Mô hình hoá và phương pháp năng lượng

Mục tiêu

- Cung cấp một phương pháp khác giải các bài tập tìm phương trình chuyển động và tần số tự nhiên *(hoặc tần số dao động *) của hệ.
- Phương pháp năng lượng hoặc phương pháp Euler-Lagrange hữu dụng khi vật hoặc chi tiết cơ học chịu tác dụng bởi lực hoặc moment khó tính toán.
- Hữu dụng cho các hệ phức tạp với nhiều bậc chuyển động tự do.

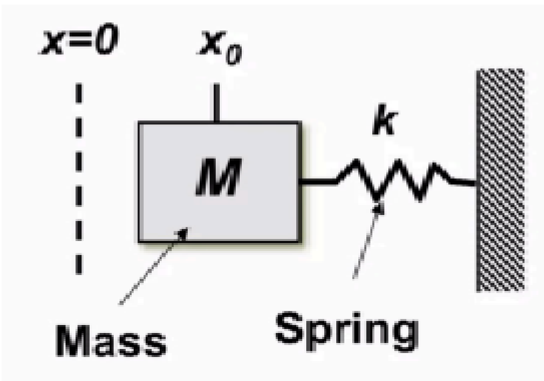
Chú thích

- Tần số tự nhiên là tần số mà hệ có xu hướng dao động khi mà không có lực kích thích hoặc lực cản.
- Tần số dao động là tần số thực tế mà một hệ đang dao động, có thể bằng hoặc khác với tần số tự nhiên của nó.
  Sự khác biệt chính là tần số tự nhiên là một đặc tính vốn có của hệ thống, trong khi tần số dao động là tần số thực tế mà hệ thống dao động. Trong một số bài tập thì hai tần số này giống nhau, trong một số bài tập khi hệ chịu tác dụng bởi ngoại lực có tính dao động (cưỡng bức) thì có thể khác.

Cơ sở lý thuyết

Thế năng và động năng

Với một hệ cơ học, thế năng thường được dự trữ bởi con lắc cơ học.



$$U_{\text{spring}} = \int_0^{x_0} F dx = \int_0^{x_0} kx dx = \frac{1}{2} k x_0^2$$

Động năng K của hệ cơ học thường là năng lượng của chuyển động vật rắn có khối lượng trong hệ.

$$K_{\text{trans}} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2, \quad K_{\text{rot}} = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$$

Bảo toàn năng lượng

Với dao động điều hoà đơn giản bằng con lắc cơ học (không tắt dần), năng lượng của hệ phải bảo toàn:

$$K + U = \text{ constant}$$
$$\text{hoặc} \quad \frac{d}{dt}(K+U) = 0$$

Tại hai thời điểm t_1 và t_2, sự tăng thế năng phải bằng sự giảm của động năng (và ngược lại):

$$U_1 - U_2 = K_2 - K_1$$

Dẫn xuất phương trình chuyển động từ năng lượng

$$\frac{d}{dt}(K+U) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2\right) = 0$$
$$\Rightarrow \dot{x}(m\ddot{x} + kx) = 0$$

Vì $\dot{x}$ không thể bằng 0 tại mọi thời điểm, nên:

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

Xác định tần số tự nhiên từ năng lượng

Chọn gốc thế năng và gốc toạ độ tại vị trí cân bằng cho con lắc lò xo nằm ngang, có thêm

$$U_{\max} = K_{\max}$$

Nếu x có dạng $x(t) = Asin(\omega t + \varphi)$ thì :

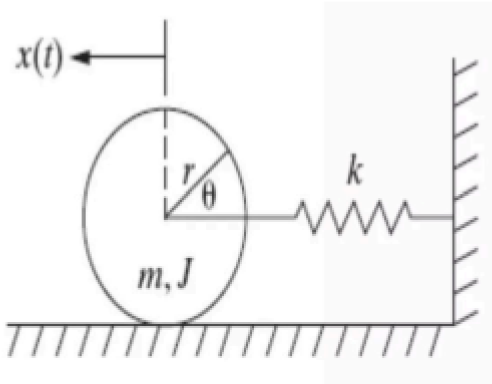
$$U_{\max} = \frac{1}{2}kA^2 \quad T_{\max} = \frac{1}{2}m(\omega_n A)^2$$

Vì giá trị $U_{\max}$ và $K_{\max}$ phải bằng nhau

$$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m(\omega_n A)^2$$
$$\Rightarrow k = m\omega_n^2 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Bài tập ví dụ 1 (giải so sánh)

Tính tần số tự nhiên của con lăn được giữ cố định tại chỗ bởi một lò xo, con lắc có thể chuyển động theo phương nằm ngang. Giả sử đây là một hệ bảo toàn (không có hao phí) và chuyển động của con lăn là lăn không trượt.



