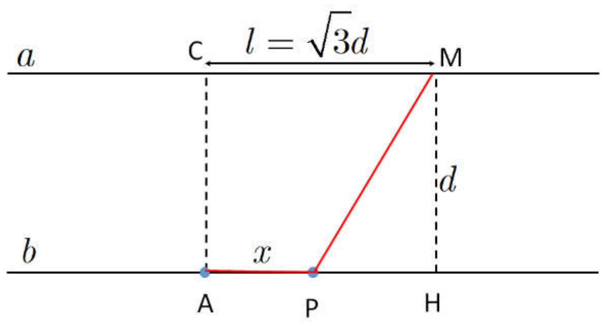
Lời giải tham khảo
Đề thi chọn học sinh giỏi quốc gia THPT môn Vật lí – VPhO 2018

(Phiên bản 1.0 ngày 23.1.2018)

Ngày thi thứ nhất: 11/01/2018

Câu I ([1]*Lời giải đề xuất bởi Trần Công Lãm và Nguyễn Văn Duy)*

1.a) Gọi P là điểm trên đường b và $x = AP$. Ta thấy rằng để cho tổng thời gian Tiến chạy trên các đoạn AP và PM là ngắn nhất thì điểm P sẽ nằm trong đoạn AH, do đó, $0 \le x \le l$.



Tổng thời gian Tiến chạy trên quỹ đạo gồm các đoạn thẳng AP và PM là:

$$t = \frac{AP}{v_1} + \frac{PM}{v_2} = \frac{x}{2v_2} + \frac{\sqrt{d^2 + (l-x)^2}}{v_2} = t(x). \quad (1)$$

Ta có đạo hàm $t(x)$ theo x

$$\frac{dt(x)}{dx} = \frac{1}{2v_2} + \frac{(x-l)}{v_2\sqrt{d^2 + (l-x)^2}}. \quad (2)$$

Tổng thời gian ngắn nhất tương ứng với $dt / dx = 0$, nên ta thu được phương trình

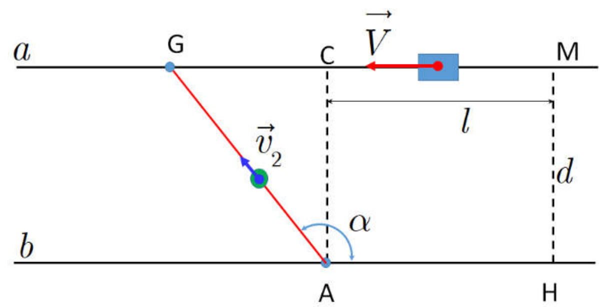
$$2(l-x) = \sqrt{d^2 + (l-x)^2}. \quad (3)$$

Giải phương trình ta thu được nghiệm: $x = l - d / \sqrt{3} = 2d / \sqrt{3}$.

---

[1] Lời giải trên được thực hiện bởi các thành viên nhóm xPhO. Trong quá trình giải bài và soạn thảo không thể tránh khỏi sai sót, mọi sự góp ý xin gửi tới nhóm xPhO qua Facebook Page: *https://www.facebook.com/xPhO.org/*

1.b) Gọi G là điểm trên đường a mà tiến có thể gặp được xe bus. Đặt $\alpha = \widehat{GAH}$. Gọi t_1 là thời gian xe bus đi từ M đến G và t_2 là thời gian Tiến chạy từ A đến G.



Ta có

$$t_1 = \frac{MG}{V} = \frac{l - d\cot\alpha}{2v_2}, \tag{4}$$

$$t_2 = \frac{AG}{v_2} = \frac{d}{v_2 \sin\alpha}. \tag{5}$$

Để Tiến bắt được xe bus thì

$$t_2 \le t_1. \tag{6}$$

Thay (4) và (5) vào (6), ta thu được bất phương trình sau

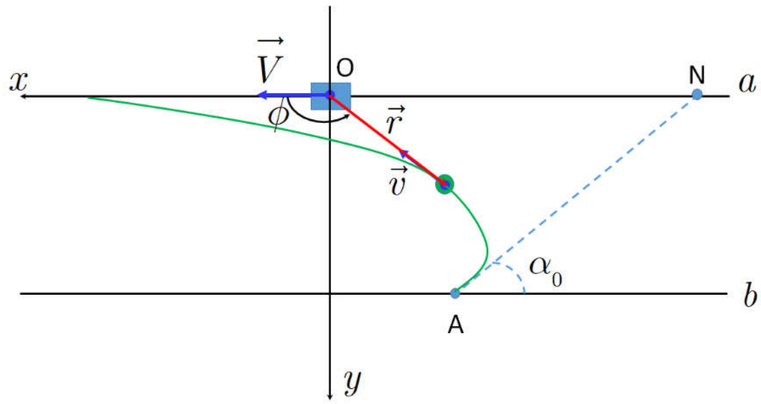
$$\frac{d}{v_2}\frac{1}{\sin\alpha} \le \frac{d}{v_2}\frac{\sqrt{3} - \cot\alpha}{2}, \tag{7}$$

$$\Leftrightarrow 1 \le \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right). \tag{8}$$

Bất phương trình (8) có nghiệm duy nhất $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = 1$. Giải phương trình này ta thu được

$$\alpha - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \widehat{GAH} = \frac{2\pi}{3}.$$

2. Chọn hệ quy chiếu gắn với xe bus, như hình vẽ. Gọi $\vec{v}$ và $\vec{V}$ lần lượt là vận tốc của Tiến và xe bus so với đường, và $\vec{u}$ là vận tốc của Tiến trong hệ quy chiếu gắn với xe bus.



Trong hệ tọa độ cực (r,ϕ) , vận tốc $\vec{u}=(u_r,u_\phi)$ mà các thành phần được định nghĩa

$$u_r=\frac{dr}{dt},\quad u_\phi=r\frac{d\phi}{dt}. \tag{9}$$

Do Tiến chạy luốn hướng theo xe bus, nên trong hệ tọa độ cực (r,ϕ):

$$\vec{v}=(-v,0),\quad v\geq 0,\quad \vec{V}=(V\cos\phi,-V\sin\phi). \tag{10}$$

Ở đây $V=36\mathrm{km/h}$ là tốc độ của xe bus. Ta có

$$\vec{u}=\vec{v}-\vec{V}. \tag{11}$$

Thay (9) và (10) vào (11) ta thu được hệ phương trình

$$u_r=\frac{dr}{dt}=-v-V\cos\phi, \tag{12}$$

$$u_\phi=r\frac{d\phi}{dt}=V\sin\phi. \tag{13}$$

Theo đề bài, Tiến chạy sao cho tốc độ tiến lại gần xe bus không thay đổi nghĩa là $\left|u_r\right|=$ hằng số. Do đó,

$$\frac{d}{dt}(u_r^2)=0\Rightarrow u_r\frac{du_r}{dt}=0. \tag{14}$$

Từ phương trình (14) cho ta hai trường hợp

$$u_r=0\ \text{hoặc}\ \frac{du_r}{dt}=0.$$

(***Ghi chú**: Thực ra trường hợp $u_r = 0$ ứng với chuyển động tròn cũng là một trường hợp thỏa mãn $\frac{du_r}{dt} = 0$, tuy nhiên đôi khi tùy theo cách giải mà ta sẽ phải tách riêng hai trường hợp này, cách giải dưới đây có thể gộp hai trường hợp này lại.*)

Từ điều kiện $\frac{du_r}{dt} = 0$, suy ra u_r là hằng số không phụ thuộc vào thời gian. Tại thời điểm $t = 0$, ta có $v = 0$, $\phi_0 = \alpha_0 = \pi / 3$, nên ta có

$$u_r = -V\cos\alpha_0 = -u_0. \tag{15}$$

Ở đây, $u_0 = V\cos\alpha_0 = V / 2 = 18\mathrm{km/h}$. Như vậy ta có hệ phương trình vi phân

$$\frac{dr}{dt} = -u_0, \tag{16}$$

$$r\frac{d\phi}{dt} = V\sin\phi. \tag{17}$$

Với điều kiện ban đầu $t = 0$ là

$$r(0) = r_0 = AN = d / \sin\alpha_0 = 2d / \sqrt{3}, \tag{18}$$

và

$$\phi(0) = \alpha_0 = \frac{\pi}{3}. \tag{19}$$

Giải phương trình (16) với điều kiện ban đầu (18), ta thu được phương trình của r phụ thuộc vào thời gian như sau:

$$r(t) = -u_0 t + r_0 \tag{20}$$

Để tìm phương trình chuyển động $\phi(t)$ ta thay $r(t)$ đã thu được ở trên vào phương trình phương trình (17) và thực hiện các biến đổi như sau:

$$\frac{d\phi}{\sin\phi} = \frac{Vdt}{r(t)} \tag{21}$$

Thay $r(t)$ từ phương trình (20) vào phương trình (21) và tích phân 2 về ta thu được

$$\int_{\phi_0}^{\phi} \frac{d\varphi}{\sin\varphi} = \int_0^t \frac{V d\tau}{-u_0\tau + r_0} \tag{22}$$

Các tích phân ở hai về được tính bằng cách đổi biến số, thu được kết quả như sau:

$$\int_{\phi_0}^{\phi} \frac{d\varphi}{\sin\varphi} = -\int_{\phi_0}^{\phi} \frac{d(\cos\varphi)}{\sin^2\varphi} = \frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos\phi}{1+\cos\phi} - \frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos\phi_0}{1+\cos\phi_0} = \ln\left(\sqrt{3}\tan\frac{\phi}{2}\right) \tag{23}$$

$$\int_0^t \frac{V d\tau}{-u_0\tau + r_0} = -\frac{V}{u_0}\ln\left|\frac{-u_0 t + r_0}{r_0}\right| = -2\ln\left|\frac{-u_0 t + r_0}{r_0}\right| \tag{24}$$

Thay (23) và (24) vào phương trình (22), và thực hiện các biến đổi ta thu được phương trình chuyển động $\phi(t)$ như sau

$$\phi(t) = 2\arctan\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{r_0}{r_0 - u_0 t}\right)^2\right\} = 2\arctan\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{r_0}{r(t)}\right)^2\right] \tag{25}$$

Như vậy phương trình chuyển động của Tiến trong hệ quy chiếu gắn với xe bus:

$$r(t) = -u_0 t + r_0 \tag{26}$$

$$\phi(t) = 2\arctan\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{r_0}{r(t)}\right)^2\right] \tag{27}$$

Với $u_0 = V / 2$ và $r_0 = 2d / \sqrt{3}$. Gọi T là thời điểm Tiến bắt xe bus, ta thấy T là nghiệm của phương trình $r(T) = 0$. Từ phương trình (26), ta tìm được

$$T = \frac{r_0}{u_0} = \frac{4}{\sqrt{3}}\frac{d}{V} \tag{28}$$

Tại thời điểm Tiến gặp xe bus, $t = T$, thay $r(T) = 0$ vào phương trình (27) ta thu được.

$\tan\frac{\phi(T)}{2} = \infty$ suy ra $\phi(T) = 0$ hoặc $\phi(T) = \pi$.

Từ phương trình (13) ta thấy

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{V\sin\phi}{r} > 0 \tag{29}$$

Như vậy là $\phi(t)$ luôn tăng theo thời gian, nghĩa là $\phi(t) \geq \phi(0)$ (với $\phi(0) = \alpha_0 = \pi / 3$), do đó khi $t \to T$ thì $\phi \to \pi$.

Từ điều kiện $u_r = -u_0$, thay vào phương trình (12) ta thu được biểu thức tốc độ chạy của Tiến theo thời gian như sau.

$$v(t) = u_0 - V\cos\phi(t) = \frac{V}{2}\left[1 - 2\cos\phi(t)\right] \tag{30}$$

Như vậy là để gặp được xe bus theo cách chạy đã chọn thì Tiến phải chạy với tốc độ luôn tăng dần theo thời gian, và phải đạt tộc độ $v(T) = \frac{V}{2}\left[1 - 2\cos\pi\right] = \frac{3V}{2} = 54\text{km/h} = 15\text{m/s}$ ở thời điểm gặp xe bus. Thực tế, với sức chạy của con người thì không thể đạt được tốc độ 54km/h , vì vậy Tiến sẽ không thể duy trì cách chạy đã chọn trong khoảng thời gian từ khi bắt đầu chạy cho đến thời điểm dự kiến (T) gặp xe bus. Kết luận, ***Tiến không thể đuổi kịp xe bus theo cách chạy đã chọn vì không thể duy trì được cách chạy cho đến thời điểm dự kiến gặp xe bus.***

Nhận xét: **Sẽ được update trong phiên bản 2.0**

Lời giải tham khảo
Đề thi chọn học sinh giỏi quốc gia THPT môn Vật lí – VPhO 2018

(Phiên bản 1.0 ngày 23.1.2018)

Ngày thi thứ nhất: 11/01/2018

Câu II ([1]*Lời giải đề xuất bởi Trần Kỳ Vĩ – Sinh viên Đại học Sư Phạm Hà Nội và Hồ Quốc Trung – Sinh viên Đại học Khoa học Tự Nhiên, Đại học Quốc Gia, Tp. Hồ Chí Minh*)

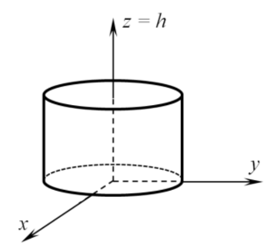
1. Theo phương trình trạng thái: $\rho_0 = \frac{\mu p_0}{RT_0} \to T_0 = \frac{\mu p_0}{R\rho_0} = 292,23\,\text{K}$

Trọng lượng khí cầu là: $P = M_k g = (M + \rho_0 V)g = 39102\text{N} \simeq 39\text{kN}$

2. Khi khí cầu bắt đầu bay lên thì lực đẩy Archimedes phải lớn hơn hoặc bằng tổng trọng lượng khí cầu:

$$\rho_0 gV \geq Mg + \rho_k gV = Mg + \frac{\mu p_0}{RT}gV \to T \geq \frac{\mu p_0 V}{R(\rho_0 V - M)}$$ (ρ_k là khối lượng riêng khí trong khí cầu)

Vậy cần đốt khí đến nhiệt độ nhỏ nhất là $T_{\min} = \frac{\mu p_0 V}{R(\rho_0 V - M)} \simeq 318\,\text{K}$



3.

a) Theo định luật II Pascal: Ở trạng thái thủy tĩnh thì

$$\overrightarrow{grad}\,p = \rho\vec{g} \Leftrightarrow \frac{\partial p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{k} = \rho\vec{g} \quad (1)$$

Chọn hệ trục như hình vẽ, chiếu (1) lên phương Oz:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \to dp = -\rho g dz = -\rho g dh$$ (Chọn trục như hình thì z = h) (2)

Lấy logarith Nepe rồi vi phân hai vế phương trình $p = A\rho^{7/5}$ ta có:

$$\frac{dp}{p} = \frac{7}{5}\frac{d\rho}{\rho} \to d\rho = \frac{5}{7}\frac{\rho}{p}dp = \frac{5}{7}\frac{\mu}{RT}dp \quad (3)$$

Từ PT trạng thái: $p = \frac{\rho RT}{\mu}$ vi phân hai vế thành $dp = \frac{RT}{\mu}d\rho + \frac{\rho R}{\mu}dT$ (*), thay (3) vào pt (*) này:

$$dp = \frac{RT}{\mu}\frac{5}{7}\frac{\mu}{RT}dp + \frac{\rho R}{\mu}dT \to dp = \frac{7}{2}\frac{\rho R}{\mu}dT \quad (4)$$

[1] Lời giải trên được thực hiện bởi các thành viên nhóm xPhO. Trong quá trình giải bài và soạn thảo không thể tránh khỏi sai sót, mọi sự góp ý xin gửi tới nhóm xPhO qua Facebook Page: *https://www.facebook.com/xPhO.org/*

Từ (4) và (2) thu được $dT = -\dfrac{2\mu g}{7R}dh$, tích phân hai vế: $\int\limits_{T_0}^{T} dT = -\dfrac{2\mu g}{7R}\int\limits_0^h dh$

$\Rightarrow T = T_0 - \dfrac{2\mu g}{7R}h = \dfrac{\mu p_0}{R\rho_0} - \dfrac{2\mu g}{7R}h = M + N.h$ với $M = \dfrac{\mu p_0}{R\rho_0}, N = -\dfrac{2\mu g}{7R}$ (5)

Vậy nhiệt độ T là hàm giảm tuyến tính theo độ cao h (đpcm).

<u>Ta luôn phải có</u> $T \geq 0 \rightarrow h \leq \dfrac{7RT_0}{2\mu g} = \dfrac{7p_0}{2g\rho_0} \rightarrow h_{\max} = \dfrac{7p_0}{2g\rho_0} \approx 30 \text{ km}$

Từ (3) và (4) lại có: $d\rho = \dfrac{5}{2}\dfrac{\rho}{T}dT \;\; Hay \int\limits_{\rho_0}^{\rho}\dfrac{d\rho}{\rho} = \dfrac{5}{2}\int\limits_{T_0}^{T}\dfrac{dT}{T} \rightarrow \dfrac{\rho}{\rho_0} = \left(\dfrac{T}{T_0}\right)^{5/2} \rightarrow \rho = \left(\dfrac{T}{T_0}\right)^{5/2}\rho_0$ (5')

hay $\rho = \rho_0\left(1 - \dfrac{2g\rho_0}{7p_0}h\right)^{5/2} = \rho_0(1-kh)^{5/2}$, $k = \dfrac{2g\rho_0}{7p_0}$ (6)

Và suy được hệ quả $p = \dfrac{\rho RT}{\mu} = p_0\left(1 - \dfrac{2g\rho_0}{7p_0}h\right)^{7/2}$ (7)

Độ cao khối tâm z_G được tính theo công thức khối tâm xét với khối khí hình trụ (bán kính a = const) cho như đề bài, các hệ trục chọn như ý 2.

$$h_G = z_G = \frac{\int\limits_0^{h_{\max}} \rho(h)\pi a^2 dh.h}{\int\limits_0^{h_{\max}} \rho(h)\pi a^2 dh} = \frac{\int\limits_0^{h_{\max}} \rho_0(1-kh)^{5/2} hdh}{\int\limits_0^{h_{\max}} \rho_0(1-kh)^{5/2} dh} = \frac{\int\limits_0^{h_{\max}} (1-kh)^{5/2} hdh}{\int\limits_0^{h_{\max}} (1-kh)^{5/2} dh} \quad (8)$$

Đặt $u = (1-kh) \rightarrow h = \dfrac{1-u}{k}, dh = -\dfrac{du}{k}$. Khi $h = 0$ thì *u* = 1 ; $h = h_{\max}$ thì $u = 1 - k.h_{\max} = 0$ và (5) trở thành:

$$h_G = \frac{1}{k}\frac{\int\limits_1^0 u^{5/2}(1-u)\,\mathrm{du}}{\int\limits_1^0 u^{5/2}du} = \frac{2}{9}\frac{1}{k} = \frac{7p_0}{9g\rho_0} \simeq 6646 \text{ m}$$

b) Gọi độ lệch nhiệt độ giữa khí bên trong khí cầu và bên ngoài là ΔT = const. Khi đó khí bên trong khí cầu sẽ có nhiệt độ $T' = T + \Delta T$

Và khi đạt trạng thái dừng ở h = h_G thì $F_A(h_G) = Mg + \rho_k(h_G)\mathrm{gV}$ (Lưu ý: Ta chỉ cần xét khi khí cầu đạt trạng thái dừng ở h = h_G vì như đề bài cho ΔT là không đổi suốt quá trình). Khai triển:

$$\rho(h_G)gV = Mg + \frac{\mu p(h_G)}{R\left[T(h_G) + \Delta T\right]}gV = Mg + \frac{\mu\dfrac{\rho(h_G)RT}{\mu}}{R\left[T(h_G) + \Delta T\right]}gV \, \rho(h_G)gV = Mg + \frac{\rho(h_G)T(h_G)}{\left[T(h_G) + \Delta T\right]}gV$$

$$\rightarrow \Delta T = \frac{\mu p(h_G)V}{R\left[\rho(h_G)V - M\right]} - T(h_G) \qquad (**)$$

Thế giá trị h_G vào (5), (6) và (7) tìm được $p(h_G)$, $\rho(h_G)$ và $T(h_G)$, sau đó thế vào (**), thu được:

$$\Delta T = \frac{7}{9}\frac{\mu p_0}{R\rho_0}\left(\frac{1}{1-\left(\frac{9}{7}\right)^{5/2} M/(\rho_0 V)} - 1\right) \simeq 41\text{K}$$

Gọi độ lệch nhiệt độ giữa khí bên trong khí cầu và bên ngoài là ΔT = const. Khi đó khí bên trong khí cầu sẽ có nhiệt độ $T' = T + \Delta T$

Trong toàn quá trình bay phải có

$F_A(h) \geq Mg + \rho_k(h)\text{gV}$ tức là

$$\rho(h)gV \geq Mg + \frac{\mu p(h)}{R\left[T(h)+\Delta T\right]}gV = Mg + \frac{\mu \frac{\rho(h)RT(h)}{\mu}}{R\left[T(h)+\Delta T\right]}gV = Mg + \frac{\rho(h)T(h)}{T(h)+\Delta T}gV$$

$$\Delta T \geq \frac{\rho(h)V}{\rho(h)V - M}T(h) - T(h) = R\left[T(h)\right] \qquad (9)$$

Thế ρ theo ***T*** từ (5') vào (9) rồi lấy đạo hàm ***R*** theo ***T***, ta thu được

$$R'(T) = \frac{(T\rho V)'(\rho V - M) - \rho' V T\rho V}{(\rho V - M)^2} - 1 = \frac{-\frac{7}{2}M\rho V + (\rho V)^2}{(\rho V - M)^2} - 1 = \frac{-M(\frac{3}{2}\rho V + M)}{(\rho V - M)^2} < 0$$ (lưu ý $\rho = \rho_0\left(\frac{T}{T_0}\right)^{5/2}$)

Tức vế phải luôn tăng trong quá trình đang xét, khi khí cầu đạt đến độ cao h_G thì nhiệt độ T tại đó là thấp nhất trên toàn quá trình, tức vế phải $R(T(h_G))$ đạt max, muốn (9) luôn thỏa trong toàn quá trình thì:

$$\Delta T \geq \max R[T(h_G)] = T(h_G)\left(\frac{1}{1-\frac{M}{\rho(h_G)V}} - 1\right) \rightarrow \Delta T_{\min} = T(h_G)\left(\frac{1}{1-\frac{M}{\rho(h_G)V}} - 1\right)$$

Thế giá trị h_G vào (5), (6) $\rho\left(h_G\right)$ và $T\left(h_G\right)$, sau đó thế vào (**), thu được:

$$\Delta T_{\min} = \frac{7}{9}T_0\left(\frac{1}{1-\left(\frac{9}{7}\right)^{5/2}\frac{M}{\rho_0 V}} - 1\right) \approx 41\text{K}$$

Lời giải tham khảo
Đề thi chọn học sinh giỏi quốc gia THPT môn Vật lí – VPhO 2018

(Phiên bản 1.0 ngày 23.1.2018)

Ngày thi thứ nhất: 11/01/2018

Câu III ([1]*Lời giải đề xuất bởi Hồ Quốc Trung – Sinh viên ĐH Khoa học Tự Nhiên, và Trần Kỳ Vĩ – Sinh viên ĐH Sư Phạm Hà Nội*)

1. Phương trình định luật II Newton cho chuyển động của electron dưới tác dụng của điện trường $\vec{E}$ và từ trường $\vec{B}$ được viết như sau

$$m\vec{a} = -e\vec{E} - e\vec{v} \times \vec{B}$$

Trong hệ tọa độ trụ, phương trình trên được viết lại như sau:

$$m_e\left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2, \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}\left(\rho^2\dot{\theta}\right), \ddot{z}\right) = -e\left(E,0,0\right) - e\left(\dot{\rho}, \rho\dot{\theta}, \dot{z}\right) \times \left(0,0,B\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2, \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}\left(\rho^2\dot{\theta}\right), \ddot{z}\right) = \left(-\frac{\left(eE + eB\rho\dot{\theta}\right)}{m_e}, \frac{eB\dot{\rho}}{m_e}, 0\right)$$

Vậy ta có hệ phương trình mô tả chuyển động của electron:

$$\begin{cases} -\ddot{\rho} + \rho\dot{\theta}^2 = \dfrac{eE + eB\rho\dot{\theta}}{m_e} & (1) \\ \dfrac{d}{dt}\left(\rho^2\dot{\theta}\right) = \dfrac{eB\rho\dot{\rho}}{m_e} & (2) \\ \ddot{z} = 0 & (3) \end{cases}$$

2. Tiến hành giải hệ trên $\left(2\right) \Rightarrow d(\rho^2\dot{\theta}) = \dfrac{eB\rho}{m_e}d\rho$

Lấy nguyên hàm của cả 2 vế và thế điều kiện đầu: $\rho(t=0) = 0$ ta được:

$$\rho^2\dot{\theta} = \frac{eB}{m_e}\frac{\rho^2}{2} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{eB}{2m_e} \qquad (4)$$

Tiếp tục lấy nguyên hàm 2 vế, thế điều kiện đầu $\theta\left(t=0\right) = 0$ ta được:

[1] Lời giải trên được thực hiện bởi các thành viên nhóm xPhO. Trong quá trình giải bài và soạn thảo không thể tránh khỏi sai sót, mọi sự góp ý xin gửi tới nhóm xPhO qua Facebook Page: *https://www.facebook.com/xPhO.org/*

$$\theta(t) = \omega t \tag{5}$$

với $\omega = \dfrac{eB}{2m_e}$. Thay (4) vào (1) được:

$$\ddot{\rho} + \omega^2(\rho - \rho_0) = 0$$

với $\rho_0 = \dfrac{4m_e(-E)}{eB^2}$. Giải phương trình vi phân trên với điều kiện đầu $\rho(t=0) = 0\ \ và\ \ \dfrac{d\rho(0)}{dt} = 0$ ta thu được nghiệm:

$$\rho(t) = \rho_0\left[1 - \cos\left(\omega t\right)\right] \tag{6}$$

Từ phương trình (3) với điều kiện đầu $z\left(t=0\right) = z_0\ và \left(\dfrac{dz}{dt}\right)_{t=0} = 0$ được:

$$z = z_0 \tag{7}$$

Từ (5), (6) và (7) tìm được phương trình quỹ đạo của electron trong hệ đã cho:

$$\begin{cases} \rho(\theta) = \rho_0\left[1 - \cos\theta\right] \\ z = z_0 \end{cases}$$

3. Vận tốc của electron tại thời điểm t:

$$\vec{v} = \left(\dot{\rho}, \rho\dot{\theta}, \dot{z}\right) = \left(\rho_0\omega\sin\left(\omega t\right), \rho_0\omega\left[1 - \cos(\omega t)\right], 0\right)$$

Độ lớn của vận tốc tại thời điểm t:

$$v = \left|\vec{v}\right| = 2\rho_0\omega\left|\sin\frac{\omega t}{2}\right| = \frac{4(-E)}{B}\left|\sin\frac{eBt}{4m_e}\right|$$

Lời giải tham khảo

Đề thi chọn học sinh giỏi quốc gia THPT môn Vật lí – VPhO 2018

(Phiên bản 1.0 ngày 26.1.2018)

Ngày thi thứ nhất: 12/01/2018

Câu V ([1]*Lời giải đề xuất bởi Trần Kỳ Vĩ, sinh viên khoa Vật lí, ĐH Sư Phạm Hà Nội)*

1.

Thấu kính hội tụ (tkht) có tiêu cự $F=\frac{1}{D_{ht}}=2\,\text{cm}$, thấu kính phân kỳ (tkpk) có tiêu cự $f=\frac{1}{D_{pk}}=-0,5\,\text{cm}$.

Bán kính đường rìa tkht và tkpk tương ứng là $R=\frac{7,5}{2}\text{mm}=3,75\text{ mm}$ và $r=\frac{1}{2}\text{cm}=0,5\text{ cm}$. Gọi thấu kính hứng chùm tia từ môi trường ngoài cửa là thấu kính thứ nhất (vật kính), thấu kính cho chùm tia ló vào mắt là thấu kính thứ 2 (thị kính).

Gọi chùm giới hạn thị trường của mắt thần, tức vùng không gian mà mắt quan sát được qua mắt thần là $\varphi_{\max}$ qua thấu kính thứ nhất loe (tụ) thành chùm φ, qua thấu kính thứ hai ló thành thành chùm φ'. Chùm φ' phải hội tụ vào mắt (đặt tại M) vì mắt muốn nhìn thấy vật phải có chùm tia sáng từ vật tới mắt. Do đó theo tính chất quang học thì các tia trong chùm φ phải đi qua hoặc có đường kéo dài đi qua M_1 (điểm liên hợp của M qua thị kính) và0 kéo theo các tia của chùm φ_{max} phải có đường kéo dài qua M_2 (điểm liên hợp) của M_1 qua vật kính. (Nôm na là M được coi như là "ảnh" của M_1 qua thị kính, M_1 là ảnh của M_2 qua vật kính và ngược lại).

Sơ đồ tạo ảnh: $M_2\xrightarrow{O_1}M_1\xrightarrow{O_2}M$. Chiều dương trong các công thức là chiều truyền tia sáng. D, D' là bán kính phần diện tích hình tròn tương ứng trên vật kính và thị kính được tia sáng trong chùm φ_{max} (và các chùm ló liên hợp) chiếu tới.

Từ các lập luận trên, ta xét hai trường hợp sau:

<u>Trường hợp 1</u> (TH1): Vật kính là tkpk, thị kính là tkht đặt giữa ống:

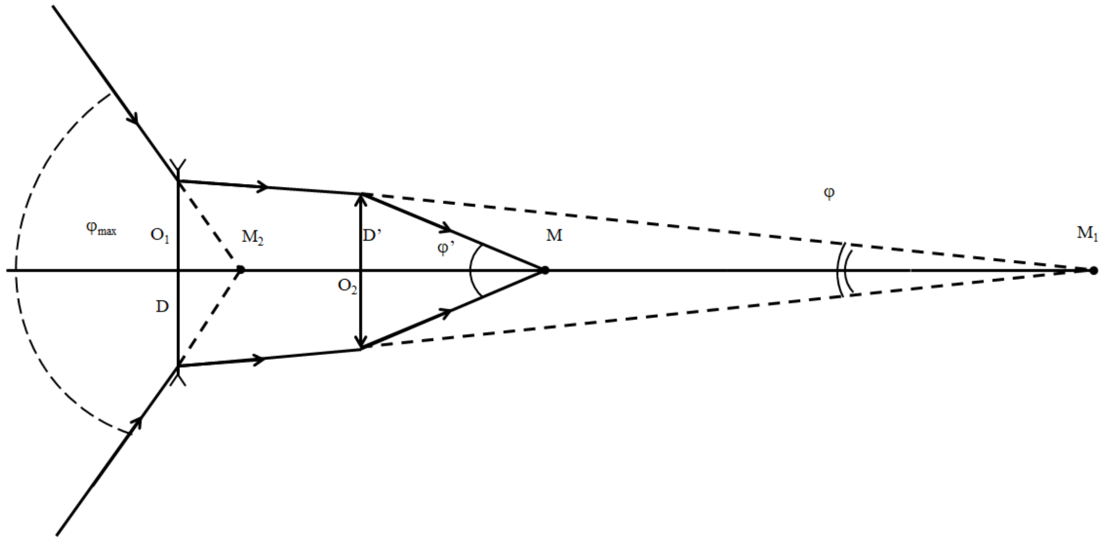
Khi đó dùng công thức thấu kính ta xác định được vị trí M_1, M_2 trong trường hợp này

$$\frac{1}{\overline{O_2M}}-\frac{1}{\overline{O_2M_1}}=\frac{1}{F}\rightarrow\overline{O_2M_1}=\frac{\overline{O_2M}}{F-\overline{O_2M}}F=6\,\text{cm}>0 \qquad (1)$$

M_1 nằm theo đường truyền tia sáng cùng phía với M qua thấu kính O_2.

---

[1] Lời giải trên được thực hiện bởi các thành viên nhóm xPhO và cộng tác viên. Trong quá trình giải bài và soạn thảo không thể tránh khỏi sai sót, mọi sự góp ý xin gửi tới nhóm xPhO qua Facebook Page: *https://www.facebook.com/xPhO.org*



$$\overline{O_1M_1} = \overline{O_1O_2} + \overline{O_2M_1} = 1{,}5 \text{ cm} + 6 \text{ cm} = 7{,}5 \text{ cm} \qquad (2)$$

$$\frac{1}{\overline{O_1M_1}} - \frac{1}{\overline{O_1M_2}} = \frac{1}{f} \rightarrow \overline{O_1M_2} = \frac{\overline{O_1M_1}}{f - \overline{O_1M_1}} f = \frac{\overline{O_1M_1}}{f - \overline{O_1M_1}} f = \frac{15}{32} \text{cm} > 0,$$

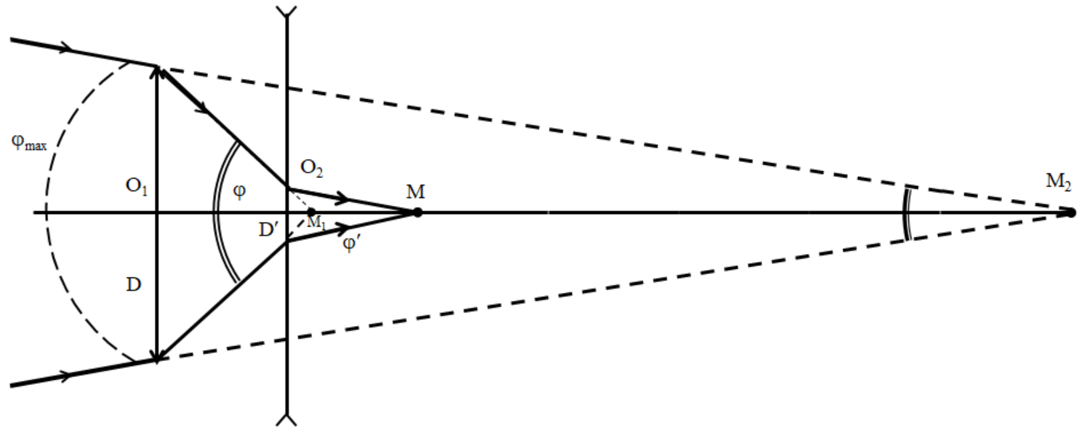
M_2 cùng phía với M_1 theo đường truyền tia sáng. Theo cách dựng hình ta có: $\tan\frac{\varphi}{2} = \frac{D'}{O_2M_1}$, $D = O_1M_1 \tan\frac{\varphi}{2} = \frac{O_1M_1}{O_2M_1} D'$. Do đó D lớn nhất khi D′ lớn nhất. Giả sử D_{max} có được khi D′ = r, $D_{max} = \frac{O_1M_1}{O_2M_1} r = 25 \text{ mm} > R\ (= 3{,}75 \text{ mm})$, điều này là vô nghĩa, do đó các tia trong chùm φ không thể phủ kín bề mặt thị kính (hay thấu kính phân kỳ), mà chỉ phủ 1 phần, phần này ló ra từ một chùm có tiết diện ngang lớn nhất là mặt vật kính D_{max} = R. Mặt khác $\tan\frac{\varphi_{max}}{2} = \frac{D_{max}}{O_1M_2}$, do đó $\varphi_{max} = 2\arctan\frac{D_{max}}{O_1M_2} = \frac{\pi}{2} \text{rad} = 90^\circ$.

Trường hợp 2: Thấu kính phân kỳ ở giữa

Trường hợp này tính tương tự như trường hợp kia, ta tính được vị trí M_1, M_2 (chỉ cần hoán vị f và F trong các công thức)

$$\overline{O_2M_1} = \frac{\overline{O_2M}}{f - \overline{O_2M}} f = \frac{3}{8} \text{cm} > 0,$$

M_1 nằm theo đường truyền tia sáng cùng phía với M qua thấu kính O_2.



$$\overline{O_1M_1} = \overline{O_1O_2} + \overline{O_2M_1} = 1,5 \text{ cm} + \frac{3}{8} \text{ cm} = \frac{15}{8}\text{cm}$$

$\overline{O_1M_2} = \dfrac{\overline{O_1M_1}}{F - \overline{O_1M_1}} F = \dfrac{\overline{O_1M_1}}{F - \overline{O_1M_1}} F = 30\,\text{cm} > 0$, M_2 cùng phía với M_1 theo đường truyền tia sáng.

Theo cách dựng hình ta có: $\tan\dfrac{\varphi}{2} = \dfrac{D'}{O_2M_1}$, $D = O_1M_1 \tan\dfrac{\varphi}{2} = \dfrac{O_1M_1}{O_2M_1} D'$. Do đó D lớn nhất khi D′ lớn nhất. Giả sử D_{max} có được khi D′ = r, $D_{\max} = \dfrac{O_1M_1}{O_2M_1} r = 25 \text{ mm} > \text{R } (=3,75 \text{ cm})$: do đo các tia trong chùm φ đều tới được thị kính (hay toàn bộ thị kính có thể hứng được hết các tia trong chùm φ.

$\tan\dfrac{\varphi_{\max}}{2} = \dfrac{D}{O_1M_2}$, do đó $\varphi_{\max}$ lớn nhất khi D = D_{max}, suy ra $\varphi_{\max} = 2\arctan\dfrac{D_{\max}}{O_1M_2} \simeq 0,025\text{rad} = 1,43^\circ$.

So sánh thị trường trong hai trường hợp ta nhận thấy trong trường hợp thấu kính hội tụ ở giữa (đóng vai trò vật kính) thì thị trường của Mắt thần là lớn nhất với góc mở

$$\varphi_{\max} = 90^\circ$$

2. Khi quan sát mà mắt không điều tiết, đối với mắt tốt, thì ảnh cuối cùng hiện ở vô cực, do đó ảnh thứ hai (tức ảnh qua vật kính) hiện ở F_2 là tiêu điểm vật của tkht.

Sơ đồ tạo ảnh: $AB \xrightarrow{O_1} \underset{at\ F_2}{A_1B_1} \xrightarrow{O_2} \underset{at\ \infty}{A_2B_2}$, dễ thấy các tia sáng đi qua B_2 (đỉnh của vật) là các tia đi song song và cùng hợp với trục chính góc α – đây cũng chính là góc trông ảnh cuối của mắt qua quang hệ.

$$\frac{1}{\infty} - \frac{1}{\overline{O_2A_1}} = \frac{1}{F} \Rightarrow \overline{O_2A_1} = -F = -2\,\text{cm}$$

$$\alpha \approx \tan\alpha = \frac{A_1B_1}{F}$$

$\overline{O_1A_1} = \overline{O_1O_2} + \overline{O_2A_1} = -0,5\text{ cm} \equiv \overline{O_1F_1'} \rightarrow$ AB ở vô cực, các tia từ B đi song song với nhau hợp một góc α_0 so với quang trục, suy ra tia AA_1O_1 cũng hợp với quang trục góc α_0 hay mắt cũng nhìn vật AB với góc α_0

$\alpha_0 \approx \tan\alpha_0 = \dfrac{A_1B_1}{|f|}$. Suy ra độ bội giác trong trường hợp này là: $G = \dfrac{\alpha}{\alpha_0} = \dfrac{|f|}{F} = 0,25$.

3. Theo kết quả ở câu 2, đối với người có mắt tốt, khi quan sát ảnh cuối ở cực viễn thì vật ở vô cực

$$AB \xrightarrow{O_1} A_1B_1 \xrightarrow{O_2} \underset{at\ C_c}{A_2B_2}$$

Nếu người đó thấy ảnh cuối ở cực cận, A_2B_2 ở C_c ta có:

$$\overline{O_2A_2} = \overline{O_2C_c} = \overline{O_2M} + \overline{MC_c} = 1,5\text{ cm} + (-20\text{ cm}) = -18,5\text{ cm} \qquad (3)$$

$$\overline{O_2A_1} = \frac{\overline{O_2A_2}}{F - \overline{O_2A_2}}F = -\frac{74}{41}\text{cm},\ \overline{O_1A_1} = \overline{O_1O_2} + \overline{O_2A_1} = -\frac{25}{82}\text{cm} \qquad (4)$$

$\overline{O_1A} = \dfrac{\overline{O_1A_1}}{f - \overline{O_1A_1}}f = -\dfrac{25}{32}$ cm ≈ −0,78 cm < 0, vậy là A nằm trước vật kính.

Vậy qua Mắt thần, người này có thể nhìn thấy các vật từ vô cực tới cách vật kính khoảng 0,78 cm.

Lời giải tham khảo
Đề thi chọn học sinh giỏi quốc gia THPT môn Vật lí – VPhO 2018

(Phiên bản 1.0 ngày 23.1.2018)

Ngày thi thứ nhất: 11/01/2018

Câu V ([1]*Lời giải đề xuất bởi Hoàng Công Viêng, Giáo viên Vật lí trường THTP Chuyên Hà Tĩnh*)

1. Số hạt nhân A bị phân rã (bằng số β tạo thành) sau thời gian t_1: $\Delta N_1 = n_1 = N_{01}\left(1-e^{-\lambda t_1}\right)$.

Số hạt nhân A bị phân rã sau thời gian $t_2 = 3t_1$: $\Delta N_2 = n_2 = N_{01}\left(1-e^{-3\lambda t_1}\right)$.

Ta được: $n_2 = 2,334n_1 \Rightarrow 1-e^{-3\lambda t_1} = 2,334\left(1-e^{-\lambda t_1}\right) \Rightarrow e^{-3\lambda t_1} - 2,334e^{-\lambda t_1} + 1,334 = 0 \Rightarrow e^{-\lambda t_1} = 0,76$.

Suy ra: $\lambda = -\dfrac{\ln 0,76}{t_1} = 1,6.10^{-6}s^{-1}$.

2. Tốc độ thay đổi số hạt nhân B = Tốc độ tạo thành – Tốc độ phân rã.

$\Rightarrow \dfrac{dN_2}{dt} = \lambda N_{01}e^{-\lambda t} - \lambda N_2$. (1)

Trong đó số hạt nhân B được xác định bởi: $N_2 = \left(p+qt\right)e^{-\lambda t}$. (2)

Lúc t = 0: $N_2 = p = 0 \Rightarrow N_2 = qte^{-\lambda t}$. (3)

Từ (1) và (3) ta được: $q\left(e^{-\lambda t} - \lambda te^{-\lambda t}\right) = \lambda N_{01}e^{-\lambda t} - \lambda qte^{-\lambda t} \Rightarrow q = \lambda N_{01}$.

Vậy: $N_2 = \lambda N_{01}te^{-\lambda t}$. Khi t = 144 giờ = $3t_1$: $N_2 = 1,6.10^{-6}.2.10^{18}.144.3600.0,76^3 = 7,3.10^{17}$ (hạt nhân).

3. Số hạt α tạo thành bằng số hạt nhân B phân rã, trong thời gian dt: $dN_\alpha = \lambda N_2 dt$.

Sau thời gian t, số hạt α tạo thành: $N_\alpha = \int_0^t \lambda^2 N_{01}te^{-\lambda\tau}dt = \lambda^2 N_{01}\int_0^t te^{-\lambda\tau}dt$.

Tích phân từng phần: $\begin{cases} u = t \\ dv = e^{-\lambda t}dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dt \\ v = -\dfrac{1}{\lambda}e^{-\lambda t} \end{cases}$.

Ta được: $N_\alpha = -\lambda N_{01}te^{-\lambda t} + \lambda N_{01}\int_0^t e^{-\lambda t}dt = N_{01}\left[1-e^{-\lambda t}\left(\lambda t+1\right)\right] = 3,9.10^{17}$ hạt.

[1] Lời giải trên được thực hiện bởi các thành viên nhóm xPhO. Trong quá trình giải bài và soạn thảo không thể tránh khỏi sai sót, mọi sự góp ý xin gửi tới nhóm xPhO qua Facebook Page: *https://www.facebook.com/xPhO.org/*

Lời giải tham khảo
Đề thi chọn học sinh giỏi quốc gia THPT môn Vật lí – VPhO 2018

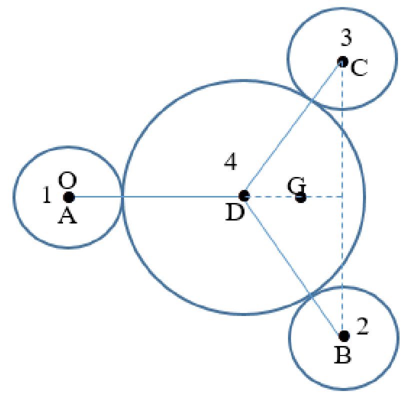
(Phiên bản 1.0 ngày 23.1.2018)

Ngày thi thứ hai: 12/01/2018

Câu I *([1]Lời giải đề xuất bởi Phạm Đình Hoàn, giáo viên Vật lí trường THPT Trần Phú, Vĩnh Phúc)*

1a. Đặt $R_1 = R_2 = R_3 = 0,5R_4 = R \Rightarrow AD = BD = CD = 3R; AB = BC = AC = 3\sqrt{3}R$

Momen quán tính của đĩa 4 với trục quay đi qua tâm đĩa: $I_4 = 2mR^2$.



Momen quán tính của đĩa 2,3 đối với trục quay đi qua tâm mỗi đĩa: $I_2 = I_3 = \dfrac{1}{2}mR^2$.

Vì các đĩa không ma sát trên nhau nên khi thả nhẹ hệ thì đĩa 1 không chuyển động,các đĩa 2,3,4 chỉ chuyển động tịnh tiến.

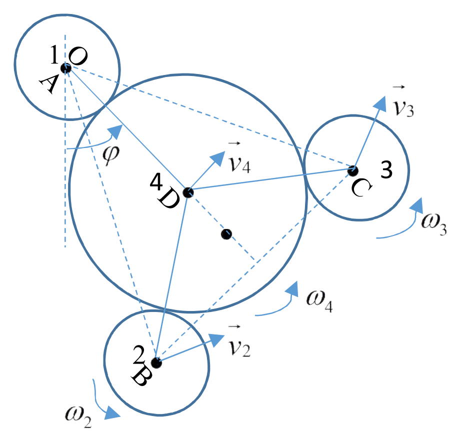
Kí hiệu G là khối tâm của hệ ba đĩa 2,3,4. Dễ thấy: $DG = R \Rightarrow AG = 4R$.

Gọi ω là vận tốc góc của hệ khi thanh AD có phương thẳng đứng. Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng, ta có:

$$3mgAG = \frac{m}{2}\left[(AD\omega)^2 + 2(AB\omega)^2\right]$$

$$\Leftrightarrow 3mg4R = \frac{m}{2}\left[(3R\omega)^2 + 2(3\sqrt{3}R\omega)^2\right] \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{8g}{21R}}$$

1b. Xét khi thanh AD lệch khỏi vị trí thẳng đứng góc φ nhỏ



Gọi $(\vec{v}_2, \omega_2); (\vec{v}_3, \omega_3); (\vec{v}_4, \omega_4)$ lần lượt là vận tốc tâm đĩa và vận tốc góc trong chuyển động quay quanh khối tâm của đĩa của đĩa 2,3,4 (hình vẽ)

Ta có: $v_4 = 3R\varphi'$; $v_2 = v_3 = 3\sqrt{3}R\varphi'$ (1)

Vì đối xứng nên: $\omega_2 = \omega_3$

Đĩa 4 lăn không trượt trên đĩa 1 nên:

[1] Lời giải trên được thực hiện bởi các thành viên nhóm xPhO. Trong quá trình giải bài và soạn thảo không thể tránh khỏi sai sót, mọi sự góp ý xin gửi tới nhóm xPhO qua Facebook Page: *https://www.facebook.com/xPhO.org*

$$v_4 = 2R\omega_4 \Rightarrow \omega_4 = \frac{3}{2}\varphi' \qquad (2)$$

Vì đĩa 2 và 4 lăn không trượt trên nhau nên vận tốc theo phương tiếp tuyến tại điểm tiếp xúc của điểm tiếp xúc của mỗi đĩa bằng nhau

$$v_2 \cos 30^o - \omega_2 R = v_4 \cos 60^o + 2R\omega_4 \qquad (3)$$

Từ (1),(2),(3)$\Rightarrow \omega_2 = \omega_3 = 0$. Cơ năng của hệ là:

$$E = \left(\frac{1}{2}mv_4^2 + \frac{1}{2}I_4\omega_4^2\right) + 2.\left(\frac{1}{2}mv_2^2\right) + 3mgAG(1-\cos\varphi)$$

Khi hệ dao động bé, $\varphi \ll 1$ ta lấy gần đúng $\cos\varphi \simeq 1 - \varphi^2/2$, ta thu được biểu thức gần đúng cơ năng của hệ

$$E = \frac{135}{4}mR^2(\varphi')^2 + 6mgR\varphi^2$$

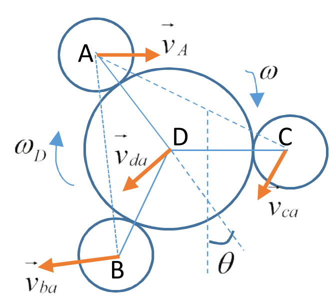
Cơ năng của hệ bảo toàn $dE/dt = 0$, nên sau khi đạo hàm phương trình trên theo thời gian ta được:

$$\varphi'' + \frac{8g}{45R}\varphi = 0$$

Đây là phương trình vi phân của một hệ dao động điều hòa với tần số góc $\sqrt{8g/45R}$. Vì vậy vậy chu kì dao động bé của hệ là: $T = 2\pi\sqrt{\frac{45R}{8g}}$.

2a. Gọi ω là vận tốc góc của hệ quay quanh O. Dễ thấy vận tốc góc của đĩa 4 là: $\omega_D = \frac{3}{2}\omega$.

