nó dường như vẫn chưa hoàn toàn đầy đủ bởi vì (a) nó không giải thích sự phù hợp về kết quả định lượng từ quan sát của B và quan sát của A, và (b) nghịch lý này thực tế có thể được thành lập mà không cần nói gì đến gia tốc, trong trường hợp đó cần thay đổi một chút về lập luận.

[1]Đúng ra chúng ta nên có người A lơ lửng trong không gian để bỏ qua ảnh hưởng của sự giãn nở thời gian trong thuyết tương đối tổng quát từ lực trọng trường của trái đất. Nhưng nếu người B di chuyển đủ nhanh thì ảnh hưởng trong thuyết tương đối hẹp sẽ lấn át ảnh hưởng của lực hấp dẫn.

Dưới đây là tất cả những cách lập luận hoàn chỉnh mà tôi có thể nghĩ ra. Các mô tả là hơi ngắn gọn, nhưng tôi sẽ chỉ ra cho bạn tới các bài tập cụ thể hoặc các phần lý thuyết mà ở đó các cách lập luận này được thảo luận một cách chi tiết hơn. Cũng giống như sự thành lập kết quả Lv/c^2 trong Phụ lục G, nhiều cách lập luận chỉ là sự thay đổi nhỏ từ các cách khác nên có lẽ chúng không nên được tính như là một cách riêng biệt, và đây là các cách của tôi:

1. **Ảnh hưởng của hiện tượng đồng hồ phía sau chạy nhanh hơn:** Giả sử ngôi sao ở xa được ký hiệu là C. Khi đó trong giai đoạn di chuyển ra xa của cuộc hành trình, người B sẽ quan sát thấy đồng hồ của C chạy nhanh hơn đồng hồ của A một khoảng thời gian Lv/C^2, bởi vì C là đồng hồ phía sau trong vũ tru khi vũ trụ di chuyển. Nhưng sau khi B quay trở lại, A trở thành đồng hồ phía sau và do đó bây giờ nó sẽ chạy nhanh hơn C. Điều này có nghĩa là từ quan sát của C thì đồng hồ của A phải chạy rất nhanh. (Xem Mục 11.3.1 và Bài tập 11.2.)

2. **Nhìn ra ngoài ô cửa sổ:** Hãy tưởng tượng là có một hàng dài các đồng hồ nối từ trái đất và ngôi sao, tất cả các đồng hồ này được đồng bộ hóa trong hệ quy chiếu trái đất - ngôi sao. Và bạn hãy tưởng tượng rằng mình đang nhìn ra ngoài ô cửa sổ của một con tàu không gian và làm một đoạn phim về các đồng hồ khi bạn bay ngang qua chúng. Mặc dù bạn quan sát thấy mỗi đồng hồ riêng rẽ sẽ chạy chậm lại, nhưng bạn sẽ nhìn thấy đồng hồ "thực sự" trong bộ phim (đây thực ra là các đồng hồ liên tiếp nhau) chạy nhanh hơn. Ảnh hưởng này chỉ là một chuỗi các áp dụng nhỏ (xem Bài tập 11.2) của kết quả đồng hồ phía sau chạy nhanh hơn đã nói tới ở phần trên.

3. **Sơ đồ Minkowski:** Vẽ một sơ đồ Minkowski với các trục trong hệ quy chiếu vuông góc của A. Khi đó các đường thẳng của sự đồng thời (tức là các trục x kế tiếp nhau) trong hệ quy chiếu của B được đặt theo các chiều khác nhau đối với giai đoạn đi ra xa và quay trở lại trong cuộc hành trình. Sự thay đổi độ nghiêng tại thời điểm quay trở lại nguyên nhân sinh ra lượng thời gian lớn hơn trên đồng hồ của A khi đo trong hệ quy chiếu của B. (Xem Mục 11.7 và Hình 11.68.)

4. **Ảnh hưởng của sự quay trở lại trong thuyết tương đối tổng quát:** Gia tốc mà người B cảm nhận được khi cô ấy quay trở lại có thể xem tương đương như một trường trọng lực. Người A trên trái đất ở vị trí cao hơn trong trường trọng lực, do

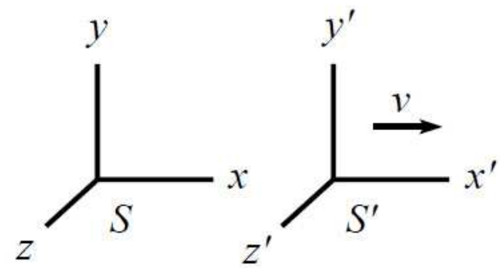
đó B sẽ quan sát thấy đồng hồ của A chạy rất nhanh trong giai đoạn quay trở lại. Điều này dẫn đến cuối cùng thì đồng hồ của A sẽ chỉ thời gian lớn hơn. (Xem Bài tập 14.9.)