Lời giải

$$K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} J\dot{\theta}^2 \text{ and } K_{\text{trans}} = \frac{1}{2} m\dot{x}^2$$

Do con lăn có chuyển động lăn không trượt, $\dot{x} = r\dot{\theta}$

$$K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} J \frac{\dot{x}^2}{r^2}$$

Thế năng của lò xo tại vị trí x:

$$U = \frac{1}{2} kx^2$$

Nhánh giải bằng đạo hàm

Bảo toàn năng lượng do hệ bảo toàn:

$$\begin{aligned}
& K + U = W = \text{const} \\
& \frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt} = 0 \\
& \frac{dK_{\text{rot}}}{dt} + \frac{dK_{\text{trans}}}{dt} + \frac{dU}{dt} = 0 \\
& m\dot{x}\ddot{x} + \frac{J}{r^2}\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = 0 \\
\text{loại bỏ } \dot{x} \ : \ & (m + \frac{J}{r^2})\ddot{x} + kx = 0 \\
& \ddot{x} + \frac{k}{m + \frac{J}{r^2}} x = 0
\end{aligned}$$

Thu được phương trình dao động và tần số giao động $\omega = \sqrt{\frac{k}{m+\frac{J}{r^2}}}$

Nhánh giải bằng thế năng, động năng tối đa

*Cách giải này rất hạn chế, áp dụng được cho ít mẫu bài và hệ dao động, đặc biệt phải có gốc thế năng **đẹp**.*
Giá trị tối đa của động năng K có khi $v = v_{\max} = \omega A$

$$\Rightarrow T_{\max} = \frac{1}{2} J \frac{(\omega_n A)^2}{r^2} + \frac{1}{2} m(\omega_n A)^2 = \frac{1}{2}\left(m + \frac{J}{r^2}\right)\omega_n^2 A^2$$

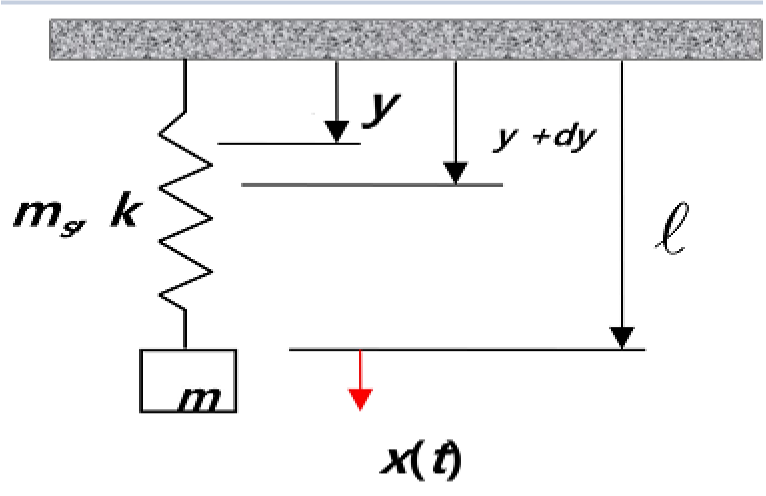
Giá trị tối đa của thế năng U có khi $x = x_{\max} = A$

$$\Rightarrow U_{\max} = \frac{1}{2} k A^2 \text{ Thus } T_{\max} = U_{\max}$$

$$\frac{1}{2}\left(m + \frac{J}{r^2}\right)\omega^2 A^2 = \frac{1}{2} k A^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{(m + \frac{J}{r^2})}}$$

Bài tập ví dụ 2 (giải so sánh)

Một con lắc lò xo treo thẳng đứng chịu tác dụng của trọng lực trái đất dao động nhỏ quanh vị trí cân bằng. Khối lượng con lắc lò xo là m, khối lượng của lò xo là m_s phân bố đều theo chiều dài lò xo. Tính tần số dao động tự nhiên của con lắc, bỏ qua mọi hao phí.