Vận tốc góc của đĩa 2 và 3 bằng 0: $\omega_B = \omega_C = 0$



Vận tốc điểm D được viết:

$$\vec{v}_D = \vec{v}_A + \vec{v}_{da}$$

với $\vec{v}_{da} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{AD}$ là vận tốc tương đối giữa D và A. Tương tự ta có vận tốc các điểm B và C lần lượt là

$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{ba}$ với $\vec{v}_{ba} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{AB}$

$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{v}_{ca}$ với $\vec{v}_{ca} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{AC}$

Áp dụng định luật bảo toàn động lượng theo phương ngang ta được:

$$0 = 4mv_A - 3mR\omega\cos\theta - 3\sqrt{3}mR\omega\left[\cos(\theta - 30^o) + \cos(\theta + 30^o)\right]$$
$$\Leftrightarrow 0 = 4mv_A - 12mR\omega\cos\theta$$
$$\Leftrightarrow v_A = 3R\omega\cos\theta$$

Động năng của đĩa 1 là: $E_{d1} = \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{9}{2}mR^2\omega^2(\cos\theta)^2$

Động năng của đĩa 2 là: $E_{d2} = \frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}m\left[v_A^2 + (\omega AB)^2 - 2v_A\omega AB\cos(\theta - 30^o)\right]$

Động năng của đĩa 3 là: $E_{d3} = \frac{1}{2}mv_C^2 + = \frac{1}{2}m\left[v_A^2 + (\omega AC)^2 - 2v_A\omega AC\cos(\theta + 30^o)\right]$

$\Rightarrow E_{d2} + E_{d3} = m\left[v_A^2 + (\omega AB)^2\right] - \sqrt{3}mv_A\omega AB\cos\theta = mR^2\omega^2\left[27 - 18(\cos\theta)^2\right]$

Động năng của đĩa 4 là:

$$E_{d4} = \frac{1}{2}mv_D^2 + \frac{1}{2}I_4\omega_D{}^2 = \frac{1}{2}m\left[v_A^2 + (\omega AD)^2 - 2v_A\omega AD\cos\theta\right] + \frac{1}{2}I_4\omega_D{}^2 = mR^2\omega^2\left[\frac{27}{4} - \frac{9}{2}\cos^2\theta\right]$$

Động năng của hệ 4 đĩa là: $E_d = \sum_{i=1}^{4} E_{di} = mR^2\omega^2\left[\frac{135}{4} - 18\cos^2\theta\right]$

Định luật bảo toàn cơ năng:

$$3mgAG\cos\theta = E_d$$

$$\Leftrightarrow 12mgR\cos\theta = mR^2\omega^2\left[\frac{135}{4} - 18\cos^2\theta\right]$$

Rút gọn ta thu được biểu thức vận tốc góc của khung ABCD theo góc θ

$$\omega = \sqrt{\frac{16g\cos\theta}{\left(45 - 24\cos^2\theta\right)R}} = \sqrt{\frac{16g\cos\theta}{\left(21 + 24\sin^2\theta\right)R}}$$

2b. Vận tốc điểm E cố định trên đĩa 4 so với hệ quy chiếu K gắn với mặt đất là:

$$\vec{v}_E = \vec{v}_D + \vec{\omega}_D \times \overrightarrow{DE} = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \overrightarrow{OD} + \vec{\omega}_D \times \overrightarrow{DE} \qquad (*)$$

Hệ quy chiếu K' gắn chặt với đĩa 4 tại điểm E trên đĩa 4 là hệ quy chiếu vừa chuyển động tịnh tiến với vận tốc $\vec{v}_E$ vừa chuyển động quay với vận tốc góc $\left(\vec{\omega} + \vec{\omega}_D\right)$. Gọi $\vec{v}_{O/E}$ vận tốc của O so với hệ quy K'. Khi đó vận tốc của điểm O so với hệ quy chiếu K gắn với mặt đất được tính dựa trên công thức cộng vận tốc:

$$\vec{v}_O = \vec{v}_{O/E} + \vec{v}_E + \left(\vec{\omega} + \vec{\omega}_D\right) \times \overrightarrow{EO} \qquad (**)$$

Thay (**) vào (**) và rút gọn, ta thu được: $\vec{v}_{O/E} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{DE} + \vec{\omega}_D \times \overrightarrow{OD}$.

Các vectơ $\overrightarrow{DE}$ và $\overrightarrow{OD}$ cùng chiều nên độ lớn vận tốc của điểm O trong hệ quy chiếu K' được tính như sau:

$$v_{O/E} = \omega 2R + \frac{3}{2}\omega 3R = \frac{13}{2}R\omega = 13\sqrt{\frac{4gR\cos\theta}{\left(21 + 24\sin^2\theta\right)}}$$

Lời giải tham khảo
Đề thi chọn học sinh giỏi quốc gia THPT môn Vật lí – VPhO 2018

(Phiên bản 1.0 ngày 23.1.2018)

Ngày thi thứ hai: 12/01/2018

Câu II (*[1]Lời giải đề xuất bởi Phạm Đình Hoàn, giáo viên Vật lí trường THPT Trần Phú, Vĩnh Phúc)*

1. Chọn gốc thời gian khí ngắt dòng khí. Tại thời điểm t, nhiệt độ của bình là T

Phương trình cân bằng nhiệt: $-CdT = k(T - T_o)dt \Leftrightarrow dt = -\frac{C}{k}\frac{dT}{T - T_o}$

Tích phân 2 vế phương trình ta đc: $t = -\frac{C}{k}\int_{T_2}^{T}\frac{dT}{T - T_o} = \frac{C}{k}\ln\left(\frac{T_2 - T_o}{T - T_o}\right)$

Tại thời điểm $t_1 = 10$ phút, nhiệt độ bình là: $T_1^{'} = 308$ K

Tại thời điểm $t_2 = 20$ phút, nhiệt độ bình là: $T_2^{'} = 306,24$ K

Suy ra: $\frac{t_1}{t_2} = \frac{\ln\left(\frac{T_2 - T_o}{T_1^{'} - T_o}\right)}{\ln\left(\frac{T_2 - T_o}{T_2^{'} - T_o}\right)} = 1/2 \Rightarrow T_o = \frac{T_2^{'}T_2 - T_1^{'2}}{T_2^{'} + T_2 - 2T_1^{'}} = 293,3$ K

Hệ số: $k = \frac{C\ln\left(\frac{T_2 - T_o}{T_1^{'} - T_o}\right)}{t_1} = 0,85$ (J/K.s)

2.Xét chế độ dòng khí ổn định

$Dc_p(T_1 - T_2) = k(T_2 - T_o) \Rightarrow c_p = \frac{k(T_2 - T_o)}{D(T_1 - T_2)} = 0,48$ (J/g.K)

---

[1] Lời giải trên được thực hiện bởi các thành viên nhóm xPhO. Trong quá trình giải bài và soạn thảo không thể tránh khỏi sai sót, mọi sự góp ý xin gửi tới nhóm xPhO qua Facebook Page: *https://www.facebook.com/xPhO.org*

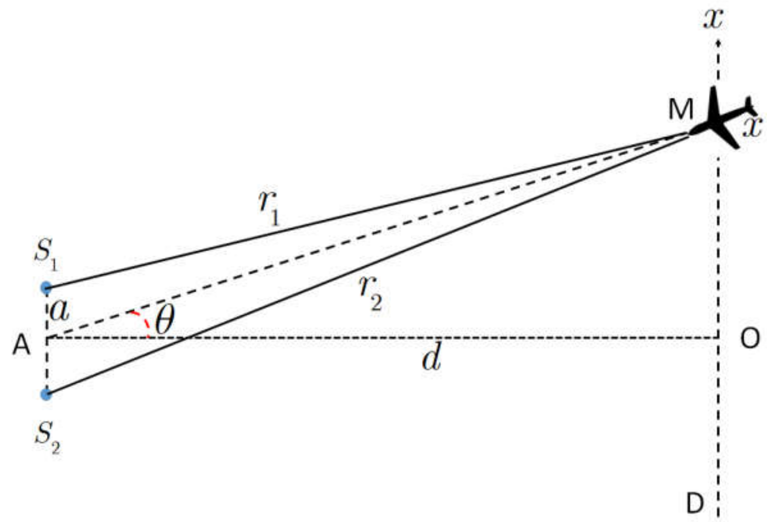
Lời giải tham khảo
Đề thi chọn học sinh giỏi quốc gia THPT môn Vật lí – VPhO 2018

(Phiên bản 1.0 ngày 23.1.2018)

Ngày thi thứ hai: 12/01/2018

Câu III (*Lời giải được đề xuất bởi Nguyễn Văn Duy*[1]*, nhóm xPhO*)

1. Trong bài toán chỉ xét đến hệ thống dẫn hướng theo phương ngang, nên ta xem máy bay và các ăng ten nằm trong cùng một mặt phẳng. Gọi M là vị trí của máy bay trên đường quan sát, θ là hướng máy bay hạ canh, d là khoảng cách từ các ăng ten đến đường quan sát (hình vẽ).



Các sóng điện từ do các ăng ten phát ra có thể được mô tả bởi vec tơ cường độ điện trường, tại điểm M, các sóng từ hai ăng ten có thể viết dưới dạng sau

$$E_1(r_1,t) = E_{10}(r_1)\cos(\omega t - 2\pi\frac{r_1}{\lambda}) \quad (1)$$

$$E_2(r_2,t) = E_{20}(r_2)\cos(\omega t - 2\pi\frac{r_2}{\lambda}) \quad (2)$$

Trong đó E_{10} và E_{20} là biên độ của các sóng, các biên độ này phụ thuộc vào khoảng cách từ M đến các nguồn sóng. Thật vậy, nếu các ăng ten phát sóng dạng sóng cầu với công suất không đổi P, thì cường độ sóng tại điểm M do nguồn S_1 là: $I_1(r_1) = P/(4\pi r_1^2)$. Ta có $I_1(r_1) \sim E_{10}^2(r_1)$ suy ra $E_{10}(r_1) \sim 1/r_1$. Ở đây ta xét trường hợp máy bay hạ cánh theo hướng góc θ nhỏ, và đường

[1] Lời giải trên được thực hiện bởi thành viên nhóm xPhO. Trong quá trình giải bài và soạn thảo không thể tránh khỏi sai sót, mọi sự góp ý xin gửi tới nhóm xPhO qua Facebook Page: *https://www.facebook.com/xPhO.org/*

quan sát nằm cách xa hai ăng ten nên ta có $d \gg a, x$, do đó ta có thể lấy gần đúng $1 / r_1 \simeq 1 / d$. Vì vậy biên độ hai sóng tại M xem như xấp xỉ bằng nhau: $E_{10}(r_1) \simeq E_{20}(r_2) = E_0 \sim \frac{1}{d}$.

Sóng tổng hợp của hai sóng điện từ này :

$$E = E_1 + E_2 = 2E_0 \cos\frac{\pi(r_2 - r_1)}{\lambda}\cos\left(\omega t + \pi\frac{r_1 + r_2}{\lambda}\right) \tag{3}$$

Sóng tổng hợp này có biên độ $\left|2E_0 \cos\frac{\pi(r_2 - r_1)}{\lambda}\right|$, và cường độ là

$$I = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi(r_2 - r_1)}{\lambda}\right) \tag{4}$$

trong đó, $I_0 \sim E_0^2$. Ta có:

$$r_1 = S_1M = \sqrt{d^2 + (x - a / 2)^2} = d\sqrt{1 + \frac{(x - a / 2)^2}{d^2}} \approx d + \frac{(x - a / 2)^2}{2d} \tag{5}$$

$$r_2 = S_2M = \sqrt{d^2 + (x + a / 2)^2} \approx d + \frac{(x + a / 2)^2}{2d} \tag{6}$$

Để thu được các biểu thức trên ta sử dụng công thức gần đúng Bernouli $(1 + x)^n \approx 1 + nx$, với $\left|x\right| \ll 1$. Do $x, a \ll d$ nên ta có thể lấy gần đúng

$$r_2 + r_1 \approx 2d + \frac{x^2 + (a / 2)^2}{d} \approx 2d \tag{7}$$

Trừ hai về của phương trinh (6) cho (5) ta được:

$$r_2 - r_1 = \frac{ax}{d} = a\tan\theta \tag{8}$$

Với trường hợp góc θ nhỏ ($\theta \ll 1$) thì ta có thể lấy gần đúng $\theta \approx \sin\theta \approx \tan\theta$. Khi đó

$$r_2 - r_1 = a\tan\theta \simeq a\theta \tag{9}$$

Như vậy, cường độ sóng điện từ mà máy bay thu nhận được khi hạ cánh theo hướng θ là

$$I(\theta) = 4I_0 \cos^2\frac{\pi a\theta}{\lambda} \tag{10}$$

Theo hướng hạ cánh chuẩn $\theta = 0$, thì máy bay thu được tín hiệu với cường độ lớn nhất

$$\max\{I(\theta)\} = 4I_0 \tag{11}$$

Ta thấy rằng sóng điện từ có bước sóng $\lambda = 2.73\ \mathrm{m}$ nhỏ hơn nhiều so với khoảng cách a giữa hai ăng ten, nên khi máy bay bay lệch hướng hạ cánh chuẩn $\theta = 0$, thì đại lượng $\frac{\pi a\theta}{\lambda}$ thay đổi một lượng đáng kể làm cho cường độ tín hiệu máy bay nhận được bị giảm rõ rệt.

2. Các cực tiểu giao thoa tương ứng với $I(\theta) = 0$, từ phương trình (10) ta thu được phương trình

$$\frac{\pi a\theta}{\lambda} = \frac{\pi}{2} + k\pi \tag{12}$$

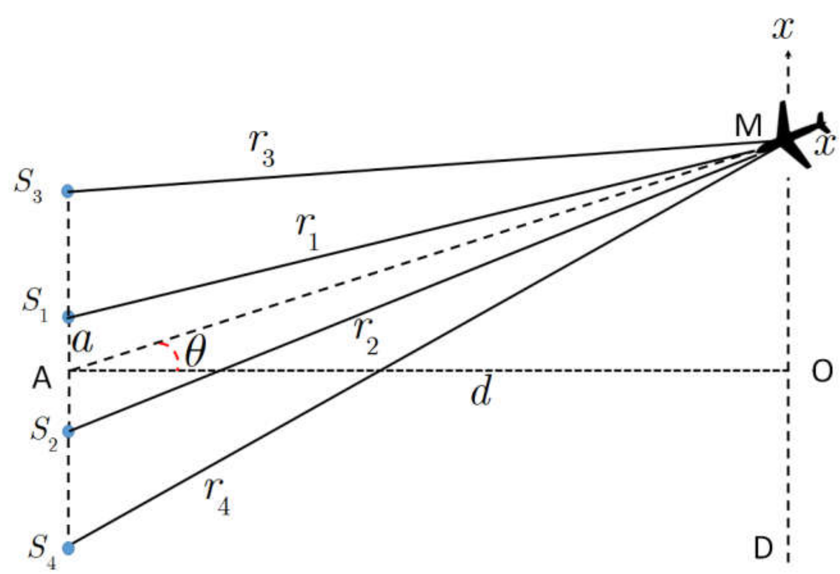
Các giá trị θ tương ứng với các cực tiệu giao thoa

$$\theta_k = (k + \frac{1}{2})\frac{\lambda}{a} \tag{13}$$

Thông số dẫn hướng theo phương ngang của hệ hai ăng ten

$$\delta = \theta_0 - \theta_{-1} = \frac{\lambda}{a} = \frac{2.73}{16} \approx 0.17(\mathrm{rad}){=}9.74^{\circ} \tag{14}$$

3.



a. Với hệ 4 ăng ten (như hình vẽ), các sóng điện từ tại M do các ăng ten truyền tới có phương trình

$$E_1(r_1, t) \simeq E_0^{'}\cos(\omega t - 2\pi\frac{r_1}{\lambda}) \tag{15}$$

$$E_2(r_2, t) \simeq E_0^{'}\cos(\omega t - 2\pi\frac{r_2}{\lambda}) \tag{16}$$

$$E_3(r_3,t) \simeq E_0^{'} \cos(\omega t - 2\pi \frac{r_3}{\lambda}) \tag{17}$$

$$E_3(r_4,t) \simeq E_0^{'} \cos(\omega t - 2\pi \frac{r_4}{\lambda}) \tag{18}$$

Để thu được biểu thức trên, ta áp dụng cách làm tương tự với sóng từ 2 nguồn S_1 và S_2 , nghĩa là ta chỉ xét tới trường hợp góc θ nhỏ và đường quan sát D cách xa các ăng ten $d \gg a$. Sóng điện từ tổng hợp mà máy bay thu nhận được từ 4 ăng ten này được tính sau:

$$E' = E_1 + E_2 + E_3 + E_4 \tag{19}$$

Trong đó hai số hạng đầu $E_1 + E_2$ biểu diễn sự tổng hợp của hai sóng điện từ do hai ăng ten tại S_1 và S_2 , tổng hai số hạng cuối $E_3 + E_4$ là sự tổng hợp của hai sóng do hai ăng ten ngoài cùng S_3 và S_4 . Sự tổng hợp của hai sóng này cũng giống với sự tổng hợp các sóng từ hai nguồn S_1 và S_2 , với khoảng cách hai nguồn phát sóng $S_3S_4 = 3a$. Nên ta có các biểu thức sóng tổng hợp được viết như sau

$$E_1 + E_2 \approx 2E_0^{'} \cos\frac{\pi a\theta}{\lambda} \cos\left(\omega t + \pi\frac{2d}{\lambda}\right) \tag{20}$$

$$E_3 + E_4 \approx 2E_0^{'} \cos\frac{\pi 3a\theta}{\lambda} \cos\left(\omega t + \pi\frac{2d}{\lambda}\right) \tag{21}$$

Thay (20) và (21) vào (19) ta thu được sóng tổng hợp mà máy bay thu được do 4 ăng ten phát ra

$$E' = 2E_0^{'}\left(\cos\frac{\pi a\theta}{\lambda} + \cos\frac{3\pi a\theta}{\lambda}\right)\cos\left(\omega t + \pi\frac{2d}{\lambda}\right) \tag{22}$$

Và cường độ sóng thu được $I^{'} \sim \left|2E_0^{'}\left(\cos\frac{\pi a\theta}{\lambda} + \cos\frac{3\pi a\theta}{\lambda}\right)\right|^2$, hay

$$I'(\theta) = 4I_0^{'}\left(\cos\frac{\pi a\theta}{\lambda} + \cos\frac{3\pi a\theta}{\lambda}\right)^2 \tag{23}$$

Cường độ tín hiệu sóng điện từ lớn nhất máy bay thu được là khi máy bay bay trên đường hạ cánh chuẩn $\theta = 0$:

$$\max\{I^{'}(\theta)\} = 16I_0^{'} \tag{24}$$

Do tổng công suất của hệ 4 ăng ten và hệ 2 ăng ten là như nhau nên ta có $4I_0^{'} = 2I_0$, suy ra

$$\max\{I^{'}(\theta)\} = 2\max\{I(\theta)\} \tag{25}$$

Như vậy, cường độ sóng điện từ lớn nhất khi dùng hệ 4 ăng ten gấp 2 lần cường độ sóng điện từ lớn nhất khi dùng hệ 2 ăng ten.

b. Vị trí cực tiểu giao thoa của 4 sóng tương ứng với $I^{'}(\theta) = 0$. Từ phương trình (23), ta thu được phương trình

$$\cos\frac{\pi a\theta}{\lambda} + \cos\frac{3\pi a\theta}{\lambda} = 0 \tag{26}$$

$$\Leftrightarrow -\cos\frac{\pi a\theta}{\lambda} = \cos\frac{3\pi a\theta}{\lambda} \tag{27}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\pi - \frac{\pi a\theta}{\lambda}\right) = \cos\frac{3\pi a\theta}{\lambda} \tag{28}$$

Giải phương trình (28) ta thu được hai bộ nghiệm

$$\theta^{'}_{1,k} = \left(\frac{1}{2} + k\right)\frac{\lambda}{a} \tag{29}$$

và

$$\theta^{'}_{2,k} = \left(\frac{1}{4} + \frac{k}{2}\right)\frac{\lambda}{a} \tag{30}$$

Ta có $\theta^{'}_{1,0} - \theta^{'}_{1,-1} = \lambda / a$ và $\theta^{'}_{2,0} - \theta^{'}_{2,-1} = \lambda / (2a)$. Do đó, thông số dẫn hướng $\delta^{'}$ trong trường hợp dùng 4 ăng ten:

$$\delta^{'} = \min\{\theta^{'}_{2,0} - \theta^{'}_{2,-1}, \theta^{'}_{2,0} - \theta^{'}_{2,-1}\} = \frac{\lambda}{2a} = \frac{\delta}{2} \tag{31}$$

Như vậy, thông số dẫn hướng trong trường hợp dùng 4 ăng ten nhỏ hơn 2 lần thống số dẫn hướng trong trường hợp dùng 2 ăng ten.

Lời giải tham khảo
Đề thi chọn học sinh giỏi quốc gia THPT môn Vật lí – VPhO 2018

(Phiên bản 2.0 ngày 28.1.2018)

Ngày thi thứ hai: 12/01/2018

Câu IV ([1]*Lời giải đề xuất bởi Trần Kỳ Vĩ, sinh viên khoa Vật lí, ĐH Sư Phạm Hà Nội*)

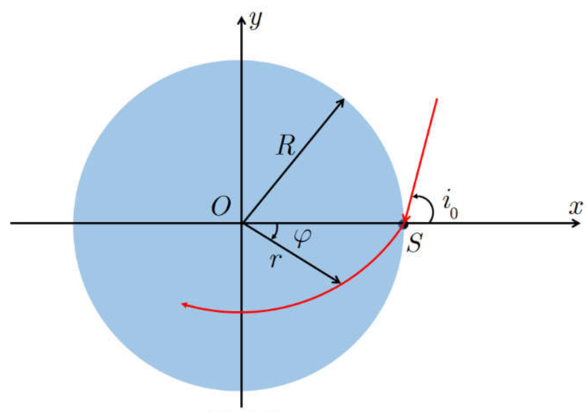
1. **Phương trình đường đi của tia sáng trong khối cầu**

   Để tìm phương trình đường đi của tia sáng, ta có thể sử dụng hai phương pháp: Phương pháp biến phân dựa trên nguyên lý Fermat, và phương pháp hình học trên cơ sở định luật khúc xạ ánh sáng Snell – Descartes. Ở đây, chúng tôi trình bày hai cách độc lập, độc giả có thể chọn đọc bất kì cách giải nào không cần phải theo thứ tự.

a. Cách 1: Sử dụng phương pháp biến phân

Nguyên lý Fermat trong quang học chỉ ra rằng khi ánh sáng đi từ A đến B sẽ đi trên quỹ đạo mà có quang trình nhỏ nhất. Do tính chất đối xứng nên tia sáng luôn nằm trong mặt phẳng tới qua tâm khối cầu, nên ta chọn mặt phẳng Oxy là mặt phẳng tới đi qua tâm như hình vẽ (Hình 1). Trong mặt phẳng Oxy, quang trình của một tia sáng đi từ A đến B theo một đường cong $y = y(x)$ trong một môi trường có chiết suất $n(x, y)$ là:

$$L[y] = \int_A^B n(x,y)ds = \int_A^B n(x,y)\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \qquad (1)$$



Hình 1

Trong không gian mang tính đối xứng trụ, $n(x,y) = n(r) = n\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$ (tức chiết suất chỉ phụ thuộc vào khoảng cách đến gốc tọa độ), ta xét quĩ đạo trong tọa cực (r, φ) với $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$, đương cong khi đó có phương trình là $r = r(\varphi)$. Khi đó (1) trở thành:

$$L = \int_A^B n(r)\sqrt{(r')^2 + r^2}d\varphi = \int_A^B F(r, r')d\varphi = L[r] \quad (2)$$

với $r' = \dfrac{dr}{d\varphi}$. $L[r]$ được gọi là một phiếm hàm theo hàm $r = r(\varphi)$. Theo nguyên lí Fermat trong quang học, từ điều kiện cực tiểu của phiếm hàm $L[r]L = \int_A^B F(r, r')d\varphi$, và do hàm $F(r, r') = n(r)\sqrt{(r')^2 + r^2}$ không phụ

[1] Lời giải trên được thực hiện bởi các thành viên nhóm xPhO. Trong quá trình giải bài và soạn thảo không thể tránh khỏi sai sót, mọi sự góp ý xin gửi tới nhóm xPhO qua Facebook Page: https://www.facebook.com/xPhO.org

thuộc tường minh vào φ nên ta có phương trình Euler thứ 2 (xem cách xây dựng phương trình (43) trong phần *phụ lục 1*) được viết như sau:

$$F - r'\frac{\partial F}{\partial (r')} = \text{const} = k \qquad (3)$$

Thay $F(r,r') = n(r)\sqrt{(r')^2 + r^2}$ vào phương trình (3) ta thu được:

$$n(r)\sqrt{(r')^2 + r^2} - n(r)\frac{(r')^2}{\sqrt{(r')^2 + r^2}} = k \qquad (4)$$

Rút gọn (4) ta thu được phương trình: $$n(r)\frac{r^2}{\sqrt{(r')^2 + r^2}} = k \qquad (5)$$

Từ đây thực hiện các biến đổi đại số ta tìm được phương trình vi phân mô tả quỹ đạo của tia sáng trong khối cầu:

$$|r'| = \left|\frac{dr}{d\varphi}\right| = \frac{r\sqrt{n^2r^2 - k^2}}{k} \qquad (6)$$

Phương trình (6) được tách ra thành hai trường hợp, đối với các đường đi phía dưới trục Ox tương tứng với phương trình:

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{r\sqrt{n^2r^2 - k^2}}{k} \qquad (7)$$

Còn các đường đi ở phía trên trục Ox tương ứng với phương trình: $$\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{r\sqrt{n^2r^2 - k^2}}{k} \qquad (8)$$

Sau khi thực hiện giải các phương trình vi phân này (xem phần *phụ lục 2*) ta thu được phương trình quỹ đạo đường đi của các tia sáng đi bên trong khối cầu

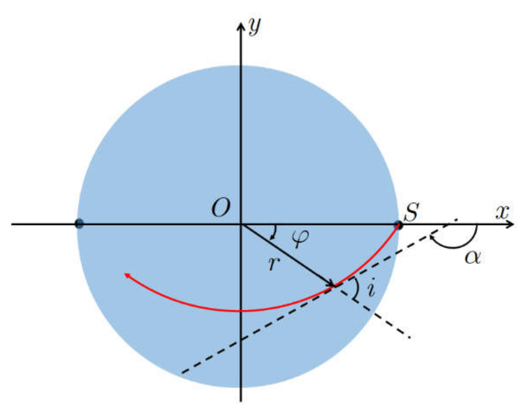
$$\varphi(r) = \pm\arcsin\left(\frac{k}{\sqrt{(n_0R)^2 - 4k^2}}\frac{r^2 - R^2}{Rr}\right) \qquad (9)$$

Dấu "+" thì tương ứng với đường đi nằm phía dưới trục Ox, và ngược lại dấu "-" thì ứng với các đường đi nằm phía trên trục Ox.

Tại điểm (r,φ) trên quỹ đạo đường đi của tia sáng thì vector pháp tuyến $\vec{r}$ tại điểm này hợp với trục Ox góc φ. Gọi α là góc giữa tiếp tuyến của đường truyền tia sáng tại điểm (r,φ) hợp với trục Ox, ta có

$$\tan\alpha = \frac{dy}{dx} \qquad (10)$$

Thay $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ vào (10) ta thu được



Hình 2

$$\tan\alpha = \frac{dr\sin\varphi + r\cos\varphi d\varphi}{dr\cos\varphi - r\sin\varphi d\varphi} = \frac{\tan\varphi + r / r'}{1-(r / r')\tan\varphi} = \tan\left(\varphi+\beta\right) \quad (11)$$

với $\tan\beta = r / r'$. Từ (11) , suy ra $\alpha = \varphi + \beta$. Từ hình vẽ ta thấy rằng góc tới $i(r)$, góc α và φ liên hệ với nhau qua biểu thức

$$\sin i(r) = \left|\sin(\alpha-\varphi)\right| = \left|\sin\beta\right| = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\beta}} = \frac{r}{\sqrt{r^2+(r')^2}} \quad (12)$$

Kết hợp (12) và (5) ta thu được

$$n(r)r\sin i(r) = k \quad (13)$$

Tại điểm S, ở ngay sát mặt ngoài khối cầu ta có $n_R = 1$ và $i_R = i_0$, do đó ta có:

$$k = R\sin i_0 \quad (14)$$

Tại phía trong mặt cầu bán kính $r = R$ môi trường có chiết suất là $n_0 / 2 > 1$ do đó các tia sáng từ phía ngoài mặt cầu đi tới bề mặt khối cầu sẽ bị khúc xạ, gọi i'_R là góc khúc xạ tại bề mặt khối cầu . Từ phương trình (13) ta có $\frac{n_0}{2}R\sin i'_R = k = R\sin i_0$, suy ra

$$\sin i'_R = \frac{2\sin i_0}{n_0} \text{ và } \tan i'_R = \frac{\sin i_0}{\sqrt{n_0^2 - 4\sin^2 i_0}} \quad (15)$$

Thế (14) vào (9)và sử dụng phương trình (15), ta thu được phương trình đường đi của tia sáng bên trong khối cầu

$$\varphi(r) = \pm\arcsin\left(\frac{\sin i_0}{\sqrt{n_0^2-4\sin^2 i_0}}\frac{r^2-R^2}{Rr}\right) = \pm\arcsin\left(\frac{\tan i'_R}{2}\frac{r^2-R^2}{Rr}\right) \quad (16)$$

Hay

$$\sin\varphi = \pm\frac{\sin i_0}{\sqrt{n_0^2-4\sin^2 i_0}}\frac{r^2-R^2}{Rr} = \pm\frac{\tan i'_R}{2}\frac{r^2-R^2}{Rr} \quad (17)$$

Đây là phương trình liên hệ giữa góc φ và r trong tọa độ cực, mô tả quĩ đạo của tia sáng trong khối cầu. Dấu "+" tương ứng với đường phía bên dưới trục Ox, dấu "-" tương ứng với đường phía bên trên trục Ox.

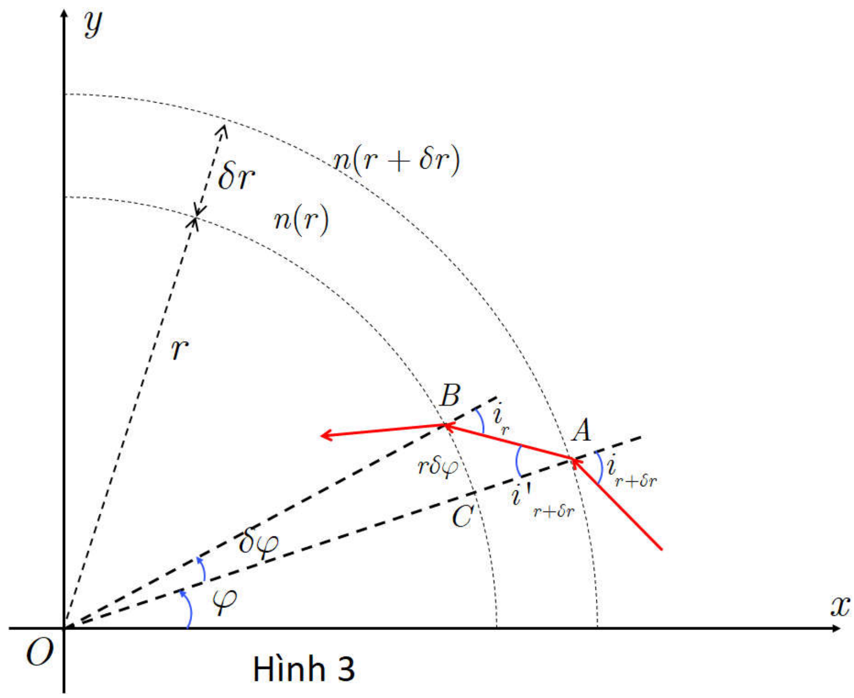
b. *Cách 2: Phương pháp hình học*

Chia khối cầu thành các lớp cầu mỏng có độ dày δr như hình 3. Chiết suất của các lớp cầu coi là không đổi. Gọi $n(r)$ là chiết suất của lớp cầu nằm giữa hai mặt cầu bán kính r và $r+\delta r$. Góc tới và góc khúc xạ tại mặt cầu bán kính r lần lượt là i_r và i'_r. Áp dụng định luật khúc xạ tại mặt cầu bán kính $r+\delta r$:

$$n_{r+\delta r}\sin i_{r+\delta r} = n_r \sin i'_{r+\delta r} \quad (18)$$

Áp dụng định lý hàm số sin cho tam giác OAB, ta được:

$$\frac{\sin i'_{r+\delta r}}{\sin i_r} = \frac{r}{r+\delta r} \Rightarrow \sin i'_{r+\delta r} = \frac{r\sin i_r}{r+\delta r} \quad (19)$$



Hình 3

Thay (19) vào (18), ta thu được:

$$n_r r \sin i_r = n_{r+\delta r}(r+\delta r)\sin i_{r+\delta r} \tag{20}$$

Làm tương tự với các lớp cầu khác, ta thu được phương trình tổng quát:

$$n(r) r \sin i_r = const = k \tag{21}$$

Tại điểm S (Hình 1), ta có $r = R$, $i_R = i_0$, và $n_R = 1$, thay các giá trị này vào phương trình (21) ta được

$$n(r) r \sin i_r = R_0 \sin i_0 = k \tag{22}$$

Từ phương (22) ta rút ra được

$$\sin i(r) = \sin i_r = \frac{k}{n(r)r}, \quad r < R \quad \text{và} \quad \tan i(r) = \frac{k}{\sqrt{n^2r^2 - k^2}}, \quad r < R \tag{23}$$

Tại điểm S, do chiết suất không liên tục, phía ngoài mặt khối cầu có chiết suất là 1, phía trong mặt khối cầu có chiết suất là $n_0 / 2$ nên khi tia sáng đi từ ngoài không khí tới bề mặt khối cầu, tia sáng bị gãy khúc có góc khúc xạ i'_R được tính thoe định luật khúc xạ:

$$\sin i'_R = \frac{2\sin i_0}{n_0} \text{ và } \tan i'_R = \frac{\sin i_0}{\sqrt{n_0^2 - 4\sin^2 i_0}} \tag{24}$$

Khi $\delta r \to 0$, do hàm chiết suất $n(r)$ liên tục trong khối cầu nên ta có $i'(r) = i(r) = \lim\limits_{\delta r \to 0} i(r+\delta r)$. Mặt khác, trong tam giác ABC, khi $\delta r \to 0$ thì ta có thể xem tam giác ABC vuông tại C do đó ta có hệ thức lượng giác:

$$\tan i(r) = \lim_{\delta r \to 0}[\tan i(r+\delta r)] = \lim_{\delta r \to 0}\left|\frac{r\delta\varphi}{\delta r}\right| = r\left|\frac{d\varphi}{dr}\right| \tag{25}$$

Từ (23) và (25) ta thu được phương trình vi phân mô tả quỹ đạo đường đi của tia sáng bên trong khối cầu:

$$\left|\frac{dr}{d\varphi}\right| = \frac{r\sqrt{n^2r^2 - k^2}}{k} \tag{26}$$

Phương trình (26) được tách ra thành hai trường hợp, đối với các đường đi phía dưới trục Ox tương tứng với phương trình

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{r\sqrt{n^2r^2 - k^2}}{k} \tag{27}$$

Còn các đường đi ở phía trên trục Ox tương ứng với phương trình

$$\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{r\sqrt{n^2r^2 - k^2}}{k} \tag{28}$$

Sau khi thực hiện giải các phương trình vi phân này (xem phần <u>*phụ lục 2*</u>) ta thu được phương trình quỹ đạo đường đi của các tia sáng đi bên trong khối cầu

$$\varphi(r) = \pm\arcsin\left(\frac{\sin i_0}{\sqrt{n_0^2 - 4\sin^2 i_0}}\frac{r^2 - R^2}{Rr}\right) = \pm\arcsin\left(\frac{\tan i'_R}{2}\frac{r^2 - R^2}{Rr}\right) \tag{29}$$

Hay

$$\sin\varphi = \pm\frac{\sin i_0}{\sqrt{n_0^2 - 4\sin^2 i_0}}\frac{r^2 - R^2}{Rr} = \pm\frac{\tan i'_R}{2}\frac{r^2 - R^2}{Rr} \tag{30}$$

Đây là phương trình liên hệ giữa góc φ và r trong tọa độ cực, mô tả quĩ đạo của tia sáng trong khối cầu. Dấu "+" tương ứng với đường phía bên dưới trục Ox, dấu "-" tương ứng với đường phía bên trên trục Ox.

c. Chứng mình phương trình $rn(r)\sin i(r) = k$ bằng sử dụng sự tương tự quang - cơ và phương pháp bảo toàn năng lượng

Coi đường truyền tia sáng như đường đi của một động tử, khi đó chiết suất *n* tương tự như vận tốc v trong chuyển động:

Bảo toàn năng lượng:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U = \text{const} \tag{31}$$

với U là thế năng của vật

$$\frac{1}{2}mv^2 = \text{const} - U(r) \to v \equiv v(r)$$

Mà $U = U(r)$ do đó trường lực tồn tại 'tưởng tượng' là trường thế xuyên tâm, do đó momen động lượng bảo toàn:

$$L = r\,mv_\theta = r\,mv.\sin\alpha = \text{const} \tag{32}$$

Trong đó α là góc hợp bởi pháp tuyến hướng tâm và vector $\vec{v}(r)$, tương tự như góc tới i trong quang hình học, v_θ là thành phần phương vị vuông góc với $\vec{r}$ của $\vec{v}$.

Từ (32) suy ra: $r.v(r)\sin\alpha = \text{const}$, trong lí thuyết về ánh sáng của Newton thì $v(r) \sim n(r)$ do đó ta thu được biểu thức cần xây dựng

$$r\,n\left(r\right)\sin i(r) = \text{const} = k = R\sin i_0 \tag{33}$$

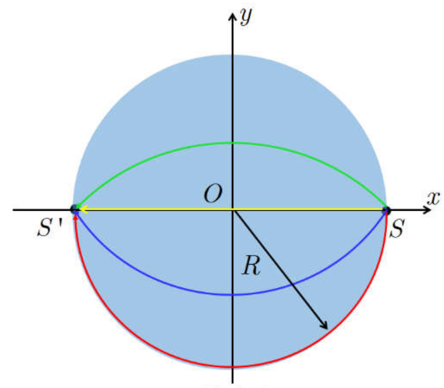
Trong bài này thì, vì chiết suất không liên tục tại bề mặt của khối cầu $r = R$, với $n(r \to R^-) = n_0 / 2$, và $n(r \to R^+) = 1$ nên góc tới không liên tục tại bề mặt của khối cầu, do đó quỹ đạo tia sáng được mô tả bởi phương trình (17). Giả sử nếu như quả cầu đặt trong môi trường có chiết suất bằng chiết suất tại bề mặt khối cầu $n(r > R) = n_0 / 2$, khi đó chiết suất liên tục tại bề mặt khối cầu nên góc tới $i(r)$ sẽ liên tục tại mặt khối cầu và $i'_R = i_R = i_0$, do đó quỹ đạo mô tả bởi (17) của tia sáng bên trong khối cầu sẽ trở thành:

$$\varphi(r) = \pm\arcsin\left(\frac{\tan i_0}{2}\frac{r^2 - R^2}{Rr}\right) \tag{34}$$

2.

a) Nhận thấy rõ theo, (17), cho dù góc i_0 lấy giá trị bao nhiêu thì cặp điểm $(R,0)$ và (R,π) luôn thỏa phương trình này, có thể nói rằng mọi tia phát từ S(R, 0) đều qua S'(R, π). Như vậy vậy S' điểm đối đỉnh với S qua tâm chính là ảnh của S.

b) Thời gian truyền sáng từ S đến S' qua một đường đi được mô tả bởi phương trình (17) là $\tau = L / c$, trong đó c là vận tốc ánh sáng trog chân không, L là tổng quang trình trên con đường. Do S và S' là hai điểm liên hợp và tương điểm hoàn toàn nên quang trình của mọi tia từ S đến S' luôn bằng nhau và có giá trị xác định, do đó thời gian tia sáng đi từ S qua khối cầu đến S' là không đổi.



Hình 4

Ta cũng dễ nhận thấy một tia bên trong khối cầu từ S đi vuông với bán kính (tức $i'_R = \dfrac{\pi}{2}$) đi theo đường tròn tới S'. Thật vậy, thế $i'_R = \dfrac{\pi}{2}$ vào (17) ta thấy $\dfrac{r^2 - R^2}{Rr} = 2\sin\varphi.\cot i'_R = 0 \to r(\varphi) = R$. Do đó thời gian τ tia sáng đi từ S qua khối cầu tới S' chính bằng thời gian của một tia sáng đi từ S theo ½ vòng tròn (O,R) đến S':

$$\tau = \frac{n(R)\pi R}{c} = \frac{\pi R n_0}{2c} \tag{35}$$

Phụ lục 1: Phép tính biến phân

Người ta gọi hàm

$$L[y] = \int_a^b F(y, y', x)dx\,, \tag{36}$$

là một phiếm hàm theo hàm $y = y(x)$. Biến phân trong trường hợp này là phép tính được đưa ra để tìm dạng hàm $y = y(x)$ sao cho tích phân (36) đạt cực trị. Ta đưa ra khái niệm

$$\delta L[y] = \frac{d}{d\eta}L[y + \eta\delta y]\Big|_{\eta=0}\,, \tag{37}$$

với δy là một biến phân tùy ý của đường $y(x)$ với điều kiện sao cho $\delta y(a) = \delta y(b) = 0$ (ý này thể hiện những điểm biên của đường $y(x)$ không bị ảnh hưởng bởi phép biến phân). Dùng cách biểu diễn của $L\left[y\right]$ theo hàm $F(y, y', x)$, phép biến phân cho:

$$\delta L[y] = \int_a^b \left[\delta y \frac{\partial F}{\partial y} + \delta(y')\frac{\partial F}{\partial(y')}\right] dx \tag{38}$$

Với $\delta(y') = (\delta y)' = \dfrac{d}{dx}(\delta y)$, theo phương pháp tích phân từng phần ta có:

$$\delta L[y] = \int_a^b \delta y \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial(y')}\right)\right] dx + \left(\delta y(x) \frac{\partial F}{\partial(y'(x))_a}\right)\Bigg|_a^b \tag{39}$$

Theo điều kiện $\delta y(a) = \delta y(b) = 0$ thì từ (39) thu được: $\delta L[y] = \int_a^b \delta y \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial(y')}\right)\right] dx$

Khi $L[y]$ đạt cực trị tương ứng với điều kiện của phép biến phân $\delta L[y] = 0$, một bổ đề cơ bản của phép biến phân cho ta biết biểu thức trong ngoặc vuông dưới tích phân ở trên bằng không, làm nảy sinh phương trình (p.t) Euler thứ nhất (hay còn gọi là p.t Euler – Lagrange, đây là một p.t quan trọng của cơ giải tích):

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial(y')}\right) = 0 \tag{40}$$

Phương trình này còn có một dạng khác, đó là p.t Euler thứ 2. Trước tiên ta tính:

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + y'\frac{\partial F}{\partial y} + y''\frac{\partial F}{\partial(y')} \text{ và } \frac{d}{dx}\left(y'\frac{\partial F}{\partial(y')}\right) = y''\frac{\partial F}{\partial(y')} + y'\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial(y')}\right)$$

Suy được

$$\frac{d}{dx}\left(F - y'\frac{\partial F}{\partial(y')}\right) = \frac{\partial F}{\partial x} + y'\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial(y')}\right)\right], \tag{41}$$

để p.t này trở thành phương trình Euler thứ 2 thì $y = y(x)$ thỏa (40) cũng phải thỏa (41), từ đó suy ra:

$$\frac{d}{dx}\left(F - y'\frac{\partial F}{\partial(y')}\right) = \frac{\partial F}{\partial x} \tag{42}$$

Phương trình này cực kỳ hữu ích khi hàm $F(y, y', x) \equiv F(y, y')$ không phụ thuộc tường minh vào x, trong trường này thì phương trình (42) sẽ trở thành:

$$F - y'\frac{\partial F}{\partial(y')} = k = \text{const} \tag{43}$$

Phụ lục 2: Giải phương trình vi phân $r' = r\sqrt{n^2r^2 - k^2} / k$

Từ phương trình $r' = r\sqrt{n^2r^2 - k^2} / k$ ta có:

$$d\varphi = \frac{k\,dr}{r\sqrt{n^2r^2 - k^2}} \tag{44}$$

Thay $n(r) = n_0 / \left[1 + (r / R)^2\right]$ vào phương trình (44) và đổi biến số $u = r / R$ ta được phương trình

$$d\varphi = \frac{K\left(1 + u^2\right)du}{u\sqrt{u^2 - K^2\left(1 + u^2\right)^2}} \tag{45}$$

trong đó, $K = k / (n_0 R)$ Lấy nguyên hàm hai vế của phương trình (45) , sau đó thay $u = r / R$ và $k = Kn_0 R$, ta thu được hàm $\varphi(r)$ như sau

$$\varphi(r) = \arcsin\left(\frac{k}{\sqrt{(n_0 R)^2 - 4k^2}}\frac{r^2 - R^2}{rR}\right) + C \tag{46}$$

Với cách chọn hệ tọa độ trụ như hình 1 thì khi $r = R$ thì góc $\varphi = 0$ (tức là tia sáng phát ra ở S trên bề mặt thì trục Ox trùng với pháp tuyến của mặt phân cách tại điểm tới S. Khi đó thì $C = 0$, và phương trình (46) trở thành

$$\varphi(r) = \arcsin\left(\frac{k}{\sqrt{\left(n_0 R\right)^2 - 4k^2}}\frac{r^2 - R^2}{Rr}\right) \tag{47}$$

Lời giải tham khảo

Đề thi chọn học sinh giỏi quốc gia THPT môn Vật lí – VPhO 2018

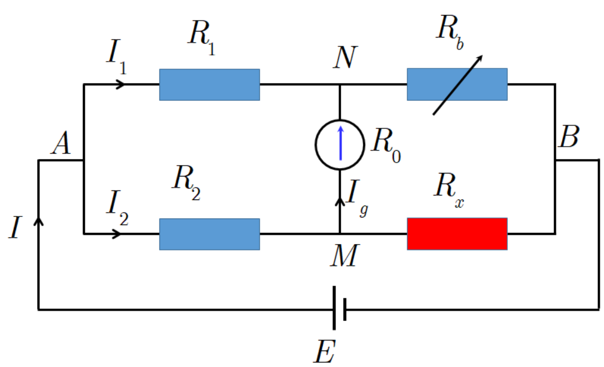
(Phiên bản 1.0 ngày 26.1.2018)

Ngày thi thứ hai: 12/01/2018

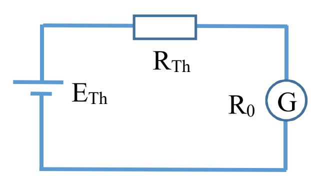
Câu V ([1]*Lời giải đề xuất bởi Nguyễn Thành Lập , giảng viên khoa Vật lí, ĐH Sư Phạm Hà Nội; và Nguyễn Văn Duy, nhóm xPhO*)

1. Xác định điện trở chưa biết bằng phương pháp cầu cân bằng

i. Lý thuyết mạch cầu cân bằng



Hình 1



Áp dụng biến đổi Thévenin cho mạch cầu với đối tượng nghiên cứu là điện kế G. Khi đó mạch điện Thévenin tương đương của mạch cậu được xác định như hình vẽ (Hình 1), trong đó

$$\begin{cases} E_{Th} = E\left(\frac{R_1}{R_1+R_b} - \frac{R_2}{R_2+R_x}\right) \\ R_{Th} = \frac{R_1.R_b}{R_1+R_b} + \frac{R_2.R_x}{R_2+R_x} \end{cases} \quad (1)$$

a. Xác định giá trị R_x:

Ta thấy rằng $I_g = 0$ khi $E_{Th} = 0$. Từ đây ta rút ra biểu thức tính R_x :

$$R_x = R_b \frac{R_2}{R_1}$$

Cách đo giá trị điện trở R_x

- Mắc mạch cầu như hình vẽ (Hình 1).
- Thay đổi giá trị hộp điện trở, (giảm dần giá trị điện trở) đến khi nào điện kế chỉ $I_g = 0$.