5. **Ảnh hưởng Doppler:** Bằng cách cân bằng tổng số tín hiệu mà một người song sinh gửi đi với tổng số tín hiệu mà người kia nhận được, chúng ta có thể tìm được mối liên hệ giữa tổng thời gian trên các đồng hồ của họ. (Xem Bài tập luyện tập 11.67.)

Phụ lục I

Phép biến đổi Lorentz

Trong Phụ lục này, chúng ta sẽ đưa ra một cách thành lập khác của phép biến đổi Lorentz trong phương trình (11.17). Mục đích ở đây đó là thu được kết quả này từ đầu và chỉ sử dụng hai tiên đề của thuyết tương đối. Chúng ta sẽ không sử dụng bất kỳ kết quả nào từ Mục 11.3. Cách làm của chúng ta đó là sẽ sử dụng tiên đề tương đối ("tất cả các hệ quy chiếu quán tính là tương đương") để mô tả tất cả những gì có thể mà chúng ta sẽ cần, và cuối cùng là sẽ sử dụng tiên đề về vận tốc ánh sáng. Lý do chính của việc làm các điều này đó là nó sẽ cho phép chúng ta thành lập được một kết quả hết sức thú vị trong Mục 11.10.



Hình I.1:

Như trong Mục 11.4, xét một hệ tọa độ S' chuyển động đối với hệ tọa độ S (xem Hình I.1). Gọi vận tốc tương đối không đổi giữa hai hệ tọa độ là v. Giả sử các trục tương ứng của S và S' là cùng chiều và gốc tọa độ của hệ S' chuyển động dọc theo trục x của hệ S theo chiều dương. Cũng giống như trong Mục 11.4, chúng ta muốn tìm các hằng số

A, B, C và D thỏa mãn mối quan hệ

$$\begin{aligned} \Delta x &= A\Delta x' + B\Delta t', \\ \Delta t &= C\Delta t' + D\Delta x'. \end{aligned} \tag{I.1}$$

Bốn hằng số này cuối cùng sẽ chỉ phụ thuộc vào v (giá trị v này là hằng số và được cho trước đối với hai hệ quy chiếu). Bởi vì chúng ta có bốn hằng số, do đó chúng ta cần bốn điều kiện. Bốn điều kiện mà chúng ta sẽ sử dụng theo cách làm của chúng ta (chỉ sử dụng hai tiên đề của thuyết tương đối) được cho như sau đây.

1. Mô hình vật lý: S' chuyển động với vận tốc v so với S.

2. Nguyên lý tương đối: S sẽ quan sát thấy mọi thứ trong S' giống hệt như S' quan sát thấy mọi thứ trong S (có lẽ ngoại trừ dấu trừ ở các vị trí tương đối, nhưng điều này chỉ phụ thuộc vào cách chọn bất kỳ của chúng ta về dấu các chiều của các trục).

3. Tiên đề về vận tốc ánh sáng: Ánh sáng phát đi có vận tốc c trong S' cũng có vận tốc c trong S.

Phát biểu thứ hai ở đây chứa đựng hai thông tin độc lập. (Nó chứa đựng ít nhất là hai bởi vì quả thực chúng ta sẽ có thể sử dụng để giải cho bốn ẩn của chúng ta. Và nó không thể chứa nhiều hơn hai bởi vì nếu không như vậy thì bốn ẩn của chúng ta sẽ có nhiều hơn bốn điều kiện ràng buộc.) Hai sự độc lập được sử dụng hoàn toàn phụ thuộc vào quan điểm cá nhân của người sử dụng. Ba điều hay được sử dụng đó là: (a) vận tốc tương đối là như nhau đối với quan sát từ cả hai hệ quy chiếu, (b) sự giãn nở thời gian (nếu có) là như nhau đối với quan sát từ cả hai hệ quy chiếu, và (c) sự co độ dài (nếu có) là như nhau đối với quan sát từ cả hai hệ quy chiếu. Thông thường có thể viết lại phát biểu thứ hai dưới dạng: Phép biến đổi Lorentz là giống như phép biến đổi ngược của nó (chỉ sai khác dấu cộng trừ). Chúng ta sẽ sử dụng (a) và (b). Bốn điều kiện độc lập của chúng ta do đó sẽ là:

1. S' chuyển động với vận tốc v so với S.

2. S chuyển động với vận tốc $-v$ so với S'. Dấu trừ ở đây là do theo quy ước rằng chúng ta chọn chiều dương của các trục x của hai hệ quy chiếu để chúng cùng chiều.