Đặt gốc toạ độ và gốc thế năng tại vị trí lò xo không giãn
Xét một phần lò xo có chiều dài theo phương thẳng đứng là dy
Khối lượng của dy : $\frac{m_s}{\ell} dy$, vận tốc của dy khi đang chuyển động $v_{dy} = \frac{y}{\ell}\dot{x}(t)$,

Động năng của phần lò xo khi chuyển động:

$$K_{dy} = \frac{1}{2}\frac{m_s}{l} dy (\frac{y}{l}\dot{x})^2$$

Động năng của toàn bộ lò xo:

$$K_{\text{lx}} = \frac{1}{2}\int_0^\ell \frac{m_s}{\ell}\left[\frac{y}{\ell}\dot{x}\right]^2 dy = \frac{1}{2}\left(\frac{m_s}{3}\right)\dot{x}^2$$

Động năng của con lắc khối lượng m : $K_{\text{m}} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$

Tổng động năng của toàn bộ con lắc và lò xo:

$$K = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{m_s}{3}\right) + \frac{1}{2}m\right]\dot{x}^2$$

Thế năng của con lắc lò xo tại vị trí x:

$$U = \frac{1}{2}kx^2 + -\int_0^x mg\,dx + -\int_0^{x/2} m_s g\,dx = \frac{1}{2}kx^2 - mgx - m_s g\frac{x}{2}$$

Bảo toàn năng lượng do bỏ qua mọi hao phí:

$$\begin{aligned}
&K + U = W = \text{const} \\
&\frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt} = 0 \\
&\frac{dK_{\text{lx}}}{dt} + \frac{dK_{\text{m}}}{dt} + \frac{dU}{dt} = 0 \\
&\left(\frac{m_s}{3}\right)\dot{x}\ddot{x} + m\dot{x}\ddot{x} + k\dot{x}(x + x_{cb}) - mg\dot{x} - m_s g\frac{\dot{x}}{2} = 0 \\
&(\frac{m_s}{3} + m)\ddot{x} + kx - mg - \frac{m_s g}{2} = 0 \\
&\ddot{x} + \frac{k}{\frac{m_s}{3} + m}(x - \frac{2m + m_s}{2k}g) = 0
\end{aligned}$$

Thu được phương trình dao động và tần số dao động $\omega = \sqrt{\frac{k}{\frac{m_s}{3} + m}}$, dễ dàng nhận thấy vecto trọng trường $\vec{g}$, giống với con lắc lò xo thẳng đứng bình thường, không gây ảnh hưởng đến tần số dao động của hệ này.

Lý thuyết phương pháp Lagrange

- Dùng để dẫn xuất phương trình chuyển động.
  Xét hệ bảo toàn, ***Lagrangian*** L được định nghĩa là:

  $$L = K - U$$

  K là động năng và U là thế năng của hệ.
  Phương trình chuyển động sẽ được suy ra từ **phương trình Euler-Lagrange** (E-L):

  $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

Suy ra:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial K}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q} = 0$$

Với q là toạ độ suy rộng.
(Đạo hàm riêng phần của thế năng cho $\dot{q}$ là bằng 0, vì trong hệ bảo toàn chỉ có lực bảo toàn, công

sinh ra do lực bảo toàn chỉ phụ thuộc vào điểm đầu và cuối, tức là chỉ phụ thuộc vào toạ độ suy rộng q chứ không phụ thuộc vào vận tốc $\dot{q}$)

Quay trở lại với bài toàn con lắc lò xo nằm ngang, ta có:

$$K = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \text{ và } U = \frac{1}{2}kx^2$$

Ở đây toạ độ q là x, Lagrangian của hệ là:

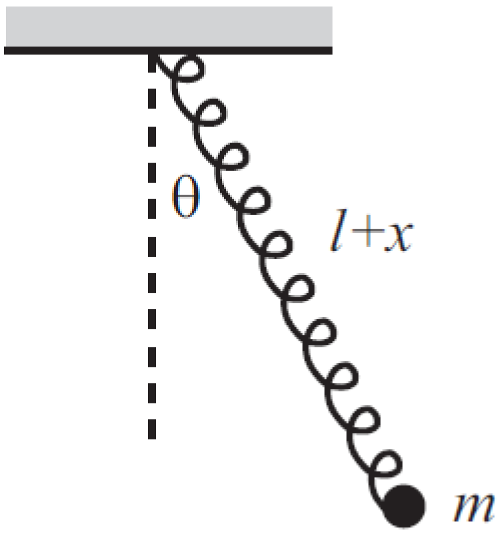
$$L = K - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

Áp dụng:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial K}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q} = 0 \\
&\frac{d}{dt}(m\dot{x}) - 0 + kx = 0 \\
&m\ddot{x} + kx = 0
\end{aligned}$$

Bài tập lý thuyết

Cho một con lắc đơn với chiều dài l, thay dây nối con lắc đơn thành một lò xo có độ cứng k và chiều dài tự nhiên l. Viết phương trình chuyển động của con lắc đơn.