  Điền giá trị R_b thu được vào bảng và lặp lại quá trình đó một số lần ta thu được bảng giá trị sau:

[1] Lời giải trên được thực hiện bởi các thành viên nhóm xPhO và cộng tác viên. Trong quá trình giải bài và soạn thảo không thể tránh khỏi sai sót, mọi sự góp ý xin gửi tới nhóm xPhO qua Facebook Page: https://www.facebook.com/xPhO.org

Lần đo	1	2	3	4	5	6	7	8	9
R_b									
$R_x = R_b \frac{R_2}{R_1}$									

- Khi đó giá trị điện trở R_x được tính bằng công thức trung bình:

$$\bar{R}_x = \frac{R_{x1}+R_{x2}+R_{x3}+\cdots+R_{xn}}{n} \qquad (2)$$

b.Cách đo giá trị điện trở trong R_0 của điện kế

Cách 1: Sử dụng mạch cầu:

Từ hệ phương trình (1) ta có, khi R_b thay đổi thì làm cho E_{Th} và R_{Th} thay đổi theo, dẫn đến dòng qua điện kế cũng thay đổi được xác định:

$$I_g(R_b) = \frac{E_{Th}(R_b)}{R_{Th}(R_b) + R_0} = k\theta \qquad (3)$$

Trong đó θ là số chỉ của điện kế, và k là hằng số tỉ lệ. Biến đổi phương trình (3) kết hợp với (1) ta được:

$$\frac{R_1.R_b}{R_1+R_b} = \frac{E}{k\theta}\left(\frac{R_1}{R_1+R_b} - \frac{R_2}{R_2+R_x}\right) - \left(\frac{R_2.R_x}{R_2+R_x} + R_0\right)$$

Đặt: y=$\frac{R_1.R_b}{R_1+R_b}$ a=$\frac{E}{k}$ x=$\frac{1}{\theta}\left(\frac{R_1}{R_1+R_b} - \frac{R_2}{R_2+R_x}\right)$ b=$-\left(\frac{R_2.R_x}{R_2+R_x} + R_0\right)$

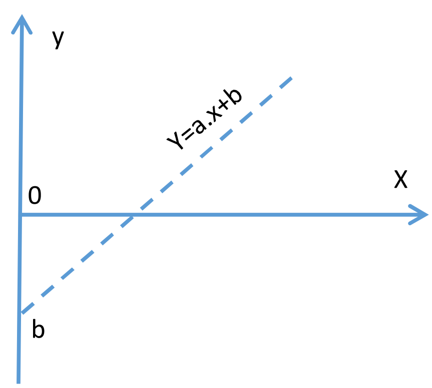
Ta có phương trình tuyến tính: y=ax+b

Cách làm thí nghiệm:

Mắc mạch như hình 1. Thay đổi giá trị R_b ta thu được bảng số liệu sau:

Lần	1	2	3	4	5	6	7	8	.....
R_b									
q									
X									
Y									

Từ bảng số liệu ta có dạng đồ thị tuyến tính:



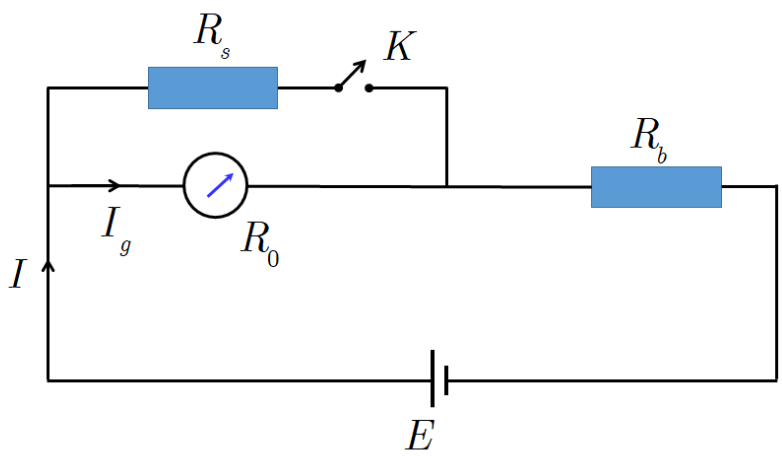
Từ đồ thị tuyến tính ta xác điịnh được các hệ số a và b.

Thay vào trở lại ta có : $R_0 = -b - \frac{R_2.R_x}{R_2+R_x}$

Chúng ta có thể tính được độ chia nhỏ nhất của điện kế nếu biết hiệu điện thế đặt vào nguồn: $k = \frac{E}{a}$

Chú ý: độ chính xác của cách làm này phụ thuộc rất nhiều vào sai số và giá trị của biểu thức $\frac{R_2.R_x}{R_2+R_x}$ vì R_0 thường nhỏ nên nếu sai số lớn quá ta sẽ không thể lựa chọn cách làm này đc mà ta có thể dùng các cách phía sau.

Cách 2:



Hình 2

Cách 2a[2]:

Sơ đồ mạch điện đo điện trở trong R_0 của điện kế được mắc như hình vẽ (Hình 2): R_b là một điện trở có giá trị lớn, trong các thiết bị đề bài ra ta sử dụng hộp điện trở, R_s là một điện trở có giá trị nhỏ có thể dùng các điện trở R_1 hay R_2 có sẵn.

- Khi khóa K mở
  Số chỉ của điện kế là

$$I_{g,1} = \frac{E}{R_0 + R_b} = k\theta_1 \qquad (4)$$

Trong đó, θ_1 là góc chỉ của điện kế tương ứng với dòng điện $I_{g,1}$ đi qua điện kế , và k là hằng số tỉ lệ.

- Khi khóa K đóng
  Số chỉ của điện kế

$$I_{g,2} = \frac{E}{R_b + \dfrac{R_0 R_s}{R_0 + R_s}} \frac{R_s}{R_0 + R_s} = \frac{ER_s}{R_b R_s + R_0(R_b + R_s)} = k\theta_2 \qquad (5)$$

Ta có tỉ số dòng điện hay số chỉ của điện kế trong hai lần đo

$$\nu = \frac{I_{g,1}}{I_{g,2}} = \frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{R_b R_s + R_0(R_b + R_s)}{R_s(R_0 + R_b)} \qquad (6)$$

Suy ra

$$R_0 = \frac{(\nu - 1)R_b R_s}{R_b - (\nu - 1)R_s} \qquad (7)$$

[2] Phương pháp này chúng tôi tham khảo phương pháp có tên tiếng Anh là "half-deflection method", tạm dịch là "phương pháp lệch nửa", tương ứng với trường hợp $\nu = 2$: http://www.plustwophysics.com/wp-content/uploads/2016/08/lelm303.pdf

Hay

$$\frac{1}{R_0} = \frac{1}{(\nu - 1)R_s} - \frac{1}{R_b} \qquad (8)$$

Sai số ΔR_0 trong phép đo được tính theo biểu thức sau

$$\frac{\Delta R_0}{R_0^2} = \frac{\Delta\nu}{\left|\nu - 1\right| R_s} + \frac{\Delta R_s}{(\nu - 1)R_s^2} + \frac{\Delta R_b}{R_b^2} \qquad (9)$$

Cách đo giá trị điện trở R_0

- Mắc mạch điện như hình 2.
- Để khóa K mở, cố định giá trị điện trở R_b của hộp điện trở sao cho dòng qua điện kế nằm trong phạm vi thang đo của điện kế. Ghi lại giá trị điện trở R_b và số chỉ θ_1 của điện kế.
- Đóng khóa K, ghi lại số chỉ θ_2 của điện kế.
- Lặp lại các bước ghi vào bằng sau.

Lần đo	θ_1	θ_2
1		
2		
3		
4		
5		

- Tính các trung bình $\overline{\theta}_1$, $\overline{\theta}_2$ và sai số $\Delta\theta_1$, $\Delta\theta_2$ theo công thức

$$\overline{x} = \frac{\sum_{j=1}^{N} x_j}{N} \qquad (10)$$

$$\Delta x = \frac{\sum_{j=1}^{N} \left|x_j - \overline{x}\right|}{N} \quad \text{hoặc} \quad \Delta x = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{N} \left(x_j - \overline{x}\right)^2}{N(N-1)}}. \qquad (11)$$

- Tính giá trị trung bình $\overline{\nu}$ và sai số $\Delta\nu$

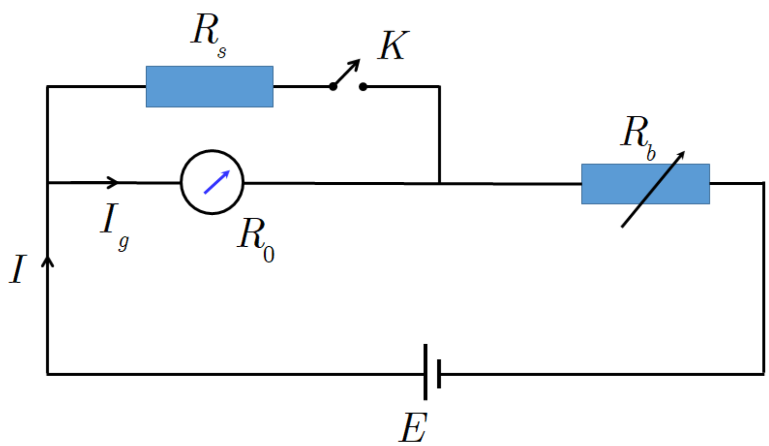
$$\overline{\nu} = \frac{\overline{\theta}_1}{\overline{\theta}_2} \quad \text{và} \quad \Delta\nu = \overline{\nu}\left(\frac{\Delta\theta_1}{\overline{\theta}_1} + \frac{\Delta\theta_2}{\overline{\theta}_2}\right) \qquad (12)$$

- Tính giá trị trung bình [3] $\overline{R}_0$ và sai số ΔR_0 theo công thức (7) và (9)

[3] Giá trị trung bình của R_0 còn có thể được tìm bằng cách tuyến tính hóa phương trình (8) thành $y = x + b$ với $y = 1/[(1-\nu)R_s]$, $x = 1/R_b$ và $b = 1/R_0$. Trong trường hợp này thì giá trị của R_b sẽ biến thiên.

$$\bar{R}_0 = \frac{(\bar{\nu}-1)R_b R_s}{R_b - (\bar{\nu}-1)R_s} \text{ và } \Delta\bar{R}_0 = R_0^2\left(\frac{\Delta\nu}{\left|\bar{\nu}-1\right|R_s} + \frac{\Delta R_s}{(\nu-1)R_s^2} + \frac{\Delta R_b}{R_b^2}\right) \quad (13)$$

Cách 2b[4]:



Hình 2.b

Cách đo thứ 2 có sơ đồ như hình (Hình 2.b). Trong đó R_b là các giá trị hộp điện trở, R_s là một điện trở có giá trị nhỏ, có thể sử các điện trở có sẵn R_1 hoặc R_2. Cách đo điện trở trong R_0 của điện kế được thực hiện như sau: Mở khóa K, điều chỉnh hộp điện trở $R_b = R_{b1}$ để cho điện kế chỉ số chỉ cực đại trong thang đo của điện kế $I_{g,1} = I_{g\max} = k\theta_{\max}$. Đóng khóa K, điều chỉnh hộp điện trở $R_b = R_{b2}$ để cho điện kế chỉ số chỉ cực đại trong thang đo $I_{g,2} = I_{g\max} = k\theta_{\max}$.

Do $I_{g,1} = I_{g,2} = I_{g\max} = k\theta_{\max}$, nên từ phương trình (4) và (5) ta thu được biểu thức tính R_0

$$R_0 = \frac{R_s(R_{b1} - R_{b2})}{R_{b2}} \quad (14)$$

Sai số ΔR_0 trong phép đo được tính theo biểu thức sau

$$\Delta R_0 = \frac{R_s}{R_{b2}}\Delta R_{b1} + \frac{R_s R_{b1}}{R_{b2}^2}\Delta R_{b2} + \frac{R_{b1} - R_{b2}}{R_{b2}}\Delta R_s \quad (15)$$

Cách đo giá trị điện trở R_0

- Mắc mạch điện như hình 2.b
- Để khóa K mở, điều chỉnh giá trị hộp điện trở đến một giá trị $R_b = R_{b_1}$ sao cho số chỉ của điện kế cực giá trị lớn nhất trong thang đo. Ghi lại giá trị điện trở R_{b1}.
- Đóng khóa K, điều chỉnh giá trị hộp điện trở đến giá trị $R_b = R_{b2}$ để điện kế chỉ giá trị lớn nhất trong thang đo. Ghi lại giá trị điện trở $R_b = R_{b2}$.

[4] Chúng tôi đã tham khảo phương pháp này được trình bày trong bài thực hành Vật lí đại cương của Đại học Clayton: http://www.clayton.edu/portals/507/galvanometer2212.pdf

- Lặp lại các bước trên và ghi vào bảng sau.

Lần đo	1	2	3	4	5	6	7	8
R_{b1}								
R_{b2}								

- Khi đó giá trị trung bình điện trở $\overline{R}_{b1}$, $\overline{R}_{b2}$ và các sai số ΔR_{b1}, ΔR_{b2}:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{j=1}^{N} x_j}{N} \tag{16}$$

$$\Delta x = \frac{\sum_{j=1}^{N} \left| x_j - \overline{x} \right|}{N} \quad \text{hoặc} \quad \Delta x = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{N} \left(x_j - \overline{x} \right)^2}{N(N-1)}}. \tag{17}$$

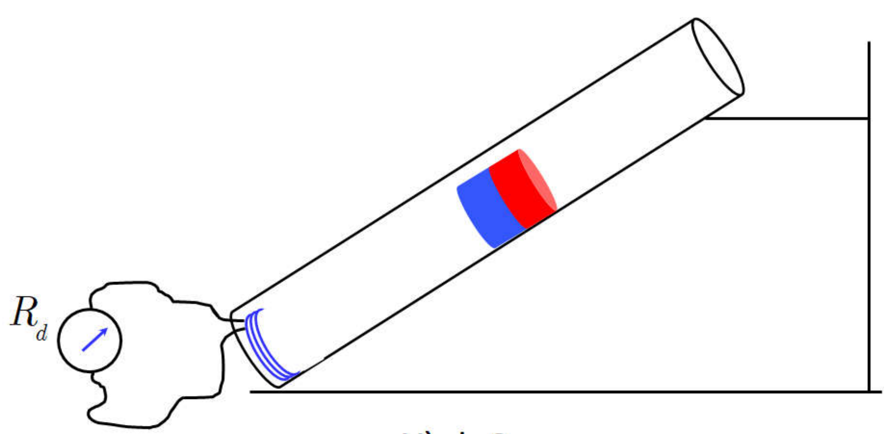
- Tính giá trị trung bình $\overline{R}_0$ và sai số ΔR_0 của theo công thức (14) và (15)

$$\overline{R}_0 = \frac{R_s(\overline{R}_{b1} - \overline{R}_{b2})}{\overline{R}_{b2}} \tag{18}$$

$$\Delta R_0 = \frac{R_s}{\overline{R}_{b2}} \Delta R_{b1} + \frac{R_s \overline{R}_{b1}}{\overline{R}_{b2}^2} \Delta R_{b2} + \frac{\overline{R}_{b1} - \overline{R}_{b2}}{\overline{R}_{b2}} \Delta R_s \tag{19}$$

2. Xác định độ lớn cảm ứng từ trung bình B tại bề mặt đấy của một nam châm vĩnh cửu

a. Cảm ứng từ trung bình B tại mặt đáy của nam châm được dự trên hiện tượng cảm ứng điện từ. Thí nghiệm được bố trí như hình vẽ (Hình 3). Đặt cuộn dây ở phía dưới của ống nhựa, đặt nghiêng ống nhựa, thả nam châm vào trong ống nhựa. Điện kế mắc nối với khung dây để đo tổng điện tích chạy qua nó. (Lưu ý: *Ống nhựa được đặt nghiêng một góc đủ lớn để cho nam châm chuyển động từ từ khi đến va chạm với khung dây không bị nảy lên. Không để cho nam châm chui qua khung dây vì khi nam châm lọt qua khung dây, từ trường thay đổi chiều nên từ thông sẽ thay đổi một lượng* $\left|2BS'\right|$)



Hình 3

b. Lý thuyết và cách đo

Từ thông đi qua khung dây được tính $\phi(t) = NB(t)S'$, trong đó $B(t)$ là từ trường trung bình trên bề mặt khung dây do nâm châm tạo ra, N là số vòng dây của khung dây. Khi nam châm di chuyển thì từ trường này thay đổi, làm cho từ thông qua tiết diện khung dây thay đổi, dẫn đến xuất hiện suất điện động cảm ứng trong khung dây được tính bằng biểu thức sau:

$$E(t) = \left|\frac{d\phi}{dt}\right| \tag{20}$$

Độ lớn dòng điện đi qua điện kế và khung dây được tính theo định luật Ohm như sau:

$$i(t) = \frac{E(t)}{R_0 + R_d} \tag{21}$$

Số chỉ của điện kế xung kích cho ta biết tổng số điện tích đã đi qua nó. Trước khi thả nam châm, thiết lập sao cho số chỉ của điện kế bằng không. Khi đó số chỉ của điện kế ở thời điểm t được tính

$$q(t) = \int_0^t \left|i(t)\right| dt \tag{22}$$

Do nam châm di chuyển tiến lại gần khung dây nên $B(t)$ tăng dần theo thời gian, hay từ thông $\phi(t)$ qua khung dây sẽ tăng dần khi nam châm chuyển động lại gần khung dây, do đó suất điện động trên khung dây sẽ có dấu không thay đổi, hay nói một cách khác là dòng điện có chiều không đổi khi nam châm tiến lại gần khung dây. Nên ta có, tổng độ lớn điện tích chạy qua điện kế ở thời điểm t được tính bằng biểu thức

$$q(t) = \left|\int_0^t i(t)dt\right| = \frac{1}{R_0 + R_d}\left|\int_0^t Edt\right| = \frac{1}{R_0 + R_d}\left|\int_{\phi_0}^{\phi} d\phi\right| = \frac{\left|\phi(t)\right|}{R_0 + R_d} = \frac{N\left|B(t)\right|S'}{R_0 + R_d} \tag{23}$$

Tại thời điểm khi nam châm đến tiếp xúc với khung dây thì cảm ứng từ trung bình trên khung dây $B(t)$ bằng cảm ứng từ trung bình trên bề mặt đáy của nam châm B_m, khi đó điện kế chỉ tổng độ lơn điện tích qua điện kế $q(t) = q_m$ được tính

$$q_m = \frac{B_m N S'}{R_0 + R_d} \tag{24}$$

Như vậy, khi mặt đáy của nam châm chạm vào khung đây, đọc số chỉ của điện kế ta biết được giá trị q_m, các thông số diện tích tiết diện khung dây S', các điện trở R_0 và R_d đề đã biết nên ta sẽ tính được độ lớn cảm ứng từ trung bình trên mặt đáy của nam châm như sau

$$B_m = \frac{q_m(R_0 + R_d)}{NS'} \tag{25}$$

Sai số ΔB_m của phép đo

$$\frac{\Delta B_m}{B_m} = \frac{\Delta q_m}{q_m} + \frac{\Delta R_0 + \Delta R_d}{R_0 + R_d} + \frac{\Delta S'}{S'} \tag{26}$$

Cách đo giá trị cảm ứng từ B_m ở mặt đáy nam châm

- Bố trí thí nghiệm như hình vẽ (Hình 3).
- Trước khi thả nam châm, điều chỉnh cho điện kế về số 0.

- Thả cho nam châm trượt dọc theo ống nhựa hình trụ. Khi nam châm chạm vào khung dây, ghi lại giá trị điện tích q_m mà điện kế xung kích chỉ.
- Lặp lại bước trên nhiều lần và ghi vào bảng sau.

Lần đo	1	2	3	4	5	6	7	8
q_m								

- Tính giá trị trung bình của $\overline{q}_m$ và sai số Δq_m:

$$\overline{q}_m = \frac{q_{m1} + q_{m2} + \cdots + q_{mN}}{N} \tag{27}$$

$$\Delta q_m = \frac{\sum_{j=1}^{N} \left| q_{mj} - \overline{q}_m \right|}{N} \text{ hoặc } \Delta q_m = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{N} \left(q_{mj} - \overline{q}_m \right)^2}{N(N-1)}} \tag{28}$$

- Tính giá trị trung bình $\overline{B}_m$ và số ΔB_m theo công thức (25) và (26):

$$\overline{B}_m = \frac{\overline{q}_m (R_0 + R_d)}{NS'} \text{ và } \Delta B_m = \overline{B}_m \left(\frac{\Delta q_m}{\overline{q}_m} + \frac{\Delta R_0 + \Delta R_d}{R_0 + R_d} + \frac{\Delta S'}{S'} \right) \tag{29}$$

- Làm tương tự các bước trên nhưng đổi đầu của nam châm ta được từ trường trung bình trên mặt đáy còn lại.

Lời giải tham khảo

Đề thi chọn học sinh giỏi quốc gia THPT môn Vật lí – VPhO 2018

(Phiên bản 1.0 ngày 26.1.2018)

Phần thi: Thực hành Vật lí

Ngày thi thứ 3: 13/01/2018

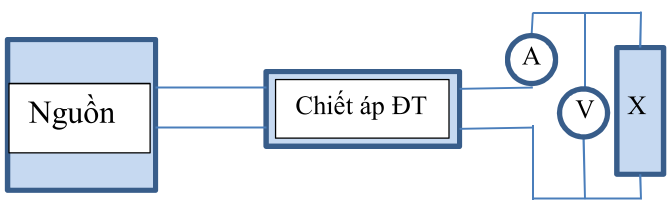
([1]*Lời giải đề xuất bởi thầy giáo Nguyễn Thành Lập , giảng viên khoa Vật lí, ĐH Sư Phạm Hà Nội*)

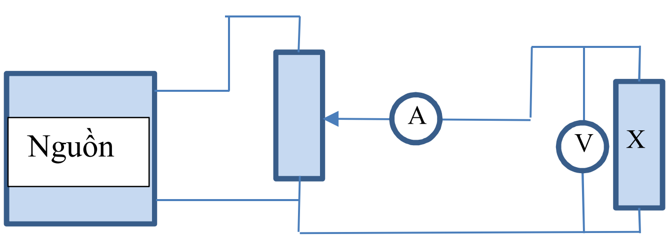
<u>Chú ý:</u> Các kết quả được trình bày dưới đây được đo từ mạch điện được cấu từ diot thường N4148 và diot Zener 5,1V nên có thể khác đôi chút ở các giá trị điện áp cần tìm so với kết quả các bạn đo được từ thiết bị được phát theo đề. Tuy nhiên cách làm và các giá trị của điện trở hoàn toàn chính xác. Ở đây đề bài dùng 3 loại điện trở rất dễ mua và phổ biến là 10Ω; 100Ω và 150Ω các điện trở này có sai số trong khoảng từ 1% đến 5%.

Mắc mạch điện khảo sát đặc tuyến V-A của hộp đen theo hai chiều với chú ý khi điện áo khảo sát dưới 6V em nên dùng chiết áp điện tử. Nếu điện áp đến khoảng 6V mà dòng điện chưa đến 200mA em thay chiết áp bằng biến trở để khảo sát tếp phần còn lại.

Nếu đủ khéo em có thể chỉ dùng biến trở để khảo sát cũng được tuy nhiên như vậy rất mạo hiểm có thể làm hỏng linh kiện trong hộp!

Sơ đồ khảo sát:





[1] Lời giải trên được thực hiện bởi các thành viên nhóm xPhO và cộng tác viên. Trong quá trình giải bài và soạn thảo không thể tránh khỏi sai sót, mọi sự góp ý xin gửi tới nhóm xPhO qua Facebook Page: https://www.facebook.com/xPhO.org

Ta thu được bảng số liệu sau:

U(V)	I(mA)
2.876	199.1
2.667	180.2
2.513	164.2
2.324	145.9
2.117	124.8
1.94	107.2
1.769	90.1
1.631	76.6
1.489	62.6
1.372	51.98

U(V)	I(mA)
1.251	39.94
1.171	32.68
1.03	20.26
0.965	14.97
0.888	9.57
0.766	5.05
0.601	3.78
0.432	2.73
0.296	1.87
0.179	1.13

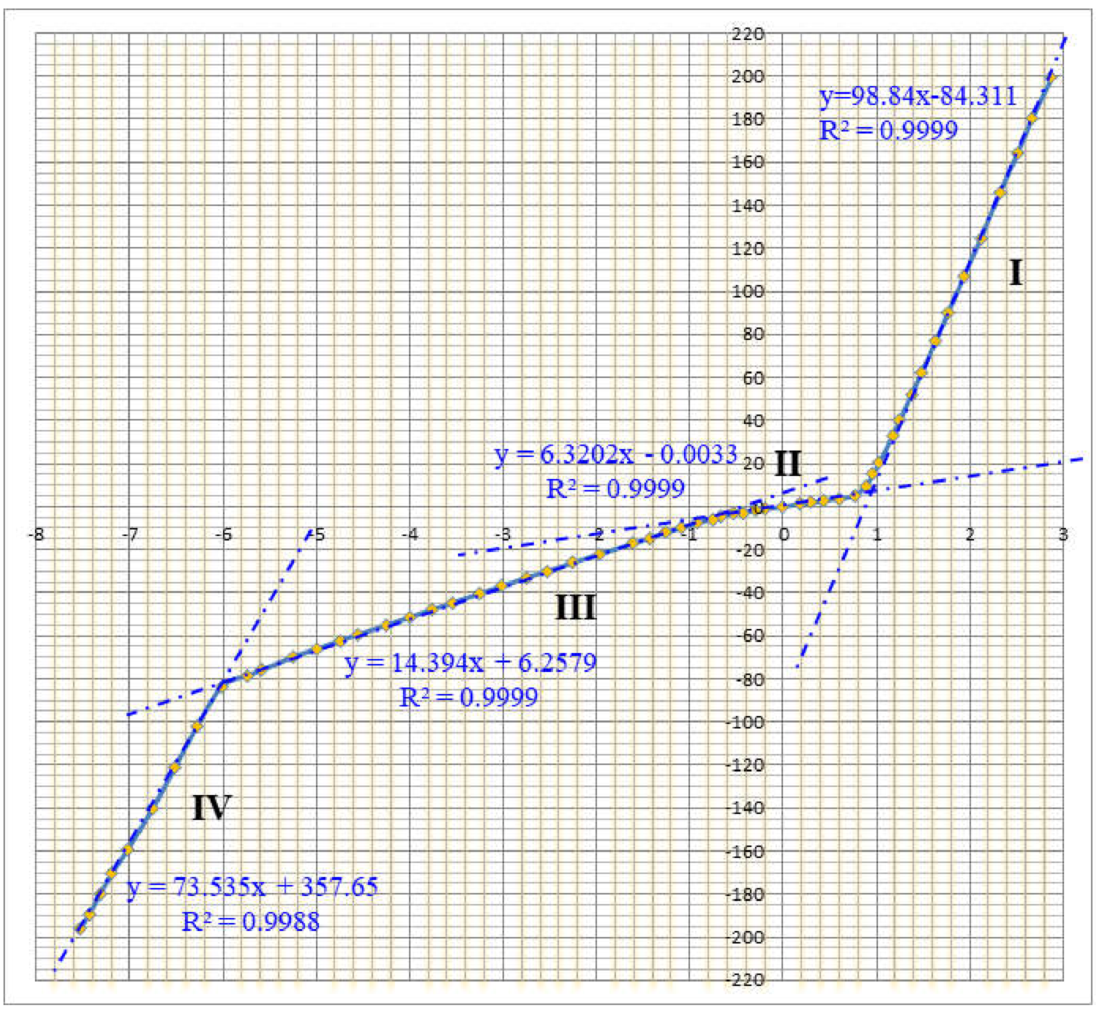
U(V)	I(mA)
0	0
-0.184	-1.16
-0.299	-1.87
-0.431	-2.71
-0.526	-3.37
-0.663	-4.62
-0.758	-5.65
-0.913	-7.58
-1.085	-9.84
-1.252	-12.09

U(V)	I(mA)
-1.424	-14.45
-1.62	-17.33
-1.97	-22.07
-2.255	-26.11
-2.52	-29.9
-2.747	-32.95
-3.014	-36.99
-3.253	-40.46
-3.54	-44.64
-3.757	-47.8

U(V)	I(mA)
-3.998	-51.33
-4.253	-55.11
-4.563	-59.62
-4.748	-62.2
-5	-66.1
-5.243	-69.7
-5.579	-75.8
-5.737	-78.4
-6.01	-83.4
-6.28	-102

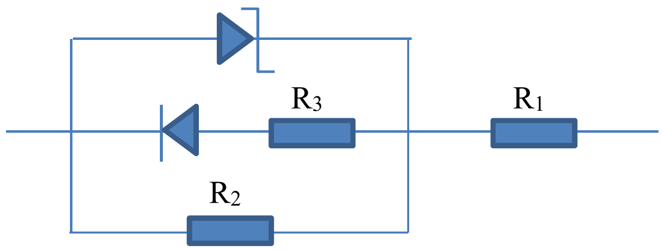
U(V)	I(mA)
-6.52	-121.5
-6.75	-140
-7.02	-159.1
-7.19	-170.4
-7.31	-179.5
-7.43	-189.1
-7.53	-196.2

<u>Đặc tuyến V-A qua hộp đen theo hai chiều</u>



- Nhánh I và IV chứng tỏ nhánh I là nhán thuận của điốt zener. Nhánh IV là nhánh ngược!
- Nhánh I, II, III chứng tỏ có hai điốt mắc ngươc chiều nhau do có 2 đoạn gấp khúc phi tuyến tính!
- Nhánh 2 là đoạn thẳng đi qua gốc tọa độ nên trong vùng này nó giống như một điện trở không đổi tuân theo định luật Ôm. Vì vậy chắc chắn E là một điện trở R_1.
- Do đoạn I dốc hơn đoạn III và đoạn III dốc hơn đoạn II nên điện trở đoạn I nhỏ hơn II và đoạn III nhỏ hơn II. Cho thấy I phải là đi ốt zener nối tiếp với R_1.
- Theo chiều ngược lại lúc đầu mọi đi ốt không dẫn nhưng điện trở lại tăng cao nhất (Nhánh II) chứng tỏ R_1 nối tiếp với một điện trở. Vậy A hoặc D là điện trở thì phần tử còn lại D hoặc A là điốt zener. Khi đó nhánh giữa là đi ốt thường nối tiếp điện trở!

Từ các nhận xét trên ta có mạch điện như hình!



Tuyến tính hóa I ta thu được:

U_{11} =0.85V, B_1 =98,84.10^{-3} suy ra $R_1=1/B_1=10,1\Omega$

Tuyến tính hóa II ta thu được:

$B_2=6,32.10^{-3}$ suy ra $R_1+R_2=1/B_2=158,2\Omega$ suy ra $R_2=148,1\Omega$

Tuyến tính hóa III và tìm giao điểm của nhánh 3 với nhánh II tại vị trí có điện áp làm diot chỉnh lưu mở ta có:

$B_3= 14,394.10^{-3}$

Và giao điểm U = -0,776 (V) và I=-4,9 mA

Suy ra: $U_{10}=0.776-4,9.10^{-3}.10.1=0,727$ (V)

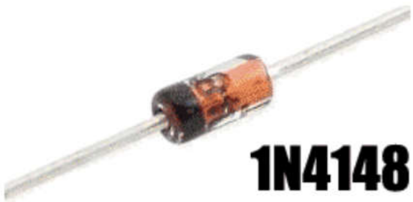
Và $R_1+R_{23}=1/B_3=69,5\Omega$ giải ra $R_3=99,2\Omega$

Cuối cùng tuyến tính hóa đoạn IV và xác định giao điểm với đoạn III ta có tọa độ giao điểm tại U=-5,9V và I=-79,3mA

Từ sơ đồ mạch điện ta tính được $U_{21}=5,9-79,3.10^{-3}.10,1=5,1$(V)

Nhận xét:

Một số HS thấy rằng đoạn I và IV có hệ số góc khác nhau điều này là đúng vì khi mở thực chất đi ốt zener có điện trở hai chiều không bằng nhau. Trong bài này tác giả coi là lí tưởng nên bỏ qua các điện trở điôt khi nó mới nên có sai khác như vậy!

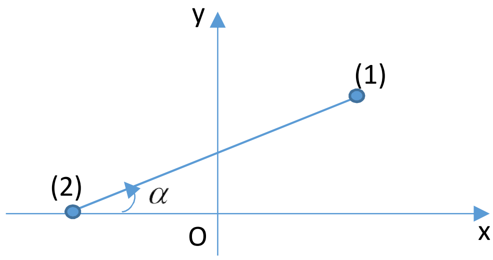


VPhO 2019 - Ngày thi thứ nhất (13/01/2019)

Câu I

(Lời giải đề xuất bởi Phạm Đình Hoàn, Vĩnh Phúc)

1. Vì hệ kín theo phương ngang và ban đầu khối tâm của hệ hai vật đứng yên nên khối tâm hệ chỉ chuyển động theo phương thẳng đứng. Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ với gốc O trùng với vị trí ban đầu của khối tâm hệ. Hình vẽ bên là vị trí của hệ tại thời điểm bất kì.



Tọa độ của vật (1) là: $\begin{cases} x = l\cos\alpha \\ y = 2l\sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x^2}{l^2} + \dfrac{y^2}{4l^2} = 1$

Vậy quỹ đạo của vật (1) là nửa hình elip phía trên Ox

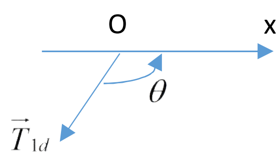
2.

a. Gọi $\vec{T}_1 = (T_{1x}, T_{1y})$, $\vec{T}_2 = (-\mu mg, 0)$ lần lượt là lực do vật 1 và vật 2 tác dụng lên sợi dây

Sợi dây cân bằng: $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \rho.2l\vec{g} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} T_{1x} + (-\mu mg) + 0 = 0 \\ T_{1y} + 0 - 2\rho gl = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T_{1x} = \mu mg \\ T_{1y} = 2\rho gl \end{cases}$

Vậy lực căng dây tác dụng lên vật (1) là $\vec{T}_{1d} = -\vec{T}_1$ có độ lớn là: $T_{1d} = \sqrt{T_{1x}^2 + T_{1y}^2} = \sqrt{(\mu mg)^2 + (2\rho gl)^2}$

Gọi $\theta = (\vec{T}_{1d}, \mathrm{Ox}) \Rightarrow \theta = \pi - \arctan\left(\dfrac{T_{1y}}{T_{1x}}\right) = \pi - \arctan\left(\dfrac{2\rho l}{\mu m}\right)$



b. Giả sử vật 1 có tọa độ là (a, b)

$$\Rightarrow \begin{cases} 2l = \delta(e^{a/\delta} - e^{-a/\delta})/2 \\ b = \delta(e^{a/\delta} + e^{-a/\delta})/2 \end{cases} \Rightarrow b^2 - 4l^2 = \delta^2 \Rightarrow b = \sqrt{\delta^2 + 4l^2}$$

$$\Rightarrow h = b - \delta = \sqrt{\delta^2 + 4l^2} - \delta$$

Ta lại có: $\tan(\pi - \theta) = \dfrac{T_{1y}}{T_{1x}} = y_x'(a) = (e^{a/\delta} - e^{-a/\delta})/2 \Leftrightarrow \dfrac{2\rho gl}{\mu mg} = \dfrac{2l}{\delta} \Leftrightarrow \delta = \dfrac{\mu m}{\rho}$

Vậy $h = \sqrt{\left(\dfrac{\mu m}{\rho}\right)^2 + 4l^2} - \dfrac{\mu m}{\rho}$

VPhO 2019 - Ngày thi thứ nhất (13/01/2019)

Câu II

(Lời giải đề xuất bởi Phạm Đình Hoàn, Vĩnh Phúc)

1.

a. Gọi p, T, h là áp suất, nhiệt độ, độ cao của cột khí trong xi lanh khi pit tông cân bằng

Ta có: $p = p_o + \dfrac{Mg}{\pi R_o^2}$. Quá trình đoạn nhiệt thuận nghịch: $p_o h_o^\gamma = p h^\gamma \Rightarrow h = h_o\left(\dfrac{p_o}{p}\right)^{1/\gamma} = h_o\left(1+\dfrac{Mg}{p_o \pi R_o^2}\right)^{-1/\gamma}$

Và: $p_o^{1-\gamma} T_o^\gamma = p^{1-\gamma} T^\gamma \Rightarrow T = T_o\left(\dfrac{p_o}{p}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_o\left(1+\dfrac{Mg}{p_o \pi R_o^2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$

b. Số mol của chất khí là: $n = \dfrac{p_o \pi R_o^2 h_o}{RT_o}$

Công mà khí trong xi lanh nhận là: $\mathrm{W} = \Delta U = nC_V(T - T_o) = \dfrac{p_o \pi R_o^2 h_o}{\gamma - 1}\left[\left(1+\dfrac{Mg}{p_o \pi R_o^2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right]$

Công do khí quyển thực hiện là: $\mathrm{W}_1 = p_o \pi R_o^2 (h_o - h) = p_o \pi R_o^2 h_o\left[1 - \left(1+\dfrac{Mg}{p_o \pi R_o^2}\right)^{-1/\gamma}\right]$

Công do trọng lực của pit tông thực hiện là: $\mathrm{W}_2 = Mg(h_o - h) = Mgh_o\left[1 - \left(1+\dfrac{Mg}{p_o \pi R_o^2}\right)^{-1/\gamma}\right]$

2.

a. Ở vị trí cân bằng, áp suất khí là: $p_1 = p_o + \dfrac{2Mg}{\pi R_o^2}$

Độ cao cột khí là: $h_1 = h_o\left(1+\dfrac{2Mg}{p_o \pi R_o^2}\right)^{-1/\gamma}$

Chọn trục Ox thẳng đứng hướng lên, gốc O trùng với VTCB của pít tông

Khi pít tông có li độ $x \ll h_1$. Áp suất khí là: $p_x = p_1\left(\dfrac{h_1}{h_1 + x}\right)^\gamma = (p_o + \dfrac{2Mg}{\pi R_o^2})(1+\dfrac{\gamma x}{h_1})^{-1} = (p_o + \dfrac{2Mg}{\pi R_o^2})(1-\dfrac{\gamma x}{h_1})$

Định luật II Niu tơn: $(p_x - p_o)\pi R_o^2 - 2Mg = 2Mx'' \Leftrightarrow 2Mx'' + \dfrac{(p_o \pi R_o^2 + 2Mg)\gamma x}{h_1} = 0$.

Chu kì dao động: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{2Mh_1}{(p_o\pi R_o^2 + 2Mg)\gamma}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{2Mh_o\left(1+\dfrac{2Mg}{p_o\pi R_o^2}\right)^{-1/\gamma}}{(p_o\pi R_o^2 + 2Mg)\gamma}}$

Coi vận tốc của pit tông khi ở vị trí cân bằng của ý 1 bằng 0 thì biên độ dao động của pit tông là:

$$A = h - h_1 = h_o\left[\left(1+\frac{Mg}{p_o\pi R_o^2}\right)^{-1/\gamma} - \left(1+\frac{2Mg}{p_o\pi R_o^2}\right)^{-1/\gamma}\right]$$

b. Chiều cao nhỏ nhất của cột khí: $h_{\min} = h_1 - A = 2h_1 - h = h_o\left[2\left(1+\dfrac{2Mg}{p_o\pi R_o^2}\right)^{-1/\gamma} - \left(1+\dfrac{Mg}{p_o\pi R_o^2}\right)^{-1/\gamma}\right]$

3. Ta có: $\begin{cases} dp_r = \rho_r.\omega^2 r.dr \\ \rho_r = \dfrac{p_r\mu}{RT} \end{cases} \Rightarrow dp_r = \dfrac{p_r\mu\omega^2 r.dr}{RT} \Leftrightarrow \dfrac{dp_r}{p_r} = \dfrac{\mu\omega^2 r.dr}{RT}$ (1)

Tích phân phương trình (1) ta được: $p_r = C.\exp\left(\dfrac{\omega^2\mu r^2}{2RT}\right)$

Khối lượng của khối khí hình vành khăn giới hạn bởi r và $r+dr$ là:

$$dm = \frac{C\mu 2\pi h}{RT}\exp\left(\frac{\omega^2\mu r^2}{2RT}\right).rdr$$

Tích phân phương trình trên ta suy ra khối lượng của khí trong bình là:

$$m = \frac{2C\pi h}{\omega^2}\left\{\exp\left(\frac{\omega^2\mu R_o^2}{2RT}\right) - 1\right\}$$

Mà $m = \dfrac{p_o\pi R_o^2 h_o\mu}{RT_o} \Rightarrow C = \dfrac{p_o\mu h_o R_o^2\omega^2}{2RT_o h\left\{\exp\left(\dfrac{\omega^2\mu R_o^2}{2RT}\right)-1\right\}} = \dfrac{p_o\mu R_o^2\omega^2\left(1+\dfrac{Mg}{p_o\pi R_o^2}\right)^{1/\gamma}}{2RT_o\left\{\exp\left(\dfrac{\omega^2\mu R_o^2}{2RT}\right)-1\right\}}$

Vậy áp suất khí tại thành bình là:

$$p_b = C\exp\left(\frac{\omega^2\mu R_o^2}{2RT}\right) = \frac{p_o\mu R_o^2\omega^2\left(1+\dfrac{Mg}{p_o\pi R_o^2}\right)^{1/\gamma}}{2RT_o\left\{\exp\left(\dfrac{\omega^2\mu R_o^2}{2RT}\right)-1\right\}}\exp\left(\frac{\omega^2\mu R_o^2}{2RT}\right)$$

VPhO 2019 - Ngày thi thứ nhất (13/01/2019)

Câu III

(Lời giải đề xuất bởi Trần Đức Huy)

1.

a) Vì tính đối xứng cầu, mật độ của các hạt chỉ phụ thuộc vào khoảng cách đến tâm và thời gian:

$$n(r,\theta,\varphi,t) = n(r,t)$$

Tại thời điểm ban đầu $t=0$, gọi δN là số hạt điện tích trong một lớp cầu có bán kính từ r_0 đến $r_0+\delta r_0$ $(\delta r_0 \ll r_0)$

$$\delta N = n(r_0,0)4\pi r_0^2\delta r_0 \qquad (1)$$

với $n(r_0,0)=\dfrac{3N}{4\pi R^3}$ là mật độ phân bố hạt lúc ban đầu. Do các hạt không vượt nhau nên số hạt δN luôn nằm trong một lớp cầu có độ dày thay đổi theo thời gian. Tại thời điểm t, số hạt δN sẽ nằm trong lớp cầu bán kính từ r đến $r+\delta r$ $(\delta r \ll r)$, nên ta có

$$\delta N = n(r,t)4\pi r^2\delta r = n(r_0,0)4\pi r_0^2\delta r_0 \qquad (2)$$

với $n(r,t)$ là mật độ phân bố hạt tại vị trí r ở thời điểm t. Ta sẽ xét chuyển động của lớp cầu chứa số lượng hạt điện tích không đổi δN có độ dày δr và mật độ phân bố $n(r,t)$ thay đổi theo thời gian.

Do các hạt không vượt qua nhau nên số hạt điện tích $N(r,t)$ bên trong quả cầu bán kính r ở thời điểm t cũng bằng số hạt $N(r_0,0)$ ở bên trong quả cầu bán kính r_0 ở thời điểm ban đầu $t=0$. Do đó

$$N(r,t) = N(r_0,0) = \frac{Nr_0^3}{R^3} \qquad (3)$$

Áp dụng định luật Gauss-Ostrogradsky ta tính được cường độ điện trường $\vec{E}(r,t)$ tại vị trí r ở thời điểm t

$$\vec{E}(r,t) = -\frac{N(r,t)q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r = -\frac{Nq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{r_0^3}{R^3}\vec{e}_r \qquad (4)$$

Do các hạt điện tích chỉ chuyển động dọc theo phương bán kính nên $\vec{v}=\dot{r}\vec{e}_r$. Do $\delta r \ll r$ nên ta xem tất cả các hạt điện tích hạt trong lớp cầu có bán kính từ r đến $r+\delta r$ sẽ cùng chuyển động với vận tốc $\vec{v}=\dot{r}\vec{e}_r$. Chuyển động của lớp cầu có bán kính từ r đến $r+\delta r$ cũng như các hạt điện tích ở bên trong lớp cầu này được mô tả bởi hàm $r(t)$ để xây dựng phương trình vi phân mô tả chuyển chuyển của lớp cầu ta có các cách sau:

<u>**Cách 1**</u>**:** Phương pháp động lực học

Do δr rất nhỏ nên tất cả các hạt điện tích ở bên trong lớp cầu có bán kính từ r đến $r+\delta r$ cùng bởi tọa độ $r(t)$ và có cùng vận tốc $\vec{v}=\dot{r}\vec{e}_r$. Áp dụng định luật II Newton cho hạt điện tích $-q$ có khối lượng m ở vị trí $\vec{r}(t)=r\vec{e}_r$:

$$m\ddot{r}\vec{e}_r = q\vec{E}(\vec{r},t) \qquad (5)$$

Thay $\vec{E}(\vec{r},t)$ từ (4) vào (5) ta thu được

$$m\ddot{r} = \frac{Nq^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{r_0^3}{R^3} \quad (6)$$

<u>**Cách 2**</u>: Sử dụng định luật bảo toàn năng lượng

Tổng động năng K của các hạt là:

$$K = \frac{1}{2}(m\delta N)v^2 = \frac{1}{2}(m\delta N)\dot{r}^2 \quad (7)$$

Gọi U là thế năng tĩnh điện của các hạt, ta có

$$dU = -(q\delta N)\vec{E}(r,t)d\vec{r} = -(q\delta N)E(r,t)dr \quad (8)$$

Năng lượng của lớp cầu bảo toàn nên ta có

$$\frac{d}{dt}(K+U) = 0 \Rightarrow \frac{dK}{dt} = -\frac{dU}{dt} \quad (9)$$

Thay (8) và (7) vào (9) ta được

$$(m\delta N)\dot{r}\ddot{r} = (q\delta N)E(r,t)\dot{r} \quad (10)$$

Thay $E(r,t)$ từ phương trình (4) vào phương trình (10) và rút gọn ta thu được phương trình vi phân mô tả chuyển động của lớp cầu có bán kính từ r đến $r+\delta r$

$$m\ddot{r} = \frac{Nq^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{r_0^3}{R^3} \quad (11)$$

Thay $\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{dr}\frac{dr}{dt} = \dot{r}\frac{d\dot{r}}{dr} = \frac{d}{dr}\left(\frac{\dot{r}^2}{2}\right)$ vào phương trình (11) rồi lấy tích phân ta thu được phương trình

$$\frac{m\dot{r}^2}{2} = \frac{Nq^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_0^3}{R^3}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right) \quad (12)$$

Suy ra

$$\dot{r} \equiv \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{Nq^2 r_0^2}{2\pi\varepsilon_0 R^3 m}\frac{r-r_0}{r}} \Rightarrow dt = \sqrt{\frac{2\pi\varepsilon_0 R^3 m}{Nq^2 r_0^2}}\sqrt{\frac{r}{r-r_0}}dr \quad (13)$$

Hay

$$\int_0^t dt = \int_{r_0}^{r}\sqrt{\frac{2\pi\varepsilon_0 R^3 m}{Nq^2 r_0^2}}\sqrt{\frac{r}{r-r_0}}dr \quad (14)$$

Sử dụng công thức tích phân $\int\sqrt{\frac{x}{x-a}}dx = \sqrt{x(x-a)} + a\ln\left[\sqrt{x}+\sqrt{x-a}\right] + C$ ta thu được

$$t=\sqrt{\frac{2\pi\varepsilon_0R^3m}{Nq^2r_0^2}}\left[\sqrt{r(r-r_0)}+r_0\ln\frac{\sqrt{r}+\sqrt{r-r_0}}{\sqrt{r_0}}\right] \quad (15)$$

hay

$$t=\sqrt{\frac{2\pi\varepsilon_0R^3m}{Nq^2}}\left[\sqrt{\frac{r}{r_0}\left(\frac{r}{r_0}-1\right)}+\ln\left(\sqrt{\frac{r}{r_0}}+\sqrt{\frac{r}{r_0}-1}\right)\right] \quad (16)$$

Từ phương trình (16) ta có thể tìm được

$$\frac{r}{r_0}=f(t) \quad (17)$$

không phụ thuộc vào r_0. Do đó ta sẽ có

$$r+\delta r=(r_0+\delta r_0)f(t)\Rightarrow \delta r=\delta r_0 f(t) \quad (18)$$

Thay (17) và (18) vào phương trình (2) ta thu được mật độ phân bố hạt tại vị trị r ở thời điểm t

$$n(r,t)=\frac{\delta N}{4\pi r^2\delta r}=\frac{n(r_0,0)4\pi r_0^2\delta r_0}{4\pi r^2\delta r}=\frac{n(r_0,0)}{[f(t)]^3}=\frac{3N}{4\pi[Rf(t)]^3} \quad (19)$$

là hàm số chỉ phụ thuộc vào thời gian mà không phụ thuộc vào vị trí r nên mật độ phân bố hạt là đều.

b) Từ phương trình (16) ta tính được thời gian để điện tích di chuyển từ vị trí $r_0=R$ đến vị trí $r=9R$

$$\tau=\sqrt{\frac{2\pi\varepsilon_0R^3m}{Nq^2}}\left[6\sqrt{2}+\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)\right] \quad (20)$$

2.

a) Tổng điện tích của đám mây là $-Nq$ nên ta có

$$\int_{R_0}^{R}\rho(r)4\pi r^2dr=-Nq \quad (21)$$

Thay $\rho(r)=A/r^\alpha$ vào phương trình (21) ta thu được:

$$4\pi A\int_{R_0}^{R}r^{2-\alpha}dr=-Nq\Leftrightarrow\frac{4\pi A}{3-\alpha}(R^{3-\alpha}-R_0^{3-\alpha})=-Nq$$

Suy ra

$$A=\frac{(\alpha-3)Nq}{4\pi(R^{3-\alpha}-R_0^{3-\alpha})} \quad (22)$$

b) Ta có sự phân bố điện tích trong không gian như sau

$$\rho(r) = \begin{cases} \dfrac{3Nq}{4\pi R_0^3}, & 0 \le r \le R_0 \\ \dfrac{A}{r^\alpha}, & R_0 < r \le R \\ 0, & R < r \end{cases} \tag{23}$$

Do điện tích phân bố đối xứng cầu. Nên sử dụng định luật Gauss-Ostrogradsky với mặt Gauss là mặt cầu bán kính r ta tính được cường độ điện trường tại vị trí cách tâm một khoảng r trong các trường hợp:

- Trường hợp $0 \le r \le R_0$:

$$E(r)4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^r \rho(r)4\pi r^2 dr \quad \Rightarrow E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\int_0^r \frac{3Nq}{R_0^3} r^2 dr = \frac{Nqr}{4\pi\varepsilon_0 R_0^3} \tag{24}$$

- Trường hợp $R_0 \le r \le R$

$$E(r)4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^r \rho(r)4\pi r^2 dr$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left[\int_0^{R_0} \rho(r)4\pi r^2 dr + \int_{R_0}^{R_0} \rho(r)4\pi r^2 dr\right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left[Nq + \int_{R_0 0}^{R_0} \frac{A}{r^\alpha}4\pi r^2 dr\right] \tag{25}$$

Thay $A = \dfrac{(\alpha-3)Nq}{4\pi(R^{3-\alpha} - R_0^{3-\alpha})}$ vào phương trình (25) ta thu được

$$\begin{aligned} E(r) &= \frac{Nq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left[1 + \frac{(\alpha-3)Nq}{4\pi(R^{3-\alpha} - R_0^{3-\alpha})}\int_{R_0 0}^{R_0} 4\pi r^{2-\alpha} dr\right] \\ &= \frac{Nq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left[1 - \frac{r^{3-\alpha} - R_0^{3-\alpha}}{R^{3-\alpha} - R_0^{3-\alpha}}\right] = \frac{Nq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{R^{3-\alpha} - r^{3-\alpha}}{R^{3-\alpha} - R_0^{3-\alpha}} \end{aligned} \tag{26}$$

- Trường hợp $r > R$: Do tổng điện tích bên trong khối cầu bán kính r bằng không nên

$$E(r) = 0 \tag{27}$$

Như vậy

$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{Nqr}{4\pi\varepsilon_0 R_0^3}, & 0 \le r \le R_0 \\ \dfrac{Nq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\dfrac{R^{3-\alpha} - r^{3-\alpha}}{R^{3-\alpha} - R_0^{3-\alpha}}, & R_0 < r \le R \\ 0, & r > R \end{cases} \tag{28}$$

Chọn gốc thế năng ở vô cùng, $V(r = \infty) = 0$. Điện thế tại các vị trí cách tâm đám mây một khoảng r được tính như sau

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} E(r')dr' \tag{29}$$

Từ (28) ta tính được điện thế tại các vị trí

- $r \geq R$:

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r\geq R} E(r')dr' = 0 \tag{30}$$

- $R_0 \leq r \leq R$:

$$\begin{aligned} V(r) &= -\int_{R}^{r} E(r')dr' - \int_{\infty}^{R} E(r')dr' = -\int_{R}^{r} E(r')dr' + V(R) \\ &= -\frac{Nq}{4\pi\varepsilon_0(R^{3-\alpha} - R_0^{3-\alpha})}\int_{R}^{r}\left(\frac{R^{3-\alpha}}{r'^2} - r'^{1-\alpha}\right)dr' \\ &= \frac{Nq}{4\pi\varepsilon_0(R^{3-\alpha} - R_0^{3-\alpha})}\left(\frac{R^{3-\alpha}}{r} + \frac{r^{2-\alpha}}{2-\alpha} - \frac{3-\alpha}{2-\alpha}R^{2-\alpha}\right) \end{aligned} \tag{31}$$

Rút gọn biểu thức này ta thu được

$$V(r) = \frac{Nq}{4\pi\varepsilon_0 r}\frac{(2-\alpha)R^{3-\alpha} + r^{3-\alpha} - (3-\alpha)rR^{2-\alpha}}{(2-\alpha)(R^{3-\alpha} - R_0^{3-\alpha})} \text{ với } R_0 \leq r \leq R \tag{32}$$

- $0 \leq r \leq R_0$

$$\begin{aligned} V(r) &= -\int_{R_0}^{r} E(r')dr' - \int_{\infty}^{R_0} E(r')dr' = -\int_{R_0}^{r} E(r')dr' + V(R_0) \\ &= -\int_{R_0}^{r} \frac{Nqr'}{4\pi\varepsilon_0 R_0^3}dr' + V(R_0) = \frac{Nq(R_0^2 - r^2)}{8\pi\varepsilon_0 R_0^3} + V(R_0) \end{aligned} \tag{33}$$

Thay $V(R_0) = \frac{Nq}{4\pi\varepsilon_0 R_0}\frac{(2-\alpha)R^{3-\alpha} + R_0^{3-\alpha} - (3-\alpha)R_0R^{2-\alpha}}{(2-\alpha)(R^{3-\alpha} - R_0^{3-\alpha})}$ từ (32) vào (33) ta thu được

$$V(r) = \frac{Nq}{4\pi\varepsilon_0 R_0}\left[\frac{R_0^2 - r^2}{2R_0^2} + \frac{(2-\alpha)R^{3-\alpha} + R_0^{3-\alpha} - (3-\alpha)R_0R^{2-\alpha}}{(2-\alpha)(R^{3-\alpha} - R_0^{3-\alpha})}\right] \text{ với } 0 \leq r \leq R_0 \tag{34}$$

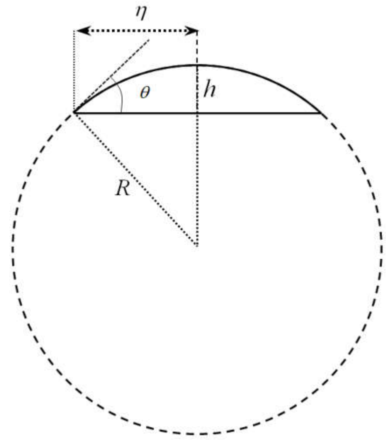
VPhO 2019 - Ngày thi thứ nhất (13/01/2019)

Câu IV

(Lời giải đề xuất bởi Trần Kỳ Vĩ, Sinh viên khoa Vật lí, Đại học Sư phạm Hà Nội)

1. Hệ là một thấu kính mỏng phẳng – lồi nên độ tụ của thấy kính được tính:

$$\Phi = (n-1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{f}, \quad (1)$$



Hình IV.1

Theo giả thiết bài toán, luôn có $R_1 = \infty$ (mặt phẳng của thấu kính), $R_2 = R$ (mặt cầu của thấu kính). Ta biểu diễn các đại lượng độ dài và góc trên hình VI.1.