3. Sự giãn nở thời gian (nếu có) là như nhau đối với quan sát từ cả hai hệ quy chiếu.

4. Ánh sáng phát đi có vận tốc c trong S' cũng có vận tốc c trong S.

Hãy xem những điều này sẽ dẫn đến những gì, chúng ta sẽ giữ đúng thứ tự như ở trên[1].

- (1) nói rằng một điểm cho trước trong S' chuyển động với vận tốc v đối với S. Cho $x' = 0$ (điều này được hiểu là $\Delta x' = 0$, nhưng chúng ta sẽ bỏ qua ký hiệu Δ từ đây trở đi) trong phương trình (I.1) và chia chúng dẫn đến $x/t = B/C$. Giá trị này phải bằng v. Do đó $B = vC$, và phép biến đổi trở thành

$$\begin{aligned} x &= Ax' + vCt', \\ t &= Ct' + Dx'. \end{aligned} \tag{I.2}$$

- (2) nói rằng một điểm cho trước trong S chuyển động với vận tốc $-v$ đối với S'. Cho $x = 0$ trong phương trình thứ nhất của (I.2) dẫn đến $x'/t' = -vC/A$. Giá trị này phải bằng $-v$. Do đó $C = A$, và phép biến đổi trở thành

$$\begin{aligned} x &= Ax' + vAt', \\ t &= At' + Dx'. \end{aligned} \tag{I.3}$$

  Chú ý rằng các kết quả này là phù hợp với biến đổi Galileo, ở đó ta có $A = 1$ và $D = 0$.

- (3) có thể được sử dụng theo cách sau đây. Một người trong hệ quy chiếu S sẽ quan sát thấy đồng hồ trong hệ quy chiếu S' chạy nhanh như thế nào? (Đồng hồ được giả thiết là ở trạng thái nghỉ trong hệ quy chiếu S'.) Giả sử hai sự kiện của chúng ta xảy ra tại hai tích tắc liên tiếp của đồng hồ.Khi đó $x' = 0$, và phương trình thứ hai trong (I.3) trở thành

$$t = At'. \tag{I.4}$$

  Nói một cách khác, một giây trên đồng hồ của S' bằng A giây trong hệ quy chiếu S.

  Xét tình huống tương tự theo quan sát từ hệ quy chiếu S'. Một người trong hệ quy chiếu S' sẽ quan sát thấy đồng hồ trong hệ quy chiếu S chạy nhanh như thế nào? (Đồng hồ được giả thiết là ở trạng thái nghỉ trong hệ quy chiếu S để tạo ra mô hình

[1]Trong phần tiếp theo, chúng ta có thể thu được kết quả cuối cùng nhanh hơn một chút nếu chúng ta sử dụng tiên đề vận tốc ánh sáng trước sự giãn nở thời gian. Nhưng chúng ta sẽ làm đúng thứ tự như đã nói tới ở trên để dễ dàng thu được các kết quả trong Phụ lục này như đã thảo luận trong Mục 11.10

tương tự như mô hình ở trên.) Nếu chúng ta giải ngược phương trình (I.3) đối với x' và t' theo x và t thì ta có

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{A - Dv}, \\ t' &= \frac{At - Dx}{A(A - Dv)}. \end{aligned} \tag{I.5}$$

Hai tích tắc liên tiếp của đồng hồ trong S thỏa mãn $x = 0$, do đó phương trình thứ hai của (I.5) dẫn đến

$$t' = \frac{t}{A - Dv}. \tag{I.6}$$

Nói một cách khác, một giây trên đồng hồ của S bằng $1/(A - Dv)$ giây trong hệ quy chiếu S'.