Lời giải

Động năng của hệ bao gồm thành phần chuyển động theo hướng bán kính và tiếp tuyến :

$$K = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + (l+x)^2\dot{\theta}^2)$$

Thế năng của hệ bao gồm thành phần thế năng trọng trường và thế năng lò xo :

$$U(x,\theta) = -mg(l+x)cos\theta + \frac{1}{2}kx^2$$

Vậy Lagrangian của hệ là:

$$L = K - U = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + (l+x)^2\dot{\theta}^2) + mg(l+x)cos\theta - \frac{1}{2}kx^2$$

Lagrangian của hệ có 2 biến là x và θ, **một đặc điểm của công thức Euler-Lagrange là nó có thể được áp dụng cho tất cả các toạ độ xuất hiện trong hệ**, tức là nó có thể áp dụng cho $q = x$ và cả $q = \theta$.

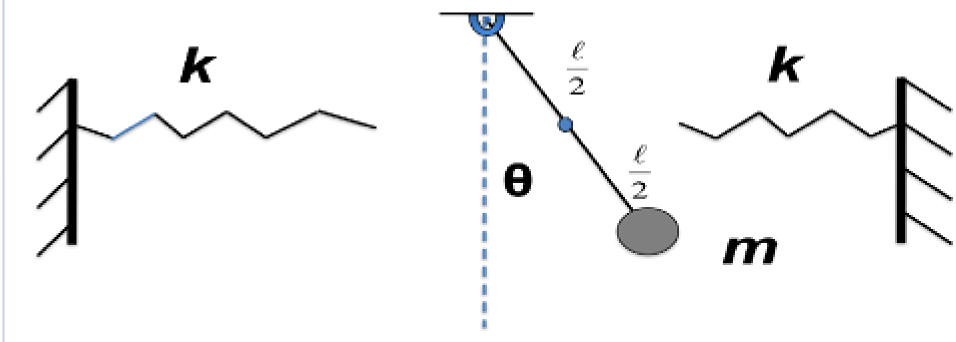
$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x} \quad &\Longrightarrow \quad m\ddot{x} = m(\ell + x)\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta - kx \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \theta} \quad &\Longrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(m(\ell + x)^2\dot{\theta}\right) = -mg(\ell + x)\sin\theta \\
&\Longrightarrow \quad m(\ell + x)^2\ddot{\theta} + 2m(\ell + x)\dot{x}\dot{\theta} = -mg(\ell + x)\sin\theta. \\
&\Longrightarrow \quad m(\ell + x)\ddot{\theta} + 2m\dot{x}\dot{\theta} = -mg\sin\theta.
\end{aligned}$$

Có thể nhận thấy phương trình Euler-Lagrange đầu tiên là phương trình lực $F = ma$ hướng theo phương bán kính kết hợp với gia tốc hướng tâm.
Còn bản chất của phương trình Euler-Lagrange thứ hai là :
- Dòng biến đổi đầu tiên là phương trình biểu diễn momen xoắn bằng tốc độ biến thiên của momen động lượng ($\vec{M} = \frac{d\vec{F}}{dt}$)
- Dòng thứ ba của biến đổi là phương trình lực $F = ma$ hướng theo phương tiếp tuyến kết hợp với hiệu ứng Coriolis $-2m\dot{x}\dot{\theta}$