Do đó ta có:

$$\Phi = \frac{n-1}{R} = \frac{1}{f}, \quad (2)$$

Từ hình vẽ ta có

$$\eta^2 = (2R-d).d \simeq 2Rd \text{ (do } d \text{ bé)}, \quad (3)$$

và

$$R = \frac{\eta}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)} = \frac{\eta}{\sin\theta} \quad (4)$$

Từ (4), (3) tính được: $R = \frac{2h}{\sin^2\theta}$, thế vào (2) suy ra:

$$h = \frac{(n-1)\sin^2\theta}{2} f, \quad (5)$$

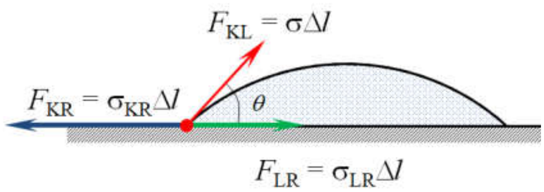
và

$$f = \frac{2h}{(n-1)\sin^2\theta} \quad (6)$$

Khi $U = 0$ thì $\theta = \theta_0,\ h = d,\ f = f_0$ thay vào (5) ta được:

$$d = \frac{(n-1)\sin^2\theta_0}{2} f_0.$$

2. Xét mặt phân cách tranh chấp ba chất rắn, lỏng, khí không phản ứng hóa học với nhau của phần tử môi trường. Đường giới hạn của các chất này sẽ ổn định ứng với cực trị thế năng của năng lượng toàn phần. Khi đó lực tổng hợp tác dụng lên phần tử của đường giới hạn sẽ bị triệt tiêu theo phương mà phần tử đó có thể dịch chuyển (nguyên tắc công ảo)



Hình IV.2

Biểu diễn các lực tại mặt tranh chấp ba môi trường như hình IV.2. Điều kiện cân bằng của đoạn phần tử bé Δl trên đường giới hạn theo phương ngang là:

$$F_{KR} = F_{LR} + F_{KL}\cos\theta \rightarrow \sigma_{KR}\Delta l = \sigma_{LR}\Delta l + \sigma\Delta l\cos\theta. \quad (7)$$

Từ đó ta được phương trình Young cho trường hợp dính ướt này (dính ướt một phần):

$$\cos\theta = \frac{\sigma_{KR} - \sigma_{LR}}{\sigma} \quad \text{với} \quad \left|\frac{\sigma_{KR} - \sigma_{LR}}{\sigma}\right| \le 1. \tag{8}$$

3. Ta có thể tính trực tiếp thể tích chỏm cầu nhờ tích phân. Để không phải dài dòng ta có thể dùng công thức tính thể tích chỏm cầu:

$$\Omega = \pi\frac{h^2}{3}(3R-h) \approx \pi R h^2 = \frac{2\pi h^3}{\sin^2\theta},$$

từ đây suy ra:

$$d = \sqrt[3]{\frac{\Omega\sin^2\theta}{2\pi}},$$

Thế vào (6) ta thu được:

$$f = \frac{1}{(n-1)\sin\theta}\sqrt[3]{\frac{4\Omega}{\pi\sin\theta}}. \tag{9}$$

4. Ta có

$$\cos\theta = \cos\theta_0 + \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2l\sigma}U^2 \tag{*}$$

Khi U biến thiên tăng liên tục thì góc θ giảm liên tục (không qua điểm kỳ dị, do công thức (*) và các số liệu đề bài), do đó theo (9) f tăng liên tục, nhưng dù U có tăng khoảng rộng từ 0 đến 80V thì hệ số $\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2l\sigma}U^2 = 0 \to 0,016$ trong công thức (*) cũng cực kỳ bé, do đó góc θ cũng biến thiên rất bé:

Từ (9), suy ra:

$$f^3\sin^4\theta = \frac{4\Omega}{\pi(n-1)^3}, \tag{10}$$

Lấy vi phân toàn phần 2 vế của (10), từ các giá trị f_0 và θ_0, ta có:

$$\frac{\partial}{\partial f}(f^3\sin^4\theta)\Big|_{f=f_0,\theta=\theta_0}.df + \frac{\partial}{\partial\theta}(f^3\sin^4\theta)\Big|_{f=f_0,\theta=\theta_0} d\theta = 0$$

Từ đó suy được: $3f_0^2\sin^4\theta_0 df + 4f_0^3\sin^3\theta_0\cos\theta_0 d\theta = 0$,Hay

$$df = -\frac{4}{3}f_0\frac{d\theta}{\tan\theta_0}. \tag{11}$$

Từ công thức đề bài lấy vi phân loga Nepe hai vế ta có:

$$\frac{-\sin\theta_0 d\theta}{\cos\theta_0} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon}{2\sigma l\cos\theta_0 + \varepsilon\varepsilon_0 U^2}\delta\left(U^2\right) \to d\theta = -\frac{\cos\theta_0}{\sin\theta_0}\frac{\varepsilon_0\varepsilon}{2\sigma l\cos\theta_0 + \varepsilon\varepsilon_0 U^2}\delta\left(U^2\right),$$

Lại có $\Omega = \pi\frac{h^2}{3}(3R-h) \approx \pi R h^2 = \frac{2\pi h^3}{\sin^2\theta}$, từ đây suy ra:

$$d = \sqrt[3]{\frac{\Omega\sin^2\theta_0}{2\pi}} \to f_0 = \frac{2d}{(n-1)\sin^2\theta_0} = \frac{1}{(n-1)}\sqrt[3]{\frac{4\Omega}{\pi\sin^4\theta_0}},$$

Thế vào (11), và theo (9) ta được: với

$$df = -\frac{4}{3}f_0\frac{d\theta}{\tan\theta_0} = \frac{4}{3(n-1)\tan^2\theta_0}\sqrt[3]{\frac{4\Omega}{\sin^4\theta_0\pi}}\frac{\varepsilon_0\varepsilon}{2\sigma l\cos\theta_0 + \varepsilon\varepsilon_0 U_0^2}\delta\left(U^2\right),$$

Với $U_0 = 0$

$$\rightarrow \Delta f = \frac{2\varepsilon_0\varepsilon}{3(n-1)\sigma l\cos\theta_0\tan^2\theta_0}\sqrt[3]{\frac{4\Omega}{\pi\sin^4\theta_0}}\Delta\left(U^2\right)$$

- Diện tích mặt xung quanh của của mặt ngoài tựa như 1 chỏm cầu được tính là được tính:

$$S = 2\pi R.d = \frac{4\pi}{\sin^2\theta}d^2 = \sqrt[3]{\frac{16\pi\Omega^2}{\sin^2\theta}}.$$

Từ đây ta có: $S_0 = \sqrt[3]{\frac{16\pi\Omega^2}{\sin^2\theta_0}}$.

Và

$$S^3\sin^2\theta = 16\pi\Omega^2 \rightarrow 3S_0^2\sin^2\theta_0 dS + 2S_0^3\sin\theta_0\cos\theta_0 d\theta = 0.$$

$$\rightarrow dS = -\frac{2}{3}\frac{S_0\cos\theta_0}{\sin\theta_0}d\theta = -\frac{2}{3}\frac{\cos\theta_0}{\sin\theta_0}\sqrt[3]{\frac{16\pi\Omega^2}{\sin^2\theta_0}}d\theta.$$

Từ đó ta tính được năng lượng bề mặt nhận được là:

$$dE_\sigma = \sigma dS = -\frac{2\sigma}{3}\sqrt[3]{\frac{16\pi\Omega^2}{\sin^2\theta_0}}\frac{\cos\theta_0}{\sin\theta_0}d\theta = \frac{2\sigma}{3\tan^2\theta_0}\sqrt[3]{\frac{16\pi\Omega^2}{\sin^2\theta_0}}\frac{\varepsilon_0\varepsilon}{2\sigma l\cos\theta_0 + \varepsilon\varepsilon_0 U_0^2}\delta\left(U^2\right).$$

Hay

$$\Delta E_\sigma = \frac{\varepsilon_0\varepsilon}{3l\cos\theta_0\tan^2\theta_0}\sqrt[3]{\frac{16\pi\Omega^2}{\sin^2\theta_0}}\Delta\left(U^2\right).$$

- Với $\Delta\left(U^2\right) = U_{max}^2 - U_0^2 = U^2{}_{max}$, ta có:

$$\Delta f = \frac{2\varepsilon_0\varepsilon}{3(n-1)\sigma l\cos\theta_0\tan^2\theta_0}\sqrt[3]{\frac{4\Omega}{\pi\sin^4\theta_0}}U_{max}^2$$

và

$$\Delta E_\sigma = \frac{\varepsilon_0\varepsilon}{3l\cos\theta_0\tan^2\theta_0}\sqrt[3]{\frac{16\pi\Omega^2}{\sin^2\theta_0}}U_{max}^2$$

❖ ***<u>Nhận xét lời giải:</u>***

1. Do không cho sẵn f_0, θ_0 nên ta không thể tính ra số biểu thức này, không hiểu người cho đề có lý do gì, nhưng nếu muốn tính góc θ_0, ta phải xét cực trị thế thế năng toàn phần lực căng mặt ngoài và trọng lực (lúc này tác dụng điện mất đi), mà đề lại không cho sẵn khối lượng riêng của dầu Silicone AF1600, do đó không thể tính được d*f* thành số.

* Do U lúc đầu bằng $U_0 = 0$ nên không thể lấy vi phân $\delta(U^2) = U_0 dU = 0$, không hiểu lý do gì để đề phải làm như thế này?!!

2. Thực ra nếu bài toán cho khối lượng riêng teflon AF1600, đơn giản hơn có thể dùng phương pháp năng lượng để tính d_0 = h !!!

Trong thực tế $\theta_0 > 90°$ khi vừa mới thả giọt silicone AF 1600 (đây là một chất rắn vô định hình), (khi cho điện thế đầu U = 0) chất AF 1600 là chất không dính ướt một phần, từ đó ta có thể dùng phương pháp cực trị thế năng gồm thế năng bề mặt E_σ, và thế trọng trường, (U = 0 chưa có thế tĩnh điện), khi đấy ta cần tính: thể tích chỏm cầu, vị trí tâm chỏm cầu.

Thể tích chỏm cầu có công thức là: $\Omega = \frac{\pi h^2}{3}(3R-h) = \frac{\pi R^3}{3}(1-\cos\theta)^2(2+\cos\theta)$. (12)

Diện tích chỏm cầu: $S = 2\pi R.h = 2\pi R^2(1-\cos\theta)$.

Năng lượng mặt ngoài của chỏm cầu là: $E_\sigma = \sigma S = 2\pi\sigma R^2(1-\cos\theta)$

- Khối tâm chỏm cầu: Chia quả cầu thành các đới cầu mỏng, thể tích dV (vành màu đen đậm),

$$dV = \pi R^2 \sin^2\theta .Rd\theta = \pi R^3 \sin^2\theta d\theta$$, có tọa độ trên trục z là $z = R\cos\theta$:

Vị trí khối tâm của chỏm cầu (ở đây ta chọn gốc tọa độ ở tâm O của mặt cầu chứa chỏm cầu).

$$z_G = \frac{\int_0^\theta \pi R^4 \sin^2\theta d(\sin\theta)}{\Omega} = \frac{\pi R^4 \sin^3\theta}{3\Omega}.$$

Từ đó tính được khoảng cách từ khối tâm đến đáy chỏm cầu:

$$h_G = z_G - R\cos\theta = \frac{\pi R^4 \sin^3\theta}{3\Omega} - R\cos\theta,$$

Ta chỉ có thể coi gần đúng rằng tại vị trí R = R_0, θ = θ_0, h = d_0, bán kính R tại U = 0 không biến đổi, chỉ có θ biến đổi bé (điều này chỉ là gần đúng, nếu lấy vi phân theo nguyên lý D'Alambert cho cả hai biến R và θ hoặc R và h, thì thật sự phương trình là phức tạp, vượt quá sức và thời gian của một học sinh phổ thông để giải một bài toán sơ cấp trong một kỳ thi HSG)

Khi cân bằng ta có thế năng cực trị với:

$$dU = dE_\sigma + dU_G = \sigma dS + \rho g\Omega dh_G$$
$$= 2\pi\sigma R^2 \sin\theta d\theta + \rho g\pi R^4 \sin^2\theta\cos\theta d\theta + \rho g\Omega R\sin\theta d\theta = 0$$

Suy ra $\sin 2\theta_0 = -\frac{2\Omega}{\pi R^3} - \frac{4\sigma}{\rho g R^2}$, đến đây cũng không thể giải tiếp, vì cực kỳ phức tạp, phương trình ra đến bậc 6, dưới căn thức.

* Nếu ta chọn một phép đơn sơ hơn, do thể tích của giọt silicone rất bé, nên có thể xem khối tâm ở độ cao h_G = h/2 (h là bề dày của giọt silicone – xác định theo cách này là "rất thô sơ")

Do đó ta có thể tính các thế năng đơn giản hơn:

$$U_G = \rho g\Omega\frac{h}{2} \to dU_G = \frac{g\rho\Omega}{2}dh,$$

Từ (12) ta có: $R = \frac{\Omega}{\pi h^2} + \frac{h}{3}$,

$$U_\sigma = \sigma S = \sigma 2\pi Rh = 2\pi\sigma\left(\frac{\Omega}{\pi h^2} + \frac{h}{3}\right)h = \frac{2\sigma\Omega}{h} + \frac{2\pi\sigma h^2}{3} \to dU_\sigma = \left(-\frac{2\sigma\Omega}{h^2} + \frac{4\pi\sigma h}{3}\right)dh,$$

$$dU = dU_\sigma + dU_G = \left(-\frac{2\sigma\Omega}{h^2} + \frac{4\pi\sigma h}{3} + \frac{g\rho\Omega}{2}\right)dh = 0$$

$$8\pi\sigma h^3 + 3g\rho\Omega h^2 - 12\sigma\Omega = 0, \qquad \text{(I.*)}$$

Thế số với khối lượng riêng của AF1600 là ρ = 1.98 g/cm³ = 1980 kg/m³, giải lấy nghiệm dương ta có: h = 0.892 mm, từ đó có R = $\frac{\Omega}{\pi h^2} + \frac{h}{3} = 1.098\text{mm}$ (R > h)

Góc bờ lúc đầu: $\cos\theta_0 = \frac{R-h}{R} \simeq 0.188 \to \theta_0 \simeq 79.2^\circ$.

Thế vào công thức ở ý 1 và 4 ta có:

1. $f_0 = 2,71$ mm, $d_0 = 0.539$ mm,
4. $\Delta f = 14.2$ µm, $\Delta E_\sigma = 183.0$ pJ.

VPhO 2019 - Ngày thi thứ nhất (13/01/2019)

Câu V

(Lời giải đề xuất bởi Trần Đức Huy)

1.

Cường độ chùm tia laze

$$I(y) = I_0\left(1 - \frac{|y|}{2L}\right)$$

2.

a) Ta có:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}_{\text{anh sang vao}}}{dt} - \frac{d\vec{p}_{\text{anh sang ra}}}{dt}$$

Theo thuyết tương đối, động lượng của một photon liên hệ với năng lượng ε_{photon} của nó theo hệ thức:

$$p_{photon} = \frac{\varepsilon_{photon}}{c}$$

Góc lệch: $\theta = \arcsin(n.\sin\alpha) - \alpha$

$* \, 0 \le y_0 \le L$:

+ Với nửa bên phải:

$$F_{z_p} = \int_{y_0}^{y_0+L} \frac{I_0}{c} W(1-\cos\theta)\left(1 - \frac{y}{2L}\right) dy$$

$$= \frac{I_0}{c} W(1-\cos\theta)\left[L - \frac{(y_0+L)^2 - y_0^2}{4L}\right]$$

$$= \frac{I_0}{c} W(1-\cos\theta)\left(\frac{3L}{4} - \frac{y_0}{2}\right)$$

$$F_{y_p} = \int_{y_0}^{y_0+L} \frac{I_0}{c} W.\sin\theta\left(1 - \frac{y}{2L}\right) dy$$

$$= \frac{I_0}{c} W\sin\theta\left(\frac{3L}{4} - \frac{y_0}{2}\right)$$

+ Với nửa bên trái:

$$F_{z_t} = \int_{y_0-L}^{y_0} \frac{I_0}{c} W(1-\cos\theta)\left(1-\frac{|y|}{2L}\right)dy$$

$$= \frac{I_0}{c} W(1-\cos\theta)\left[\int_{y_0-L}^{0}\left(1+\frac{y}{2L}\right)dy + \int_{0}^{y_0}\left(1-\frac{y}{2L}\right)dy\right]$$

$$= \frac{I_0}{c} W(1-\cos\theta)\left\{\left[L-y_0-\frac{(y_0-L)^2}{4L}\right]+\left[y_0-\frac{y_0^{\ 2}}{4L}\right]\right\}$$

$$= \frac{I_0}{c} W(1-\cos\theta)\left(\frac{3L}{4}+\frac{y_0}{2}-\frac{y_0^{\ 2}}{2L}\right)$$

$$F_{y_t} = \int_{y_0-L}^{y_0} \frac{I_0}{c} W(-\sin\theta)\left(1-\frac{|y|}{2L}\right)dy$$

$$= -\frac{I_0}{c} W\sin\theta\left(\frac{3L}{4}+\frac{y_0}{2}-\frac{y_0^{\ 2}}{2L}\right)$$

Vậy, lực $\vec{F} = (F_y, F_z)$ do chùm tia laze tác dụng lên lăng kính:

$$F_z = F_{z_p} + F_{z_t} = \frac{I_0}{c} W(1-\cos\theta)\left(\frac{3L}{2}-\frac{y_0^{\ 2}}{2L}\right)$$

$$F_y = F_{y_p} + F_{y_t} = \frac{I_0}{c} W\sin\theta\left(\frac{y_0^{\ 2}}{2L}-y_0\right)$$

b)

* Do đối xứng gương nên:

$F_z(-y_0) = F_z(y_0)$ và $F_y(-y_0) = -F_y(y_0)$

* $L \le y_0 < 0$:

$$F_z(y_0) = F_z(-y_0 > 0) = \frac{I_0}{c} W(1-\cos\theta)\left[\frac{3L}{2}-\frac{(-y_0)^2}{2L}\right] = \frac{I_0}{c} W(1-\cos\theta)\left(\frac{3L}{2}-\frac{y_0^{\ 2}}{2L}\right)$$

$$F_y(y_0) = -F_y(-y_0 > 0) = -\frac{I_0}{c} W\sin\theta\left[\frac{(-y_0)^2}{2L}-(-y_0)\right] = -\frac{I_0}{c} W\sin\theta\left(\frac{y_0^{\ 2}}{2L}+y_0\right)$$

Tóm lại:

$$F_z\left(y_0\right)=\frac{I_0}{c}W(1-\cos\theta)\left(\frac{3L}{2}-\frac{y_0^{\ 2}}{2L}\right) \text{ và } F_y\left(y_0\right)=\frac{I_0}{c}W\sin\theta\left(\frac{y_0\left|y_0\right|}{2L}-y_0\right)$$

Vì $\left|y_0\right| \ll L$, nên $$F_y(y_0)\approx-\frac{I_0\mathrm{W}\sin\theta}{c}y_0$$

Áp dụng định luật II Newton: $F_y=m\ddot{y}_0$ nên ta thu được

$$\ddot{y}_0+\frac{I_0\mathrm{W}\sin\theta}{mc}y_0=0$$

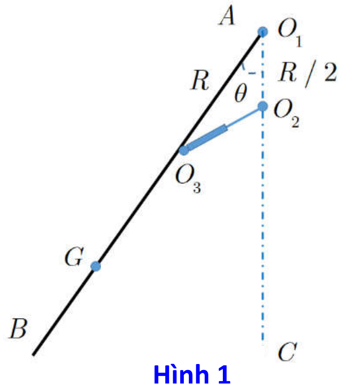
Vậy, chu kỳ dao động nhỏ của lăng kính là: $T=2\pi\sqrt{\frac{mc}{I_0\mathrm{W}\sin\theta}}$

VPhO 2019 - Ngày thi thứ hai (14/01/2019)

Câu I

(Lời giải đề xuất bởi Lê Cao Anh, Đại học Bách Khoa Hà Nội)

1. Áp dụng định lí cosine cho tam giác $O_1O_2O_3$ ta có



Hình 1

$$(O_2O_3)^2 = R^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 - 2R\frac{R}{2}\cos\theta = R^2\left(\frac{5}{4} - \cos\theta\right) \qquad (1)$$

Suy ra: $O_2O_3 = R\sqrt{\frac{5}{4} - \cos\theta}$ (2)

Khi $O_2O_3 < l_0$ thì lực đẩy do thanh O_2O_3 tác dung lên AB là:

$$F = k(l_0 - O_2O_3) = k\left(l_0 - R\sqrt{\frac{5}{4} - \cos\theta}\right) \qquad (3)$$

Chọn gốc thế năng trọng trường tại O_1. Khi cánh cửa AB ở vị trí θ, thế năng của hệ gồm cánh cửa AB và và lò xo được tính như sau:

$$U(\theta) = -2MgR\cos\theta + \frac{1}{2}k\left(O_2O_3 - l_0\right)^2 = -2MgR\cos\theta + \frac{k}{2}\left(R\sqrt{\frac{5}{4} - \cos\theta} - l_0\right)^2 \qquad (4)$$

Ta có

$$\frac{dU}{d\theta} = 2MgR\sin\theta + kR\left(R\sqrt{\frac{5}{4} - \cos\theta} - l_0\right)\frac{\sin\theta}{\sqrt{\frac{5}{4} - \cos\theta}} = \left(4Mg + kR - \frac{kl_o}{\sqrt{\frac{5}{4} - \cos\theta}}\right)\frac{R}{2}\sin\theta \qquad (5)$$

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} = \left(4Mg + kR\right)\frac{R}{2}\cos\theta - \frac{kl_0R}{2}\frac{2\cos\theta\left(5/4 - \cos\theta\right) - \sin^2\theta}{2\left(5/4 - \cos\theta\right)^{3/2}} \qquad (6)$$

Vị trí cân bằng θ_{cb} là cực trị của thế năng $U(\theta)$ hay là nghiệm của phương trình $dU/d\theta = 0$, từ phương trình (5) suy ra các vị trí cân bằng $0 < \theta_{cb} < 90^\circ$ là nghiệm của phương trình

$$4Mg + kR - \frac{kl_o}{\sqrt{\frac{5}{4} - \cos\theta_{cb}}} = 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{5}{4} - \cos\theta_{cb}} = \frac{kl_o}{4Mg + kR} \qquad (7)$$

Hay $$\cos\theta_{cb} = \frac{5}{4} - \left(\frac{kl_o}{4Mg + kR}\right)^2 \qquad (8)$$

Từ (7) ta nhận thấy rằng $l_0 > R\sqrt{\frac{5}{4} - \cos\theta_{cb}}$, nghĩa là tại vị trí cân bằng θ_{cb} lò xo đang bị nén. Thay (7) vào (3) ta thu được lực đẩy của thanh O_2O_3 tác dụng lên AB tại vị trí cân bằng:

$$F = 4Mg\sqrt{\frac{5}{4} - \cos\theta_{cb}} = kl_0\frac{4Mg}{4Mg + kR} \quad (9)$$

Từ (7) ta thay $\dfrac{kl_0}{\sqrt{\frac{5}{4} - \cos\theta_{cb}}} = 4Mg + kR$ vào (6) ta thu được

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} = \left(2MgR + \frac{kR^2}{2}\right)\left[\cos\theta_{cb} - \frac{2\cos\theta_{cb}\left(5/4 - \cos\theta_{cb}\right) - \sin^2\theta_{cb}}{2\left(5/4 - \cos\theta_{cb}\right)}\right] = \frac{\left(4Mg + kR\right)R\sin^2\theta_{cb}}{5 - 4\cos\theta_{cb}} \geq 0 \quad (10)$$

Vì vậy vị trí cân bằng xác định bởi phương trình (8) là một vị trí **cân bằng bền**. Điều kiện để có vị trí cân bằng $0 < \theta < 90°$ là

$$0 < \cos\theta < 1 \Rightarrow 0 < \frac{5}{4} - \left(\frac{kl_o}{4Mg + kR}\right)^2 < 1 \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{kl_o}{4Mg + kR} < \frac{\sqrt{5}}{2} \quad (11)$$

2. Gọi θ_0 là vị trí dừng tức thời. Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng ta có:

$$-Mg2R + \frac{1}{2}k\left(l_0 - \frac{R}{2}\right)^2 = -Mg2R\cos\theta_0 + \frac{1}{2}k\left(l_0 - R\sqrt{\frac{5}{4} - \cos\theta_0}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow Mg2R(1 - \cos\theta_0) = \frac{1}{2}k\left(-\frac{R}{2} + R\sqrt{\frac{5}{4} - \cos\theta_0}\right)\left(2l_0 - \frac{R}{2} - R\sqrt{\frac{5}{4} - \cos\theta_0}\right)$$

$$\Leftrightarrow Mg2R(1 - \cos\theta_0) = \frac{kR}{2}\frac{1 - \cos\theta_0}{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4} - \cos\theta_0}}\left(2l_0 - \frac{R}{2} - R\sqrt{\frac{5}{4} - \cos\theta_0}\right)$$

$$\Leftrightarrow 4Mg\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4} - \cos\theta_0}\right) = 2kl_0 - kR\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4} - \cos\theta_0}\right) \quad (12)$$

Từ đây ta tính được

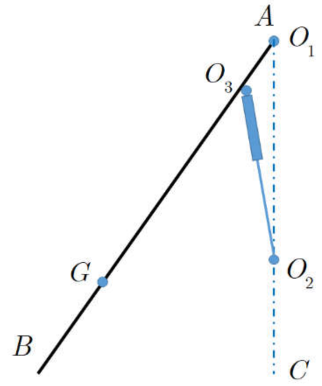
$$\sqrt{5 - 4\cos\theta_0} = \frac{4kl_0}{4Mg + kR} - 1 \quad (13)$$

Điều kiện để tồn tại $0 \leq \theta_0 \leq 180°$: $1 \leq \dfrac{4kl_0}{4Mg + kR} - 1 \leq 3 \Rightarrow \dfrac{1}{2} \leq \dfrac{kl_0}{4Mg + kR} \leq 1$ (14)

Từ (11) thì ta thấy với điều kiện (14) thì hệ tồn tại vị trí cân bằng $0 \leq \theta_{cb} \leq 90°$. Từ phương trình (12), ta tìm được mối liên hệ giữa k và l_0

$$l_0 = \left(\frac{2Mg}{k} + \frac{R}{2}\right)\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4} - \cos\theta_0}\right) \tag{15}$$

3. Trong thiết kế ban đầu như đề bài ra (Hình 1), ta thấy rằng nếu thảo mãn điều kiện (14) thì cánh cửa có thể tự mở ra khi cửa mở chốt, và cửa xe có thể tự sập (ở vị trí $\theta = 0$) nếu ta kéo cánh cửa qua vị trí $\theta_c = \theta_0$ được xác định bởi (13). Có rất nhiều phương án thiế kế để cửa xe có thể tự mở và tự sập nếu kéo cửa qua vị trí θ_c, khi đó các thiết kế phải thỏa mãn điều kiện sao cho khi mở chốt cửa có thể tự đi đến và dừng lại ở một vị trí $\theta_0 \neq 0$, tương tự như điều kiện (14) cho thiết kế ban đầu. Một thiết kế đề xuất như **hình 2.**



Hình 2

4.

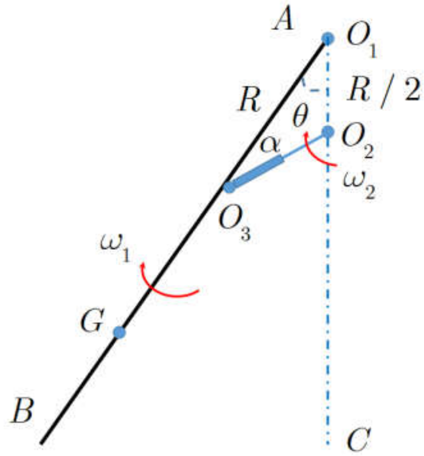
a) Gọi ω_1 và ω_2 lần lượt là vận tốc góc của AB và O_2O_3:

$$\omega_1 = \dot{\theta} \text{ và } \omega_2 = \dot{\alpha} + \dot{\theta} \tag{16}$$

Áp dụng định lý sine cho tam giác $O_1O_2O_3$ ta có:

$$\frac{R/2}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin(\alpha+\theta)} \tag{17}$$

Suy ra: $$2\sin\alpha = \sin(\alpha+\theta) \tag{18}$$



Hình 3

Lấy đạo hàm hai vế của phương trình (18) theo thời gian, và sử dụng định nghĩa (16) ta thu được phương trình:

$$2(\omega_2 - \omega_1)\cos\alpha = \omega_2\cos(\alpha+\theta) \Rightarrow \frac{\omega_1}{\omega_2} = 1 - \frac{\cos(\alpha+\theta)}{2\cos\alpha} = 1 - \frac{1}{2}\left(\cos\theta - \sin\theta\tan\alpha\right) \tag{19}$$

Từ (18) ta có $$2\sin\alpha = \sin\alpha\cos\theta + \cos\alpha\sin\theta \Rightarrow \tan\alpha = \frac{\sin\theta}{2-\cos\theta} \tag{20}$$

Thay (20) vào (19) ta thu được mối liên hệ giữa ω_1 và ω_2 theo θ :

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = 1 - \frac{1}{2}\left(\cos\theta - \sin\theta\frac{\sin\theta}{2-\cos\theta}\right) = \frac{5-4\cos\theta}{2(2-\cos\theta)} \tag{21}$$

b) Gọi γ là gia tốc góc của cửa xe được tính như sau:

$$\gamma = \frac{M}{I} \tag{22}$$

với M là tổng momen của các lực tác dụng lên cửa xe. Khi cửa xe ở vị trí ứng với góc θ thì tổng momen lực M có thể được tính bằng 2 cách sau.

<u>**Cách 1**</u>: Từ biểu thức thế năng $U(\theta)$ ta có

$$M = -\frac{dU}{d\theta} = \left(\frac{2kl_o}{\sqrt{5-4\cos\theta}} - 4Mg - kR\right)\frac{R}{2}\sin\theta \tag{23}$$

biểu thức này thu được từ phương trình (5).

Cách 2: M là tổng momen của trọng lực và lực đàn hồi tác dụng lên cửa xe khi đang ở vị trí ứng với góc :

$$M = FR\sin\alpha - Mg2R\sin\theta = I\gamma \tag{24}$$

trong đó F là lực đàn hồi của lò xo: $$F = k\left(l_0 - R\sqrt{\frac{5}{4} - \cos\theta}\right) \tag{25}$$

Từ (18) ta có $\sin\alpha = \dfrac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$ (26). Thay (20) vào (26) ta thu được:

$$\sin\alpha = \frac{\sin\theta}{\sqrt{5-4\cos\theta}} \tag{27}$$

Thay (25) và (27) vào (24) ta thu được

$$M = \left(\frac{2kl_o}{\sqrt{5-4\cos\theta}} - 4Mg - kR\right)\frac{R}{2}\sin\theta \tag{28}$$

Gia tốc góc của cửa xe khi đi qua vị trí ứng với góc θ

$$\gamma = \frac{M}{I} = \frac{\left[2kl_0 - (kR+4Mg)\sqrt{5-4\cos\theta}\right]R\sin\theta}{2I\sqrt{5-4\cos\theta}} \tag{29}$$

VPhO 2019 - Ngày thi thứ hai (14/01/2019)

Câu II

(Lời giải đề xuất bởi Phạm Đình Hoàn, Giáo viên Vật lí tại Vĩnh Phúc)

1. Khí ở điều kiện thường:

$$p > p_C \Rightarrow \overline{\lambda} = \frac{k_B T}{\sqrt{2}\pi d^2 p} \text{ và } \rho = \frac{\mu p}{N_A k_B T} \Rightarrow \chi = \frac{1}{3}\rho\overline{v}\overline{\lambda}c_V = \frac{\mu\overline{v}c_V}{3\pi\sqrt{2}N_A d^2}.$$

Vậy χ không phụ thuộc áp suất.

Khi áp suất khí thấp(khí kém): $p < p_C$, nếu tiếp tục giảm áp suất thì mật độ khí giảm nhưng $\overline{\lambda}$ không tăng, do vậy χ giảm

Ở áp suất giới hạn $p = p_C$ thì $\overline{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} = r_2 - r_1 \quad \Rightarrow p_C = nk_B T = \frac{k_B T}{\sqrt{2}\pi d^2 (r_2 - r_1)}$

2.

a. Đặt $T_1 = 80 + 273 = 353K$, $T_2 = 20 + 273 = 293K$

Nhiệt độ lớp khí ở chính giữa thành bình là: $T_o = \frac{T_1 + T_2}{2} = 323K$

Ở nhiệt độ $T_o = 323K$ thì $p_C = 2,23Pa$

+) $p_1 = 10mmHg = 1333Pa > p_C \qquad \Rightarrow \chi_1 = \frac{\mu\overline{v}c_V}{3\pi\sqrt{2}N_A d^2} = \frac{\mu c_V}{3\pi\sqrt{2}N_A d^2}\sqrt{\frac{8k_B N_A T_o}{\pi\mu}}$

Vậy mật độ dòng qua lớp khí chính giữa thành bình là:

$$j_1 = \chi_1 . \frac{T_1 - T_2}{r_2 - r_1} = \frac{\mu c_V}{3\pi\sqrt{2}N_A d^2}\sqrt{\frac{8k_B N_A T_o}{\pi\mu}} . \frac{T_1 - T_2}{r_2 - r_1} = 168 \ (J / m^2.s)$$

+) $p_2 = 10^{-4} mmHg = 0,01333Pa$, từ đồ thị $\chi_2 = \frac{p_2}{p_C}\chi_1$

Vật mật độ dòng qua lớp khí chính giữa thành bình là: $j_2 = \frac{p_2}{p_C} j_1 = 1 \ (J / m^2.s)$

b. Tại thời điểm bất kì, giả sử nhiệt độ của nước là $T \Rightarrow$ nhiệt độ lớp khí giữa thành bình là $T_k = \frac{T + T_2}{2}$

Áp suất lớp khí là: $p_k = n_k k_B T_k = \frac{\rho N_A}{\mu} k_B T_k$. Ở nhiệt độ T_k, áp suất $p_C = \frac{k_B T_k}{\sqrt{2}\pi d^2 (r_2 - r_1)}$

Vì $p_k < p_C$ nên hệ số dẫn nhiệt của lớp khí chính giữa là :

$$\chi_k = \frac{p_k}{p_C}\chi = \frac{\sqrt{2}\pi d^2(r_2-r_1)\rho N_A}{\mu}.\frac{\mu c_V}{3\pi\sqrt{2}N_A d^2}\sqrt{\frac{8k_B N_A T_k}{\pi\mu}} = \frac{(r_2-r_1)\rho c_V}{3}\sqrt{\frac{8k_B N_A T_k}{\pi\mu}}$$

Mật độ dòng nhiệt qua lớp khí chính giữa thành bình là:

$$j_k = \chi_k\left(\frac{T-T_2}{r_2-r_1}\right) = \frac{\rho c_V}{3}\sqrt{\frac{4k_B N_A(T+T_2)}{\pi\mu}}.(T-T_2)$$

Gọi t là thời gian mà nhiệt độ nước giảm xuống $40^o C(T_3 = 313K)$

Phương trình cân bằng nhiệt cho quá trình vô cùng nhỏ:

$$-mcdT = j_k 2\pi.\left(\frac{r_1+r_2}{2}\right)h.dt = \frac{\rho c_V\pi(r_1+r_2)h}{3}\sqrt{\frac{4k_B N_A(T+T_2)}{\pi\mu}}.(T-T_2).\mathrm{dt}$$

$$\Rightarrow t = \int dt = \frac{3mc}{\rho c_V\pi(r_1+r_2)h}\sqrt{\frac{\pi\mu}{4k_B N_A}}\int_{T_3}^{T_1}\frac{dT}{(T-T_2).\sqrt{T+T_2}}$$

Ta có: $\displaystyle\int_{T_3}^{T_1}\frac{dT}{(T-T_2).\sqrt{T+T_2}} = \frac{1}{\sqrt{2T_2}}\ln\frac{(\sqrt{T_1+T_2}-\sqrt{2T_2})(\sqrt{T_3+T_2}+\sqrt{2T_2})}{(\sqrt{T_1+T_2}+\sqrt{2T_2})(\sqrt{T_3+T_2}-\sqrt{2T_2})} = \frac{1,066}{\sqrt{2T_2}}$

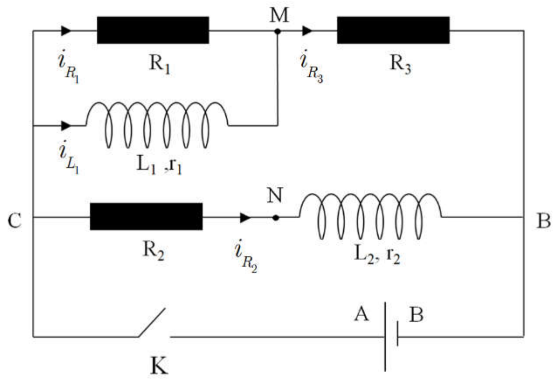
Suy ra: $\displaystyle t = \frac{3mc}{\rho c_V\pi(r_1+r_2)h}\sqrt{\frac{\pi\mu}{4k_B N_A}}.\frac{1,066}{\sqrt{2T_2}}$. Thay số ta thu được: $t = 53869$ (giây) $\approx 14,96$ (giờ)

VPhO 2019 - Ngày thi thứ hai (14/01/2019)

Câu III

(Lời giải đề xuất bởi Trần Đức Huy)

1.



a) Chọn chiều các dòng điện như hình vẽ. Theo định luật Ohm, ta có:

$$E = i_{R_2}R_2 + i_{R_2}r_2 + L_2\frac{di_{R_2}}{dt} \qquad (1)$$

$$E = i_{R_1}R_1 + i_{R_3}R_3 \qquad (2)$$

$$U_{CM} = i_{R_1}R_1 = i_{L_1}r_1 + L_1\frac{di_{L_1}}{dt} \qquad (3)$$

Xét tại nút M, ta có:

$$i_{R_1} + i_{L_1} = i_{R_3} \qquad (4)$$

Khi dòng điện trong mạch ổn định :

$$\frac{di_{L_1}}{dt} = \frac{di_{L_2}}{dt} = 0 \qquad (5)$$

Thay (5) vào (1), (2), và(3) ta được

$$i_{R_2} = \frac{E}{R_2 + r_2} = 0,2A \qquad (6)$$

$$i_{R_3} = \frac{E}{R_3 + \frac{R_1 r_1}{R_1 + r_1}} = 0,2A \qquad (7)$$

$$i_{R_1} = \frac{E - i_{R_3}R_3}{R_1} = 0,067A \qquad (8)$$

b) Ta có :

$$i_{L_1}(t) = A_1 e^{-\left(265+5\sqrt{1729}\right)t} + A_2 e^{-\left(265-5\sqrt{1729}\right)t} \qquad (9)$$

suy ra:

$$\frac{di_{L_1}(t)}{dt} = -\left(265 + 5\sqrt{1729}\right)A_1 e^{-\left(265+5\sqrt{1729}\right)t} - \left(265 - 5\sqrt{1729}\right)A_2 e^{-\left(265-5\sqrt{1729}\right)t} \qquad (10)$$

Ngay trước khi mở khóa K:

$$i_{L_1} = i_{R_3} - i_{R_1} = 0{,}133\text{A} \text{ và } i_{L_2} = i_{R_2} = 0{,}2\text{A} \quad (11)$$

Tại thời điểm $t = 0$, do dòng điện qua các cuộn cảm không thay đổi đột ngột nên ta có

$$i_{L_1}(0) = 0{,}133A \quad (12)$$

$$i_{L_2}(0) = i_{R_2}(0) = 0{,}2\text{A} \quad (13)$$

Tại nút B ta có:

$$i_{R_3} + i_{L_2} = 0 \quad (14)$$

Do đó

$$i_{R_3}(0) = -i_{L_2}(0) = -0{,}2\text{A} \quad (15)$$

Từ (4) ta có:

$$i_{R_1}(0) = i_{R_3}(0) - i_{L_1}(0) = -0{,}333A \quad (16)$$

Từ (3) ta thu được:

$$\frac{di_{L_1}(0)}{dt} = \frac{i_{R_1}(0)R_1 - i_{L_1}(0)r_1}{L_1} = -120\frac{A}{s} \quad (17)$$

Thay (12) và (17) lần lượt vào (9) và (10) ta thu được hệ phương trình đối với A_1 và A_2

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 0.133 \\ -\left(265 + 5\sqrt{1729}\right)A_1 - \left(265 - 5\sqrt{1729}\right)A_2 = -120 \end{cases} \quad (18)$$

Giải hệ (18) ta thu được:

$$A_1 = 0.270\,\text{A} \text{ và } A_2 = -0.137\,\text{A} \quad (19)$$

c) Ta có

$$U_{CM} = i_{L_2}(r_2 + R_2 + R_3) + L_2\frac{di_{L_2}}{dt} = i_{L_1}r_1 + L_1\frac{di_{L_1}}{dt} = i_{R_1}R_1 \quad (20)$$

Sau khi mở khóa K, dòng điện qua các cuộn dây L_1 và L_2 bắt đầu giảm dần, tốc độ giảm dần của các cường độ dòng điện i_{L_1} và i_{L_2} là khác nhau. Do độ tự cảm của cuộn dây thứ hai $L_2 = 10L_1$ lớn hơn nhiều so với độ tự cảm của cuộn dây thứ nhất nên dòng điện chạy qua cuộn dây thứ hai không đổi chiều.

$$i_{L_2}(t) > 0 \quad (21)$$

Ta có

$$i_{L_2}(t) = -i_{L_1}(t) - i_{R_1}(t) = -i_{L_1}(t) - \frac{1}{R_1}\left(i_{L_1}(t)r_1 + L_1\frac{di_{L_1}(t)}{dt}\right) \quad (22)$$

Tại thời điểm $t = t_1$ thì $i_{L_1}(t_1) = 0$, $i_{L_2}(t_1) > 0$. Từ (22) ta suy ra sự biến thiên của $i_{L_1}(t)$ tại thời điểm $t = t_1$

$$\frac{L_1}{R_1}\frac{di_{L_1}(t_1)}{dt} = -i_{L_2}(t_1) < 0 \Rightarrow \frac{di_{L_1}(t_1)}{dt} < 0 \quad (23)$$

Nghĩa là sau thời điểm t_1 thì dòng $i_{L_1}(t)$ tiếp tục giảm, và $i_{L_1}(t < t_1) < 0$ nghĩa là dòng điện qua L_1 là đổi chiều. Từ (22) ta rút ra được

$$\frac{L_1}{R_1}\frac{di_1(t)}{dt} = i_{L_2}(t) + i_{L_1}(t)\frac{r_1 + R_1}{R_1} \quad (24)$$

Sau thời điểm t_1 thì $i_{L_2}(t)$ giảm dần về 0 còn $\left|i_{L_1}(t)\right|$ thì đang tăng dần nên sẽ có một thời điểm $t = t_2$:

$$\left|i_{L_1}(t_2)\right| = \frac{R_1}{R_1 + r_1}i_{L_2}(t_2) \text{ hay } i_{L_1}(t_2) = -\frac{R_1}{R_1 + r_1}i_{L_2}(t_2) < 0 \quad (25)$$

Từ phương trình (24) suy ra $\left.\frac{di_{L_1}(t)}{dt}\right|_{t=t_2} = 0$, nghĩa là dòng i_{L_1} đạt cực trị tại thời điểm $t = t_2$.