Cả hai phương trình (I.4) và (I.6) đều áp dụng cho cùng một tình huống (một người nào đó nhìn vào một chiếc đồng hồ bay qua). Do đó, các thừa số bên các vế phải bằng nhau, tức là

$$A = \frac{1}{A - Dv} \quad \Longrightarrow \quad D = \frac{1}{v}\left(A - \frac{1}{A}\right). \tag{I.7}$$

Dẫn đến phép biến đổi của chúng ta trong phương trình (I.3) có dạng như sau

$$\begin{aligned} x &= A(x' + vt'), \\ t &= A\left(t' + \frac{1}{v}\left(1 - \frac{1}{A^2}\right)x'\right). \end{aligned} \tag{I.8}$$

Kết quả này phù hợp với phép biến đổi Galileo khi $A = 1$.

- (4) bây giờ sẽ được sử dụng để nói rằng nếu $x' = ct'$ thì $x = ct$. Nói một cách khác nếu $x' = ct'$ thì

$$c = \frac{x}{t} = \frac{A\left((ct') + vt'\right)}{A\left(t' + \frac{1}{v}\left(1 - \frac{1}{A^2}\right)(ct')\right)} = \frac{c + v}{1 + \frac{c}{v}\left(1 - \frac{1}{A^2}\right)}. \tag{I.9}$$

Giải đối với A dẫn đến

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{I.10}$$

Chúng ta chọn nghiệm dương để cho các trục x và x' có cùng chiều dương. Phép biến đổi bây giờ không còn phù hợp với biến đổi Galileo bởi vì c không bằng vô cùng, có nghĩa là A khác 1.

Hằng số A thông thường được ký hiệu là γ, do đó đến bước cuối cùng chúng ta có thể viết phép biến đổi Lorentz (I.8) của chúng ta dưới dạng như sau

$$\begin{aligned} x &= \gamma(x' + vt'), \\ t &= \gamma(t' + vx'/c^2), \end{aligned} \tag{I.11}$$

trong đó

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{I.12}$$

giống như phương trình (11.17).

Phụ lục J

Các hằng số vật lý và một vài dữ liệu

Trái đất

Khối lượng	$M_E = 5.97 \cdot 10^{24}$ kg
Bán kính trung bình	$R_E = 6.36 \cdot 10^6$ m
Mật độ trung bình	5.52 g/cm^3
Gia tốc bề mặt	$g = 9.81$ m/s^2
Khoảng cách trung bình tới mặt trời	$1.5 \cdot 10^{11}$ m
Vận tốc quỹ đạo	29.8 km/s
Chu kỳ quay	23 giờ 56 phút 4 giây = $8.6164 \cdot 10^4$ giây
Chu kỳ quỹ đạo	365 ngày 6 giờ = $3.16 \cdot 10^7$ giây $\approx \pi \cdot 10^7$ giây

Mặt trăng

Khối lượng	$M_M = 7.35 \cdot 10^{22}$ kg
Bán kính trung bình	$R_M = 1.74 \cdot 10^6$ m
Mật độ trung bình	3.34 g/cm^3
Gia tốc bề mặt	1.62 m/s$^2 \approx g/6$
Khoảng cách trung bình tới trái đất	$3.84 \cdot 10^8$ m
Vận tốc quỹ đạo	1 km/s
Chu kỳ quay	27.3 ngày = $2.36 \cdot 10^6$ giây
Chu kỳ quỹ đạo	27.3 ngày = $2.36 \cdot 10^6$ giây

Mặt trời

Khối lượng	$M_S \equiv M_\odot = 1.99 \cdot 10^{30}$ kg
Bán kính	$R_S = 6.96 \cdot 10^8$ m
Mật độ trung bình	1.41 g/cm^3
Gia tốc bề mặt	$274; \mathrm{m/s^2} \approx 28g$

Các hằng số cơ bản

Vận tốc ánh sáng	$c = 2.998 \cdot 10^8$ m/s
Hằng số hấp dẫn	$G = 6.674 \cdot 10^{-11}$ m^3/kg s^2
Hằng số Planck	$h = 6.63 \cdot 10^{-34}$ J s
	$\hbar \equiv h/2\pi = 1.05 \cdot 10^{-34}$ J s
Điện tích electron	$-e = -1.602 \cdot 10^{-19}$ C
Khối lượng electron	$m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}$ kg $= 0.511$ MeV/c^2
Khối lượng proton	$m_p = 1.673 \cdot 10^{-27}$ kg $= 938.3$ MeV/c^2
Khối lượng neutron	$m_n = 1.675 \cdot 10^{-27}$ kg $= 939.6$ MeV/c^2

Tài liệu tham khảo

[1] Adler, C. G. and Coulter, B. L. (1978). Galileo and the Tower of Pisa experiment. *American Journal of Physics*, **46**, 199–201.