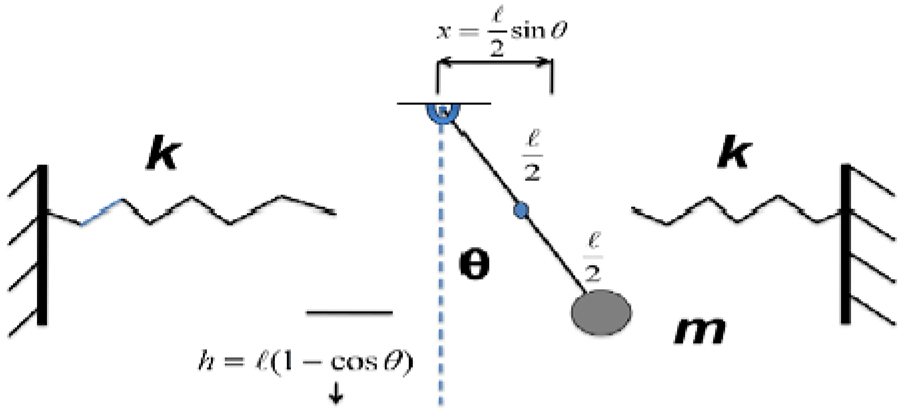
Khi viết các phương trình E-L, cách kiểm tra lại chính là so sánh chúng với các phương trình $F = ma$ và $M = dL/dt$, vì biến đổi của phương trình E-L sẽ dẫn về các phương trình cân bằng lực.

Bài tập

Một con lắc đơn khối lượng m chiều dài l, thay dây bằng thanh cứng nhẹ bỏ qua khối lượng. Con lắc đơn đặt ở giữa 2 bức tường song song và được nối sang hai bên tường bằng hai lò xo độ cứng k tại trung điểm của thanh cứng. Tại vị trí cân bằng, hai lò xo không giãn. Đẩy thanh lệch một góc nhỏ khỏi vị trí cân bằng, tìm tần số dao động của hệ. Bỏ qua mọi hao phí.



Lời giải



Chọn gốc thế năng tại vị trí cân bằng cho cả con lắc đơn và lò xo.
Thế năng của hệ bao gồm thế năng của 2 lò xo và thế năng trọng trường:

$$\begin{aligned} U &= \tfrac{1}{2}kx^2 + \tfrac{1}{2}kx^2 + mgl(1-\cos\theta) \\ &= \tfrac{k\ell^2}{4}\sin^2\theta + mgl(1-\cos\theta) \end{aligned}$$

Động năng của hệ chỉ gồm động năng của con lắc đơn

$$K = \frac{1}{2}J_0\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

Sử dụng phương trình Euler-Lagrange cho hệ bảo toàn:
Tính từng thành phần của phương trình E-L cho biến toạ độ θ :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{d}{dt}\left(m\ell^2\dot{\theta}\right) = m\ell^2\ddot{\theta}$$
$$\frac{\partial K}{\partial \theta} = 0$$
$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{k\ell^2}{4}\sin^2\theta + mg\ell(1-\cos\theta)\right) = \frac{k\ell^2}{2}\sin\theta\cos\theta + mg\ell\sin\theta$$

Phương trình dẫn ra của E-L :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial K}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q} = 0$$
$$m\ell^2\ddot{\theta} + \frac{k\ell^2}{2}\sin\theta\cos\theta + mg\ell\sin\theta = 0$$

Nhận thấy nếu bỏ đi hai lò xo, tức đặt $K = 0$, phương trình chuyển động trở về dạng con lắc đơn cơ bản:

$$m\ell^2\ddot{\theta} + \underbrace{\frac{k\ell^2}{2}\sin\theta\cos\theta}_{0 \text{ if } k=0} + mg\ell\sin\theta = 0$$
$$m\ell^2\ddot{\theta} + mg\ell\sin\theta = 0$$

Quay trở lại phương trình chuyển động, với góc lệch θ nhỏ, tuyến tính hoá với $sin\theta \approx \theta$

$$
\begin{aligned}
&m\ell^2\ddot{\theta}+\frac{k\ell^2}{2}\theta+mg\ell\theta=0\\
&\Rightarrow \ddot{\theta}+\left(\frac{k\ell+2mg}{2m\ell}\right)\theta=0\\
&\Rightarrow \omega_n=\sqrt{\frac{k\ell+2mg}{2m\ell}}
\end{aligned}
$$