2. Để $U_{MN} = 0$ thì mạch phải thỏa mãn điều kiện của mạch cầu cân bằng:

$$Z_{CR_1}Z_{r_2L_2} = R_2R_3 \Rightarrow Z_{r_2L_2} = \frac{R_2R_3}{Z_{CR_1}} \quad (26)$$

Thay $Z_{r_2L_2} = r_2 + j\omega L_2$, và $1/Z_{CR_1} = 1/R_1 + j\omega C$ (với j là đơn vị ảo $j^2 = -1$) vào (26) ta thu được:

$$r_2 + j\omega L_2 = \frac{R_2R_3}{R_1} + j\omega CR_2R_3 \quad (27)$$

Đồng nhất phần thực và phần ảo của hai vế của (27) ta thu được hệ phương trình

$$r_2 = \frac{R_2R_3}{R_1} = 36,67\Omega \text{ và } L_2 = R_2R_3C = 0,44H \quad (28)$$

VPhO 2019 - Ngày thi thứ hai (14/01/2019)

Câu IV

(Lời giải đề xuất bởi Trần Kỳ Vĩ, Sinh viên khoa Vật lí, Đại học Sư Phạm Hà Nội)

1.

a) Theo đề bài ta nhận thấy thứ nguyên của năng lượng được tính như sau:

$$\left[E_n\right]=\left[-\frac{1}{32\pi^2n^2}\right]\left[F(\varepsilon_0,m_e.e,\hbar)\right]=M.L^2.T^{-2}.$$

Do $-\dfrac{1}{32\pi^2n^2}$ có thứ nguyên bằng 0 nên

$$\left[F(\varepsilon_0,m_e.e,\hbar)\right]=M.L^2.T^{-2} \qquad (1)$$

Do hàm $F(\varepsilon_0,m_e.e,\hbar)$ được xem như một tích và (hoặc) thương của hằng số điện ε_0, khối lượng m_e của electron và hằng số Planck rút gọn $\hbar$, do đó theo phương pháp thứ nguyên ta có thể đặt:

$$F(\varepsilon_0,m_e.e,\hbar)=\varepsilon_0^\alpha m_e^\beta e^\gamma \hbar^\delta,$$

với $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ là các số nguyên không thứ nguyên. Do đó,

$$\left[F(\varepsilon_0,m_e.e,\hbar)\right]=\left[\varepsilon_0^\alpha\right]\left[m_e^\beta\right]\left[e^\gamma\right]\left[\hbar^\delta\right]==\left(M^{-1}L^{-3}T^4I^2\right)^\alpha.(M)^\beta(T.I)^\gamma\left(M.L^2.T^{-1}\right)^\delta$$

hay

$$\left[F(\varepsilon_0,m_e.e,\hbar)\right]=M^{-\alpha+\beta+\delta}L^{-3\alpha+2\delta}T^{4\alpha+\gamma-\delta}I^{2\alpha+\gamma}, \qquad (2)$$

Từ (1) và (2), theo phương pháp đồng nhất thức ta có hệ:

$$\begin{cases}-\alpha+\beta+\delta=1\\-3\alpha+2\delta=2\\4\alpha+\gamma-\delta=-2\\2\alpha+\gamma=0\end{cases} \qquad (*)$$

Giải hệ (*) ta được $\alpha=-2,\beta=1,\gamma=4,\delta=-2$, từ đây ta nhận được:

$$F(\varepsilon_0,m_e.e,\hbar)=\frac{m_e e^4}{\varepsilon_0^2\hbar^2} \qquad (3)$$

b) Từ (3) và theo đề bài ta thu được biểu thức năng lượng ở trạng thái kích thích n:

$$E_n=-\frac{m_e e^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2n^2}. \qquad (4)$$

Theo tiên đề 3 của Bohr – Sommerfeld, khi hydrogen chuyển từ trạng thái E_n sang trạng thái cơ bản E_1 nó phát ra một photon có bước sóng λ_n được xác định:

$$\frac{2\pi\hbar c}{\lambda_n} = E_n - E_1 = -\frac{m_e e^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2 n^2} - \left(-\frac{m_e e^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2}\right), \qquad \rightarrow \frac{1}{\lambda_n} = \frac{m_e e^4}{64\pi^3\varepsilon_0^2\hbar^3 c}\left(1-\frac{1}{n^2}\right),$$

Hay $\lambda_n = \dfrac{n^2}{n^2-1}\dfrac{64\pi^3\varepsilon_0^2\hbar^3 c}{m_e e^4}$.

2.

a) Trong hệ qui chiếu (HQC) gắn với nguyên tử hydro khi nó đứng yên photon phát ra có tần số $f_n = \dfrac{c}{\lambda_n}$, khi người quan sát (NQS) thấy HQC hydro chuyển động nhiệt với vận tốc $\vec{v}$ thì NQS thu được tần số f thỏa biến đổi Lorentz cho xung – năng lượng:

$$2\pi\hbar f = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(2\pi\hbar f_n + \frac{2\pi\hbar f_n}{c}\vec{v}\vec{n}\right) \rightarrow f = f_n \frac{1+\frac{\vec{v}\vec{n}}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \simeq f_n\left(1+\frac{\vec{v}\vec{n}}{c}\right),$$

(do trong chuyển động nhiệt $v \ll c$), với $\vec{n} = \dfrac{\vec{k}}{k}$ là vector đơn vị theo phương truyền sóng, ta thấy f lớn nhất khi $\vec{v}$ cùng chiều $\vec{n}$ và nhỏ nhất khi $\vec{v}$ ngược chiều $\vec{n}$, do đó độ lệch của tần số đo được trên máy thu là:

$$\Delta f = \left|f_+ - f_-\right| = \left|f_n\left(1+\frac{v}{c}\right) - f_n\left(1-\frac{v}{c}\right)\right| = f_n\frac{2v}{c},$$

Ta có $\lambda = \dfrac{c}{f}$ suy ra $\dfrac{d\lambda}{\lambda} = -\dfrac{df}{f}$. Do đó

$$\Delta\lambda_n^D = \lambda_n\frac{\Delta f}{f_n} = \frac{c}{f_n^2}\Delta f = \frac{2}{f_n}v = \frac{2v}{c}\lambda_n.$$

b) Từ hệ thức liên hệ bất định ta có:

$$\left(\Delta E_n\right)_{\min} = \frac{\hbar}{\tau}, \text{ với } n > 1 \qquad (5)$$

Còn ở trạng thái cơ bản thời gian sống khá lâu nên[1] $\Delta E_1 \ll \Delta E_n$:

Khi nguyên tử chuyển từ trạng thái thứ $n > 1$ về trạng thái cơ bản thì phát ra photon có năng lượng ε được xác định:

[1] *Bồi dưỡng học sinh giỏi Vật lí - Vật lý hiện đại*, Vũ Thanh Khiết, NXBGD 2010

$$\varepsilon = E_n - E_1 = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda_n}, \tag{6}$$

Tương tự như phần (a) ta cũng có: $\dfrac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} = \dfrac{\Delta\lambda_n^H}{\lambda_n}$ (7)

Do $\Delta E_1 \ll \Delta E_n$ nên từ (6) ta có : $\Delta\varepsilon = \Delta E_n + \Delta E_1 \approx \Delta E_n$, (8)

Thay (7) và (8) vào (6) ta được:

$$\Delta\lambda_n^H = \frac{\lambda_n^2 \Delta E_n}{2\pi\hbar c} \tag{9}$$

Thay $\left(\Delta E_n\right)_{\min} = \dfrac{\hbar}{\tau}$ từ (5) vào (9) ta thu được:

$$\left(\Delta\lambda_n^H\right)_{\min} = \frac{\lambda_n^2 \left(\Delta E_n\right)_{\min}}{2\pi\hbar c} = \frac{\lambda_n^2}{2\pi c\tau}$$

c) Gọi khối lượng của nguyên tử hydro là m_0, năng lượng khi hydro không chuyển động là $E_0 = m_0 c^2$, và động lượng của nguyên tử hydro sau khi phát ra photon là $\vec{p}$. Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng ta có:

$$E_0 + E_n = \sqrt{(pc)^2 + E_0^2} + E_1 + \varepsilon', \tag{10}$$

trong đó $\varepsilon' = \dfrac{hc}{\lambda}$ là năng lượng của photon được phát ra khi nguyên tử chuyển động. Theo thuyết tương đối thì động lượng p' của photon liên hệ với năng lượng ε' của nó theo hệ thức $p' = \varepsilon'/c$. Hệ nguyên tử và photon là hệ kín nên động lượng của hệ bảo toàn: $\vec{p}' + \vec{p} = \vec{0}$. Do đó ta có:

$$|p| = |p'| = \frac{\varepsilon'}{c}, \tag{11}$$

Gọi ε và λ_n là bước sóng của photon do nguyên tử đứng yên phát ra khi nó chuyển từ trạng thái thứ n về trạng thái cơ bản, ta có:

$$\varepsilon = E_n - E_1 = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda_n}, \tag{12}$$

Đặt $\Delta\varepsilon = \varepsilon' - \varepsilon$, từ (10), (11), và (12) ta có: $(E_0 - \Delta\varepsilon)^2 = (\varepsilon + \Delta\varepsilon)^2 + E_0^2$. Đơn giản biểu thức này và sử dụng biểu thức (12) ta thu được:

$$\Delta\varepsilon = -\frac{\varepsilon^2}{2(\varepsilon + E_0)} \simeq -\frac{\varepsilon^2}{2E_0} = -\frac{4\pi^2\hbar^2}{2m_0\lambda_n^2} \tag{13}$$

Biểu thức này thu được ta lấy gần đúng bỏ qua ε vì $\varepsilon \ll E_0$. (Thật vậy, ta có $E_0 = m_0 c^2 = 5{,}12.10^5$ eV còn $\varepsilon_{\max} = E_{n=\infty} - E_1 = \dfrac{m_e e^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2} = 13{,}6$ eV). Tương tự (6) ta có:

$$\left|\Delta\varepsilon\right| = \Delta E_n = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda_n^2}\Delta\lambda_n^R, \tag{14}$$

Thay (14) vào (13) ta thu được: $\Delta\lambda_n^R = \dfrac{\pi\hbar}{m_0 c} = \dfrac{h}{2m_0 c}$.

VPhO 2019 - Ngày thi thứ hai (14/01/2019)

Câu V

(Lời giải đề xuất bởi Physicium, CLB Vật lí xPhO)

1.

a. Giải thích nguyên tắc hoạt động của biến tử cổng từ

Khi đặt biến tử vào trong một từ trường đều có cường độ từ trường H_x có chiều dọc theo trục của lõi biến tử cổng từ (gọ là trục x), khi đó bên trong lõi sắt xuất hiện từ trường phụ thuộc vào cường độ từ trường H_x và độ từ thẩm μ của lõi

$$B_x = \mu_0 \mu H_x \qquad (1)$$

và có chiều dọc theo trục của biến tử cổng từ.

Khi cho dòng điện chạy qua cuộn điều chế làm cho bên trong lõi từ xuất hiện thêm một từ trường H_θ vuông góc H_x. Từ trường này có thể thay đổi bằng cách thay đổi dòng điện chạy qua cuộn điều chế.

Vì vậy khi điều chỉnh dòng điện qua cuộn điều chế sẽ làm thay đổi từ trường tổng bên trong lõi $\left(H = \sqrt{H_x^2 + H_\theta^2}\right)$. Do độ từ thẩm μ của phần lõi phụ thuộc vào cường độ từ trường H nên có thể được thay đổi bằng cách thay đổi dòng điện qua cuộn điều chế.

Do cách bố trí nên từ thông của B_θ qua cuộn dây tín hiệu bằng không. Vì vậy tổng từ thông qua cuộn dây tín hiệu được tính $\Phi = NSB_x = NS\mu_0\mu H_x$ (với N số vòng dây cuộn tín hiệu, và S tiết diện của một vòng dây trên cuộn tín hiệu). Khi dòng điện chạy quan cuộn điều chế biến thiên theo thời gian làm cho độ từ thẩm của lõi cũng biến thiên và từ thông qua cuộn dây tín hiệu biến thiên theo thời gian. Vì vậy hai đầu cuộn tín hiệu sẽ xuất hiện xuất điện động cảm ứng với biên độ tỉ lệ thuận với cường độ từ trường H_x.

b. Thành lập công thức tính E_0

Khi cho dòng điện biến thiên chạy qua cuộn điều chế, thì xuất hiện xuất điện động cảm ứng xuất hiện ở hai đầu của cuộn tín hiệu được tính như sau:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -NS\mu_0 H_x \frac{d\mu}{dt} \qquad (2)$$

Khi có dòng điện biến thiên điều hòa với tần số ω chạy qua cuộn điều chế, sẽ tạo từ trường H_θ (vuông gốc với H_x) biến thiên điều hòa $H_\theta(t) = H_0 \sin\omega t$. Từ trường tổng hợp bên trong lõi $H = \sqrt{H_x^2 + H_\theta^2} = H(H_\theta^2)$. Từ thẩm μ của lõi phụ thuộc vào cường độ từ trường $H(H_\theta^2)$ có thể được khai triển:

$$\mu(H_\theta^2) = \mu(0) + \left(\frac{d\mu}{d(H_\theta^2)}\right)_{H_\theta=0} H_\theta^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\mu}{d(H_\theta^2)^2}\right)_{H_\theta=0} H_\theta^4 + \frac{1}{6}\left(\frac{d^3\mu}{d(H_\theta^2)^3}\right)_{H_\theta=0} H_\theta^6 + \cdots \qquad (3)$$

Thay $H_\theta = H_0 \sin\omega t$ vào (3) độ từ thẩm của lõi phụ thuộc theo thời gian có thể được viết.

$$\mu(t) = \mu_a + \mu_2 \cos(2\omega t + \varphi_2) + \mu_4 \cos(4\omega t + \varphi_4) + \mu_6 \cos(6\omega t + \varphi_6) + \cdots \quad (4)$$

Thay (4) vào (2) ta thu được tín hiệu hai đầu cuộn tín hiệu là tổng hợp của các sóng hài bậc $2n$

$$\mathcal{E}(t) = E_0^{(2)} \cos(2\omega t + \phi_2) + E_0^{(4)} \cos(4\omega t + \phi_4) + E_0^{(6)} \cos(6\omega t + \phi_6) + \cdots \quad (5)$$

Với $E_0^{(2n)}$ là biên độ của sóng hài bậc $2n$ liên hệ với cường độ từ trường ngoài H_x:

$$E_0^{(2n)} = 2n\omega NS\mu_0\mu_b H_x \quad (6)$$

với k là độ nhạy của biến tử cổng từ. Sử dụng thiết bị khuếch đại lock-in có thể đo được các biên độ các sóng hài $E_0^{(2n)}$.

Trong phầnt thực hành dưới đây ta sẽ đo biên độ của sóng hài bậc hai $E_0^{(2)} = 2\omega NS\mu_0\mu_b H_x = kH_x$.

2.

a. Bố trí thí nghiệm

- Sử dụng la bàn để xác định chiều từ trường của Trái Đất. Đặt cuộn Hem-hôn sao cho từ tường do cuộn Hem-hôn có cùng chiều với từ trường của Trái Đất. Để làm được điều này, ta làm như sau: đặt la bàn vào phía bên trong cuộn Hem-hôn, xoay cuộn Hem-hôn đến vị trí kim la bàn không xoay khi mà tăng từ từ cường độ dòng điện qua cuộn Hem-hôn từ 0 A . Sau đó Cố định cuộn Hem-hôn.
- Nối cuộn Hem-hôn trực tiếp với nguồn điện một chiều, biến trở và Ampe kế.
- Đặt biến tử cổng từ vào trong cuộn Hem-hôn, sử dụng la bàn và dây đo để đặt biến tử dọc theo từ trường của Trái Đất và từ trường của cuộn Hem-hôn: Luồn sợi dây qua cuộn Hem-Hon và kéo căng sợi dây sao cho sợi dây song song với kim la bàn. Đặt biến tử dọc theo sợi dây. Cố định biến tử.
- Nối hai đầu cuộn điều chế với máy phát âm tần.
- Nối hai đầu cuộn tín hiệu với máy khuếch đại lock-in.

b. Thu thập vào xử lý số liệu thực hành

Thu thập số liệu

- Bước 1: Máy phát âm tần đặt ở chế độ phát ra điện áp xoay chiều hình sin với tần số f_0 .
- Bước 2: Đặt tần số trên máy khuếch đại lock-in bằng $2f_0$.
- Bước 3: Điều chỉnh biến trở đến một giá trị xác định. Ghi lại số chỉ của am-pe kế I và giá trị biên độ của sóng hài bậc hai E hiển thị trên máy khuếch đại lock-in.
- Lặp lại bước 3 và ghi vào bảng sau:

Lần đo n	I_n	E_n
1		
2		
3		

Xử lý số liệu

Biên độ sóng hài bậc hai của tín hiệu từ cuộn tín hiệu liên hệ với cường độ từ trường như sau

$$E = kH = k(\alpha I + B_0 / \mu_0) = k\alpha I + kB_0 / \mu_0 \tag{7}$$

trong đó H là cường độ từ trường tổng hợp của từ trường do cuộn Hem-hôn αI và cường độ từ trường của Trái Đất B_0 / μ_0 , và k là độ nhạy của biến tử cổng từ.

Đặt:

$$a = k\alpha\,, \qquad b = kB_0 / \mu_0 \tag{8}$$

Khi đó phương trình (7) trở thành:

$$E = aI + b \tag{9}$$

Các giá trị a và b được xác định từ số liệu thực nghiệm.

<u>**Cách 1**</u>: Xác định a và b bằng phương pháp bình phương cực tiểu

- Từ bảng số liệu trên ta tính các giá trị:

$$\sum_{n=1}^{N} I_n\,,\quad \sum_{n=1}^{N} E_n\,,\quad \sum_{n=1}^{N} I_n^2\,,\quad \sum_{n=1}^{N} I_n E_n \text{ và } \Gamma = N\sum_{n=1}^{N} x_n^2 - \left(\sum_{n=1}^{N} x_n\right)^2$$

  trong đó N là tổng số lần đo.
- Giá trị của $\overline{a}$ và $\overline{b}$ được tính như sau:

$$a = \frac{1}{\Gamma}\left(N\sum_{n=1}^{N} I_n E_n - N\sum_{n=1}^{N} I_n \sum_{n=1}^{N} E_n\right)$$

$$b = \frac{1}{\Gamma}\left(\sum_{n=1}^{N} I_n^2 \sum_{n=1}^{N} E_n - \sum_{n=1}^{N} I_n \sum_{n=1}^{N} I_n E_n\right)$$

- Các sai số Δa và Δb được tính

$$\Delta a = \sigma_E \sqrt{\frac{N}{\Gamma}} \text{ và } \Delta b = \sigma_E \sqrt{\frac{1}{\Gamma}\sum_{n=1}^{N} I_n^2}\,, \text{ trong đó } \sigma_E = \sqrt{\frac{1}{N-2}\sum_{n=1}^{N}(E_n - aI_n - b)^2}$$

<u>**Cách 2**</u>: Xác định a và b bằng phương pháp đồ thị

- Từ bảng số liệu biểu diễn các điểm (I_n, E_n) trên hệ trục tọa độ
- Vẽ hai đường thẳng bao các điểm thực nghiệm (đặt tên là $E = a_1 I + b_1$ và $E = a_2 I + b_2$)
- Từ hình vẽ xác định các hệ số góc a_1, a_2 và tung độ b_1, b_2 của giao điểm với trục tung của hai đường thẳng trên.
- Giá trị a và b được xác định

$$\overline{a} = \frac{a_1 + a_2}{2} \text{ và } \overline{b} = \frac{b_1 + b_2}{2}$$

- Các sai số Δa và Δb

$$\Delta a = \frac{\left|a_1 - \overline{a}\right| + \left|a_2 - \overline{a}\right|}{2} \quad \text{và} \quad \Delta b = \frac{\left|b_1 - \overline{b}\right| + \left|b_2 - \overline{b}\right|}{2}$$

Tính độ nhạy của biến tử cổng từ

Từ công thức $a = k\alpha$, độ nhạy k của biến tử cổng từ được xác định như sau:

$$k = \overline{k} \pm \Delta k = \frac{\overline{a}}{\alpha} \pm \frac{\Delta a}{\alpha}$$

Ngoài ra ta cũng có thể xác định được từ trường của Trái Đất B_0:

$$B_0 = \frac{\mu_0 b}{k} = \alpha \mu_0 \frac{b}{a}$$

VPhO 39 (Năm học 2019/2020) – Ngày thi thứ nhất (27.12.2019)

Câu I

(*Lời giải đề xuất bởi Ngô Vĩnh Khang*)

Kiến thức cơ bản

Trong các bài toán vật rắn, kiến thức cơ bản mà chúng ta luôn cần phải nhớ đó là phương trình phân bố vận tốc của các điểm trên vật rắn:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \overrightarrow{\omega_{AB}} \times \overrightarrow{AB} = \vec{v}_A + \overrightarrow{\omega_{AB}} \times (\vec{r}_B - \vec{r}_A)$$

Đạo hàm hai vế của phương trình này theo thời gian, ta có:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\gamma} \times (\vec{r}_B - \vec{r}_A) + \overrightarrow{\omega_{AB}} \times (\vec{v}_B - \vec{v}_A) = \vec{a}_A + \vec{\gamma} \times \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\omega_{AB}} \times \left(\overrightarrow{\omega_{AB}} \times \overrightarrow{AB}\right)$$

Từ công thức nhân ba vector, ta có: $\overrightarrow{\omega_{AB}} \times \left(\overrightarrow{\omega_{AB}} \times \overrightarrow{AB}\right) = \left(\overrightarrow{\omega_{AB}} \cdot \overrightarrow{AB}\right) \overrightarrow{\omega_{AB}} - \left(\overrightarrow{\omega_{AB}} \cdot \overrightarrow{\omega_{AB}}\right) \overrightarrow{AB}$

Đối với vật rắn chuyển động song phẳng và đối với hai điểm đang xét A và B ở trong cùng mặt phẳng song song với mặt phẳng cơ sở thì chúng ta có $\overrightarrow{\omega_{AB}} \perp \overrightarrow{AB}$ và vì thế nên $\overrightarrow{\omega_{AB}} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

Tổng hợp tất cả những điều trên, thì chúng ta có:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \overrightarrow{\gamma_{AB}} \times \overrightarrow{AB} - {\omega_{AB}}^2 \overrightarrow{AB}$$

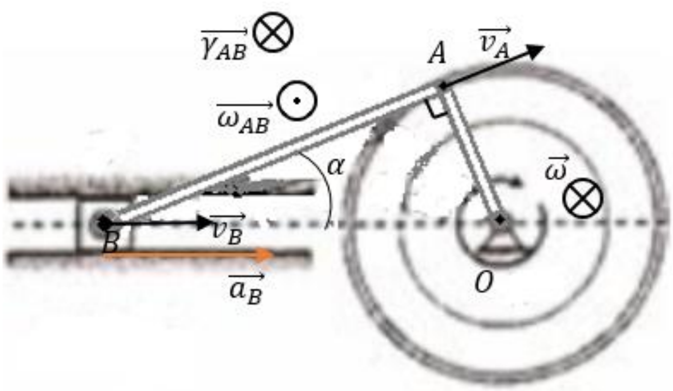
Từ các phương trình phân bố vận tốc và phân bố gia tốc, chúng ta sẽ giải được các bài toán động học của vật rắn. Đặc biệt, khi chiếu phương trình phân bố vận tốc lên phương song song với $\overrightarrow{AB}$ chúng ta có:

$$\frac{\vec{v}_B \cdot \overrightarrow{AB}}{AB} = \frac{\vec{v}_A \cdot \overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\left(\overrightarrow{\omega_{AB}} \times \overrightarrow{AB}\right) \cdot \overrightarrow{AB}}{AB} \Rightarrow \frac{\vec{v}_B \cdot \overrightarrow{AB}}{AB} = \frac{\vec{v}_A \cdot \overrightarrow{AB}}{AB}$$

Phương trình này có nghĩa là vận tốc của hai điểm A và B khi chiếu lên phương song song với $\overrightarrow{AB}$ thì bằng nhau. Đây là một kiến thức phổ biến được áp dụng nhiều trong các bài toán vật rắn.

Nội dung lời giải

1.



Hình 1: Khi $\widehat{OAB} = \frac{\pi}{2}$.

a) Vận tốc của hai điểm A và B khi chiếu lên phương song song với thanh (cũng là phương song song với $\overrightarrow{AB}$) bằng nhau, nên ta có:

$$v_B \cos\alpha = v_A$$

Từ đó, chúng ta dễ dàng tìm được:

$$\boxed{v_B = \frac{v_A}{\cos\alpha} = \omega r \frac{\sqrt{r^2 + l^2}}{l} = 0.53 \text{ m/s}}$$

b) Chiếu phương trình phân bố vận tốc lên phương vuông góc với thanh, ta có:

$$v_B \sin\alpha = 0 + \omega_{AB} l$$

Từ đó, chúng ta dễ dàng tìm được:

$$\boxed{\omega_{AB} = \frac{v_B}{l}\sin\alpha = \frac{v_A}{l}\tan\alpha = \omega\frac{r^2}{l^2} = 0.56 \text{ rad/s}}$$

c) Để tìm gia tốc của đầu B và gia tốc góc của thanh AB thì chúng ta sẽ dựa vào phương trình phân bố gia tốc của vật rắn đã nêu ở trên. Chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng chúng ta đang có hai ẩn cần tìm và phương trình phân bố gia tốc có thể được chiếu lên hai phương vuông góc với nhau. Như vậy, ta có thể dễ dàng đoán được đó chính là hai phương trình giúp tìm ra hai ẩn cần tìm. Việc cần làm đó là chọn hai phương chiếu làm sao để chúng ta có thể thu được kết quả một cách nhanh chóng và thuận tiện nhất.

Vì điểm A chuyển động tròn đều quanh tâm O nên nó có gia tốc hướng tâm $a_A = \omega^2 r$ có phương và chiều như hình vẽ. Ngoài ra, vì điểm B chỉ chuyển động theo phương ngang nên gia tốc $\vec{a}_B$ cũng có phương ngang. Chúng ta thấy $\overrightarrow{\gamma_{AB}} \times \overrightarrow{AB}$ vuông góc với $\overrightarrow{AB}$ nên nếu chiếu phương trình lên phương song song với $\overrightarrow{AB}$ thì chúng ta khử được một ẩn chưa biết là $\overrightarrow{\gamma_{AB}}$. Thực hiện phép chiếu này, ta có:

$$-a_B \cos\alpha = -\omega_{AB}^2 l$$

$$\boxed{a_B = \frac{\omega_{AB}^2 l}{\cos\alpha} = \omega^2\frac{r^4}{l^4} = 0.098 \text{ m/s}^2}$$

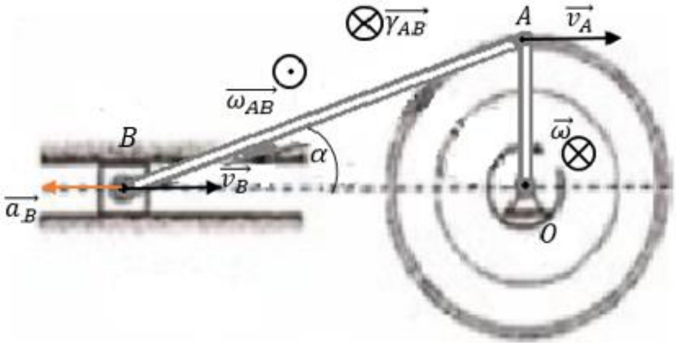
Chiếu phương trình phân bố gia tốc lên phương vuông góc với thanh AB, ta có:

$$a_B \sin\alpha = \omega^2 r - \gamma_{AB} l$$

Từ đó chúng ta dễ dàng tìm được

$$\boxed{\gamma_{AB} = \omega^2\left(\frac{r}{l} - \frac{r^4}{l^4}\right) = 8.02 \text{ rad/s}^2}$$

2. Chúng ta dễ dàng nhận thấy hai ý a và b giống hệt như ở phần 1, nên chúng ta chỉ đơn giản là lặp lại các bước đã làm ở phần 1.



Hình 2: Khi $\widehat{BOA} = \frac{\pi}{2}$.

a) Vận tốc của hai điểm A và B khi chiếu lên phương song song với thanh (cũng là phương song song với $\overrightarrow{AB}$) bằng nhau, nên ta có:

$$v_B \cos\alpha = v_A \cos\alpha$$

Từ đó, chúng ta dễ dàng tìm được:

$$v_B = v_A = \omega r$$

Chiếu phương trình phân bố vận tốc lên phương vuông góc với thanh $\overrightarrow{AB}$, ta thu được:

$$v_B \sin\alpha = v_A \sin\alpha + \omega_{AB} l \Rightarrow \omega_{AB} = \frac{v_B - v_A}{l}\sin\alpha = 0$$

Chiếu phương trình phân bố gia tốc lên phương song song với thanh AB, ta có:

$$a_B \cos\alpha = a_A \sin\alpha + 0$$

$$\boxed{a_B = a_A \tan\alpha = \frac{\omega^2 r^2}{\sqrt{l^2 - r^2}}}$$

b) Chiếu phương trình phân bố gia tốc lên phương vuông góc với thanh AB, ta có:

$$a_B \sin\alpha = -a_A \cos\alpha + \gamma_{AB} l \Rightarrow \gamma_{AB} = \frac{a_A}{l}(\tan\alpha \sin\alpha + \cos\alpha) = \frac{a_A}{l\cos\alpha}$$

Hay

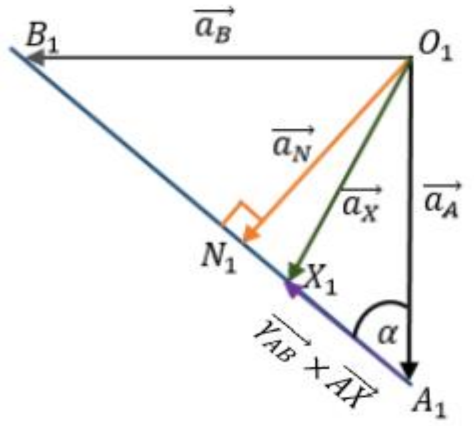
$$\boxed{\gamma_{AB} = \frac{\omega^2 r}{\sqrt{l^2 - r^2}}}$$

c) Trước hết, ta sẽ tìm gia tốc của một điểm X bất kì trên thanh AB. Phương trình phân bố gia tốc của điểm X này là

$$\overrightarrow{a_X} = \vec{a}_A + \overrightarrow{\gamma_{AB}} \times \overrightarrow{AX} - {\omega_{AB}}^2 \overrightarrow{AX} = \overrightarrow{a_A} + \overrightarrow{\gamma_{AB}} \times \overrightarrow{AX}$$

với $\omega_{AB} = 0$.

Theo phương trình này, ta có giản đồ biểu diễn các thành phần của $\overrightarrow{a_X}$ như hình bên. Vector $\overrightarrow{\gamma_{AB}} \times \overrightarrow{AX}$ vuông góc với thanh AB nên có phương (được biểu diễn bởi đường thẳng màu xanh dương) hợp với gia tốc $\vec{a}_A$ một góc α. Đối với X nằm trên thanh AB thì gia tốc $\overrightarrow{a_X}$ của nó sẽ có đầu mút X_1 nằm trên đoạn thẳng A_1B_1.



Từ hình vẽ này ta nhận thấy điểm N trên thanh AB có gia tốc nhỏ nhất khi X_1 trùng với N_1 sao cho O_1N_1 vuông góc với A_1B_1.

$$\boxed{a_N = a_A \sin\alpha = \frac{\omega^2 r^2}{l}}$$

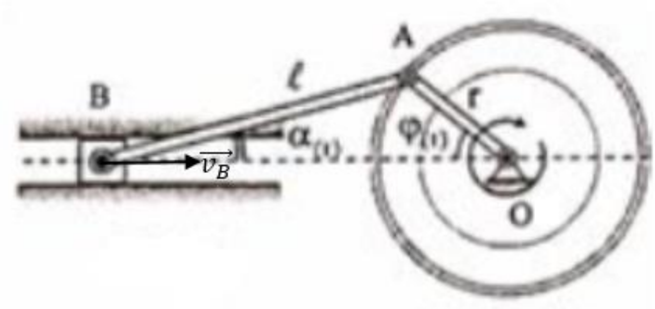
Điểm N ở cách A một đoạn là

$$\boxed{|AN| = \frac{a_A \cos\alpha}{\gamma_{AB}} = l\left[1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2\right]}$$

Trong khi đó, điểm M trên thanh AB có gia tốc lớn nhất khi X_1 trùng với A_1 (với $\alpha < \frac{\pi}{4}$ hay $l > r\sqrt{2}$) hoặc X_1 trùng với B_1 (với $\alpha > \frac{\pi}{4}$ hay $l < r\sqrt{2}$).

$$\boxed{a_M = \begin{cases} a_A = \omega^2 r \ (M\ trùng\ A)\ với\ l > r\sqrt{2} \\ a_B = \dfrac{\omega^2 r^2}{\sqrt{l^2 - r^2}} \ (M\ trùng\ B)\ với\ l < r\sqrt{2} \end{cases}}$$

3. Để có được vận tốc của một chất điểm, chúng ta đạo hàm tọa độ theo thời gian. Để tìm tọa độ của đầu B trong bài toán này thì những gì chúng ta cần chỉ là hình học đơn giản.



Hình 3: Tại thời điểm bất kì.

a) Tọa độ của đầu B là: $x_B \equiv \overline{OB} = r\cos\varphi + l\cos\alpha$.

Đạo hàm tọa độ theo thời gian, chúng ta có: $v_B = -\dot{x}_B = r\sin\varphi\,\dot{\varphi} - l\sin\alpha\,\dot{\alpha}$.

Chúng ta biết rằng $\dot{\varphi}$ chính là vận tốc góc của tay quay: $\dot{\varphi} = \omega$ và $\varphi = \omega t$. Vậy việc còn lại chúng ta cần phải làm đó là tìm $\sin\alpha$ và $\dot{\alpha}$ theo thời gian. Một lần nữa, chúng ta cần hình học. Từ định lý hàm số sin trong tam giác OAB, chúng ta có:

$$\frac{\sin\alpha}{r} = \frac{\sin\varphi}{l} \Rightarrow \sin\alpha = \sin\varphi\frac{r}{l} = \sin(\omega t)\frac{r}{l}$$

Đạo hàm hai vế theo thời gian, chúng ta có:

$$\cos\alpha\,\dot{\alpha} = \omega\cos(\omega t)\frac{r}{l} \Rightarrow \dot{\alpha} = \omega\frac{r}{l}\cdot\frac{\cos(\omega t)}{\cos\alpha}$$

Mà ta có $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$, nên

$$\cos\alpha = \begin{cases} \sqrt{1-\frac{r^2}{l^2}\sin^2(\omega t)} \;\; với \; -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \\ -\sqrt{1-\frac{r^2}{l^2}\sin^2(\omega t)} \;\; với \; \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Thay hết tất cả vào biểu thức của v_B ta thu được

$$\boxed{v_B = \begin{cases} \omega r\sin(\omega t)\left[1+\frac{r}{l}\cdot\frac{\cos(\omega t)}{\sqrt{1-\frac{r^2}{l^2}\sin^2(\omega t)}}\right] \; với \; -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \\ \omega r\sin(\omega t)\left[1-\frac{r}{l}\cdot\frac{\cos(\omega t)}{\sqrt{1-\frac{r^2}{l^2}\sin^2(\omega t)}}\right] \; với \; \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2} \end{cases}}$$

b) Chúng ta dễ thấy đầu B dao động điều hòa khi

- $\frac{r}{l} \ll 1$, tức là $v_B = \omega rsin(\omega t)$.
- $\frac{r}{l} = 1$, tức là $v_B = 2\omega rsin(\omega t)$.

Lời kết

Đây là một bài toán động học với ý tưởng đơn giản và các biểu thức không quá dài như những bài cơ thông thường trong đề thi HSGQG. Lưu ý rằng lời giải trên đây đã được diễn giải chi tiết với hy vọng có thể giúp cả những bạn đọc mới làm quen với kiến thức Vật lý ở THPT chuyên có thể hiểu được, còn khi làm bài thi thì hoàn toàn có thể diễn giải ngắn gọn hơn rất nhiều. Vì thế bài này không phải là dài và cũng không phải là khó. Đây có lẽ là một trong những bài ngon ăn nhất trong kì thi năm nay.

Các thành viên tham gia thảo luận và rà soát lời giải

- *Trần Đức Huy , Sinh viên*
- *Nguyễn Xuân Tân (Vietnam National University).*

VPhO 39 (Năm học 2019/2020) – Ngày thi thứ nhất (27.12.2019)

Câu II

(Lời giải đề xuất bởi Hoàng Văn Tiến - Giáo Viên Vật lí Trường THPT Chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị,

Võ Nhật Minh – Giáo viên Vật lí Trường THPT Chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định)

a. Ta có: $\frac{V_1}{T_1}=\frac{V_2}{T_5}\Rightarrow T_5=2T_1=200K$

Vì nội năng tỉ lệ thuận với tích của áp suất và thể tích nên ta có thể đặt.

$U = k.pV = \nu C_V.T$, với k là hằng số

Xét trạng thái 2 và 5 ta có:

$$U_2 = U_5 \Rightarrow \begin{cases} p_2V_1 = p_1V_2 \\ T_2 = T_5 = 200K \end{cases}$$

$V_2 = 2.V_1 \Rightarrow p_2 = 2.p_1$

Xét trạng thái 2 và 4 ta được: $\frac{V_1}{T_2}=\frac{V_2}{T_4}\Rightarrow T_4=2T_2=400K$

Trạng thái 3 là tâm của hình chữ nhật nên hai thông số của nó được xác định bởi hệ thức.

$$\begin{cases} V_3=\dfrac{V_1+V_2}{2}=1,5V_1 \\ p_3=\dfrac{p_1+p_2}{2}=1,5p_1 \end{cases}$$

Xét trạng thái 1 và 3 ta được: $\frac{p_1V_1}{T_1}=\frac{p_3V_3}{T_3}\Rightarrow T_3=2,25T_1=225K$

b. Xét đồ thị (p; V) quá trình 2 $\rightarrow$ 5 là đường thẳng có dạng: p = aV + b

Từ các thông số của trạng thái 2 và 5 ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} 2p_1=aV_1+b \\ p_1=a2V_1+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{p_1}{V_1} \\ b=3p_1 \end{cases} \Rightarrow p=-\frac{p_1}{V_1}.V+3p_1 \ (*)$$

Phương trình vi phân nguyên lý I của quá trình 2 $\rightarrow$ 5 ta được:

$$\partial Q = dU+\partial A = kd(pV)+pdV=(k+1)pdV+kVdp$$

Từ (*) ta được: $dp=-\frac{p_1}{V_1}dV\Rightarrow \partial Q=(k+1)\left(-\frac{p_1}{V_1}.V+3p_1\right)dV-k\frac{p_1}{V_1}VdV=\left(3(k+1)p_1-(2k+1)\frac{p_1}{V_1}V\right)dV$

Vì dV > 0 $\Rightarrow \partial Q > 0$ khi $V<V_0=V_1\frac{3(k+1)}{2k+1}=V_1\left(1,5+\frac{1,5}{2k+1}\right)=V_3+\frac{1,5V_1}{2k+1}$

Cách 1:

Xét chu trình 1 – 3 - 5 -1.

Công khí nhận được: $A_1 = \frac{(p_3 - p_1)(V_3 - V_1)}{2} = \frac{p_1V_1}{4}$

➢ Quá trình 1 – 3 áp suất tỉ lệ thuận với thể tích và nhiệt độ tăng $\Rightarrow$ Khí nhận nhiệt.

Nguyên lý I :

$$Q_{13} = \Delta U_{13} + A_{13} = k(p_3V_3 - p_1V_1) + \frac{(p_1 + p_3)(V_3 - V_1)}{2}$$
$$\Rightarrow Q_{13} = \frac{5k}{4}p_1V + \frac{5p_1V_1}{8}$$

➢ Quá trình 5 -1 đẳng áp, khí giảm nhiệt $\Rightarrow$ khí tỏa nhiệt.

➢ Quá trình 3 – 5:

Ta có : $V_0 = V_3 + \frac{1,5V_1}{2k+1} > V_3$ Vậy khí nhận nhiệt trong đoạn V_3 đến V_0

$$Q_{30} = \int_3^0 \partial Q = 3(k+1)p_1.(V_0 - V_3) - (2k+1)\frac{p_1}{2V_1}(V_0^2 - V_3^2)$$
$$\Rightarrow Q_{30} = \frac{9}{8}\frac{p_1V_1}{2k+1}$$

Nhiệt lượng khí nhận trong chu trình này là:

$$Q'_1 = Q_{13} + Q_{30} = \frac{5k}{4}p_1V_1 + \frac{5p_1V_1}{8} + \frac{9}{8}\frac{p_1V_1}{2k+1}$$

Hiệu suất của chu trình: $H' = \frac{A_1}{Q'_1} = \frac{4}{63} \Rightarrow \frac{63}{4}A_1 = Q'_1$

$$\Rightarrow \frac{63}{16} = \frac{5k}{4} + \frac{5}{8} + \frac{9}{8}\frac{1}{2k+1}$$

Giải phương trình ta được: $\left[\begin{array}{l} k = 2,5 \\ k = -0,35 \end{array}\right.$ nhận giá trị k =2,5

Xét chu trình 1 – 2 - 5 -1:

❖ Công khí nhận được: $A = 2A_1 = \frac{p_1V_1}{2}$

❖ Khí nhận nhiệt trên các quá trình 1 – 2 và 2 – 0 (0 là trạng thái ứng với V_0)

Quá trình 1 – 2 đẳng áp : $Q_{12} = \Delta U_{12} = k(p_2V_1 - p_1V_1) = kp_1V_1$

Qúa trình 2 – 0:

$$Q_{20}=\int_{2}^{0}\partial Q=3\left(k+1\right)p_1.\left(V_0-V_2\right)-\left(2k+1\right)\frac{p_1}{2V_1}\left(V_0^2-V_2^2\right)$$

$$\Rightarrow Q_{20}=\frac{p_1V}{2}\frac{\left(k+2\right)^2}{2k+1}$$

Vậy nhiệt khí nhận được trong chu trình này là:

$$Q_1=Q_{12}+Q_{20}=kp_1V_1+\frac{p_1V_1}{2}\frac{\left(k+2\right)^2}{2k+1}$$

$$\Rightarrow Q_1=\frac{67}{16}p_1V_1$$

Hiệu suất chu trình là: $H=\frac{A}{Q_1}=\frac{8}{67}$

Cách 2: *(Nguyễn Tấn Phú)*

Ta có $V_0>V_3$ nên nhiệt lượng khí nhận trong quá trình (2) - (5) là $Q_{25}=Q_{23}+Q_{30}$

Theo đề, ta có : $H_{1351}=\frac{A'_{1351}}{Q_{1351}}=\frac{A'_{1351}}{Q_{13}+Q_{30}}=\frac{4}{63}\Rightarrow Q_{13}+Q_{30}=\frac{63}{4}A'_{1351}$

Theo tính chất của đồ thị, ta cũng có : $A'_{1251}=2A'_{1351}=2A'_{1231}$ (1)

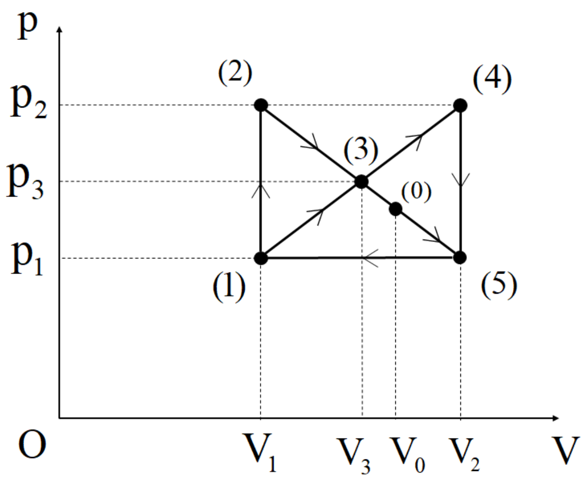
Mặt khác, xét quá trình 1-2-3, vì $\Delta U_{1231}=0$ nên

$$Q_{12}+Q_{23}+Q_{31}=A'_{1231}$$

$$\Rightarrow Q_{12}+Q_{23}=A'_{1231}+Q_{13}$$

$$\Rightarrow Q_{12}+Q_{23}+Q_{30}=A'_{1231}+\left(Q_{13}+Q_{30}\right)$$

$$\Rightarrow Q_{12}+Q_{25}=A'_{1231}+\frac{63}{4}A'_{1231}=\frac{67}{4}A'_{1231}\quad(2)$$



Từ (1)(2), ta có : $H_{1251}=\frac{A'_{1251}}{Q_{12}+Q_{25}}=\frac{2A'_{1231}}{\frac{67}{4}A'_{1231}}=\frac{8}{67}$

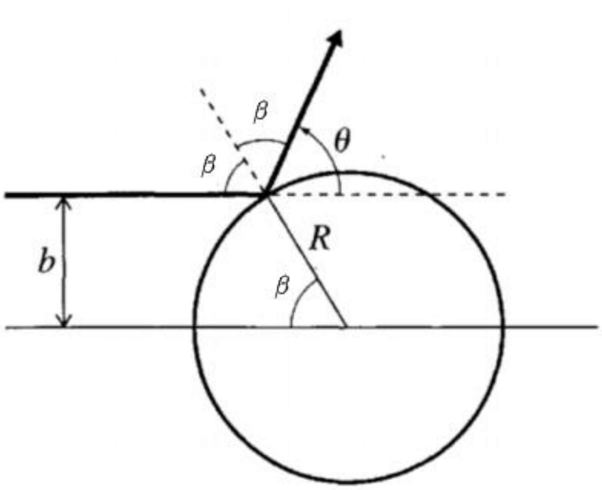
VPhO 39 (Năm học 2019/2020) – Ngày thi thứ nhất (27.12.2019)

Câu III

(Lời giải đề xuất bởi Nguyễn Xuân Tân, Vietnam National University)

Phần 1: Nghiên cứu cấu tạo nguyên tử:

1. Theo mô hình "quả cầu cứng" của mẫu Thomson, va chạm giữa các quả cầu "hạt α" với quả cầu "hạt nguyên tử vàng" là đàn hồi. Xét "hạt α" bay tới với vận tốc $\vec{v}$, va chạm với "nguyên tử vàng" ở vị trí có vector bán kính hợp với phương của $\vec{v}$ một góc tới $\beta = sin^{-1}\frac{b}{D+d}$ như hình vẽ. Do không có ma sát và "nguyên tử vàng" được giữ cố định nên sau khi va chạm, "hạt α" bị nảy ra với góc phản xạ cũng bằng β.



Hình 1: Tán xạ của các "hạt α" lên "nguyên tử vàng".

Góc tán xạ θ cần tìm là

$$\theta = \pi - 2\beta$$

Hay

$$\boxed{\theta = \pi - 2sin^{-1}\left(\frac{b}{D+d}\right)}$$

2. Với dòng hạt gửi tới trong tiết diện vi phân $d\sigma = 2\pi b db$ (khoảng nhắm nằm trong khoảng từ b đến $b + db$), mật độ dòng hạt α tán xạ trong đơn vị góc khối $d\Omega = 2\pi sin\theta d\theta$, ứng với mỗi nguyên tử vàng là

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{sin\theta}\left|\frac{db}{d\theta}\right| = \frac{b}{sin\theta}\frac{1}{\left|\frac{d\theta}{d\beta}\frac{d\beta}{db}\right|} = \frac{b}{sin2\beta}\frac{(D+d)cos\beta}{2} = \frac{b(D+d)}{4sin\beta} = \frac{(D+d)^2}{4}.$$

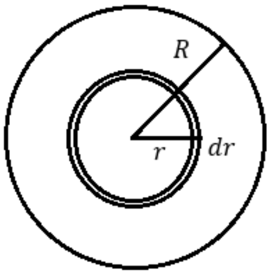
Lưu lượng hạt dòng α trên tiết diện S là I_0, tương ứng với $N_{Au} = \frac{\rho S\delta}{M}$ nguyên tử vàng bị chiếu vào. Như vậy tổng mật độ dòng tán xạ toàn phần của các hạt α dưới góc tán xạ θ, khi các hạt này đã đi xa tâm nguyên tử vàng một khoảng r là

$$\boxed{J=\frac{dN_{scattered}}{dS_\theta}=\frac{N_{Au}\frac{I_0}{S}d\sigma}{r^2d\Omega}=I_0\frac{\rho\delta}{M}\frac{(D+d)^2}{4r^2}}$$

Kết quả này hoàn toàn không phụ thuộc vào θ, không giống với kết quả thực nghiệm. Thí nghiệm của Geiger và Marsden đã chứng minh mô hình nguyên tử Thomson là không chính xác.

Phần 2: Nghiên cứu cấu tạo hạt nhân nguyên tử:

1. Thế năng tương tác tĩnh điện của hạt nhân có được là do sự tương tác của các proton. Ta sử dụng gần đúng rằng hạt nhân là một quả cầu tích điện đều với mật độ điện khối $\rho=\frac{Ze}{\frac{4}{3}\pi R^3}$. Khi đó thế năng tĩnh điện của quả cầu (với mốc thế năng tại xa vô cùng) là



Hình 2: "Giọt chất lỏng" hạt nhân.

$$W_1=\int_0^R\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r}\left(\rho.\frac{4}{3}\pi r^3\right).(\rho.4\pi r^2dr)=\frac{3}{5}\frac{Z^2e^2}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

Trong đó, ta đã chia quả cầu thành các lớp vỏ cầu có bề dày dr và tính tương tác tĩnh điện giữa từng vỏ cầu với quả cầu bên trong nó rồi cộng tổng thế năng của các tương tác này lại (như vậy ta đã tính được thế năng tương tác tĩnh điện của lớp cầu với cả các điện tích bên trong và bên ngoài nó).