[2] Anderson, J. L. (1990). Newton's first two laws of motion are not definitions. *American Journal of Physics*, **58**, 1192–1195.

[3] Aravind, P. K. (2007). The physics of the space elevator. *American Journal of Physics*, **75**, 125–130.

[4] Atwood, G. (1784). *A Treatise on the Rectilinear Motion and Rotation of Bodies*, Cambridge: Cambridge University Press.

[5] Belorizky, E. and Sivardiere, J. (1987). Comments on the horizontal deflection of a falling object. *American Journal of Physics*, **55**, 1103–1104.

[6] Billah, K. Y. and Scanlan, R. H. (1991). Resonance, Tacoma Narrows bridge failure, and undergraduate physics textbooks. *American Journal of Physics*, **59**, 118–124.

[7] Brehme, R.W. (1971). The relativistic Lagrangian. *American Journal of Physics*, **39**, 275–280.

[8] Brown, L. S. (1978). Forces giving no orbit precession. *American Journal of Physics*, **46**, 930–931.

[9] Brush, S. G. (1980). Discovery of the Earth's core. *American Journal of Physics*, **48**, 705–724.

[10] Buckmaster, H. A. (1985). Ideal ballistic trajectories revisited. *American Journal of Physics*, **53**, 638–641.

[11] Butikov, E. I. (2001). On the dynamic stabilization of an inverted pendulum. *American Journal of Physics*, **69**, 755–768.

[12] Calkin, M. G. (1989). The dynamics of a falling chain: II. *American Journal of Physics*, **57**, 157–159.

[13] Calkin, M. G. and March, R. H. (1989). The dynamics of a falling chain: I. *American Journal of Physics*, **57**, 154–157.

[14] Castro, A. S. de (1986). Damped harmonic oscillator: A correction in some standard textbooks. *American Journal of Physics*, **54**, 741–742.

[15] Celnikier, L. M. (1983).Weighing the Earth with a sextant. *American Journal of Physics*, **51**, 1018–1020.

[16] Chandrasekhar, S. (1979). Einstein and general relativity: Historical perspectives. *American Journal of Physics*, **47**, 212–217.

[17] Clotfelter, B. E. (1987). The Cavendish experiment as Cavendish knew it. *American Journal of Physics*, **55**, 210–213.

[18] Cohen, J. E. and Horowitz, P. (1991). Paradoxical behaviour of mechanical and electrical networks. *Nature*, **352**, 699–701.

[19] Costella, J. P., McKellar, B. H. J., Rawlinson, A. A., and Stephenson, G. J. (2001). The Thomas rotation. *American Journal of Physics*, **69**, 837–847.

[20] Cranor, M. B., Heider, E. M., and Price R. H. (2000). A circular twin paradox. *American Journal of Physics*, **68**, 1016–1020.

[21] Ehrlich, R. (1994). "Ruler physics:" Thirty-four demonstrations using a plastic ruler. *American Journal of Physics*, **62**, 111–120.

[22] Eisenbud, L. (1958). On the classical laws of motion. *American Journal of Physics*, **26**, 144–159.

[23] Eisner, E. (1967). Aberration of light from binary stars – a paradox? *American Journal of Physics*, **35**, 817–819.

[24] Fadner,W. L. (1988). Did Einstein really discover "$E = mc^2$"? *American Journal of Physics*, **56**, 114–122.

[25] Feng, S. (1969). Discussion on the criterion for conservative fields. *American Journal of Physics*, **37**, 616–618.

[26] Feynman, R. P. (2006). *QED: The Strange Theory of Light and Matter*, Princeton: Princeton University Press.

[27] Goldstein, H., Poole, C., and Safko, J. (2002). *Classical Mechanics*, 3rd edn., New York: AddisonWesley, Sections 7.9 and 13.5.

[28] Goodstein, D. and Goodstein, J. (1996). *Feynman's Lost Lecture*, New York:W.W. Norton.

[29] Green, D. and Unruh,W. G. (2006). The failure of the Tacoma Bridge: A physical model. *American Journal of Physics*, **74**, 706–716.

[30] Greenslade, T. B. (1985). Atwood's Machine. *The Physics Teacher*, **23**, 24–28.

[31] Gross, R. S. (2000). The excitation of the Chandler wobble. *Geophysical Research Letters*, **27**, 2329–2332.

[32] Haisch, B. M. (1981). Astronomical precession: A good and a bad first-order approximation. *American Journal of Physics*, **49**, 636–640.