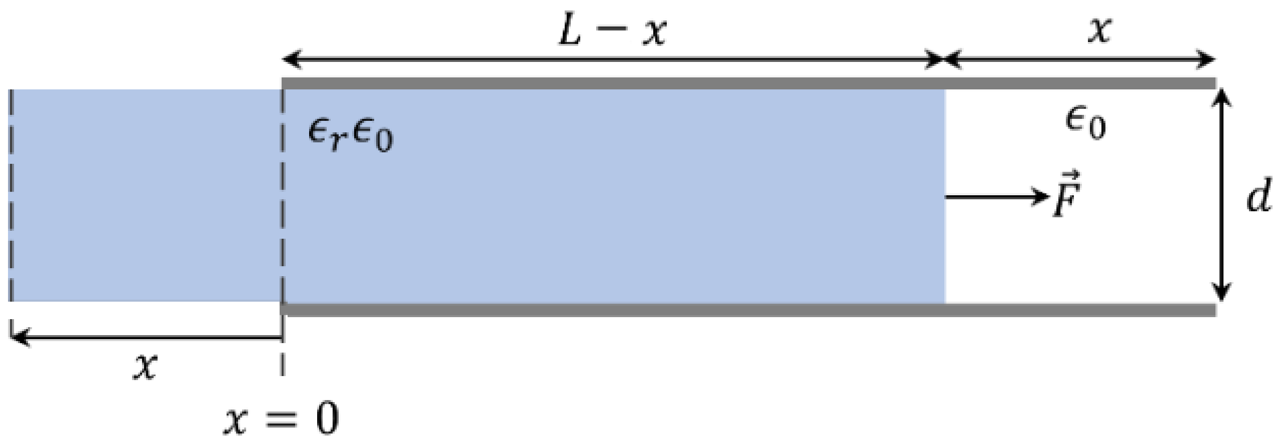
Lưu ý: Khi sử dụng phương trình Euler-Lagrange, vốn bao gồm quá trình đạo hàm riêng phần cho biến toạ độ suy rộng, không nên tuyến tính hoá sử dụng phép xấp xỉ vô cùng bé ngay từ đầu, mà để ở cuối, do phải phân biệt nên giữ hay nên bỏ các thành phần q^2 hoặc bậc cao hơn.

Bài tập

Biết rằng sự giảm năng lượng thế của một tụ điện phẳng do một điện môi sẽ bắt đầu diễn ra hiện tượng dao động và năng lượng sẽ chuyển đổi qua lại giữa năng lượng động năng của tấm điện môi đang chuyển động và năng lượng thế được lưu trữ trong điện trường.

Một tụ điện phẳng song song được lấp đầy hoàn toàn bằng một tấm điện môi có độ dày d và độ điện thẩm tương đối ε_r, được đặt trên một mặt bàn nằm ngang. Tụ điện được cố định và tấm điện môi có thể trượt tự do không hao phí giữa 2 bản tụ điện. Tấm điện môi hình vuông có cạnh dài l và khối lượng của tấm là m. Tụ được tích điện tới điện tích $+Q$ và $-Q$, sau đó tấm điện môi được dịch chuyển theo phương ngang một khoảng nhỏ x dọc theo một cạnh của nó và được thả tự do. Tính xấp xỉ chu kỳ dao động của tấm điện môi này. Độ dày d của tấm điện môi nhỏ hơn rất nhiều so với độ dài cạnh l.

Lời giải



Thế năng của hệ bao gồm thế năng của 2 tụ điện song song:

$$C_1=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r L(L-x)}{d}$$

$$C_2=\frac{\varepsilon_0 Lx}{d}$$

Điện dung tương đương:

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_0 L}{d}(x + \varepsilon_r(L - x)) = \frac{\varepsilon_0 L}{d}(x(1 - \varepsilon_r) + \varepsilon_r L))$$

Thế năng của tụ điện là năng lượng tụ đang dự trữ tại vị trí toạ độ x của điện môi:

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\frac{\varepsilon_0 L}{d}(x(1 - \varepsilon_r) + \varepsilon_r L))}$$

Động năng của hệ là động năng chuyển động của tấm điện môi khối lượng m:

$$K = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

Phương trình dẫn ra của E-L :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial K}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q} = 0$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial K}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$
$$m\ddot{x} + \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 L}\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r^2 L^2 - 2x(\varepsilon_r - 1)\varepsilon_r L + x^2(\varepsilon_r - 1)^2} = 0$$
$$m\ddot{x} + \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0\varepsilon_r^2 L^3}\frac{\varepsilon_r - 1}{1 - \frac{2x(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r L} + \frac{x^2(\varepsilon_r - 1)^2}{\varepsilon_r^2 L^2}} = 0$$