Từ công thức thực nghiệm $R=R_0A^{1/3}$ ta có

$$W_1=\frac{3}{5}\frac{Z^2e^2}{4\pi\epsilon_0R_0A^{1/3}}=\frac{3}{5}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0R_0}Z^2A^{-1/3}=k_0Z^2A^h.$$

Từ công thức bán thực nghiệm của Weizsäcker, ta nhận thấy thế năng tương tác này chính là số hạng thứ ba, $\alpha_3\frac{Z^2}{A^{1/3}}$. Từ đó có thể kết luận

$$\boxed{k_0=\alpha_3=0.72\ MeV}$$

Và

$$\boxed{h=-\frac{1}{3}}$$

2. Từ biểu thức tính thế năng tĩnh điện ta có được

$$\alpha_3=k_0=\frac{3}{5}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0R_0}$$

Nên

$$\boxed{R_0=\frac{3}{5}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\alpha_3}=1.20\times10^{-15}m}$$

Từ đây ta cũng tính được khối lượng riêng của hạt nhân, với gần đúng rằng khối lượng của proton bằng với khối lượng của neutron $m_p \approx m_n \approx 1.67 \times 10^{-27} kg$, kết hợp với định luật thực nghiệm $R = R_0 A^{1/3}$

$$\boxed{\rho_m = \frac{Am_p}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{m_p}{\frac{4}{3}\pi {R_0}^3} \approx 2.31 \times 10^{17} kg.m^{-3}}$$

Thế năng tương tác do hiện tượng bề mặt là tỉ lệ với diện tích bề mặt hạt nhân. Với $R = R_0 A^{1/3}$, diện tích bề mặt hạt nhân là

$$S = 4\pi R^2 = 4\pi {R_0}^2 A^{2/3}$$

Thế năng tương tác do hiện tượng bề mặt là

$$W_2 = \sigma S = 4\pi\sigma {R_0}^2 A^{2/3}$$

Ta thấy thế năng này ứng với số hạng thứ hai trong công thức bán thực nghiệm của Weizsäcker, nên

$$\alpha_2 = 4\pi\sigma {R_0}^2$$

Hệ số căng mặt ngoài của chất lỏng là

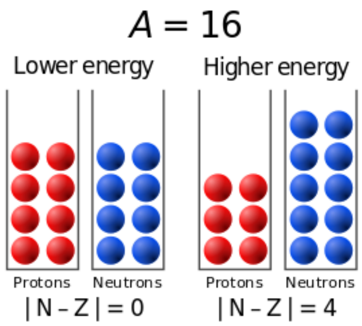
$$\boxed{\sigma = \frac{\alpha_2}{4\pi {R_0}^2} \approx 1.49 \times 10^{17} \frac{kg}{s^2}}$$

Phụ lục

Nói về các số hạng khác trong công thức bán thực nghiệm đã cho của Weizsäcker.

Số hạng $-a_1 A$ liên quan đến lực hạt nhân mạnh [1]. Do lực này có tầm tác dụng ngắn, các nucleon coi như chỉ tương tác với các nucleon gần nó nhất. Nếu coi hạt nhân là phân bố đều thì mỗi nucleon sẽ chịu một lực hút như nhau và có đóng góp như nhau cho thế năng tương tác, vậy nên thế năng này tỉ lệ với số hạt A.

Số hạng $\alpha_4 \frac{\left(\frac{A}{2}-Z\right)^2}{A}$ được gọi là thành phần bất đối xứng (thành phần Pauli), liên quan đến nguyên lí loại trừ Pauli. Nhìn chung, khi có càng nhiều một loại hạt nuleon, các mức năng lượng ở cao hơn bị chiếm nhiều hơn là khi số hạt proton và neutron xấp xỉ bằng nhau, làm tăng tổng năng lượng và giảm tính bền vững của hạt nhân. Do vậy thành phần này tỉ lệ với hiệu số neutron và proton $|N - Z| = 2\left|\frac{A}{2} - Z\right|$. Ta có thể suy ra thành phần này từ lập luận sau: Hai loại hạt proton và neutron là hai loại hạt khác nhau, chiếm các trạng thái lượng tử khác nhau. Để đơn giản, xét hai "hố trạng thái" một chiều của proton và neutron như hình vẽ, với số nucleon trên mỗi mức năng lượng là hai (spin up và down) (số proton và neutron là chẵn).



Hình 3: Mô hình một chiều của sự sắp xếp các nucleon trong hạt nhân đối với A=16 [1].

Lưu ý đây chỉ là lập luận gần đúng do thường thì các mức năng lượng của proton là cao hơn của neutron [2]. Trong gần đúng thế năng điều hòa, năng lượng của nucleon khi dao động ở mức năng lượng thứ n là $E_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega$. So với trường hợp $N = Z = \frac{A}{2}$ thì trường hợp $N - Z = 4$, ta "bớt đi" hai proton và "thêm vào" hai neutron, làm tăng thế năng của hệ một lượng $(2\hbar\omega)$. Khi tiếp tục "bớt đi" hai proton và "thêm vào" hai neutron ($N - Z = 8$), thế năng sẽ tăng thêm là $3 \times (2\hbar\omega)$, với lưu ý về khoảng cách của các mức năng lượng. Nếu tiếp tục quá trình "thêm" và "bớt" này thì thế năng sẽ tiếp tục tăng lên là $5 \times (2\hbar\omega)$, $7 \times (2\hbar\omega)$,..., $\left(\frac{N-Z}{2} - 1\right) \times (2\hbar\omega)$. Vậy khi số neutron nhiều hơn số proton là $N - Z$ thì thế năng đã tăng thêm so với khi $N = Z = \frac{A}{2}$ là

$$(2\hbar\omega) \times \left(1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + \left(\frac{N-Z}{2} - 1\right)\right)$$

$$= (2\hbar\omega) \times \frac{\left(\frac{N-Z}{2} - 1\right) - 1}{2} \times \left(\frac{\left(\frac{N-Z}{2} - 1\right) - 1}{2} + 1\right)$$

$$= \frac{\hbar\omega}{8}(N - Z - 2)(N - Z)$$

$$\approx \frac{\hbar\omega}{8}(N - Z)^2 \text{ với } N - Z \gg 1.$$

$$= \frac{\hbar\omega}{2}\left(\frac{A}{2} - Z\right)^2.$$

Đây chính là quy luật cần tìm [3].

Ngoài ra còn có một số hạng nữa là thành phần kết cặp (pairing term), gây ra bởi hiệu ứng kết cặp spin (spin-coupling) [1]:

$$\delta(A, Z) = \begin{cases} +\delta_0 \ \textit{với } Z, N \textit{ chẵn } (A \textit{ chẵn}) \\ \ \ 0 \quad \textit{với } A \textit{ lẻ} \\ -\delta_0 \ \textit{với } Z, N \textit{ lẻ } (A \textit{ chẵn}) \end{cases}$$

Với δ_0 thay đổi chậm theo A. Cơ bản là theo nguyên lí loại trừ Pauli, hạt nhân sẽ có năng lượng thấp hơn nếu số nucleon có spin up bằng với số nucleon có spin down. Chỉ khi Z và N là chẵn thì cả proton và neutron có số lượng hạt với spin up và spin down bằng nhau.

Tham khảo

[1] Wikipedia. *Semi-empirical mass formula*.

[2] Douglas Giancoli, John Jewett (1975). *Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics, Eight edition.* p. 1346.

[3] Bộ GD&ĐT. *Đề thi chọn đội tuyển Olympic môn Vật lý năm 2014. Câu V.*

Các thành viên tham gia thảo luận và rà soát lời giải

- *Võ Nhật Minh (Giáo viên trường THPT chuyên Lê Quý Đôn Bình Định).*

VPhO 39 (Năm học 2019/2020) – Ngày thi thứ nhất (27.12.2019)

Câu IV

(Lời giải đề xuất bởi Hoàng Công Viêng, Trường THPT Chuyên Hà Tĩnh)

1. Số bội giác khi ngắm chừng ở vô cực:

$$G_\infty = \frac{f_1}{f_2} = 20 \Rightarrow f_2 = \frac{f_1}{G_\infty} = 5\text{ cm.}$$

2. a) Gọi tiêu cự của hai thấu kính thị kính là $f_1' = 2a$; $f_2' = a$; khoảng cách giữa hai thấu kính e = 1,5a. Quang tâm tương ứng là O_1' và O_2'. Gọi quang tâm của vật kính là O_1.

Xét sự tạo ảnh qua hệ thấu kính:

$$AB \text{ ở } \infty \xrightarrow[d_1 \qquad d_1']{O_1} A_1B_1 \xrightarrow[d_2 \qquad d_2']{O_1'} A_2B_2 \xrightarrow[d_3 \qquad d_3']{O_2'} A_3B_3 \text{ ở } \infty$$

Ta có $d_3 = f_2' = a \Rightarrow d_2' = 1{,}5a - a = 0{,}5a > 0$.

Góc trông vật: $\alpha_0 = \frac{A_1B_1}{f_1}$.

Góc trông ảnh: $\alpha = \frac{A_2B_2}{f_2'} = \left|\frac{d_2'}{d_2}\right|\frac{A_1B_1}{f_2'}$.

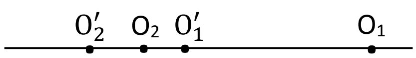
Số bội giác: $G_\infty = \frac{\alpha}{\alpha_0} = \left|\frac{d_2'}{d_2}\right|\frac{f_1}{f_2'} \Rightarrow d_2 = \pm\frac{f_1}{f_2'}\frac{d_2'}{G_\infty}$.

Công thức thấu kính: $\frac{1}{d_2} + \frac{1}{d_2'} = \frac{1}{f_2'} \Rightarrow \frac{f_2'}{f_1}\frac{G_\infty}{d_2'} + \frac{1}{d_2'} = \frac{1}{2a} \Rightarrow \pm\frac{a}{100}\frac{20}{0{,}5a} + \frac{1}{0{,}5a} = \frac{1}{2a} \Rightarrow a = \mp 3{,}75\text{ cm.}$

Giá trị thỏa mãn: a = 3,75 cm.

Lưu ý: *Đề bài không nói rõ trong hệ thị kính thấu kính nào đóng vai trò thị kính mắt hay thị kính vật. Trường hợp O_2' là thị kính vật không thỏa mãn vì cần điều kiện A_2B_2 là ảnh thật ($d_2' > 0$)*

+) Vị trí đặt mắt tại thị kính mắt O_2'.

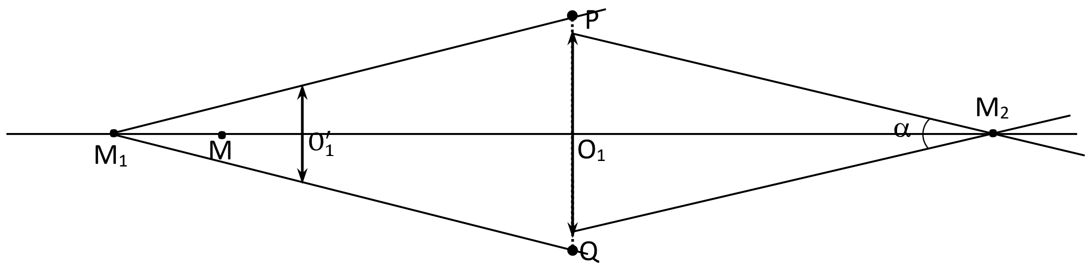


Ta có: $d_2 = -\frac{f_1}{f_2'}\frac{d_2'}{G_\infty} = -\frac{100}{3{,}75}\frac{0{,}5.3{,}75}{20} = -2{,}5\text{ cm.}$

$$d_2 = O_1O_1' - d_1' \Rightarrow O_1O_1' = 97{,}5\text{ cm.}$$

Khoảng cách từ mắt đến vật kính bằng: $O_1O_2' = O_1O_1' + O_1'O_2' = 75 + 1{,}5.3{,}75 = 103{,}125\text{ cm.}$

b)



Hình 1

Vị trí đặt mắt M trùng với O'_2. Sơ đồ tạo ảnh của mắt:

$$M \xrightarrow[d_1 \quad d'_1]{O'_1} M_1 \xrightarrow[d_2 \quad d'_2]{O'_2} M_2$$

$d_1 = 1{,}5a = 5{,}625$ cm $\Rightarrow d'_1 = -22{,}5$ cm.

$d_2 = O_1O'_1 - d'_1 = 75 + 22{,}5 = 120 \text{ cm} \Rightarrow d'_2 = 600$ cm.

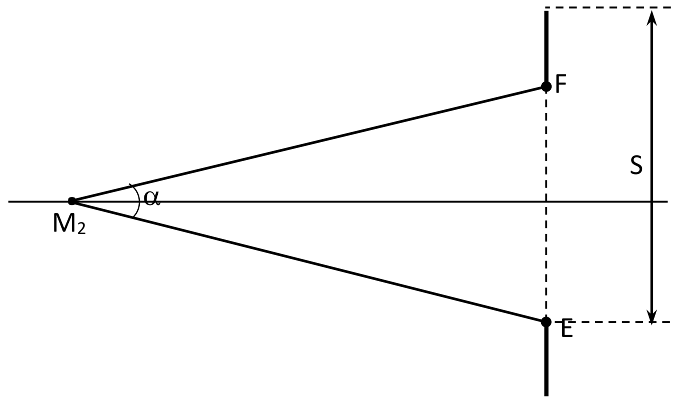
Từ hình 1 ta được: $PQ = \frac{M_1O_1}{M_1O'_1}D_2 = \frac{M_1O_1}{M_1O'_1}D_2 = \frac{67}{6} \text{ cm} \approx 11{,}17 > D_1$.

Góc mở thị trường: $\alpha = \frac{D_1}{O_1M_2} = \frac{1}{60}$ rad.

Vì tàu ở rất xa, từ hình 2 ta lấy gần đúng: EF = Lα.

Quãng đường tàu đi được khi còn trong khoảng tầm nhìn của kính:

$$S = EF + \ell = L\alpha + \ell = \frac{325}{3} \text{ m.}$$



Hình 2

Vận tốc của tàu: $v = \frac{S}{t} = \frac{65}{6}\frac{m}{s} = 39\frac{km}{h}$.

Các thành viên tham gia thảo luận và rà soát lời giải

- *Trần Đức Huy, Sinh viên*
- *Trần Kỳ Vĩ, Sinh viên, Trường Sư phạm Hà Nội*

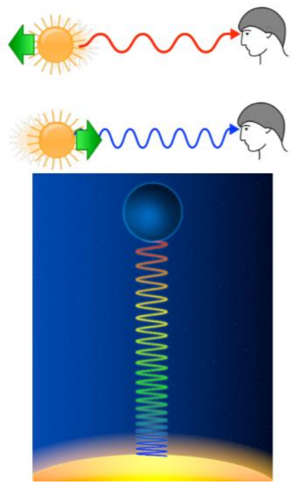
VPhO 39 (Năm học 2019/2020) – Ngày thi thứ nhất (27.12.2019)

Câu V

(Lời giải đề xuất bởi Trần Kỳ Vĩ, Sinh viên, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội)

Trong bài này việc sử dụng lý thuyết tương đối hẹp (Special Relativics Theory) để giải gây rất nhiều ngộ nhận cho HS phổ thông trong việc giải quyết bài toán này, ở đây cần dùng một lý thuyết khác thì mới có kết quả chính xác hơn về hấp dẫn không gian là lý thuyết tương đối rộng (General Relativics Theory), nhưng trình độ HS cấp 3 không thể hiểu về phép toán tensor và phương trình trường trong chốc lát (các võ đoán HS cấp 3 có thể hiểu ngay và giải được phương trình Einstein với tensor Ricci là ít căn cứ) nên tạm thời người giải chỉ xét bài toán trong tương quan giữa cơ học cổ điển Newton và thuyết tương đối hẹp cũng như sử dụng một khái niệm khiên cưỡng mà người giải không hoặc ít khi thích dùng là khái niệm "khối lượng tương đối tính", ở bài này chỉ chủ quan gọi là khối lượng.

1. Gọi khối lượng photon ở một vị trí bất kỳ là m, Theo phương trình (pt) Einstein về liên hệ khối lượng năng lượng $\varepsilon = mc^2$ và pt Planck liên hệ năng lượng chuyển động E với tần số f, ($\varepsilon = hf$) ta có: $m = \dfrac{hf}{c^2}$



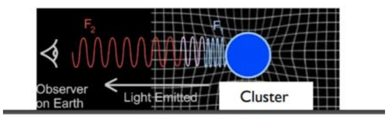
Trong ý này do vì Trái Đất ở rất xa ngôi sao nên chỉ xét tương tác hấp dẫn của hệ photon – sao khi photon đã đi xa ngôi sao nhưng chưa đến được Trái Đất. Nếu "quan niệm" (thực ra quan điểm này hơi lầm lạc vì đã quan điểm hf là năng lượng tổng của photon rồi nhưng còn phải đưa ra quan điểm này để giải toán), khi photon chuyển động ngoài động năng (hf tự có), thì công của lực hấp dẫn đã làm biến đổi tần số của photon, trong quá trình vi phân, nếu chỉ dùng định lý động năng dạng vi phân cổ điển cho quan điểm rằng: $d\left(hf\right) = -\dfrac{GMm}{r^2}dr = -\dfrac{GM.hf}{r^2c^2}dr$,

Hay $\dfrac{df}{f} = -\dfrac{GM}{r^2c^2}dr \rightarrow \int_{f_0}^{f_1}\dfrac{df}{f} = -\int_{R}^{\infty}\dfrac{GM}{r^2c^2}dr$ [1]

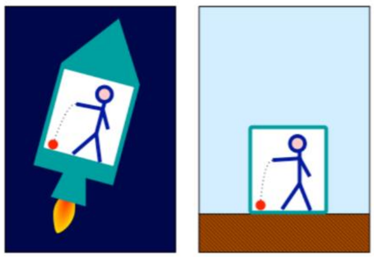
Suy ra: $f_1 = f_0 e^{-\frac{GM}{Rc^2}} < f_0$ (1)

cho thấy bước sóng dịch dài ra khi photon đi ra xa hành tinh.

2. Khi không quan tâm tới "sức hấp dẫn" của hai hành tinh, người quan sát (NQS) chỉ quan tâm việc chuyển hệ qui chiếu (HQC) và sai khác tần số do chuyển hệ qui chiếu sinh ra thì ta có thể hình dung rằng chuyển năng lượng kéo theo chuyển tần số ở đây là do biến đổi Lorentz.



equivalence principle



Sự sai khác giữa f_1' và f_1 do sự chuyển đổi photon từ HQC (sao – Trái Đất) sang HQC tàu. Gọi $p_2 = \dfrac{hf_2}{c}$, $p_1 = \dfrac{hf_1}{c}$ lần lượt là độ lớn xung lượng của photon trong HQC (sao – TĐ) và HQC tàu:

$hf_1' = \gamma\left(hf_1 - \vec{v}.\vec{p}_1\right)$ [2], nhận thấy $\vec{v}$ và $\vec{p}_1$ ngược chiều nên ta có:

$$hf_1' = \gamma\left(hf_1 - v\left(\frac{-hf_1}{c}\right)\right) \to f_1' = \gamma f_1\left(1+\frac{v}{c}\right) = f_1\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \qquad (2)$$

Với $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \beta = \frac{v}{c}$,

Kết hợp (4) với (1) ta có: $f_1' = f_0 e^{-\frac{GM}{Rc^2}}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$ (3)

Tần số f_2 thu được ở bề mặt Trái Đất ở đây tính được nhờ sự bảo toàn năng lượng cho hai trạng thái của photon khi ở bề mặt ngôi sao và khi ở rất xa ngôi sao. Cũng dùng định lý động năng dạng vi phân trong cổ điển ta có

$$d(hf) = -\frac{GMm}{r_1^2}dr_1 - \frac{GM_d m}{r_2^2}dr_2 = -\frac{GM.hf}{r_1^2c^2}dr_1 + \frac{GM_d hf}{r_2^2c^2}dr_2$$,[3]

Biến đổi $\int_{f_0}^{f_2}\frac{df}{f} = -\int_R^{\infty}\frac{GM}{r_1^2c^2}dr_1 - \int_{\infty}^{R_d}\frac{GM_d}{r_2^2c^2}dr_2 \to f_2 = f_0 e^{-\frac{GM}{Rc^2}+\frac{GM_d}{R_dc^2}}$ (4)

Chia hai vế của (3) cho (4) ta và đặt $\alpha = e^{\frac{-GM_d}{R_dc^2}}$, ta tính được:

$$v = c\frac{(f_1')^2 - (\alpha f_2)^2}{(f_1')^2 + (\alpha f_2)^2}. \qquad (5)$$

Đối với Trái Đất, đại lượng $\frac{GM_d}{R_dc^2} \approx 6.9\times10^{-7}$ << 1, nên khai triển mũ $e^{-\frac{GM_d}{R_dc^2}} \approx 1 - \frac{GM_d}{R_dc^2} = \varepsilon$, nên từ (3), (4), (5) ta thu được:

$$v = c\frac{(f_1')^2 - (\varepsilon f_2)^2}{(f_1')^2 + (\varepsilon f_2)^2}. \qquad (6)$$

- **Chú thích:**

1. Vì sao ở [1] ta không đưa vào công của lực hấp dẫn Trái Đất, ở ý 1 người giải quan niệm cụm từ "photon ở rất xa" ở đây là photon đi xa và thoát khỏi tầm ảnh hưởng của thế hấp dẫn của ngôi sao. Còn tại sao ở [3] lại đưa vào thế hấp dẫn của Trái Đất vì sự biến đổi tần số photon trong trường hợp này sinh ra do hai công, một là công mà photon nhận trước khi thoát khỏi trường hấp dẫn của ngôi sao nhưng vẫn chưa đi vào trường hấp dẫn của Trái Đất, hai là công mà photon nhận sau khi "chui vào" vùng hấp dẫn của Trái Đất.

2. Việc dẫn ra công thức ở [2] có thể thực hiện dễ dàng nhờ sự tương tự giữa vector xung lượng bốn chiều $(p_\mu^1, p_\mu^2, p_\mu^3, p_\mu^4)$ và vector 4 chiều không – thời gian $(x_\mu^1, x_\mu^2, x_\mu^3, x_\mu^4)$. Hay chứng minh theo phương pháp tương tự về bất biến:

Tham khảo: Ta có bất biến khoảng

$$(ct)^2 - \vec{r}^2 = \text{const} \quad (I)$$

Trong đó $\vec{r}^{\,2} = x^2 + y^2 + z^2$ từ đây mà ta thành lập được

$$x = \frac{\vec{r}\vec{v}}{v} = \gamma\left(\frac{\vec{r}'\vec{v}}{v} + \frac{v}{c}ct'\right) = \gamma\left(x' + \frac{v}{c}ct'\right) \qquad (1)$$

Và $ct = \gamma\left(ct' + \dfrac{\vec{v}\vec{r}\,'}{c}\right)$ (2)

Lại có $\left(\dfrac{E}{c}\right)^2 - \vec{p}^{\,2} = m^2 = \text{const}$ (II) (m ở đây là một đại lượng trong một số giáo trình gọi là m_0 – khối lượng nghỉ của vật)

Dạng của (II) giống dạng của (I), vai trò của $\vec{r}$, và ct giống vai trò của $\vec{p}$ và $\dfrac{E}{c}$, do đó thay thế trong (I) vai trò $\vec{r}, \vec{r}'$ thành $\vec{p}, \vec{p}'$; ct, ct' thành E/c và E'/c nên ta dễ dàng thành lập các công thức biến đổi, thay trong (1)

$$p_x = \frac{\vec{p}\vec{v}}{v} = \gamma\left(\frac{\vec{p}'\vec{v}}{v} + \frac{v}{c}\frac{E'}{c}\right) = \gamma\left(p_x' + \frac{v}{c^2}E'\right)$$

Và $$\frac{E}{c} = \gamma\left(\frac{E'}{c} + \frac{\vec{v}.\vec{p}'}{c}\right) = \gamma\left(\frac{E'}{c} + \frac{v.p_x'}{c}\right) \rightarrow E = \gamma\left(E' + v.p_x'\right)$$

Tham khảo

1. Ở đây lời giải đã tham khảo một số quan điểm của bạn Trần Đức Huy về các tần số f_1, f'_1, f_2.

2. ở đây lời giải đã tham khảo quan điểm của bạn Trần Đức Huy.

3. https://cosmology.lbl.gov/talks/Kaiser_16_RPM.pdf

4. MODERN PHYSICS FOR SCIENCE AND ENGINEERING, First Edition, Marshall L. Burns, Tuskegee University

5. https://en.wikipedia.org/wiki/Redshift

6. [3], [4] http://physics.unipune.ac.in/~phyed/26.4/26.4%20P.%20K.%20Shrivastava.pdf

7. https://web.mit.edu/8.286/www/lecn18/ln01-euf18.pdf

8. International Zhautykov Olympiad, 2019 Prolems

9. Presentation of Prof. ***Paul*** T.P. ***Ho*** - Astronomers Capture First Image of a Black Hole.

10. https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1053864.pdf

Các thành viên tham gia thảo luận và rà soát lời giải

- *Trần Đức Huy , Sinh viên*

VPhO 39 (Năm học 2019/2020) – Ngày thi thứ hai (27.12.2019)

Câu I

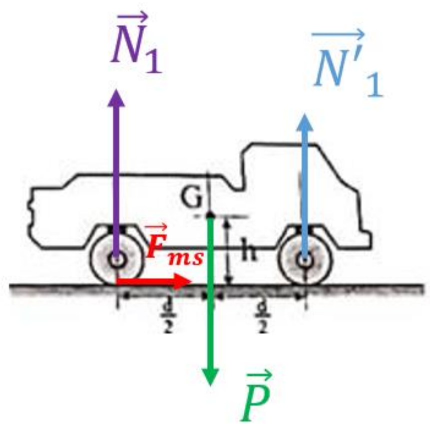
(Lời giải đề xuất bởi Trần Đức Huy – Sinh viên, và Physicium – CLB Vật lí xPhO)

1.

a) Khi xe tăng tốc thì tổng các vector lực ma sát tác dụng lên các bánh xe có phương nằm ngang và hướng về phía trước. Các lực này gây ra mô-men lực (đối với trục đi qua khối tâm) cùng chiều với mô-men lực gây ra bởi lực pháp tuyến với mặt đất tác dụng lên hai bánh xe trước. Vì thế mô-men lực gây ra bởi lực pháp tuyến tác dụng lên hai bánh xe sau phải lớn hơn so với hai bánh xe trước để đảm bảo sự cân bằng mô-men lực. Ngoài ra, khối tâm nằm ở trung điểm khoảng cách giữa các bánh xe cho nên lực pháp tuyến tác dụng lên hai bánh xe sau lớn hơn hai bánh xe trước. Vì bánh xe, trục xe và giảm xóc không có khối lượng cho nên lực mà giảm xóc phải chịu bằng lực pháp tuyến của mặt đất tác dụng lên bánh xe. Vì vậy, giảm xóc ở hai bánh xe sau chịu lực lớn hơn giảm xóc ở hai bánh xe trước.

b) Gọi k là độ cứng của mỗi lò xo giảm xóc. Lúc đứng yên, xe cân bằng theo phương thẳng đứng cho nên ta có: $Mg = 4N$. Mặt khác: $N = kx_0$ nên:

$$k = \frac{Mg}{4x_0} = 45000 \text{ N/m}$$



Trong giai đoạn hộp số ở cấp 1, lò xo ở giảm xóc sau luôn bị nén $x_1 = 12$ cm, tức là bị nén nhiều hơn 2 cm so với lúc xe đứng yên. Vì độ cứng của các lò xo là giống nhau và tổng của lực đàn hồi của 4 lò xo phải bằng trọng lực nên hai lò xo ở bánh trước phải nén ít hơn 2 cm, độ nén của chúng là $x_1' = 8$ cm.

Vì chỉ có hai bánh xe trước không tương tác với động cơ, nếu lực ma sát tác dụng lên các bánh này khác 0 thì sẽ tạo ra mô-men lực không cân bằng, và điều này thì không thể xảy ra đối với những vật được giả thiết là không khối lượng. Vì vậy, lực ma sát chỉ tác dụng lên hai bánh xe sau. Vì các mô-men lực cân bằng, chúng ta có:

$$2N_1 \frac{d}{2} = F_{ms\ tổng} h + 2N_1' \frac{d}{2}$$

Như đã giải thích ở trên chúng ta có: $N_1 = kx_1$ và $N_1' = kx_1'$, cho nên:

$$F_{ms\ tổng} = \frac{k(x_1 - x_1')d}{h} = Mg\frac{(x_1 - x_1')d}{4x_0 h} = 7500 \text{ N}$$

Tổng lực ma sát nghỉ cực đại là: $2\mu_n N_1 = 2\mu_n k x_1 = 8100$ N. Vì tổng lực ma sát nhỏ hơn tổng lực ma sát nghỉ cực đại cho nên xe không bị trượt.

Gia tốc của xe trong giai đoạn hộp số ở cấp 1 là:

$$a = \frac{F_{ms\ tổng}}{M} = g\frac{(x_1 - x_1')d}{4x_0 h} = 4{,}17\ \mathrm{m/s^2}$$

Như vậy trong giai đoạn hộp số ở cấp 1 thì xe tăng tốc đều từ 0 đến V_1. Thời gian xe tăng tốc khi hộp số ở cấp 1 là:

$$t_1 = \frac{V_1 - 0}{a} = \frac{V_1}{g} \cdot \frac{4x_0 h}{(x_1 - x_1')d} = 0.672\ \mathrm{s}$$

Trong giai đoạn hộp ở cấp từ 2 đến 6, công suất của động cơ là không đổi và bằng:

$$P_{động\ cơ} = \frac{P_{max}}{2}$$

Nếu như các bánh xe không trượt thì lực phát động là:

$$F_{phát\ động} = \frac{P_{động\ cơ}}{v} = \frac{P_{max}}{2v}$$

Dễ thấy, lực phát động lớn nhất khi vận tốc là nhỏ nhất, tức là khi $v = V_1$. Khi đó lực phát động bằng:

$$F_{phát\ động\ max} = \frac{P_{max}}{2V_1} = 20000\ \mathrm{N}$$

Bây giờ chúng ta sẽ đi tính tổng lực ma sát nghỉ cực đại. Từ phương trình cân bằng momen lực, ta có:

$$2N_1\frac{d}{2} = F_{msn\ tổng\ max}h + (Mg - 2N_1)\frac{d}{2}$$

Với $F_{msn\ tổng\ max} = 2\mu_n N_1$ thì:

$$F_{msn\ tổng\ max}\left(\frac{d}{\mu_n} - h\right) = Mg\frac{d}{2} \Rightarrow F_{msn\ tổng\ max} = \frac{Mg}{2\left(\frac{1}{\mu_n} - \frac{h}{d}\right)} = 8230\ \mathrm{N}$$

Vì lực phát động lớn hơn tổng lực ma sát nghỉ cực đại cho nên có sự trượt xảy ra. Lúc này lực phát động là lực ma sát trượt có tổng độ lớn: $F_{mst\ tổng} = 2\mu_t N_1$. Từ phương trình cân bằng momen lực, ta có:

$$2N_1\frac{d}{2} = F_{mst\ tổng}h + (Mg - 2N_1)\frac{d}{2}$$

Với $F_{mst\ tổng} = 2\mu_t N_1$ thì:

$$F_{mst\ tổng}\left(\frac{d}{\mu_t} - h\right) = Mg\frac{d}{2} \Rightarrow F_{mst\ tổng} = \frac{Mg}{2\left(\frac{1}{\mu_t} - \frac{h}{d}\right)} = 7570\ \mathrm{N}$$

Mô-men lực của động cơ phải cân bằng với mô-men lực của lực ma sát trượt: $M_{động\ cơ} = F_{mst\ tổng}R$, với R là bán kính của mỗi bánh xe. Vận tốc góc của mỗi bánh xe sau là:

$$\omega_{bánh\ sau} = \frac{P_{động\ cơ}}{M_{động\ cơ}} = \frac{P_{động\ cơ}}{F_{mst\ tổng}R}$$

Hai bánh xe sau sẽ ngừng trượt khi mà: $V_t = \omega_{bánh\ sau}R$. Từ đó, vận tốc của xe khi mà hai bánh sau ngừng trượt là:

$$V_t = \omega_{bánh\ sau} R = \frac{P_{động\ cơ}}{F_{mst\ tổng}} = 7{,}43\ \mathrm{m/s}$$

Thời gian để xe tăng tốc từ V_1 đến V_t là:

$$t_2 = \frac{(V_t - V_1)M}{F_{mst\ tổng}} = 1{,}10\ \mathrm{s}$$

Trong khoảng thời gian còn lại, các bánh xe lăn không trượt nên công suất của động cơ không bị tiêu tán vào ma sát, thời gian xe tăng tốc từ V_1 đến vận tốc tối đa $V_{max} = 100\ \mathrm{km/h}$ bằng biến thiên động năng chia cho công suất:

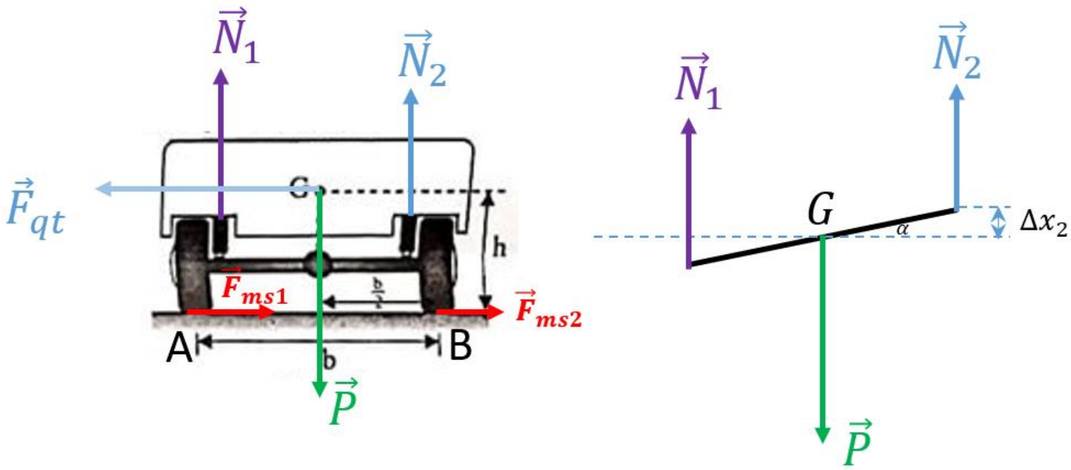
$$t_3 = \frac{M(V_{max}^2 - V_t^2)}{2P_{động\ cơ}} = 11{,}5\ \mathrm{s}$$

Vậy tổng thời gian mà xe tăng tốc đến vận tốc tối đa là:

$$t = t_1 + t_2 + t_3 = 13{,}2\ \mathrm{s}$$

2/

Gọi v là vận tốc chuyển động đều của ô tô trên đoạn đường cua. Xét trong hệ quy chiếu gắn với ô tô, khi đó các lực tác dụng lên ô tô như hình vẽ.



Trong đó, lực quán tính tác dụng lên ô tô

$$F_{qt} = M\frac{v^2}{R} \quad (1)$$

trong đó R là khoảng cách từ khối tâm G của ô tô đến tâm O của khúc cua, $R = R_c - \frac{D}{8} = 120 - \frac{16}{8} = 118m$

Các lực ma sát tác động lên các bánh xe

$$F_{ms1} = \mu N_1 \quad (2)$$

$$F_{ms2} = \mu N_2 \quad (3)$$

(Ở đây ta xem gần đúng các hệ số ma sát nghỉ ở hai bánh xe A và B là bằng nhau. Với trường hợp tổng quát xem lời giải phía bên dưới đây). Trong hệ quy chiếu gắn với ô tô, ô tô đứng yên nên ta có các phương trình cân bằng lực,

$$Mg = 2(N_1 + N_2) \quad (4)$$

$$F_{qt} = 2(F_{ms1} + F_{ms2}) \quad (5)$$

Thay các phương trình (1)-(4) vào (5) ta thu được

$$M\frac{v^2}{R} = \mu Mg$$

suy ra

$$v = \sqrt{\mu g R} \quad (6)$$

Điều kiện cân bằng mômen với trục quay tại các điểm A và B lần lượt là

$$F_{qt}h + 2N_2 b = Mg\frac{b}{2} \quad (7)$$

$$F_{qt}h + Mg\frac{b}{2} = 2N_1 b \quad (8)$$

Thực tế, khi thay (4) vào (7) thì thu được (8). Nên ta sử chọn sử dụng một trong hai phương trình (7) và (8).

Từ (7) ta rút ra biểu thức của N_2 và N_1

$$N_2 = Mg\left(\frac{1}{4} - \mu\frac{h}{2b}\right) \quad (9)$$

$$N_1 = Mg\left(\frac{1}{4} + \mu\frac{h}{2b}\right) \quad (10)$$

Để xe không lật thì $N_1 \geq 0$ và $N_2 \geq 0$, do đó

$$-\frac{b}{2h} \leq \mu \leq \frac{b}{2h}$$

Ta có $b/2h = 1.8/1.08 \approx 1.7$. Như vậy mọi giá trị của hệ số ma sát đều không làm cho xe không bị lật.

Như vậy tốc độ tối đa của xe tương ứng với giá trị $\mu = \mu_n$=0.75 (giá trị hệ số ma sát nghỉ lớn nhất).

$$v_{\max} = \sqrt{\mu_n g R} = \sqrt{0.75 \times 10 \times 118} \approx 29.7 \text{ m/s} = 107.1 \text{ km/h}$$

b. Gọi x_2 là độ biến dạng của lò xo phía bánh xe A. Đặt $\Delta x_2 = |x_2 - x_0|$, ta có

$$N_1 - N_2 = 2k\Delta x_2 \quad (11)$$

Thay (9) và (10) vào (11) ta thu được

$$\Delta x_2 = \frac{\mu_n Mg}{2k}\frac{h}{b}$$

Suy ra

$$\tan\alpha = \frac{\Delta x_2}{b/2} = \frac{\mu_n Mg}{k}\frac{h}{b^2} = \frac{4x_0 h}{b^2} \quad (12)$$

Thay số ta thu được

$$\tan\alpha = \frac{4x_0h}{b^2} = \frac{1}{20} \rightarrow \alpha \approx 0.05 \text{ rad} \approx 2.86°$$

Rút μ từ phương trình (6) thay vào phương trình (12) ta được

$$\tan\alpha = \frac{\Delta x_2}{b/2} = \frac{\mu Mg}{k}\frac{h}{b^2} = \frac{4\mu x_0 h}{b^2} = \frac{4v^2 x_0 h}{gRb^2} \quad (13)$$

Từ phương trình (13) ta thấy các tác động làm tăng α khi đi vào khúc cua là tăng tốc độ hoặc cua với bán kính cua hẹp (R nhỏ). Từ phương trình (12) ta thấy khi α tăng thì μ tăng, và N_2 giảm, hư vậy, α tăng thì nguy cơ xe bị lật càng cao. (Hay nói một cách khác là khi xe đi vào khúc cua mà đi với tốc độ cao hoặc cua với bán kính cua hẹp thì sẽ không an toàn).

Trong trường hợp $\mu_1 \neq \mu_2$

$$F_{ms1} = \mu_1 N_1 \quad (14)$$

$$F_{ms2} = \mu_2 N_2 \quad (15)$$

Từ phương trình (4) rút $N_1 = Mg/2 - N_2$ thay (14) và (15) vào phương trình (7) ta thu được

$$2\left[\mu_1\left(\frac{Mg}{2} - N_2\right) + \mu_2 N_2\right]h + 2N_2 b = Mg\frac{b}{2} \quad (16)$$

Rút gọn ta thu được

$$N_2 = \frac{Mg}{4}\frac{b - 2\mu_1 h}{b - (\mu_1 - \mu_2)h}$$

Như vậy để $N_2 \geq 0$ thì $b - 2\mu_1 h \geq 0$. Tương tự như ở phần trên ta thu được vận tốc xe có thể đạt cực đại khi $\mu_1 = \mu_2 = \mu_n$

VPhO 39 (Năm học 2019/2020) – Ngày thi thứ hai (28.12.2019)

Câu II

(Lời giải đề xuất bởi Trần Kỳ Vĩ, Sinh viên, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội)

Quá trình bay hơi: một lượng phân tử chất lỏng bay ra khỏi bề mặt của nó. Việc tính trực tiếp lượng phân tử đó là tương đối khó, nhưng có thể tính được lượng phân tử từ hơi rơi vào chất lỏng. Nếu chất lỏng và hơi ở trạng thái cân bằng (hơi bão hòa) thì lượng phân tử rơi trên bề mặt chất lỏng về trung bình bằng lượng phân tử rơi vào chất lỏng. Vì nhiệt độ và áp suất riêng phần của hơi bão hòa đã biết nên có thể tính được số phân tử rơi vào chất lỏng trong một đơn vị diện tích bề mặt trong một đơn vị thời gian.

1. a) * Số va chạm của phân tử hơi nước lên mặt thoáng của bình nước trên một đơn vị diện tích trong một đơn vị thời gian trong trường hợp hơi nước đạt bão hòa là:

$$z_0 = \frac{1}{4} n\bar{v} \qquad (1)$$

Trong đó $n = \frac{P_{bh}}{kT}$, $\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$, $k = \frac{R}{N_A}$ là hằng số Boltzmann; $m = \frac{\mu}{N_A}$ là khối lượng 1 phân tử.

Từ tổng số các phân tử rơi trên bề mặt thoáng nước lỏng chỉ có η% số phân tử đi vào trong nước, do số phân tử đi ra chính là số phân tử đi vào chất lỏng bị giữ lại, trong trường hợp hơi nước trong khí quyển đạt bão hòa:

$$\eta z_0 = \frac{\eta P_{bh}}{\sqrt{2\pi kTm}} \qquad (2)$$

* Trở lại ta xét tiếp trường hợp của đề bài. Vì trong trường hợp này hơi chưa bão hòa nên nồng độ phân tử hơi nhỏ hơn và theo định nghĩa độ ẩm a thì $n = an_0$, n_0 là nồng độ phân tử hơi bão hòa. Khi đó số phân tử rơi vào trong nước:

$$z_2 = a\frac{\eta P_{bh}}{\sqrt{2\pi kTm}} \qquad (3)$$

Số phân tử hơi nước bay ra vẫn là $z_1 = \eta z_0 = \frac{\eta P_{bh}}{\sqrt{2\pi kTm}}$ (bởi khi muốn bay ra thì áp suất mà các phân tử này tạo ra phải bằng P_{bh}). Do đó trong một đơn vị thời gian, nước mất đi $z = z_1 - z_2$ phân tử: $z = \frac{\eta(1-a)P_{bh}}{\sqrt{2\pi kTm}}$

Khi đó khối lượng tất cả phân tử hơi nước bay ra từ bề mặt của nước trong một đơn vị thời gian:

$$mzS = \pi\frac{d^2}{4}\eta(1-a)P_{bh}\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} = \frac{\eta d^2(1-a)P_{bh}}{4}\sqrt{\frac{\pi\mu}{2RT}} = 1.84\times10^{-4}\,\text{kg/s}$$

b) Gọi dM là khối lượng phân tử nước bay ra trong khoảng thời gian dt $dM = mzSdt$. Lại có $dM = \rho Sdh$. Từ đây tính được tốc độ thay đổi chiều cao của mực nước:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\eta(1-a)P_{bh}}{\rho}\sqrt{\frac{\mu}{2\pi RT}} = 41.7\,\mu\text{m/s} \qquad (4)$$

2. a) Thông lượng khuếch tán $-D\frac{\Delta n}{\Delta x}$ không đổi trên toàn bộ chiều cao của cốc, dấu trừ biểu thị quá trình khuếch tán xảy ra từ nơi có mật độ cao đến nơi có mật độ thấp. Do đó:

$$\frac{\Delta n}{\Delta x} = const \Rightarrow \frac{n_0 - n(z)}{z} = \frac{n_0 - n_1}{H - h_0} \Rightarrow n(z) = n_0 - \frac{n_0 - n_1}{H - h_0} z$$

Do mật độ phân tử hơi nước tỉ lệ với độ ẩm tương đối. Suy ra:

$$a(z) = a_0 - \frac{a_0 - a}{H - h_0} z \quad (5)$$; a_0, a lần lượt là độ ẩm tương đối tại mặt thoáng và ở độ cao H – h_0 so với mặt thoáng.

Số phân tử hơi nước khuếch tán qua một đơn vị diện tích trong một đơn vị thời gian:

$$\Delta q_0 = -D\frac{\Delta n}{\Delta x} = -D\frac{P_{bh}}{kT}\frac{\Delta a}{\Delta x} = D\frac{P_{bh}}{kT}\frac{a_0 - a}{H - h_0}$$

Số phân tử hơi nước thoát ra khỏi bề mặt của nước:

$$\Delta q_0' = z_1(1 - a_0)$$

Quá trình bay hơi là cân bằng động, do đó:

$$\Delta q_0 = \Delta q_0' \Rightarrow D\frac{P_{bh}}{kT}\frac{a_0 - a}{H - h_0} = z_1(1 - a_0)$$

$$\alpha(a_0 - a) = (1 - a_0) \Rightarrow a_0 = \frac{\alpha a + 1}{\alpha + 1} \quad \text{với } \alpha = \frac{DP_{bh}}{\eta z_0 kT(H - h_0)} \quad (6)$$

b) Tốc độ thay đổi chiều cao của mực nước:

Từ phương trình (4): $\frac{\Delta h'}{\Delta t} = \frac{\eta(1 - a_0)P_{bh}}{\rho}\sqrt{\frac{\mu}{2\pi RT}}$ (7)

Biến đổi: $1 - a_0 = \alpha(a_0 - a) = \alpha\left(\frac{\alpha a + 1}{\alpha + 1} - a\right) = \alpha\frac{1 - a}{1 + \alpha}$

Từ (6) ta được $\alpha = \frac{DP_{bh}}{\eta z_0 kT(H - h_0)} = \frac{DP_{bh}}{\eta kT(H - h_0)}\frac{\sqrt{2\pi kTm}}{P_{bh}} = \frac{D}{(H - h_0)\eta}\sqrt{\frac{2\pi\mu}{RT}} \approx 1.45\times 10^{-4} \ll 1$

Do đó $1 - a_0 \approx \alpha(1 - a) \to a_0 = 1 - \alpha(1 - a) \approx 99.99\%$

Vậy $\frac{\Delta h'}{\Delta t} = \frac{\alpha\eta(1 - a)P_{bh}}{\rho}\sqrt{\frac{\mu}{2\pi RT}} = 6.06 \text{ nm/s}$.

Tham khảo:

Việc không cho biểu thức tính vận tốc trung bình của phân tử khí trong bài gây khó khăn một phần cho HS, nếu HS có đọc và nhớ hai chương II và VI của Nhiệt học và Vật lý phân tử của Phạm Quí Tư thì có thể tính lại được, ở đây xin trình bày lại cách tính $\bar{v}$.

Từ lý thuyết Gibbs về phân bố chính tắc cho hệ đẳng nhiệt tiếp xúc với hệ điều nhiệt (thermostat) thì phân bố Maxwell - Boltzmann được hình thành với biểu thức xác suất theo độ lớn vận tốc là $dW = 4\pi\sqrt{\left(\frac{m}{2kT}\right)^3} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv$,

Từ đó vận tốc trung bình của phân tử một chất khí ở nhiệt độ T là:

$$\bar{v} = \int_0^{+\infty} v\,dW = \int_0^{+\infty} 4\pi\sqrt{\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^3} v^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$$

1. Lời giải đã tham khảo ý kiến của Trần Quốc Toàn, THPT Chuyên Nguyễn Đình Chiểu Đồng Tháp về việc tính số phân tử hơi nước bay ra.

2. PFIEV – Nhiệt động học Jean Marie Brébec

3. Nhiệt học cho hệ CLC – Phạm Quí Tư NXB ĐHQG HN

4. Thermodynamics and Statistical Mechanics - A brief overview - Sitangshu Bikas Santra, Department of Physics Indian Institute of Technology Guwahati, Guwahati - 781039, Assam, India

5. An Introduction to Thermodynamics and Statistical Mechanics - Second Edition, **Keith Stowe -** California Polytechnic State University

6. Vật lí thống kê – Vũ Thanh Khiết, NXB GD 2004

Các thành viên tham gia thảo luận và rà soát lời giải

- *Hoàng Văn Tiến, Giáo viên Trường THPT Lê Quý Đôn, Quảng Trị*

VPhO 39 (Năm học 2019/2020) – Ngày thi thứ hai (28.12.2019)

Câu III

(Lời giải đề xuất bởi Trần Đức Huy)

1.

a) Trước khi bắt tay vào làm thì chúng ta sẽ hình dung một chút về định hướng xử lý bài toán này. Suất điện động cảm ứng liên quan đến sự biến thiên của từ thông qua khung dây theo thời gian. Vậy chúng ta hình dung ngay được rằng, chúng ta sẽ phải tính tổng từ thông đi qua khung dây và sau đó đạo hàm nó theo thời gian để tìm được suất điện động cảm ứng.

* Khi khung dây chưa hoàn toàn đi vào trong vùng có từ trường: $0 \le t < \frac{b}{V}$

Kí hiệu hoành độ của cạnh AB là x_0 $(0 \le x_0 < b)$ thì từ thông đi qua khung dây là:

$$\Phi = \int_0^{x_0} B(x, t_{x_0})bdx = \int_0^{x_0} (B_0 + \alpha x + \beta t_{x_0})bdx = (B_0 + \beta t_{x_0})bx_0 + \frac{\alpha b x_0^2}{2} = B_0 b x_0 + \left(\frac{\beta}{V} + \frac{\alpha}{2}\right) b x_0^2$$

Trong đó $t_{x_0} = \frac{x_0}{V}$ là thời điểm mà cạnh AB có tọa độ x_0.