[33] Hall, D. E. (1981). The difference between difference tones and rapid beats. *American Journal of Physics*, **49**, 632–636.

[34] Hall, J. F. (2005). Fun with stacking blocks. *American Journal of Physics*, **73**, 1107–1116.

[35] Handschy, M. A. (1982). Re-examination of the 1887 Michelson–Morley experiment. *American Journal of Physics*, **50**, 987–990.

[36] Hendel, A. Z. and Longo, M. J. (1988). Comparing solutions for the solar escape problem. *American Journal of Physics*, **56**, 82–85.

[37] Hollenbach, D. (1976). Appearance of a rapidly moving sphere: A problem for undergraduates. *American Journal of Physics*, **44**, 91–93.

[38] Holton, G. (1988). Einstein, Michelson, and the "Crucial" Experiment. In *Thematic Origins of Scientific Thought, Kepler to Einstein*, Cambridge: Harvard University Press.

[39] Horsfield, E. (1976). Cause of the earth tides. *American Journal of Physics*, **44**, 793–794.

[40] Iona, M. (1978). Why is g larger at the poles? *American Journal of Physics*, **46**, 790–791.

[41] Keller, J. B. (1987). Newton's second law. *American Journal of Physics*, **55**, 1145–1146.

[42] Krane, K. S. (1981). The falling raindrop: Variations on a theme of Newton. *American Journal of Physics*, **49**, 113–117.

[43] Lee, A. R. and Kalotas, T. M. (1975). Lorentz transformations from the first postulate. *American Journal of Physics*, **43**, 434–437.

[44] Lee, A. R. and Kalotas, T. M. (1977). Causality and the Lorentz transformation. *American Journal of Physics*, **45**, 870.

[45] Madsen, E. L. (1977). Theory of the chimney breaking while falling. *American Journal of Physics*, **45**, 182–184.

[46] Mallinckrodt, A. J. and Leff, H. S. (1992). All about work. *American Journal of Physics*, **60**, 356–365.

[47] Medicus, H. A. (1984). A comment on the relations between Einstein and Hilbert. *American Journal of Physics*, **52**, 206–208.

[48] Mermin, N. D. (1983). Relativistic addition of velocities directly from the constancy of the velocity of light. *American Journal of Physics*, **51**, 1130–1131.

[49] Mohazzabi, P. and James, M. C. (2000). Plumb line and the shape of the earth. *American Journal of Physics*, **68**, 1038–1041.

[50] Muller, R. A. (1992). Thomas precession: Where is the torque? *American Journal of Physics*, **60**, 313–317.

[51] O'Sullivan, C. T. (1980). Newton's laws of motion: Some interpretations of the formalism. *American Journal of Physics*, **48**, 131–133.

[52] Peterson, M. A. (2002). Galileo's discovery of scaling laws. *American Journal of Physics*, **70**, 575–580.

[53] Pound, R. V. and Rebka, G. A. (1960). Apparent weight of photons. *Physical Review Letters*, **4**, 337–341.

[54] Prior, T. and Mele, E. J. (2007). A block slipping on a sphere with friction: Exact and perturbative solutions. *American Journal of Physics*, **75**, 423–426.

[55] Rawlins, D. (1979). Doubling your sunsets or how anyone can measure the earth's size with wristwatch and meterstick. *American Journal of Physics*, **47**, 126–128.

[56] Rebilas, K. (2002). Comment on "The Thomas rotation," by John P. Costella et al. *American Journal of Physics*, **70**, 1163–1165.

[57] Rindler,W. (1994). General relativity before special relativity: An unconventional overview of relativity theory. *American Journal of Physics*, **62**, 887–893.

[58] Shapiro, A. H. (1962). Bath-tub vortex. *Nature*, **196**, 1080–1081.

[59] Sherwood, B. A. (1984).Work and heat transfer in the presence of sliding friction. *American Journal of Physics*, **52**, 1001–1007.

[60] Stirling, D. R. (1983). The eastward deflection of a falling object. *American Journal of Physics*, **51**, 236.

[61] Varieschi, G. and Kamiya, K. (2003). Toy models for the falling chimney. *American Journal of Physics*, **71**, 1025–1031.

[62] Weltner, K. (1987). Central drift of freely moving balls on rotating disks: A new method to measure coefficients of rolling friction. *American Journal of Physics*, **55**, 937–942.

[63] Zaidins, C. S. (1972). The radial variation of g in a spherically symmetric mass with nonuniform density. *American Journal of Physics*, **40**, 204–205.