Vì $x << L$, loại bỏ x/L và x^2/L^2

$$m\ddot{x} + \frac{Q^2 d(\varepsilon_r - 1)}{2\varepsilon_0\varepsilon_r^2 L^3} = 0$$

Gia tốc mà điện môi quay lại vị trí cân bằng sẽ xấp xỉ một gia tốc không đổi

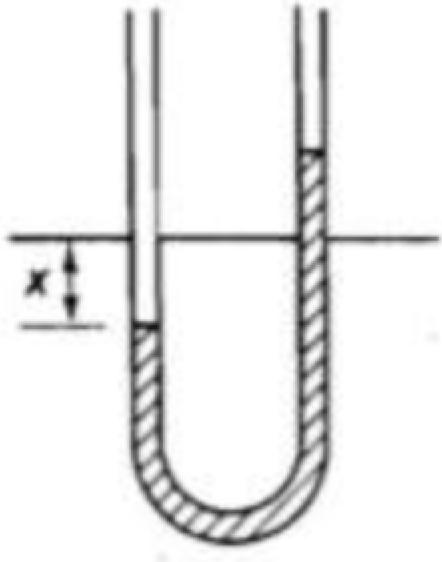
$$\ddot{x} \approx \text{const} = a = -\frac{Q^2 d(\varepsilon_r - 1)}{2m\varepsilon_0\varepsilon_r^2 L^3}$$

Dấu $-$ thể hiện gia tốc của điện môi hướng về mốc hệ quy chiếu. Chu kỳ dao động của điện môi phụ thuộc vào khoảng cách mà tấm điện môi bị đẩy đi.

$$T = 4\tau = 4\sqrt{\frac{2x}{a}} = \frac{8L}{Q}\sqrt{\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r^2 Lm}{d(\varepsilon_r - 1)}x}$$

Bài tập

Một ống chất lỏng chữ U chứa chất lỏng khối lượng riêng ρ , đổ tới độ cao l .Tìm tần số tự nhiên khi chất lỏng trong ống chữ U dao động điều hoà khi một bên ống bị hút lên một đoạn x nhỏ (hoặc thổi xuống một đoạn x nhỏ)



Lời giải

Thế năng của hệ là thế năng của trọng trường lên phần chất lỏng chênh lệch để đưa hệ về trạng thái cân bằng
Chọn gốc thế năng tại vị trí cân bằng

$$U = \int_x^0 -mgdx + \int_{-x}^0 -mg(-dx) = 2mgx = 2g\rho Ax^2$$

Động năng của hệ là động năng chuyển động của khối chất lỏng

$$K = \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}M\dot{x}^2$$

Áp dụng :

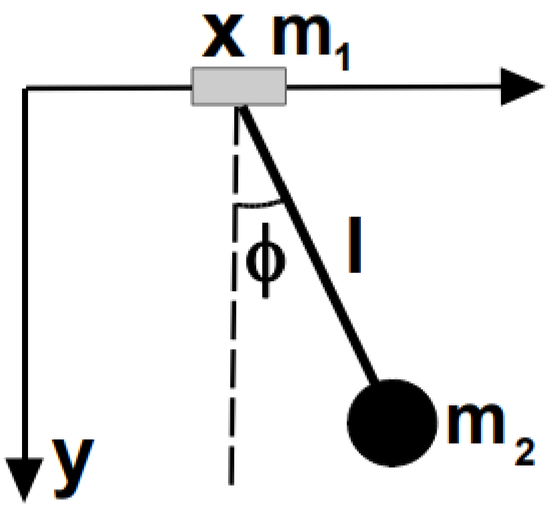
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial K}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q} = 0$$
$$\frac{d}{dt}(M\dot{x}) - 0 + 2g\rho Ax = 0$$
$$M\ddot{x} + 2g\rho Ax = 0$$

Thu được phương trình chuyển động của chất lỏng trong ống và tần số dao động

$$\omega = \sqrt{\frac{2g\rho A}{M}} = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Bài tập

Hãy mô tả dao động nhỏ của một con lắc phẳng mà điểm treo có khối lượng có thể chuyển động tự do dọc theo một đường thẳng nằm ngang .