Suất điện động cảm ứng xuất hiện trong khung là:

$$\epsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Phi}{dx_0}\frac{dx_0}{dt} = -V\left(B_0 b + \left(\frac{2\beta}{V} + \alpha\right) b x_0\right) = -V\left[B_0 b + \left(\frac{2\beta}{V} + \alpha\right) bVt\right]$$

* Khi khung dây đã hoàn toàn đi vào trong vùng có từ trường: $t \ge \frac{b}{V}$

Kí hiệu hoành độ của cạnh AB là x_0 $(x_0 \ge b)$ thì từ thông đi qua khung dây là:

$$\Phi = \int_{x_0-b}^{x_0} B(x, t_{x_0})bdx = \int_{x_0-b}^{x_0} (B_0 + \alpha x + \beta t_{x_0})bdx = (B_0 + \beta t_{x_0})b^2 + \frac{\alpha b}{2}[x_0^2 - (x_0 - b)^2]$$
$$= \left(B_0 + \frac{\beta x_0}{V}\right) b^2 + \frac{\alpha b}{2}[x_0^2 - (x_0 - b)^2]$$

Suất điện động cảm ứng xuất hiện trong khung là:

$$\epsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Phi}{dx_0}\frac{dx_0}{dt} = -V\left(\frac{\beta b^2}{V} + \alpha b^2\right) = -\beta b^2 - \alpha b^2 V = \text{const}$$

b) Dòng điện xuất hiện trong khung dây là:

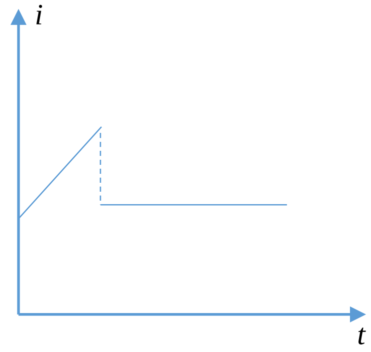
$$i = \frac{|\epsilon|}{6r} = \begin{cases} \left[B_0 b + \left(\frac{2\beta}{V} + \alpha\right) bVt\right] \frac{V}{6r} & \text{khi } 0 \le t < \frac{b}{V} \\ \frac{\beta b^2 + \alpha b^2 V}{6r} & \text{khi } \quad t \ge \frac{b}{V} \end{cases}$$

Thay số:

$$i = \frac{|\epsilon|}{6r} \approx \begin{cases} 83.3 + 104t & \text{khi } 0 \le t < 2s \\ 125 & \text{khi } \quad t \ge 2s \end{cases}$$

Trong đó đơn vị của i là μA còn đơn vị của t là s.

Từ biểu thức của cường độ dòng điện ta có thể vẽ được đồ thị.



2.

a) Đây là một bài toán quen thuộc ở cấp THCS, chúng ta không cần phải bàn nhiều về định hướng giải bài này.

Đây là mạch song song vô hạn tuần hoàn. Ta có: $R_{A_1B_1} = R_{AB} = \cdots = R_{A_nB_n}$

Sơ đồ mạch điện là: $R_{AB} \leftrightarrow 2r//(r\ nt\ R_{A_1B_1}\ nt\ r)$

Vậy ta có:

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{2r} + \frac{1}{2r + R_{AB}}$$

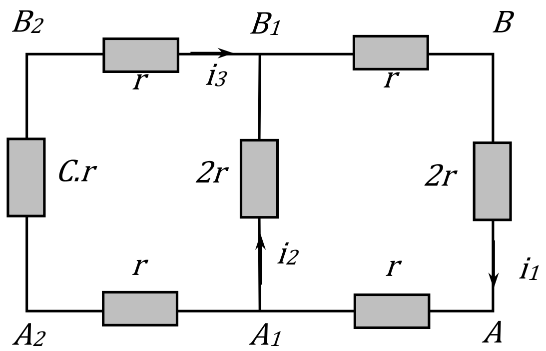
Phương trình này tương đương với phương trình:

$$R_{AB}^2 + 2rR_{AB} - 4r^2 = 0$$

Phương trình bậc hai này có hai nghiệm: $R_{AB} = (\sqrt{5} - 1)r$ và $R_{AB} = -(\sqrt{5} + 1)r$. Ta loại nghiệm âm. Vậy:

$$C = \sqrt{5} - 1$$

b) Mấu chốt của bài này đó là cần phải hiểu rằng tổng hiệu điện thế trên một vòng kín có từ thông biến thiên thì khác 0. Trong khoảng thời gian $0 \le t < \frac{2b}{V}$, hai hình vuông đầu tiên sẽ tiến vào trong vùng có từ trường và sẽ có từ thông biến thiên, các hình vuông còn lại sẽ không tiến vào vùng có từ trường và không có từ thông biến thiên. Đối với đoạn mạch toàn điện trở có tổng hiệu điện thế trên mọi vòng kín bằng 0 thì chúng ta có thể thay thế nó bằng một điện trở tương đương. Chúng ta có thể thấy rằng trong khoảng thời gian đang xét thì đoạn mạch nằm giữa A_2 và B_2 thỏa mãn điều này, cho nên chúng ta có thể thay đoạn mạch này bằng một điện trở tương đương $C.r$. Khi đã hiểu được điều này, chúng ta sẽ giải hệ các phương trình Kirchoff và tìm được cường độ dòng điện theo các suất điện động cảm ứng, còn các suất điện động cảm ứng có thể dễ dàng tìm được bằng cách làm tương tự như ở phần 1.



Gọi suất điện động cảm ứng trong vòng $A_1ABB_1A_1$ và vòng $A_2A_1B_1B_2A_2$ lần lượt là ϵ_1, ϵ_2. Đồng thời, quy ước chiều dương của các dòng điện như hình vẽ.

Từ các phương trình Kirchoff ta có:

$$4ri_1 + 2ri_2 = -\epsilon_1$$

$$(2+C)ri_3 - 2ri_2 = -\epsilon_2$$

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0$$

Giải hệ phương trình này ta thu được:

$$i_{AB} = i_1 = -\frac{\epsilon_1}{r}\cdot\frac{4+C}{20+6C} - \frac{\epsilon_2}{r}\cdot\frac{1}{10+3C} = -\frac{3-\sqrt{5}}{4}\cdot\frac{\epsilon_1}{r} - \frac{7-3\sqrt{5}}{4}\cdot\frac{\epsilon_2}{r}$$

* Khi hình vuông A_1ABB_1 chưa đi hoàn toàn vào vùng có từ trường: $0 \le t < \frac{b}{V}$, tức là $0 \le t \le 2$s.

Tương tự ở phần 1 chúng ta dễ dàng tìm được:

$$\epsilon_1 = -V\left[B_0 b + \left(\frac{2\beta}{V} + \alpha\right) bVt\right]$$

$$\epsilon_2 = 0$$

Khi đó biểu thức của cường độ dòng điện qua AB là:

$$i_{AB} = \frac{3-\sqrt{5}}{4}\cdot\frac{V}{r}\left[B_0 b + \left(\frac{2\beta}{V} + \alpha\right) bVt\right] \approx 95{,}5 + 119t$$

Trong đó đơn vị của i là μA còn đơn vị của t là s.

* Khi hình vuông A_1ABB_1 đã đi hoàn toàn vào vùng có từ trường nhưng hình vuông $A_2A_1B_1B_2$ chưa hoàn toàn đi vào: $\frac{b}{V} \le t < \frac{2b}{V}$, tức là: $2\text{s} \le t < 4\text{s}$

Tương tự ở phần 1 chúng ta dễ dàng tìm được:

$$\epsilon_1 = -\beta b^2 - \alpha b^2 V$$

Từ thông đi qua vòng $A_2A_1B_1B_2A_2$ khi cạnh A_1B_1 đã đi vào trong vùng có từ trường một đoạn x_1 $\left(0 \le x_1 < \frac{b}{V}\right)$ là:

$$\Phi_2 = (B_0 + \beta t_{x_1+b})bx_1 + \frac{\alpha b x_1^2}{2} = \left[B_0 + \frac{\beta(x_1+b)}{V}\right]bx_1 + \frac{\alpha b x_1^2}{2}$$

Suất điện động cảm ứng qua vòng này là:

$$\epsilon_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -\frac{d\Phi_2}{dx_1}\frac{dx_1}{dt} = -V\left[\left(B_0 + \frac{\beta b}{V}\right)b + \left(\frac{2\beta}{V} + \alpha\right)bV\left(t - \frac{b}{V}\right)\right]$$

Khi đó biểu thức của cường độ dòng điện qua AB là:

$$i_{AB} = \frac{\sqrt{5}-2}{4} \cdot \frac{b^2(\alpha V+\beta)}{r} + \frac{7-3\sqrt{5}}{4} \cdot \frac{V}{r}\left[B_0 b + \left(\frac{2\beta}{V}+\alpha\right) bVt\right] \approx 80{,}7 + 45{,}6t$$

Trong đó đơn vị của i là μA còn đơn vị của t là s.

Lời kết: Dạng bài toán khung dây đi vào trong vùng có từ trường khá quen thuộc và có trong sách BDHSG và có ý tưởng tương đối đơn giản. Vì thế đây là một trong những bài dễ "nhặt điểm" trong đề thi năm nay. Tuy nhiên, các biểu thức của bài toán này tương đối dài dòng và vì thế phải hết sức chính xác trong khi làm và thay số. Câu khó nhất trong bài này là câu 2b khi cần phải hiểu mấu chốt như đã nêu ở trên, là câu hỏi có các biểu thức dài nhất và cần phải giải một hệ phương trình. Ba câu hỏi còn lại đều tương đối ngắn và dễ lấy điểm.

Các thành viên tham gia thảo luận và rà soát lời giải

- *Nguyễn Chí Trung, Giáo viên Vật lý Trường THPT Chuyên Bắc Ninh*

VPhO 39 (Năm học 2019/2020) – Ngày thi thứ hai (28.12.2019)

Câu IV

(Lời giải đề xuất bởi Trần Kỳ Vĩ, Sinh viên, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội)

1. Theo tính chất hình học của hệ:

$$\delta = d_2 - d_1 = \sqrt{D^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2} - \sqrt{D^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2}$$

$$= D\sqrt{1 + \left(\frac{x}{D} + \frac{a}{2D}\right)^2} - D\sqrt{1 + \left(\frac{x}{D} - \frac{a}{2D}\right)^2} \approx D\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{D} + \frac{a}{2D}\right)^2\right) - D\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{D} - \frac{a}{2D}\right)^2\right) \quad (1)$$

$$\delta = d_2 - d_1 = \frac{ax}{D}.$$

Ở vị trí có vân sáng: $\delta = \frac{ax}{D} = k\lambda, k \in Z \to \lambda = \frac{ax}{kD}$. (1)

Ở vị trí có vân tối $\delta = \frac{ax}{D} = (m + \frac{1}{2})\lambda, m \in Z \to \lambda = \frac{ax}{(m + \frac{1}{2})D}$ (2)

Đối với ánh sáng trắng $0,4\mu m \le \lambda \le 0,75\mu m$ và tại vị trí x = 10 mm ta tìm được các giá trị

* $3,3 \le k \le 6,25 \to k \in \{4,5,6\}$: tức là các màu $\lambda = 0,416\mu m$, $\lambda = 0,5\mu m$, $\lambda = 0,625\mu m$: có 3 bức xạ cho vân sáng tại x = 10 mm

* $2,8 \le m \le 5,75 \to m \in \{3,4,5\}$: có 3 bức xạ cho vân tối tại x = 10 mm đó là $\lambda = 0,456\mu m$, $\lambda = 0,556\mu m$, $\lambda = 0,714\mu m$.

* Ta tìm vị trí chỉ có 2 vân màu khác nhau trùng và xa nhất:

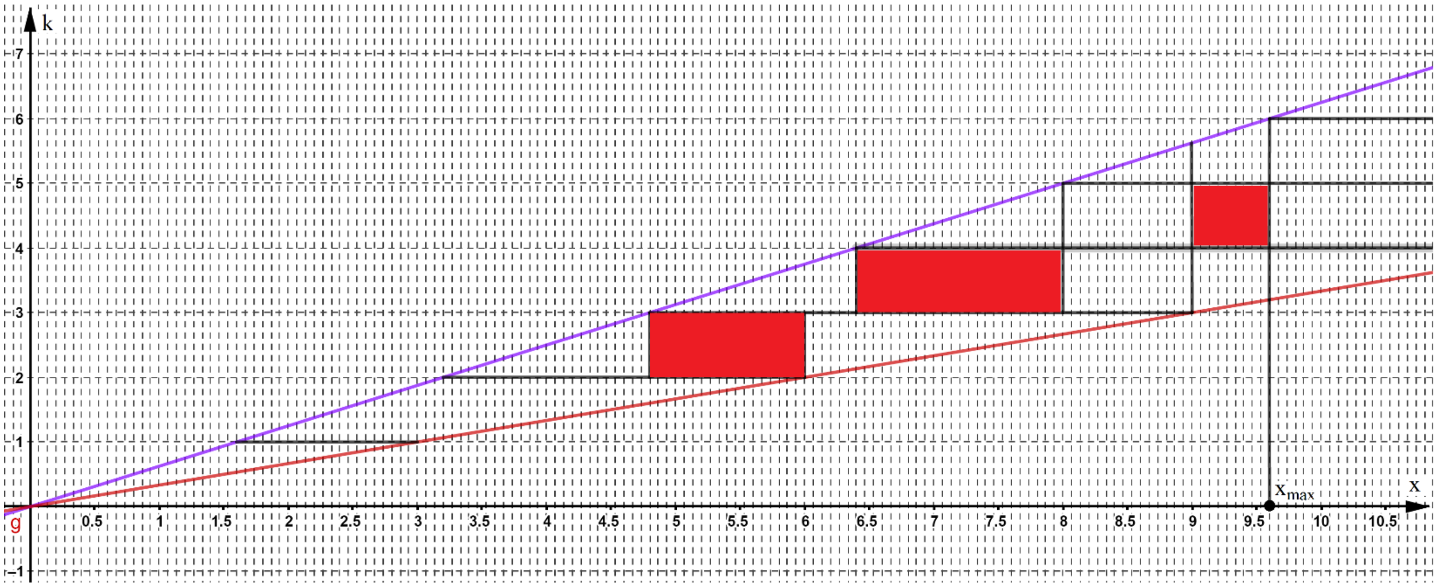
Dùng phương pháp vẽ quang phổ:

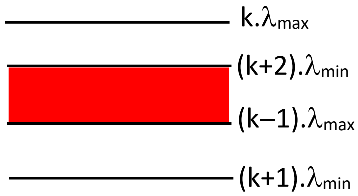
- **Quan điểm của GV Hoàng Công Viên, THPT Chuyên Hà Tĩnh**

+) Các vân sáng nằm trong giới hạn bởi hai đường thẳng

$$k = \frac{a}{\lambda_t D}x = \frac{0,5}{0,4.2}x = 0,625x \text{ và } k = \frac{a}{\lambda_d D}x = \frac{0,5}{0,75.2}x = \frac{1}{3}x.$$

Vùng màu đỏ trên hình chính là các vị trí hai bức xạ cho vân sáng. Từ hình vẽ ta được vị trí xa nhất là vị trí vân sáng bậc 6 của 0,4 $\Rightarrow x_{max} = \frac{6}{0,625} = 9,6$ mm. Ở đây chính xác x_{max} < 9,6 mm vì tại x = 9,6 mm có 3 bức xạ cho vân sáng.





Điều kiện: $(k+2)\lambda_{min} > (k-1)\lambda_{max} \Rightarrow (k+2)0{,}4 > (k-1)0{,}75$

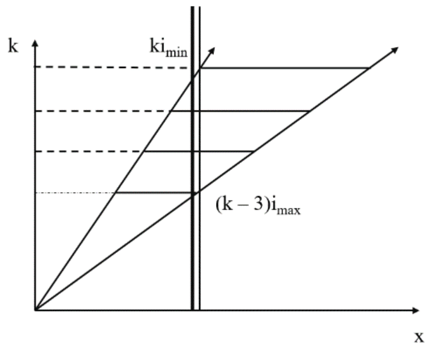
$\Rightarrow k < 4{,}3 \Rightarrow k_{max} = 4$.

Ta được vùng xa nhất: $x_{max} = (k+2)\frac{\lambda_{min}D}{a} = (4+2)\frac{\lambda_{min}D}{a} = 9{,}6\text{ mm}$

Vùng màu đỏ trên hình là vùng trùng nhau của bức xạ bậc k+1 = 5 và của bức xạ k = 4 (chính là vùng thứ 3 trên hình trên).

- **Quan điểm của Trần Quốc Toàn, THPT Chuyên Nguyễn Đình Chiểu, Đồng Tháp**

Dùng phương pháp vẽ quang phổ:



Vẽ giản đồ quang phổ, biểu diễn các vân sáng của quang phổ sẽ ứng với trục tung là bậc k nguyên. Vẽ tượng trưng ra các vị trí của k, lấy quang phổ xa nhất là quang phổ bậc k, vẽ về phía vân trung tâm các quang phổ bậc k – 1, k – 2, k – 3, từ đó khi quang phổ bậc k – 3 tạo với quang phổ bậc k một khe hẹp, khi đó trong khoảng giữa khe có 2 bức xạ cho vân sáng theo đề bài. Vùng xa nhất có 2 bức xạ cho vân sáng thì phổ bậc k không chồng lên phổ bậc k – 3. Lúc này đường phổ k "vươn" đến phổ (k – 3). Do đó:

$$x_{max} = k\frac{\lambda_{min}D}{a} > (k-3)\frac{\lambda_{max}D}{a}$$

$$\rightarrow k < \frac{3\lambda_{max}}{\lambda_{max} - \lambda_{max}} = \frac{3.0{,}75}{0{,}75 - 0{,}4} = 6{,}4$$

Hay $k_{max} = 6$.

$$x_{max} = k_{max}\frac{\lambda_{min}D}{a} = 6.\frac{0{,}4.10^{-6}.2}{0{,}5.10^{-3}} = 9{,}6.10^{-3}\text{m} = 9{,}6\text{mm}.$$

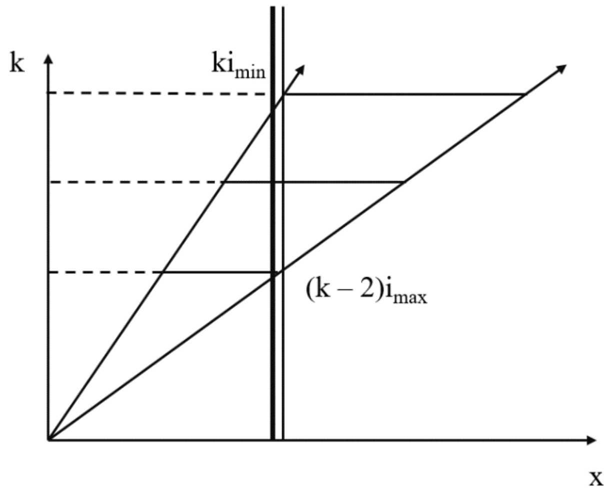
- **Quan điểm của người giải, Trần Kỳ Vĩ – HNUE:**

Do đề bài nêu rõ là "Tìm khoảng cách lớn nhất từ vân trung tâm đến vị trí mà tại đó có và chỉ có hai bức xạ cho vân sáng". Ở đây ta gọi vân trung tâm ở vị trí O, vị trí cần tìm là M, đề nêu rõ là tại M chỉ có 2 bức xạ cho vân sáng, tức một vị trí vân sáng nào đó của hai bức xạ này phải trùng nhau tại M và chỉ có 2 bức xạ này gây vâng sáng tại M thôi. Theo điều kiện trùng nhau về vị trí vân sáng của n bức xạ tại M

$x_M = k_1\frac{\lambda_1 D}{a} = ... = k_i\frac{\lambda_i D}{a} = k_{i+1}\frac{\lambda_{i+1} D}{a} = ... = k_n\frac{\lambda_n D}{a} \rightarrow k_i\lambda_i = \cos nt = \overline{k}\overline{\lambda}$ (Định lý Cauchy về giá trị trung bình – khác bất đẳng thức Cauchy) ($\overline{k}$ ở đây có thể không phải là số nguyên)

Mặt khác $\lambda_{\min} = 0,4\mu m \le \lambda_i \le 0,75\mu m = \lambda_{\max}$ Nên phải có $k_i \in G = \{k_{\min}; k_{\min}+1; ...; k_{\max}-1; k_{\max}\} \subset N^*$. Mà do chỉ có hai bức xạ nên tập G chỉ có 2 số tự nhiên liên tiếp là k_{min} và k_{max} và do đó có thể đặt k_{min} = k, và k_{max} = k+1.

Vẽ giản đồ quang phổ ra, biểu diễn của các vân sáng sẽ ứng với trục tung là bậc k nguyên. Lúc đó nếu một điểm cho hai bức xạ cho vân sáng tức là nó chồng lấn lên nhau sao cho khoảng giữa nó là hai vân sáng, vẽ tượng trưng ra các vi trí của k, lấy vân sáng xa nhất là quang phổ bậc k, vẽ xuống k – 1, k – 2, từ đó khi k – 2 chồng lấp với k, thì trong khoảng giữa nó có 2 vân sáng theo đề bài. Vùng xa nhất có 2 bức xạ cho vân sáng thì phổ bậc k không chồng lên phổ bậc k – 2. Lúc này đường phổ k trượt đến phổ (k – 2). Do đó:



$$x_{\max} = k\frac{\lambda_{\min} D}{a} > (k-2)\frac{\lambda_{\max} D}{a}$$

$$\rightarrow k < \frac{2\lambda_{\max}}{\lambda_{\max} - \lambda_{\max}} = \frac{3.0,75}{0,75-0,4} = 4,3$$

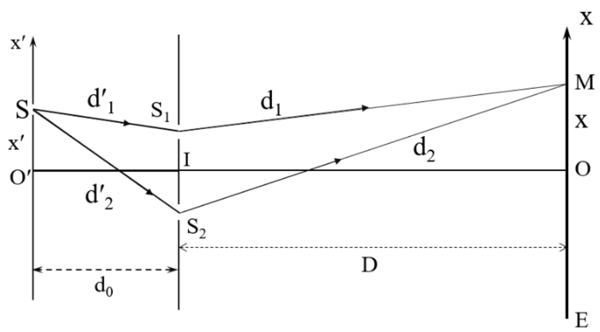
Hay k_{max} = 4.

$$x_{\max} = k_{\max}\frac{\lambda_{\min} D}{a} = 4.\frac{0,4.10^{-6}.2}{0,5.10^{-3}} = 6,4.10^{-3}\text{m} = 6,4\text{mm}.$$

Thử lại dễ thấy tại x = 6,4 chỉ có 2 màu trùng nhau là 2 màu có bước sóng lần lượt là 0,4μm và 0,53μm.

2. Giả sử khe S đi lên một đoạn x',

Khi đó tính tương tự như ý 1 hiệu quang trình từ S đi qua hai khe đến điểm M là:



$$\delta = (d_2' + d_2) - (d_1' + d_1) = (d_2 - d_1) + (d_2' - d_1') = \frac{ax}{D} + (d_2' - d_1')$$

$$(d_2' - d_1') = \sqrt{d_0^2 + \left(x' + \frac{a}{2}\right)^2} - \sqrt{d_0^2 + \left(x' - \frac{a}{2}\right)^2} \approx \frac{ax'}{d_0}. \quad (3)$$

$\delta = \frac{ax}{D} + \frac{ax'}{d_0}$, khi dời S khỏi O' sao cho một vân sáng tại x bị thế chỗ bởi một vân tối liền kề tức là độ biến đổi hiệu quang trình tại x bằng nửa bước sóng: $\Delta\delta = \Delta\left(\frac{ax}{D} + \frac{ax'}{d_0}\right) = \frac{a\Delta x'}{d_0} = \frac{\lambda}{2}$

Như vậy biểu thức e cần tính chính là: $e = \Delta x' = \frac{\lambda d_0}{2a} = 0{,}546 \text{ mm}$

Vân sáng trung tâm dời đến điểm O_1 tương ứng với điều kiện hiệu quang trình bằng 0 sẽ có tọa độ

$\delta = \frac{ax_{O_1}}{D} + \frac{ax'}{d_0} = 0 \rightarrow x_{O_1} = -\frac{D}{d_0}x'$, tức S, I, O_1 thẳng hàng.

Trong lí thuyết giao thoa xét đối với giao thoa hai sóng kết hợp có biên độ dao động giống nhau truyền từ khoảng cách d_1 và d_2 tới vị trí cần xét tính chất giao thoa được mô tả bởi hai dao động sáng

$$E_1 = E_0 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi d_1}{\lambda}\right),\ E_2 = E_0 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi d_2}{\lambda}\right)$$

$$E = E_1 + E_2 = 2E_0 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{\lambda}(d_1 + d_2)\right)\cos\frac{\pi}{\lambda}(d_2 - d_1)\ ,$$

Cường độ sáng trung bình theo thời gian do mỗi nguồn thứ cấp S_1, S_2 gây ra độc lập trên màn là:

$$I_1 = k\left\langle E_1^2 \right\rangle = kE_0^2 \left\langle \cos^2\left(\omega t - \frac{2\pi d_1}{\lambda}\right)\right\rangle = \frac{1}{2}kE_0^2$$

$$I_2 = k\left\langle E_2^2 \right\rangle = kE_0^2 \left\langle \cos^2\left(\omega t - \frac{2\pi d_2}{\lambda}\right)\right\rangle = \frac{1}{2}kE_0^2 = I_1 = I\ .$$

$I_0 \approx I_1 + I_2 = 2I$. [1]

Cường độ sáng máy thu thu được trên màn là cường độ sáng trung bình theo thời gian (cho rằng đo trong rất nhiều chu kỳ): $I = k\left\langle E^2 \right\rangle = 2kE_0^2 \cos^2\left(\frac{\pi(d_2 - d_1)}{\lambda}\right) = I_{\max}\cos^2\left(\frac{\pi\delta}{\lambda}\right)$, (4)

Trong đó $\overline{\cos^2\left(\omega t - \frac{\pi}{\lambda}(d_1 + d_2)\right)} = \frac{1}{2}$, $I_{\max} = 2kE_0^2 = 4I = 2I_0$, $\delta = d_2 - d_1$ là hiệu quang trình.

Tổng quát hóa, cường độ sáng do một nguồn tách thành hai nguồn thứ cấp truyền tới tại một điểm trên màn:

$$I = I_{\max}\cos^2\left(\frac{\pi\delta}{\lambda}\right) \quad (*)$$

Bây giờ khe sáng S bị mở rộng, ta có thể chia khe thành những khe rất bé bề dày dx' liên tiếp nhau, những khe này là những nguồn không kết hợp nên chúng không thể giao thoa với nhau. biết rằng đối với những khe rất hẹp thì khi tăng độ rộng khe lên bao nhiêu thì cường độ sáng tăng tỷ lệ bấy nhiêu lần tức là từ (*) và (4) ta suy được cường độ sáng nguyên tố do một khe nguyên tố dày dx' tại vị trí x' gây ra trên màn là:

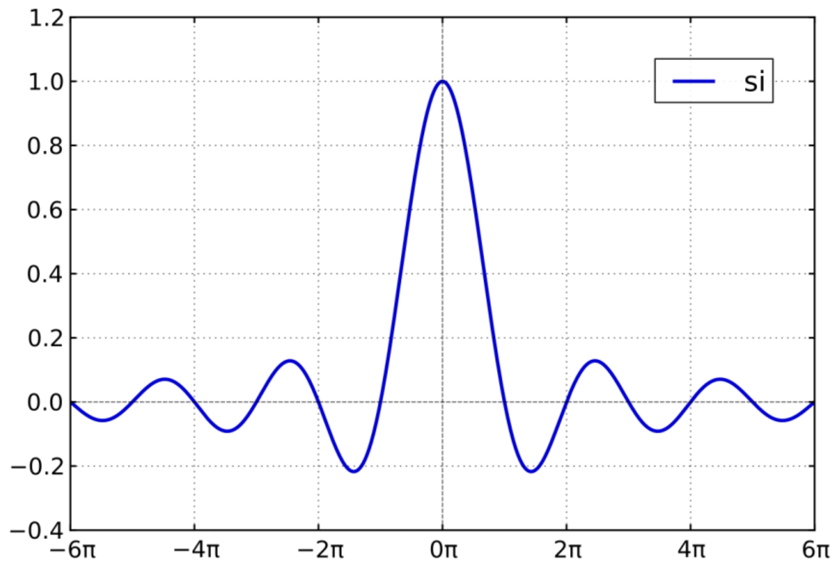
$$dI = \frac{I_{max}}{b}\cos^2\left(\frac{\pi\delta}{\lambda}\right)dx' dI = \frac{I_{max}}{b}\cos^2\left[\frac{\pi}{\lambda}\left(\frac{ax}{D}+\frac{ax'}{d_0}\right)\right]dx'.$$

Do các khe dx’ không giao thoa với nhau nên cường độ sáng trên màn là tổng các cường độ sáng nguyên tố này, tức là hình ảnh giao thoa sẽ chồng chất lên nhau.

$$I(x) = \frac{I_{max}}{b}\int_{-b/2}^{b/2}\cos^2\left[\frac{\pi}{\lambda}\left(\frac{ax}{D}+\frac{ax'}{d_0}\right)\right]dx' = \frac{I_{max}}{b}\left(b + b\frac{\sin\frac{\pi ab}{\lambda d_0}}{\frac{\pi ab}{\lambda d_0}}\cos\frac{2\pi ax}{\lambda D}\right)$$

$I(x) = I_{max}\left(1+\frac{\sin u}{u}\cos\frac{2\pi ax}{\lambda D}\right) = I_{max}\left(1+\sin c(u)\cos\frac{2\pi ax}{\lambda D}\right)$ (*), với $u = \frac{\pi ab}{\lambda d_0}$.

Hàm $\sin c(u) = \frac{\sin u}{u}$ hay hàm sin cardinal u là một hàm có dạng đồ thị sau đây:



Hàm sin c (u) đạt cực đại là 1 khi sinu = 0 và u = 0. Cường độ sáng trên màn đều nhau nếu thành phần phụ thuộc vào trong biểu thức (*) triệt tiêu. Tức là sin $\sin u = 0$ và $u \neq 0$ hay $u = \frac{\pi ab}{\lambda d_0} = k\pi$ (k nguyên dương do các trị số bên vế phải bằng dương) b nhỏ nhất khi k = 1 và do đó $b_{min} = \frac{\lambda d_0}{a} = 2e$, đây chính là bề rộng khe cho trong đề bài, như vậy trên màn cường độ sáng là đều nhau và hệ vân sẽ biến mất, ta không quan sát được vân giao thoa nữa.

3. Ở đây chắc có lẽ đề bài nhầm lẫn, hoặc dùng thuật ngữ hiếm, trong các giáo trình Việt Ngữ kinh điển về quang không có khái niệm ánh sáng “phân cực phẳng” – plane polarization mà chỉ có khái niệm ánh sáng “phân cực thẳng” – linear polarization, còn ở các giáo trình nước ngoài hay dùng linear polarization hơn plane polarization, đại ý của đề có thể nêu rõ là ánh sáng có vector cường độ điện trường chỉ dao động theo một phương xác định hay còn gọi là ánh sáng phân cực hoàn toàn. Còn ánh sáng tự nhiên là ánh sáng có vector cường độ điện trường dao động theo mọi phương nằm trong mặt phẳng vuông góc với phương truyền sáng. Do đó việc cộng cường độ sáng của hai nguồn ánh sáng tự nhiên là vô cùng khó. Ở đây có lẽ đề bài yêu cầu tính cường độ sáng đối với ánh sáng phân cực thẳng, để cộng vector cường độ điện trường được dễ dàng.

Dễ thấy lập luận như câu 2, cường độ sáng tại một điểm x trên màn do một khe S và gây ra có dạng:

$$I_S = I_{\max}\cos^2\left(\frac{\pi\delta}{\lambda}\right) = 2I_0\cos^2\left[\frac{\pi}{\lambda}\left(\frac{ax}{D}+\frac{ab}{2d_0}\right)\right] \text{[2]}$$

$$I_{S'} = I_{\max}\cos^2\left(\frac{\pi\delta}{\lambda}\right) = 2I_0\cos^2\left[\frac{\pi}{\lambda}\left(\frac{ax}{D}-\frac{ab}{2d_0}\right)\right] \text{[3]}$$

Hai nguồn này không kết hợp nên tổng cường độ sáng tại một vị trí x trên màn là:

$$I(x) = I_S + I_{S'} = 2I_0\left\{\cos^2\left[\frac{\pi}{\lambda}\left(\frac{ax}{D}+\frac{ab}{2d_0}\right)\right]+\cos^2\left[\frac{\pi}{\lambda}\left(\frac{ax}{D}-\frac{ab}{2d_0}\right)\right]\right\} = 2I_0\left[1+\cos\left(\frac{2\pi ax}{\lambda D}\right)\cos\left(\frac{\pi ab}{\lambda d_0}\right)\right]. \text{[4]}$$

Tại vân trung tâm $I(0) = 4I_0\cos^2\dfrac{\pi ab}{2\lambda d_0}$.[6]

Trở lại đề ta ta thấy hai khe S_1 , S_2 có độ rộng như nhau, nên $I_{\max} = 2kE_0^2 = 4\dfrac{1}{2}kE_0^2 = 4I = 2I_0$, với E_0 là biên độ dao động sáng của một khe S_1, S_2.[5]

- **Tham khảo thêm:**

1. Ta dễ dàng tính được hệ số k thông qua thuyết điện từ Maxwell:

Theo thuyết điện từ Maxwell: người ta định nghĩa **độ dòng năng lượng Umov – Poynting chính là v**ận tốc truyền năng lượng của sóng chạy đơn sắc bằng mật độ năng lượng điện từ trường nhân với vận tốc pha của sóng này:

$\vec{S} = \omega\vec{v} = \vec{E}\wedge\vec{H}$, mà cũng theo thuyết điện từ Maxwell trong sóng điện từ phẳng đơn sắc (sóng điện từ phẳng khác sóng "phân cực phẳng"),, từ trường H và điện trường E có liên hệ về độ lớn $H = \sqrt{\dfrac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}}E$, vector $\vec{H}\perp\vec{E}$. Ý nghĩa của vector Umov chính là năng lượng truyền đến một mặt trên một đơn vị diện tích trong một đơn vị thời gian, đây chính là cường độ sáng, do đó trung bình độ lớn của S thể hiện cường độ sáng đo được trên màn:

$$S = E.H = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}}E^2 = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}}E_0^2\cos^2(\omega t - kx) \to I = \langle S\rangle = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}}E_0^2\langle\cos^2(\omega t - kx)\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}}E_0^2.$$

Trong môi trường chân không thì $\varepsilon = 1, \mu = 1$, tức là $I = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_0^2 = \dfrac{1}{2}c^2\varepsilon_0E_0^2 = \dfrac{1}{2}kE_0^2$, vậy trong đề bài

$$k = c^2\varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}.$$

2. Ở ý 2 và 3 ta không quan tâm đến cường độ sáng nhiễu xạ, do đề ghi rõ các khe rất hẹp và cũng không cho độ rộng khe để tính, thực chất cường độ sáng trên màn phải là tổ hợp của cường độ sáng nhiễu xạ và giao thoa.

3. Ở đây người giải ko quan niệm cường độ sáng chỉ là bình phương biên độ của cường độ điện trường tổng hợp mà là. Trung bình theo thời gian của bình phương cường độ điện trường. Bởi vì sao có quan điểm này, là vì người giải quan điểm máy thu đo cường độ sáng giao thoa là đo giá trị cường độ sáng trung bình theo thời gian. Chứ

máy đo không đo cường độ sáng tức thời. Nên kết quả có thể khác với một số giáo trình đại học như PFIEV Quang học sóng. Tham khảo thêm Quang Học – Ngô Quốc Quýnh.

4. Thực ra trong [1], [2], [3], [4], [5] các phép toán chỉ là gần đúng theo khai triển Fourier, vì cho dù là đề bài nói hai khe S_1 và S_2 cùng độ lớn nhưng khoảng cách từ hai khe này tới S hoặc khoảng cách tới S' là không đều nhau, nên không thể coi $I_1 = I_2$, ở đây ta lấy xấp xỉ mà thôi, với quan điểm khoảng dịch của S và S' so với trung trực của S_1S_2 không là bao tức $S_1S \approx S_2S$, và $S_1S' \approx S_2S'$.

5. Ta có [6] vì coi rằng có quan điểm coi tại x = 0 thì có vân sáng trung tâm, thực tế nhận thấy từ câu 2 chỉ cần chia khe S thành những nguồn nhỏ thì có các nguồn đó đã là độc lập rồi, huống hồ các nguồn xa nhau như đè cho S và S'. Mặt khác không thể cứ cộng hết 4 điện trường do S và S' truyền qua khe S_1, S_2 trên màn như kiểu là các nguồn kết hợp được, vì 2 thành phần điện trường ở đây chưa chắc đã cùng phương dao động để cộng kiểu phức hay kiểu giản đồ Fresnel. Chỉ có thể biết được thành phần điện trường của khe S' sinh ra do truyền qua S_1 và S_2 là $\vec{E}_3$ và $\vec{E}_4$ giao thoa nhau; khe S sinh ra điện trường $\vec{E}_1$ và $\vec{E}_2$ giao thoa nhau. Do đó cường độ sáng là tổng cường độ sáng độc lập. Do đó việc võ đoán tại x = 0 có vân trung tâm là một võ đoán của người giải, không căn cứ. Có nhiều quan điểm yêu cầu phải cộng hết 4 vector cường độ điện trường này, tuy nhiên đối với những nguồn độc lập cường độ sáng máy thu thu được là độc lập và chồng chất. Hãy xem trong BDHSG Quang học 2 Vũ Quang, NXBGD 2013, Pg. 49, 2nd Edition, có đoạn "… Nếu mở rộng nguồn đến mức hai nửa của nó coi như hai nguồn sáng độc lập….". Vậy rõ ràng ở đây tồn tại quan niệm khi hai nguồn sơ cấp ở xa nhau một khoảng lớn thì coi hai nguồn là độc lập với nhau. Và tác giả bài giải nhìn nhận bài toán dựa trên quan điểm này:

Giữa 5 vân sáng liên tiếp có 4 khoảng vân. Do đó, ta có :

$$i = \frac{3}{4}\text{ mm} = 0{,}75\text{ mm}$$

Tính ra $\lambda = [0{,}594.10^{-6}\text{ m}] = 0{,}594\ \mu\text{m}$. 0,613 μm.

Vân sáng chính giữa nằm tại điểm I trên đường SO (Hình 2.6).

b) Giả sử ta tịnh tiến khe sáng S một đoạn rất nhỏ Δ theo phương vuông góc với đường SOI, đến vị trí S' ở phía dưới S trên hình 2.6. Dễ dàng thấy rằng :

– Góc lệch của các tia sáng vẫn là δ.

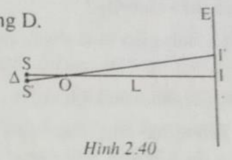
– Các ảnh S_1 và S_2 đều tịnh tiến xuống phía dưới một đoạn Δ, đến các vị trí S_1' và S_2'.

– Ta có $S_1'S_2' = S_1S_2 = a$

– Khoảng cách từ $S_1'S_2'$ đến màn ảnh vẫn bằng D.

– Khoảng vân vẫn bằng i = 0,75 mm.

– Vân sáng chính giữa di chuyển đến điểm I' là giao điểm của tia S'O với màn ảnh E (Hình 2.40).



Hình 2.40

Đó là vì tia S'O đi qua cả hai lăng kính, coi như đi qua một bản mặt song song theo phương vuông góc với mặt bản, nên sẽ truyền thẳng. Hiệu quang trình giữa hai tia $S_1'OI'$ và $S_2'OI'$ bằng không.

$$\text{Ta có : } \frac{II'}{SS'} = \frac{II'}{\Delta} = \frac{L}{d} = 10 \Rightarrow II' = 10\Delta$$

Nếu nguồn mở rộng đến mức hai nửa của nó coi như hai nguồn sáng độc lập, không kết hợp, có điểm giữa nằm tại S và S' thì trên màn ảnh E ta sẽ có hai hệ thống vân giao thoa chồng chất lên nhau. Hai hệ thống vân này có cùng khoảng vân, có vân sáng chính giữa nằm tại I và I' và không giao thoa với nhau. Nếu vân sáng của hệ nọ trùng với vân tối của hệ kia thì màn sẽ sáng đều và các vân giao thoa sẽ biến mất.

Vậy, điều kiện để hệ vân biến mất là :

$$II' = \frac{i}{2} \Rightarrow \Delta = \frac{i}{20}$$

49

4A-BDVLQHOC

Cũng không thể xem mặt phẳng dao động vector $\vec{E}$ khi hai nguồn ở xa coi rằng gần bằng nhau, vì chỉ cần lệch nửa bước sóng các điều kiện giao thoa đã thay đổi hoàn toàn. Quan điểm này trình bày trong Tuyển tập bài tập VL NC THPT Ngô Quốc Quýnh tập V, NXBGD 2007, Pg.185.

và ở cách màn M một khoảng :

$$D' = D - F_1F'_1 = D - l\left(1-\frac{1}{n}\right) = D\left[1-\frac{(n-1).l}{n.D}\right].$$

Coi hệ vân bây giờ là được tạo bởi hai nguồn F'_1, F'_2, thì khoảng vân i'' là :

$$i'' = \frac{\lambda D'}{a} = \frac{\lambda D}{a}\left[1-\frac{(n-1).l}{n.D}\right] = i.\left[1-\frac{(n-1).l}{D}\right].$$

Lập luận này sai, vì để tính độ dịch chuyển $F_1F'_1$, trong công thức (3), ta đã phải coi $\frac{tgi}{tgr}$ là xấp xỉ bằng $\frac{\sin i}{\sin r} = n$, tức là đã lấy $l_1 \approx l$ và $l_2 \approx l$. Cách làm gần đúng này áp dụng được cho quang hình, khi ta chỉ quan tâm tới sự tạo ảnh nên có thể bỏ qua những độ biến thiên Δl hàng chục bước sóng. Còn ở đây, chỉ cần l_1, l_2 biến thiên nửa bước sóng, thì vân sáng đã thành vân tối, nên không thể coi l_1 và l_2 bằng l được, tức là không áp dụng công thức (3) được. Nhưng nếu $\frac{(n-1).l}{D}$ nhỏ hơn 1 rất nhiều, ta có thể tính i' một cách gần đúng là :

$$i' = \frac{i}{1+\frac{(n-1).l}{D}} \approx i.\left[1-\frac{(n-1).l}{D}\right] \approx i'$$

và hai cách làm sẽ dẫn đến kết quả hầu như bằng nhau.

Tài liệu tham khảo:

1. Prolems and Solutions on Optics, Yung Kou Lim
2. Quang học – Ngô Quốc Quýnh
3. Quang học – Vũ Quang NXB ĐHQG
4. Optics, fifth edition – Eugene Hecht

Các thành viên tham gia thảo luận và rà soát lời giải

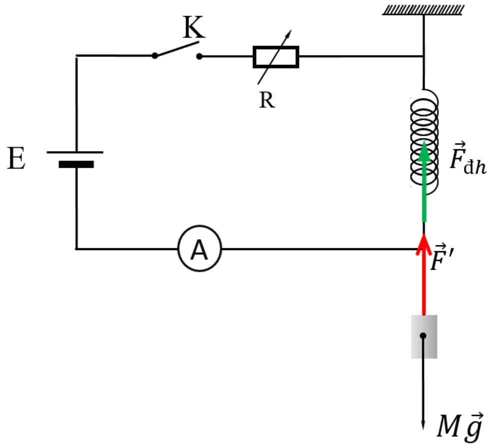
- *Hoàng Công Viên, Trường THPT Chuyên Hà Tĩnh*

VPhO 39 (Năm học 2019/2020) – Ngày thi thứ hai (28.12.2019)

Câu V

(*Lời giải đề xuất bởi Trần Đức Huy, Sinh viên*)

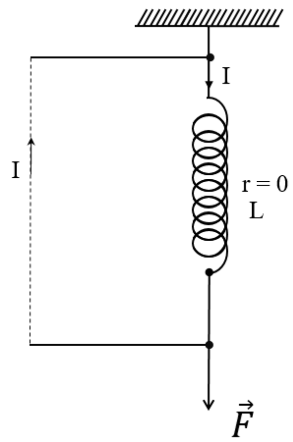
1. Sơ đồ bố trí thí nghiệm:



Nối lò xo nối tiếp với biến trở và nguồn, đồng thời treo lò xo thẳng đứng và móc các trọng vật đủ nặng vào đầu tự do của lò xo để các vòng không còn sít nhau như hình vẽ:

Các công thức cần thiết:

Trước tiên chúng ta sẽ đi tìm lực mà lò xo tác dụng lên trọng vật do dòng điện tương tác với từ trường do chính nó gây ra.



Xét một cuộn dây solenoid siêu dẫn có N vòng dây, tiết diện S, chiều dài l, đang có dòng điện I chạy qua nó và có một lực F có phương song song với trục và hướng ra ngoài cuộn dây tác dụng lên đầu tự do của để giữ cho cuộn dây cân bằng. Năng lượng từ trường trong cuộn dây là:

$$U_m = \frac{1}{2}I\Phi = \frac{\Phi^2}{2L} = \frac{\Phi^2}{2\mu_0 N^2 S}l$$

Trong đó Φ là từ thông qua cuộn dây và $L = \frac{\mu_0 N^2 S}{l}$ là độ tự cảm của cuộn dây.

Thực hiện dịch chuyển ảo bằng cách kéo dài cuộn dây một đoạn nhỏ δl. Nhớ rằng đối với cuộn dây siêu dẫn thì từ thông qua nó được bảo toàn, nên độ thay đổi năng lượng từ trường là:

$$\delta U_m = \frac{\Phi^2}{2\mu_0 N^2 S}\delta l$$

Vì hệ cân bằng nên:

$$F\delta l = \delta U_m \Rightarrow F = \frac{\Phi^2}{2\mu_0 N^2 S} = \frac{\left(\frac{\mu_0 N^2 S}{l} I\right)^2}{2\mu_0 N^2 S} = \frac{\mu_0 N^2 S}{2l^2} I^2$$

Theo định luật 3 Newton, thì lực mà cuộn dây tác dụng lên trọng vật sẽ cùng phương ngược chiều cùng độ lớn với lực F mà trọng vật tác dụng lên cuộn dây. Vì thế nên lực mà cuộn dây tác dụng lên trọng vật F' sẽ hướng về phía cuộn dây như hình vẽ. Chúng ta cũng lưu ý rằng, lực F' này là do tương tác của dòng điện chạy qua cuộn dây với từ trường do chính nó gây ra, cho nên nó không phụ thuộc vào điện trở của cuộn dây và mạch điện mà cuộn dây được nối vào mà chỉ phụ thuộc vào dòng điện chạy qua cuộn dây. Vì thế đối với lò xo trong thí nghiệm này, lực F' do nó tác dụng lên trọng vật cũng giống như lực chúng ta vừa tìm được trong trường hợp cuộn dây solenoid siêu dẫn và cô lập như vừa rồi.

Quay trở lại với bố trí thí nghiệm của chúng ta. Nếu cường độ dòng điện chạy qua lò xo là I và chiều dài của nó là l, tổng khối lượng của các trọng vật móc vào đầu tự do của lò xo là M và các vòng lò xo không sít nhau (nếu như các vòng lò xo sít nhau thì chúng ta còn có cả các lực tiếp xúc) thì ta có phương trình cân bằng lực như sau:

$$Mg - k(l - l_0) - \frac{\mu_0 N^2 S}{2l^2} I^2 = 0$$

Suy ra:

$$\frac{\mu_0 N^2 S}{2l^2} I^2 = -kl + (Mg + kl_0)$$

Trong đó I có thể đo được bằng am-pe kế và l có thể đo được bằng thước. Đặt $Y = \frac{\mu_0 N^2 S}{2l^2} I^2$, $X = l$, $b = k$, $a = Mg + kl_0$ thì chúng ta có được phương trình tuyến tính $Y = bX + a$. Từ phép hồi quy tuyến tính chúng ta có thể tìm được giá trị của độ dốc b, từ đó chúng ta tìm được độ cứng của lò xo: $k = -b$.

2.

Các bước tiến hành thí nghiệm:

+ Treo lò xo thẳng đứng và mắc lò xo vào mạch điện như hình vẽ.

+ Treo các trọng vật vào đầu tự do của lò xo đủ nặng để cho các vòng lò xo không còn sít nhau nữa nhưng cũng không quá nặng để tránh cho lò xo không bị "mỏi".

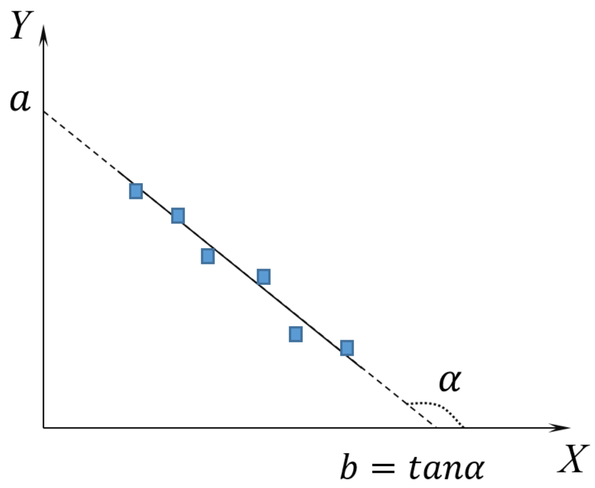
+ Đóng khóa K, thay đổi giá trị của biến trở để thay đổi giá trị của dòng điện, nếu thấy các lò xo không sít nhau thì đo chiều dài của lò xo tương ứng với cường độ dòng điện I lúc đó. Và tiếp tục thay đổi giá trị của biến trở và ghi lại các số liệu I, l tương ứng. Nếu như các vòng lò xo sít nhau thì không được lấy số liệu và phải giảm dòng điện xuống (bằng cách tăng giá trị của biến trở).

+ Sau khi thu được các số liệu thì tính các giá trị Y và X tương ứng. Vẽ đồ thị của Y theo X, ước lượng và vẽ một đường thẳng gần đi qua tất cả các điểm và đo giá trị của độ dốc của đường thẳng này. Ngoài ra, chúng ta có thể tìm độ dốc bằng phương pháp bình phương tối thiểu. Từ đó tìm được độ cứng của lò xo: $k = -b$.