Lời giải

Tọa độ Descartes của điểm treo là $-(x, 0)$, và của chính con lắc là $-(x + l\sin\varphi, l\cos\varphi)$, do đó hàm Lagrange có dạng:

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{x}^2 + \frac{m_2}{2}l^2\dot{\phi}^2 + m_2 l\cos\phi\dot{x}\dot{\phi} + m_2 gl\cos\phi.$$

Giới hạn trong hàm Lagrange với xấp xỉ bậc hai theo x, $\dot{x}$, ϕ, $\dot{\phi} << 1$

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{x}^2 + \frac{m_2}{2}l^2\dot{\phi}^2 + m_2 l\dot{x}\dot{\phi} - \frac{m_2 gl}{2}\phi^2,$$

ta nhận được các phương trình chuyển động:

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2 l\ddot{\phi} = 0; \\ m_2 l\ddot{x} + m_2 l^2\ddot{\phi} + m_2 gl\phi = 0. \end{cases}$$

Một trong các nghiệm có tần số bằng không. Đó là cái gọi là mode dịch chuyển. Từ phương trình thứ hai suy ra rằng trong nghiệm này $\varphi = 0$. Từ dạng của hàm Lagrange ta thấy rằng tọa độ x dao động và động lượng tương ứng được bảo toàn $\partial L/\partial\dot{x} = (m_1 + m_2)\dot{x} + m_2 gl\dot{\phi} = 0$. Do đó, $\dot{x} = const$ và hệ với con lắc treo thẳng đứng như một khối chuyển động với vận tốc không đổi. Tần số của mode bình thường thứ hai được cho bởi

$$\omega^2 = \frac{m_1 + m_2}{m_1}\frac{g}{l}$$

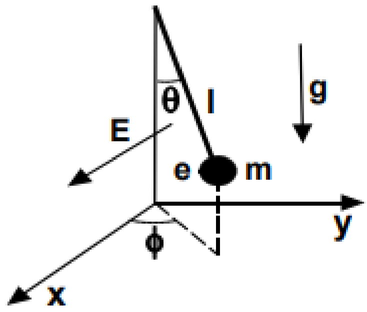
và tỉ lệ dịch chuyển

$$l\phi = -\frac{m_1 + m_2}{m_2}x.$$

Khi $m_1 \gg m_2$, điểm treo đứng yên và con lắc dao động với tần số thông thường $\omega^2 \approx \omega_0^2 = g/l$. Trong giới hạn ngược lại $m_1 \ll m_2$, tần số $\omega \gg \omega_0$ và $l\phi + x = 0$. Nhưng vì $l\phi + x = x_2$ là tọa độ Descartes của điểm có khối lượng m_2, nên bản thân con lắc đứng yên và chỉ có điểm treo dao động. Cuối cùng, khi $m_1 = m_2$, ta có $l\phi + x = x_2 = -x$: con lắc và điểm treo dao động ngược pha với biên độ bằng nhau.

Bài tập

Tìm tần số dao động nhỏ của một con lắc toán học mang điện (với điện tích e), dao động theo hai hướng và nằm trong trường trọng lực và trường điện ngoài vuông góc E .



Lời giải

Hàm Lagrange có dạng:

$$L = \frac{ml^2}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\phi}^2\right) + mgl\cos\theta + eEl\sin\theta\cos\phi,$$

và ở trạng thái cơ bản, con lắc lệch khỏi trục thẳng đứng một góc $\theta_0 = \operatorname{arccot}(eE/mg)$. Các phương trình dao động:

$$\begin{cases} \ddot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2 + \omega_0^2\sin\theta - \operatorname{tg}\theta_0\cos\theta\cos\phi = 0; \\ \frac{d}{dt}\left(\sin^2\theta\dot{\phi}\right) + \frac{eE}{ml}\sin\theta\sin\phi = 0, \end{cases}$$

trong đó $\omega_0^2 = g/l$ là tần số dao động phẳng khi không có điện trường, cần được tuyến tính hóa theo các độ lệch nhỏ $\phi \ll 1$ và $\theta - \theta_0 = \psi \ll 1$. Khi đó, các phương trình cho hai biến số tách ra:

$$\ddot{\phi} + \omega_0^2\sqrt{1 + (eE/mg)^2}\phi = 0; \quad \ddot{\psi} + \omega_0^2\sqrt{1 + (eE/mg)^2}\psi = 0.$$

Chúng ta lại gặp một hệ với các tần số suy biến của các mode bình thường $\omega_1^2 = \omega_2^2 = \omega_0^2\sqrt{1 + (eE/mg)^2}$.