Bảng thu thập số liệu:

I (đơn vị dòng điện)	l (đơn vị chiều dài)	Y (đơn vị lực)	X (đơn vị chiều dài)
I_1	l_1	Y_1	X_1
I_2	l_2	Y_2	X_2
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
I_2	l_2	Y_2	X_2

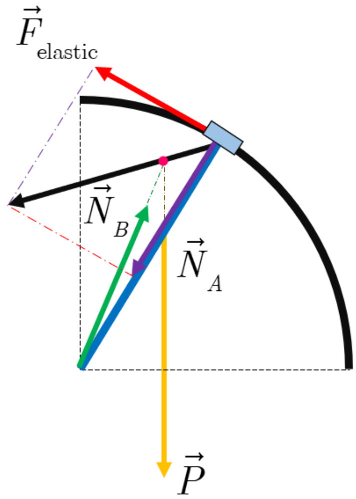
Đồ thị xử lý số liệu:



VPhO 41 – Ngày thi thứ nhất (04/03/2022)

CÂU I

**Lời giải đề xuất bởi [sigma] và qvt*



1*a*. Xét cân bằng moment đối với trục quay vuông góc với mặt phẳng và đi qua B, để moment của trọng lực cân bằng với moment của lực đàn hồi thì lò xo phải bị nén

$$P\cdot\frac{R}{2}\cos\theta_0 = F_{Elastic}R$$
$$\Leftrightarrow \frac{mg}{2}\cos\theta_0 = k\ \ l_0 - R\theta_0$$
$$\Leftrightarrow l_0 = R\theta_0 + \frac{mg}{2k}\cos\theta_0 = 40,01572\ \text{cm}$$

1*b*. Kích thích dao động để góc $\theta_0 \to \theta_0 + \theta \quad \theta > 0,\ \theta \ll \theta_0$, tổng moment tác dụng lên thanh (với chiều dương là chiều ngược kim đồng hồ)

$$M = -mg\frac{R}{2}\cos\ \ \theta_0 + \theta\ \ + k\left[l_0 - R\ \ \theta_0 + \theta\ \ \right] = -\left[kR^2 - mg\frac{R}{2}\sin\theta_0\right]\theta$$

Xét chuyển động quay của thanh quanh đầu B ta có

- Định lý Huygens-Steiner: $I_B = I_G + \frac{mL^2}{2} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\frac{m}{L}x dx + \frac{mL^2}{2} = \frac{mL^2}{3}$
- Khi $L = R$, theo phương trình chuyển động quay của thanh

$$\theta'' = \frac{M}{I_B} = -\left(\frac{3k}{m} - \frac{3g}{2}\sin\theta_0\right)\theta$$

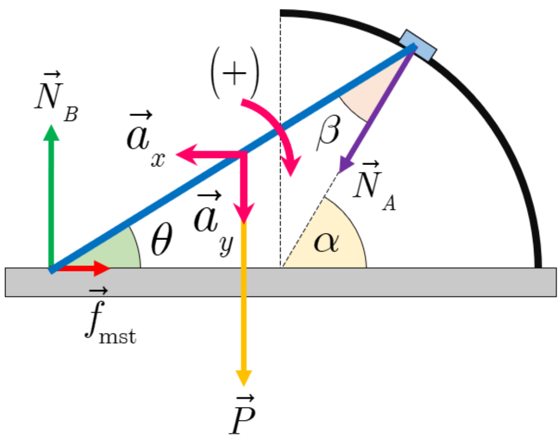
Vậy thanh dao động điều hòa quanh vị trí cân bằng nếu được kích thích dao động bé, chu kỳ dao động của thanh được xác định

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{3k}{m} - \frac{3g}{2R}\sin\theta_0}} = 0,37991\ \text{sec}$$

2*a*. Theo định lý hàm sine trong tam giác

$$\frac{\sin\ \ \pi - \alpha}{L} = \frac{\sin\theta}{R},$$

do đó $\alpha = \frac{\pi}{4},\ \beta = \frac{\pi}{12}.$



Xét chuyển động song phẳng của thanh gồm:

- Chuyển động quay của thanh quanh khối tâm

$$N_A\frac{L}{2}\sin\frac{\pi}{12}+N_B\frac{L}{2}\cos\frac{\pi}{6}-f_{\text{mst}}\frac{L}{2}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{12}mL^2\gamma$$

- Vì đầu B thanh trượt dọc theo mặt sàn nên ta dễ có: $f_{\text{mst}}=\mu N_B$

Kết hợp hai phương trình trên, ta được

$$N_A\sin\frac{\pi}{12}+N_B\left(\cos\frac{\pi}{6}-\mu\sin\frac{\pi}{6}\right)=\frac{m}{6}\gamma L$$

Chuyển động tịnh tiến của thanh

$$N_A\cos\frac{\pi}{4}-\mu N_B=ma_x,$$

$$mg+N_A\sin\frac{\pi}{4}-N_B=ma_y$$

Tại $t=0,$ vật B chuyển động dọc theo mặt sàn nên $a_{y-B}=0$

$$a_y=\gamma\frac{L}{2}\cos\frac{\pi}{6}\rightarrow a_y=\frac{\sqrt{3}}{4}\gamma L,$$

vật A chuyển động tròn trên cung CD, vì $v_A=0$ nên gia tốc hướng tâm bằng 0,

$$a_x\cos\frac{\pi}{4}+a_y\sin\frac{\pi}{4}+\gamma\frac{L}{2}\sin\frac{\pi}{12}=0\rightarrow a_x=-\frac{2\sqrt{3}-1}{4}\gamma L$$

Từ các dữ kiện trên, ta xác định được hệ phương trình:

$$\begin{cases}-\frac{m}{6}\gamma L+N_A\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)+N_B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-0,2\right)=0\\ m\gamma L\frac{2\sqrt{3}-1}{4}+N_A\frac{\sqrt{2}}{2}-0,4N_B=0\\ m\frac{\sqrt{3}}{4}\gamma L-N_A\frac{\sqrt{2}}{2}+N_B=mg\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\gamma L=0,74702g\\ N_A=-0,44683mg\\ N_B=0,36057mg\end{cases}$$

2*b*. Lực do sàn ngang tác dụng lên đầu dưới của thanh

$$Q=\sqrt{N_B^2+f_{\text{mst}}^2}=N_B\sqrt{1+\mu^2}=0,38835mg$$

*** Các thành viên CLB Vật lí xPhO tham gia thực hiện lời giải tham khảo đề thi VPhO 41**

- *[sigma]*
- *Phạm Quang Anh*, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHGQ Hà Nội
- *Nguyễn Hoài Anh*, Giáo viên Trường THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Nội
- *Nguyễn Mạnh Dũng*, Trường THPT chuyên Bắc Kạn
- *Nguyễn Hải Dương*, Giáo viên Trường THPT Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định
- *GMC*
- *Phùng Minh Hiệp*, Sinh viên Trường Đại học bách khoa Hà Nội
- *Trần Văn Hiếu*, Trường Đại học Sư phạm TP. Hồ Chí Minh
- *HƯNG THỊNH AN - BÌNH ĐỊNH*
- *Quang Huy*
- *Võ Trương Thiên Kỳ*, Trường THPT Chuyên Lương Văn Chánh, Phú Yên
- *Nguyễn Thành Long*, sinh viên Trường Đại học Bách khoa Hà Nội
- *Lê Duy Nhật*, Giáo viên Trường THPT Gia Định, Tp. Hồ Chí Minh
- *Phưn Phưn*
- *Physicium*
- *qvt*
- *Nguyễn Quốc Sơn*
- *Thanh Tân*
- *Trần Kỳ Vĩ*, Giảng viên Trường Đại học Sư phạm Hà Nội
- *Zinc*

VPhO 41 – Ngày thi thứ nhất (04/03/2022)

CÂU II

**Lời giải đề xuất bởi [sigma] và qvt*

1. Phương trình Poisson cho quá trình đoạn nhiệt

$$\begin{aligned} &pV^{\gamma} = \text{const} \\ &\to TV^{\gamma-1} = \text{const} \\ &\to T^{\frac{1}{\gamma-1}}V = \text{const} \end{aligned}$$

Ta có giả thiết

$$V_B = mV_A \text{ và } V_D = mV_C$$

Mà ta lại có

$$T_1^{\frac{1}{\gamma-1}}V_B = T_2^{\frac{1}{\gamma-1}}V_C \text{ và } T_2^{\frac{1}{\gamma-1}}V_D = T_3^{\frac{1}{\gamma-1}}V_E \text{ và } T_3^{\frac{1}{\gamma-1}}V_F = T_1^{\frac{1}{\gamma-1}}V_A$$

Lấy tích số các vế trên ta được

$$V_B V_D V_F = V_C V_E V_A \text{ vậy ta có kết quả } V_E = m^2 V_F$$

2. Công của quá trình đẳng nhiệt

$$A = \int pdV = nRT\ln\frac{V_f}{V_i}$$

Công của quá trình đoạn nhiệt

$$A = -\Delta U = nC_V \ T_f - T_i$$

Công của cả chu trình

$$A = nR \ T_1 + T_2 \ \ln m - nRT_3\ln\frac{V_F}{V_E} + nC_V\underbrace{\left[\ T_1 - T_2 \ + \ T_2 - T_3 \ + \ T_3 - T_1 \ \right]}_{0}$$

$$A = nR \ T_1 + T_2 \ \ln m - nRT_3\ln\frac{V_F}{VE} = nR \ T_1 + T_2 - 2T_3 \ \ln m$$

3. Nhiệt lượng của quá trình đẳng nhiệt

$$Q = A = nRT\ln\frac{V_f}{V_i}$$

Nhiệt lượng đoạn nhiệt: $Q = 0$

Tổng nhiệt lượng nhận:

$$Q_+ = A_{AB} + A_{CD} = nR \ T_1 + T_2 \ \ln m$$

4. Vậy hiệu suất chu trình dễ có

$$\eta = 1 - \frac{2T_3}{T_1 + T_2}$$

*** Các thành viên CLB Vật lí xPhO tham gia thực hiện lời giải tham khảo đề thi VPhO 41**

- *[sigma]*
- *Phạm Quang Anh*, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHGQ Hà Nội
- *Nguyễn Hoài Anh*, Giáo viên Trường THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Nội
- *Nguyễn Mạnh Dũng*, Trường THPT chuyên Bắc Kạn
- *Nguyễn Hải Dương*, Giáo viên Trường THPT Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định
- *GMC*
- *Phùng Minh Hiệp*, Sinh viên Trường Đại học bách khoa Hà Nội
- *Trần Văn Hiếu*, Trường Đại học Sư phạm TP. Hồ Chí Minh
- *HƯNG THỊNH AN - BÌNH ĐỊNH*
- *Quang Huy*
- *Võ Trương Thiên Kỳ*, Trường THPT Chuyên Lương Văn Chánh, Phú Yên
- *Nguyễn Thành Long*, sinh viên Trường Đại học Bách khoa Hà Nội
- *Lê Duy Nhật*, Giáo viên Trường THPT Gia Định, Tp. Hồ Chí Minh
- *Phưn Phưn*
- *Physicium*
- *qvt*
- *Nguyễn Quốc Sơn*
- *Thanh Tân*
- *Trần Kỳ Vĩ*, Giảng viên Trường Đại học Sư phạm Hà Nội
- *Zinc*

VPhO 41 – Ngày thi thứ nhất (04/03/2022)

CÂU III

**Lời giải đề xuất bởi - Phùng Minh Hiệp, Sinh viên Trường Đại học bách khoa Hà Nội*

1. $E = \int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{\sigma.d\alpha.r.dr}{(r^2+h^2)}.\cos(\theta)$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{\sigma.d\alpha.r.dr.h}{(r^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.\left(1-\frac{h}{\sqrt{(R^2+h^2)}}\right)$$

Khi $h \ll R$ => $E \approx \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

2.a

Năng lượng điện trường giữa 2 bản là:

$$U = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E^2\pi R^2 d$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{V}{d}\right)^2\pi R^2 d = \frac{\varepsilon_0 V^2\pi R^2}{2d}$$

Lực tương tác giữa 2 bản là:

$$F = \frac{\partial U}{\partial d} = -\frac{\varepsilon_0 V^2\pi R^2}{2d^2}$$

b.

b1/ Đĩa kim loại đặt trên bản dưới thì điện tích sẽ phân bố trên mặt bản và mặt đĩa.

Ta có: $V = E.d = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.d \Rightarrow \sigma = \frac{\varepsilon_0.V}{d}$

Điện tích trên đĩa kim loại là: $q = -\sigma.\pi r^2 = -\frac{\varepsilon_0 V\pi r^2}{d}$

b2/ Cường độ điện trường do 2 bản gây ra giữa 2 bản là:

$$E = \frac{V}{d} \quad (1)$$

Xét sự va chạm giữa lần thứ n và n+1, ta có:

$$|q|.E.d = \frac{1}{2}mv_{t(n+1)}^2 - \frac{1}{2}mv_{s(n)}^2 \quad (2)$$

$$k = \frac{v_{s(n+1)}}{v_{t(n+1)}} \quad (3)$$

Từ (1)(2)(3) => $|q|.E.d = \frac{1}{2}m\left(\frac{v_{s(n+1)}}{k}\right)^2 - \frac{1}{2}mv_{s(n)}^2$ (4)

Sau nhiều lần va chạm, v_s tiến đến tới hạn, $v_{s(n)} = v_{s(n+1)} = v_{sgh}$ (5)

Thay (5) vào (4), suy ra:

$$v_{sgh} = \sqrt{\frac{2\varepsilon_0 V^2\pi r^2 k^2}{md(1-k^2)}}$$

*** Các thành viên CLB Vật lí xPhO tham gia thực hiện lời giải tham khảo đề thi VPhO 41**

- *[sigma]*
- *Phạm Quang Anh*, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHGQ Hà Nội
- *Nguyễn Hoài Anh*, Giáo viên Trường THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Nội
- *Nguyễn Mạnh Dũng*, Trường THPT chuyên Bắc Kạn
- *Nguyễn Hải Dương*, Giáo viên Trường THPT Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định
- *GMC*
- *Phùng Minh Hiệp*, Sinh viên Trường Đại học bách khoa Hà Nội
- *Trần Văn Hiếu*, Trường Đại học Sư phạm TP. Hồ Chí Minh
- *HƯNG THỊNH AN - BÌNH ĐỊNH*
- *Quang Huy*
- *Võ Trương Thiên Kỳ*, Trường THPT Chuyên Lương Văn Chánh, Phú Yên
- *Nguyễn Thành Long*, sinh viên Trường Đại học Bách khoa Hà Nội
- *Lê Duy Nhật*, Giáo viên Trường THPT Gia Định, Tp. Hồ Chí Minh
- *Phưn Phưn*
- *Physicium*
- *qvt*
- *Nguyễn Quốc Sơn*
- *Thanh Tân*
- *Trần Kỳ Vĩ*, Giảng viên Trường Đại học Sư phạm Hà Nội
- *Zinc*

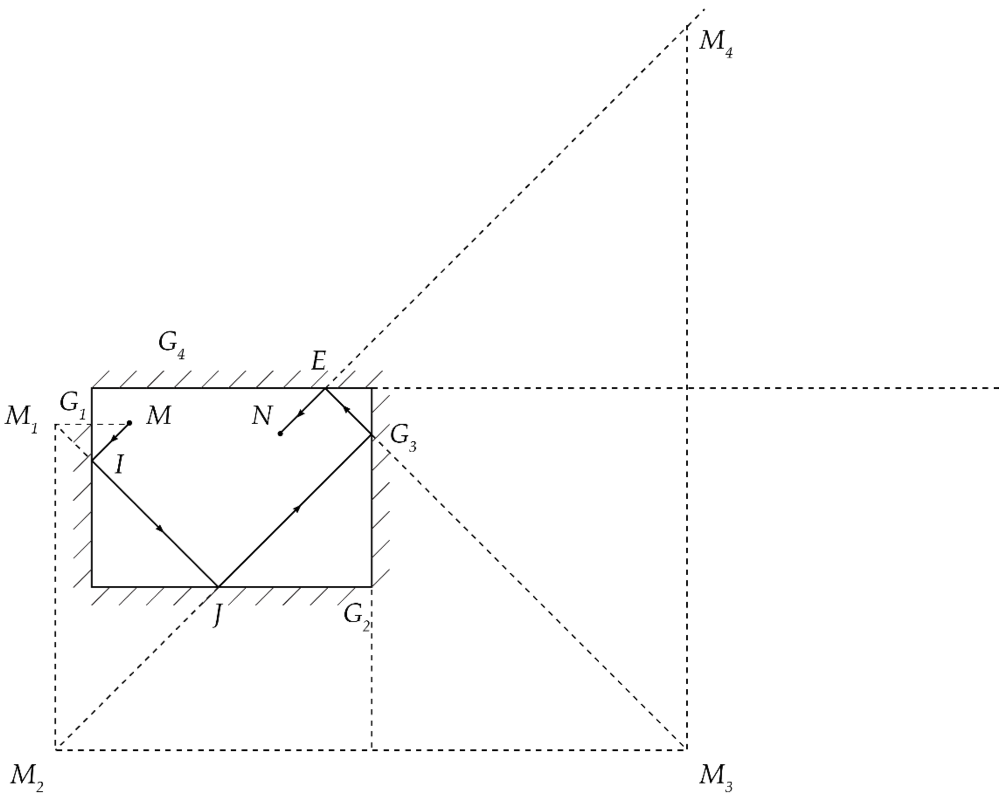
VPhO 41 – Ngày thi thứ nhất (04/03/2022)

CÂU IV

**Lời giải đề xuất bởi Trần Kỳ Vĩ – Giảng viên Đại học Sư phạm Hà Nội, và Phạm Quang Anh – Học sinh Trường THPT Chuyên Khoa học Tự Nhiên, ĐHQG Hà Nội*

1.

(a) Sơ đồ tạo ảnh: $M \xrightarrow{G_1} M_1 \xrightarrow{G_2} M_2 \xrightarrow{G_3} M_3 \xrightarrow{G_4} M_4$.



Hình 1

Chọn M_1 đối xứng với M qua G_1 lên M_1 là ảnh của M qua G_1. Chọn M_2 đối xứng với M_1 qua G_2 lên M_2 là ảnh của M_1 qua G_2. Chọn M_3 đối xứng với M_2 qua G_3 lên M_3 là ảnh của M_2 qua G_3. Chọn M_4 đối xứng với M_3 qua G_4 lên M_4 là ảnh của M_3 qua G_4. Nối M_4 với N cắt G_4 tại E, nối M_3 với E cắt G_3 tại Q, nối M_2 với Q cắt G_2 tại J, nối M_1 với J cắt G_1 tại I, nối M với I.

Từ đó $MIJQEN$ là đường đi của tia sáng. (Hình 1)

(b)

[b1]. Từ phần a) ta có mỗi lần M tạo ảnh qua một gương thì phản xạ trên gương đó một lần vậy tổng có 4 gương và M có thể có 4 lần phản xạ qua G_1 nên m có thể lần lượt là 1,2,3,4. Do 4 gương hợp với nhau thành hình chữ nhật do có tính chất đối xứng khi $m=3$ thì nó trùng với

$m=1$, và khi $m=2$ thì nó trùng với $m=4$. Trường hợp khi $m=0$ đồng nghĩa với việc điểm M sẽ không phản xạ trên G_1.

Kết luận: Vậy $m=0$, $m=1$ và $m=2$ thì tương ứng sẽ có 0 lần phản xạ, 1 lần phản xạ, 2 lần phản xạ qua G_1.

[b2]. Với $m=2$:

Ta có số lần phản xạ qua gương G_1 là 2.

Vậy ta có **bài toán bổ trợ:** từ các chữ số a,b,c,d có bao nhiêu số có 2 chữ số đôi một khác nhau từ 4 số đã cho. Vậy có: 12 số có 2 chữ số đôi một khác nhau từ 4 chữ số đã cho.

Từ **bài toán bổ trợ** ta có được 12 cách vẽ đường truyền

Cụ thể:

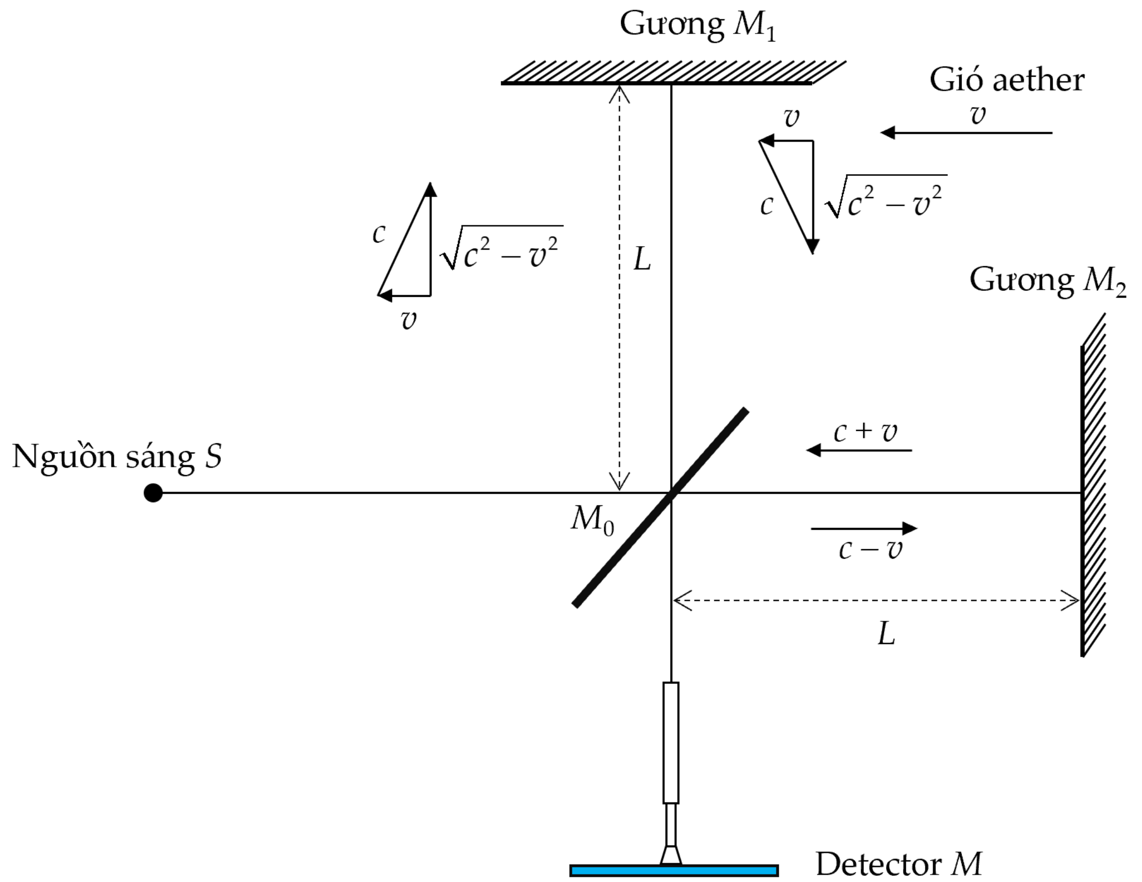
$$\begin{cases} M \to G_1 \\ M \to G_4 \end{cases}; \begin{cases} M \to G_1 \\ M \to G_3 \end{cases}; \begin{cases} M \to G_1 \\ M \to G_2 \end{cases};$$

$$\begin{cases} M \to G_3 \\ M \to G_4 \end{cases}; \begin{cases} M \to G_3 \\ M \to G_2 \end{cases}; \begin{cases} M \to G_4 \\ M \to G_2 \end{cases};$$

$$\begin{cases} M \to G_3 \\ M \to G_1 \end{cases}; \begin{cases} M \to G_4 \\ M \to G_3 \end{cases}; \begin{cases} M \to G_4 \\ M \to G_1 \end{cases};$$

...

2. Trong bài này, (theo tiến trình lịch sử) ta sẽ chọn phép biến đổi Galiléo (Có lẽ vậy – đề không nói rõ)



a) Đối với quãng truyền dọc theo $S \to M_0 \to M_1 \to M_0 \to M$ (đường 1) ánh sáng sẽ đi qua sao cho vector vận tốc tổng hợp của ánh sáng (tổng của vận tốc ánh sáng đối với aether và vận tốc của aether đối với giao thoa kế) sẽ vuông góc với M_0M_2. thời gian cần thiết để ánh sáng đến gương

M_1 bằng tỉ số của khoảng cách M_1 và vận tốc ánh sáng. Theo phép biến đổi Galiléo, vận tốc ánh sáng dọc theo đường 1 theo hai chiều đi và về lúc đó là $\sqrt{c^2-v^2}$; và thời gian đi và về là

(0.1) $$t_1=\frac{2L}{\sqrt{c^2-v^2}}=\frac{2L/c}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Đối với quãng truyền $S\to M_0\to M_2\to M_0\to M$ (đường 2): thời gian cần thiết để ánh sáng đến gương M_2 bằng tỉ số của khoảng cách M_2 và vận tốc ánh sáng, theo phép biến đổi Galiléo vận tốc này bằng $c-v$. Thời gian cần thiết để ánh sáng quay trở lại luôn luôn là tỉ số của khoảng cách đã đi được L, và vận tóc ánh sáng lúc này là $c+v$. Khoảng thời gian ánh sáng đi và về tới gương M_0 sẽ là :

(0.2) $$t_2=\frac{L}{c-v}+\frac{L}{c+v}=\frac{2L/c}{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

Nếu chúng ta giả sử rằng $\frac{v}{c}\ll 1$, giữ đến gần đúng bậc nhất trong t_1 và t_2 của $\left(\frac{v}{c}\right)^2$ ta có:

(0.3)[2] $$t_1\approx\frac{2L}{c}\left(1+\frac{v^2}{2c^2}\right);t_2\approx\frac{2L}{c}\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)$$

và hiệu của chúng

(0.4) $$\delta t=t_2-t_1\approx\frac{Lv^2}{c^3}$$

Khi đó hiệu quang trình là:

(0.5) $$\Delta=c\delta t=\frac{Lv^2}{c^2}$$

b) Nếu bây giờ quay hệ giao thoa kế một góc 90° thì quãng truyền 1 và 2 sẽ đổi thứ tự và hiệu số thời gian t_1 và t_2 cũng vậy; điều đó dẫn đến hiệu quang trình lúc này là:

(0.6) $$\Delta'=c\delta t'=-\frac{Lv^2}{c^2}$$

và người ta sẽ quan sát được sự dịch chuyển N vân trong phổ giao thoa. Từ đó:

(0.7) $$N=\frac{\Delta-\Delta'}{\lambda}=\frac{2Lv^2}{\lambda c^2}$$

c) Theo tính toán lý thuyết ở câu b, vạch giao thoa sẽ phải thay đổi. Vì thế, bằng việc quay máy đo, người ta có thể quan sát được một sự thay đổi đều đặn của vân giao thoa. Từ độ lớn sự chuyển của các vạch giao thoa, người ta có thể tính được giá trị của v.

Theo thực nghiệm của Michelson và Morley năm 1887 Case Western Reserve University, thì họ không nhận được N không bất kỳ trường hợp quay hệ đi 1 góc 90º nào (right angle). Do đó giả thiết về "gió aether" là bất khả dĩ.

- Tuy nhiên các lí thuyết sau này đã mở rộng hơn lí thuyết về "một aether" bao quát hơn, thẩm thấu vào vũ trụ và mọi vật thể. Năm 1951 Paul Dirac trong lý thuyết trường lượng tử (QFT) chấp nhận đòi hỏi phải có aether xem[1]

Reference:

[1]. Dirac, Paul Adrien Maurice. "Is there an Aether?." *Nature* 168.4282 (1951): 906-907.
[2]. Tsamparlis, Michael. *Special relativity*. Berlin: Springer, 2010.
[3]. Christodeulides, C. "The special theory of relativity." *Cham Heidelberg New York Dordrecht London: Springer* (2016).
[4]. Bane, D. "The Mechanical Universe Episode 41: The Michelson-Morley Experiment, 1985." *Albert Michelson quote from* (1931).
[5]. Lorentz, Hendrik Antoon. "Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity smaller than that of light." *Collected Papers*. Springer, Dordrecht, 1937. 172-197.
[6]. Hecht, Eugene. "Optics 4th edition." *Optics 4th edition by Eugene Hecht Reading* (2001).

*** Các thành viên CLB Vật lí xPhO tham gia thực hiện lời giải tham khảo đề thi VPhO 41**

- *[sigma]*
- *Phạm Quang Anh*, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHGQ Hà Nội
- *Nguyễn Hoài Anh*, Giáo viên Trường THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Nội
- *Nguyễn Mạnh Dũng*, Trường THPT chuyên Bắc Kạn
- *Nguyễn Hải Dương*, Giáo viên Trường THPT Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định
- *GMC*
- *Phùng Minh Hiệp*, Sinh viên Trường Đại học bách khoa Hà Nội
- *Trần Văn Hiếu*, Trường Đại học Sư phạm TP. Hồ Chí Minh
- *HƯNG THỊNH AN - BÌNH ĐỊNH*
- *Quang Huy*
- *Võ Trương Thiên Kỳ*, Trường THPT Chuyên Lương Văn Chánh, Phú Yên
- *Nguyễn Thành Long*, sinh viên Trường Đại học Bách khoa Hà Nội
- *Lê Duy Nhật*, Giáo viên Trường THPT Gia Định, Tp. Hồ Chí Minh
- *Phưn Phưn*
- *Physicium*
- *qvt*
- *Nguyễn Quốc Sơn*
- *Thanh Tân*
- *Trần Kỳ Vĩ*, Giảng viên Trường Đại học Sư phạm Hà Nội
- *Zinc*

VPhO 41 – Ngày thi thứ nhất (04/03/2022)

CÂU V

** Lời giải đề xuất bởi Nguyễn Thành Long - Sinh viên Trường Đại học Bách Khoa Hà Nội, và HƯNG THỊNH AN - BÌNH ĐỊNH*

1.

a)

Trong hqc khối tâm, tổng động lượng của hai hạt bằng 0, vậy nên độ lớn động lượng hai hạt bằng nhau và ta gọi nó là p'. Như vậy, phương trình bảo toàn năng lượng của hệ có thể viết như sau:

$$m_{\pi^-0}c^2 = \sqrt{m_{\mu^-0}^2 c^4 + p'^2c^2} + p'c.$$

Chuyển pc sang vế trái rồi bình phương 2 vế, ta rút được p theo các đại lượng đã cho

$$p' = \frac{m_{\pi^-0}^2 - m_{\mu^-0}^2}{2m_{\pi^-0}}c.$$

Từ đó ta tính được tốc độ hạt muyôn trong hệ quy chiếu khối tâm

$$v' = \frac{c}{\sqrt{1+\left(\frac{m_{\mu^-0}c}{p'}\right)^2}} = \frac{m_{\pi^-0}^2 - m_{\mu^-0}^2}{m_{\pi^-0}^2 + m_{\mu^-0}^2}c \approx 0.2712c.$$

Ta nhớ rằng, công thức chuyển vận tốc giữa 2 hệ quy chiếu chuyển động tương đối với nhau theo vận tốc V là

$$v_x = \frac{v_x{}' + V}{1+\frac{v_x{}'V}{c^2}} \text{ và } v_y = \frac{v_y{}'\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}{1+\frac{v_x{}'V}{c^2}}.$$

Từ đó, áp dụng trong bài toán của chúng ta với $V = v_{\pi^-}$, ta tìm được tốc độ của hạt muyôn trong hqc đất.

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_x^2+v_y^2} = \frac{\sqrt{v'^2 + 2v'v_{\pi^-}\cos\theta' + v_{\pi^-}^2\left[1-\left(\frac{v'v_{\pi^-}\sin\theta'}{c^2}\right)^2\right]}}{1+\frac{v'\cos\theta'}{c^2}} \\ &= c\sqrt{1-\frac{\left[1-\left(\frac{v'\cos\theta'}{c}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{v_{\pi^-}}{c}\right)^2\right]}{\left[1+\frac{v'v_{\pi^-}\cos\theta'}{c^2}\right]^2}} \approx 0.98c. \end{aligned}$$

(Đáp số đầy đủ để kiểm tra là 0.9755...)

b)

Thời gian sống của hạt Muyôn trên trong hệ quy chiếu đất là

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}.$$

Và quãng đường hạt đi được trong thời gian đó là

$$\Delta \mathrm{h} = \frac{\mathrm{v}\tau}{\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{v}}{\mathrm{c}}\right)^2}} \approx 2900\mathrm{m} < 10\mathrm{km}.$$

Dù đề bài không đề cập tới, xong ta biết rằng thời gian sống trên chỉ là thời gian sống trung bình chứ không phải thời gian sống của tất cả các hạt nên vẫn sẽ có một số hạt chạm được xuống đất, xong xác suất này không phải là cao và phần lớn các hạt không thể chạm xuống mặt đất được.

2.

Động lượng phương Ox được sinh ra bởi điện trường E là

$$p_x = eEt.$$

Còn động lượng phương Oy được bảo toàn

$$p_y = \frac{m_{e0}v_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v_0}{c}\right)^2}}.$$

Và động lượng cả hạt electron

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} = \sqrt{\frac{m_{e0}^2 v_0^2}{1-\left(\frac{v_0}{c}\right)^2} + (eEt)^2}.$$

Năng lượng của hạt electron này

$$E = \sqrt{m_{e0}^2 c^4 + p^2 c^2} = \sqrt{\frac{m_{e0}^2 c^4}{1-\left(\frac{v_0}{c}\right)^2} + (eEt)^2 c^2}.$$

Như vậy, tốc độ của hạt electron là

$$v = \frac{pc^2}{E} = c\sqrt{\frac{v_0^2 + \left(\frac{eE}{m_{e0}}\right)^2\left[1-\left(\frac{v_0}{c}\right)^2\right]t^2}{c^2 + \left(\frac{eE}{m_{e0}}\right)^2\left[1-\left(\frac{v_0}{c}\right)^2\right]t^2}}.$$

* Các thành viên CLB Vật lí xPhO tham gia thực hiện lời giải tham khảo đề thi VPhO 41

- *[sigma]*
- *Phạm Quang Anh*, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHGQ Hà Nội
- *Nguyễn Hoài Anh*, Giáo viên Trường THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Nội
- *Nguyễn Mạnh Dũng*, Trường THPT chuyên Bắc Kạn
- *Nguyễn Hải Dương*, Giáo viên Trường THPT Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định
- *GMC*
- *Phùng Minh Hiệp*, Sinh viên Trường Đại học bách khoa Hà Nội
- *Trần Văn Hiếu*, Trường Đại học Sư phạm TP. Hồ Chí Minh
- *HƯNG THỊNH AN - BÌNH ĐỊNH*

- *Quang Huy*
- *Võ Trương Thiên Kỳ*, Trường THPT Chuyên Lương Văn Chánh, Phú Yên
- *Nguyễn Thành Long*, sinh viên Trường Đại học Bách khoa Hà Nội
- *Lê Duy Nhật*, Giáo viên Trường THPT Gia Định, Tp. Hồ Chí Minh
- *Phưn Phưn*
- *Physicium*
- *qvt*
- *Nguyễn Quốc Sơn*
- *Thanh Tân*
- *Trần Kỳ Vĩ*, Giảng viên Trường Đại học Sư phạm Hà Nội
- *Zinc*

VPhO 41 – Ngày thi thứ hai (05/03/2022)

CÂU I

**Lời giải đề xuất bởi Phạm Quang Anh - Trường THPT chuyên KHTN - ĐHGQ Hà Nội, Thanh Tân, Trần Văn Hiếu - Trường Đại học Sư phạm TP. Hồ Chí Minh, Nguyễn Hoài Anh - Giáo viên Trường THPT chuyên Nguyễn Huệ - Hà Nội và Võ Trương Thiên Kỳ - Trường THPT Chuyên Lương Văn Chánh, Phú Yên.*

1. Xuất phát từ công thức cho mômen quán tính của chất điểm

$$I = r^2 m$$

Do các điểm trên vành trụ đều cách đều trục quay nên mômen quán tính của cả vành khối lượng m là $r^2\Sigma\Delta m = r^2 m$

Xét vành trụ khối lượng dm, thể tích vi phân dV, khối lượng riêng ρ

$$dm = \rho dV$$

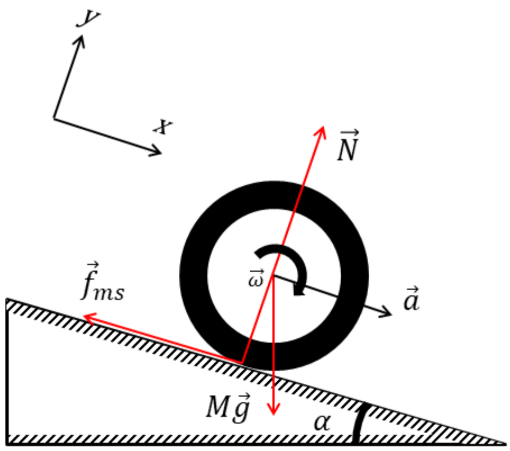
Vành trụ có chiều cao L, bán kính đáy r và có độ dày dr, do vậy

$$dV = 2\pi r L dr$$

Mômen quán tính của ống trụ:

$$I = \int_{R_1}^{R_2} r^2(\rho 2\pi r L dr) = 2\pi\rho L \cdot \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr = 2\pi\rho L \cdot \frac{r^4}{4}\bigg|_{R_1}^{R_2} = \frac{\pi\rho L(R_2^4 - R_1^4)}{2}$$

2. Chọn hệ toạ độ như hình vẽ



PT định luật II Newton cho chuyển động lăn không trượt của ống:

$$f_{ms}R_2 = I_O\gamma$$
$$-f_{ms} + Mg\sin\alpha = Ma$$
$$N - mg\cos\alpha = 0$$

Ống lăn không trượt nên ta có $a = \gamma R_2$

Biến đổi các PT để ra biểu thức phụ thuộc vào α và f_{ms} ta được:

$$-f_{ms} + Mg\sin\alpha = M \cdot \frac{f_{ms}R_2^2}{I_O}$$

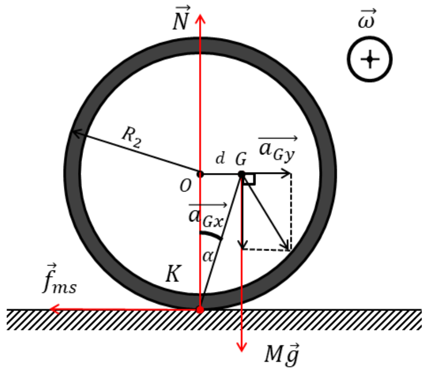
$$\Leftrightarrow f_{ms} = \frac{Mg\sin\alpha}{\frac{MR_2^2}{I_O} + 1}$$

Sử dụng điều kiện $f_{ms} \leq \mu N = \mu Mg\cos\alpha$, ta được:

$$\tan\alpha \leq \mu\left(\frac{MR_2^2}{I_O} + 1\right) = \mu\left(2 + \frac{R_2^2 - R_1^2}{R_2^2 + R_1^2}\right)$$

Vậy $\alpha_{max} = \arctan\left[\mu\left(2 + \frac{R_2^2 - R_1^2}{R_2^2 + R_1^2}\right)\right]$

3.



Liên hệ gia tốc giữa G và K

$$\overrightarrow{a_G} = \overrightarrow{a_K} + \vec{\gamma} \times \overrightarrow{KG} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{KG})$$

Chiếu PT trên lên các trục toạ độ

$$\begin{cases} a_{Gx} - a_{Kx} = \gamma R_2 - \omega^2 d \\ a_{Gy} - a_{Ky} = -\omega^2 R_2 - \gamma d \end{cases}$$

Do $a_{Kx} = 0, a_{Ky} = \omega^2 R_2$ (thành phần gia tốc tiếp tuyến và gia tốc tịnh tiến tại K triệt tiêu theo phương Ox) , ta có:

$$\begin{cases} a_{Gx} = \gamma R_2 - \omega^2 d \\ a_{Gy} = -\gamma d \end{cases}$$

PT Định luật II Newton cho chuyển động của ống:

$$\begin{cases} \Sigma\vec{F} = m\vec{a}_G \\ \Sigma\overrightarrow{\mathcal{M}} = I_G\vec{\gamma} \end{cases}$$

Chiếu các phương trình lên trục toạ độ ta có:

$$\begin{cases} -f_{ms} = M(\gamma R_2 - \omega^2 d) \\ N - Mg = -M\gamma d \\ Nd + f_{ms}R_2 = I_G\gamma \end{cases}$$

Giải hệ PT ta được:

$$\begin{cases} \gamma = \dfrac{Md(g + \omega^2 R_2)}{I_G + M(R_2^2 + d^2)} = \dfrac{d(g + \omega^2 R_2)}{k_G^2 + R_2^2 + d^2)} \\ N = M\left[g - \dfrac{d^2(g + \omega^2 R_2)}{k_G^2 + R_2^2 + d^2}\right] \end{cases}$$

Thay số ta được $\gamma = 3{,}15\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}, N = 113{,}9\text{ N}$

*** Các thành viên CLB Vật lí xPhO tham gia thực hiện lời giải tham khảo đề thi VPhO 41**

- *[sigma]*
- *Phạm Quang Anh*, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHGQ Hà Nội
- *Nguyễn Hoài Anh*, Giáo viên Trường THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Nội
- *Nguyễn Mạnh Dũng*, Trường THPT chuyên Bắc Kạn
- *Nguyễn Hải Dương*, Giáo viên Trường THPT Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định
- *GMC*
- *Phùng Minh Hiệp*, Sinh viên Trường Đại học bách khoa Hà Nội
- *Trần Văn Hiếu*, Trường Đại học Sư phạm TP. Hồ Chí Minh
- *HƯNG THỊNH AN - BÌNH ĐỊNH*
- *Quang Huy*
- *Võ Trương Thiên Kỳ*, Trường THPT Chuyên Lương Văn Chánh, Phú Yên
- *Nguyễn Thành Long*, sinh viên Trường Đại học Bách khoa Hà Nội
- *Lê Duy Nhật*, Giáo viên Trường THPT Gia Định, Tp. Hồ Chí Minh
- *Phưn Phưn*
- *Physicium*
- *qvt*
- *Nguyễn Quốc Sơn*
- *Thanh Tân*
- *Trần Kỳ Vĩ*, Giảng viên Trường Đại học Sư phạm Hà Nội
- *Zinc*

VPhO 41 – Ngày thi thứ hai (05/03/2022)

CÂU II

**Lời giải đề xuất bởi Nguyễn Thành Long - Sinh viên Đại học Bách khoa Hà Nội, [sigma], Nguyễn Quốc Sơn, Zinc và Võ Trương Thiên Kỳ - Trường THPT Chuyên Lương Văn Chánh, Phú Yên.*

Bài toán bình quay li tâm không phải một bài toán mới đối với học sinh giỏi THPT, nó đã được đưa ra nhiều lần và gần nhất là đề VPhO năm học 2018-2019. Vì vậy, ở phần 1. của lời giải này, ta sẽ trình bày lại một cách hết sức vắn tắt để mọi người nắm được ý tưởng và tiếp tục các phần sau. Để đọc chi tiết hơn về bài toán, các bạn có thể đọc lại bản đáp án của nhóm cho ý 3 câu 2 ngày thi thứ nhất VPhO 2019.

1.

Theo phân bố Boltzmann, nồng độ khí, khối lượng riêng của từng loại khí sẽ tỷ lệ với $e^{-\frac{U}{kT}}$, và áp suất khí (Với U là thế năng của mỗi hạt), vì vậy, khối lượng riêng của mỗi loại hạt sẽ có dạng:

$$\rho_i(r) = C_i e^{\frac{\mu_i \omega^2 r^2}{2RT}}.$$

Với i là A hoặc B và C_i là một hệ số hiệu chuẩn của khí đó. Để tìm hằng số C_i, ta sử dụng điều kiện chuẩn hoá đó là tổng khối lượng khí trước và sau khi bình quay không hề thay đổi:

$$\frac{\mu_i p_{i0}}{RT}\pi R^2 h = \int_0^{R_0} C_i\, e^{\frac{\mu_i \omega^2 r^2}{2RT}} 2h\pi r dr$$

$$\Rightarrow C_i = \frac{\mu_i p_{i0}}{RT}\frac{R_0^2}{\int_0^{R_0} e^{\frac{\mu_i \omega^2 r^2}{2RT}} 2r dr} = \frac{\mu_i p_{i0}}{RT}\frac{\frac{\mu_i \omega^2 R_0^2}{2RT}}{e^{\frac{\mu_i \omega^2 R_0^2}{2RT}} - 1}.$$

Như vậy, khối lượng riêng của mỗi loại khí phân bố theo bán kính theo hàm

$$\rho_i(r) = \frac{\mu_i p_{i0}}{RT}\frac{\frac{\mu_i \omega^2 R_0^2}{2RT}}{e^{\frac{\mu_i \omega^2 R_0^2}{2RT}} - 1} e^{\frac{\mu_i \omega^2 r^2}{2RT}}.$$

Và áp suất riêng phần mỗi loại khí phân bố theo bán kính là

$$p_i(r) = \frac{\rho_i RT}{\mu_i} = p_{i0}\frac{\frac{\mu_i \omega^2 R_0^2}{2RT}}{e^{\frac{\mu_i \omega^2 R_0^2}{2RT}} - 1} e^{\frac{\mu_i \omega^2 r^2}{2RT}}.$$

Tại thành bình $r = R_0$, áp suất riêng phần 2 loại khí lần lượt là

$$p_A(R_0) = p_{A0}\frac{\frac{\mu_A \omega^2 R_0^2}{2RT}}{e^{\frac{\mu_A \omega^2 R_0^2}{2RT}} - 1} e^{\frac{\mu_A \omega^2 R_0^2}{2RT}} \text{ và } p_B(R_0) = p_{B0}\frac{\frac{\mu_B \omega^2 R_0^2}{2RT}}{e^{\frac{\mu_B \omega^2 R_0^2}{2RT}} - 1} e^{\frac{\mu_B \omega^2 R_0^2}{2RT}}.$$

2.

Tỷ số khối lượng 2 khí lúc chưa quay bình cho phép ta tìm được một hệ thức

$$\frac{a}{b} = \frac{\mu_A p_{A0}}{\mu_B p_{B0}}.$$

Sử dụng hệ thức trên, ta có tỷ số khối lượng sát thành bình của 2 loại khí như sau

$$\varepsilon_1 = \frac{\rho_A(R_0)}{\rho_B(R_0)} = \frac{\mu_A}{\mu_B}\frac{p_A(R_0)}{p_B(R_0)} = \left(\frac{\mu_A}{\mu_B}\right)\left(\frac{a}{b}\right)\frac{e^{\frac{\mu_B\omega^2R_0^2}{2RT}}-1}{e^{\frac{\mu_A\omega^2R_0^2}{2RT}}-1}e^{\frac{(\mu_A-\mu_B)\omega^2R_0^2}{2RT}} \approx \left(\frac{\mu_A}{\mu_B}\right)\left(\frac{a}{b}\right) \approx 140.50.$$

Tỷ phần các khí A và B ở sát thành bình lần lượt là:

$$a_1 = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \approx 99.293\% \text{ và } b_1 = \frac{1}{1+\varepsilon} \approx 0.707\%.$$

3.

Từ kết quả phần trên, ta sẽ thấy rằng ở tầng thứ n, tỷ số khối lượng khí là $\varepsilon_n = \left(\frac{\mu_A}{\mu_B}\right)^n\frac{a}{b}$. Để làm giàu khí B lên 2% thì ta cần n thoả mãn bất phương trình

$$\frac{1}{\varepsilon_n+1} > 2\% \Rightarrow \varepsilon_n < 49 \Rightarrow n > -\log_{\left(\frac{\mu_A}{\mu_B}\right)}\left(\frac{49b}{a}\right) \approx 110.7\,.$$

Vậy, ta cần 111 tầng để làm giàu khí B lên trên 2%.

*** Các thành viên CLB Vật lí xPhO tham gia thực hiện lời giải tham khảo đề thi VPhO 41**

- *[sigma]*
- *Phạm Quang Anh*, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHGQ Hà Nội
- *Nguyễn Hoài Anh*, Giáo viên Trường THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Nội
- *Nguyễn Mạnh Dũng*, Trường THPT chuyên Bắc Kạn
- *Nguyễn Hải Dương*, Giáo viên Trường THPT Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định
- *GMC*
- *Phùng Minh Hiệp*, Sinh viên Trường Đại học bách khoa Hà Nội
- *Trần Văn Hiếu*, Trường Đại học Sư phạm TP. Hồ Chí Minh
- *HƯNG THỊNH AN - BÌNH ĐỊNH*
- *Quang Huy*
- *Võ Trương Thiên Kỳ*, Trường THPT Chuyên Lương Văn Chánh, Phú Yên
- *Nguyễn Thành Long*, sinh viên Trường Đại học Bách khoa Hà Nội
- *Lê Duy Nhật*, Giáo viên Trường THPT Gia Định, Tp. Hồ Chí Minh
- *Phưn Phưn*
- *Physicium*
- *qvt*
- *Nguyễn Quốc Sơn*
- *Thanh Tân*
- *Trần Kỳ Vĩ*, Giảng viên Trường Đại học Sư phạm Hà Nội
- *Zinc*

VPhO 41 – Ngày thi thứ hai (05/03/2022)

CÂU III

**Lời giải đề xuất bởi Nguyễn Thành Long - Sinh viên Đại học Bách khoa Hà Nội, [sigma] và Võ Trương Thiên Kỳ - Trường THPT Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên.*

1.

a)

Momen quán tính của khung dây quanh trục quay

$$I = 2\frac{m}{4}\left(\frac{L}{2}\right)^2 + 2\frac{1}{12}\frac{m}{4}L^2 = \frac{1}{6}mL^2.$$

Định luật 2 Newton cho quyển động quay quanh trục cố định của khung dây:

$$I\ddot{\varphi} = -2I_0BL\frac{L}{2}\sin\varphi \Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{6I_0B}{m}\varphi \approx 0.$$

Như vậy, chu kỳ dao động của khung dây là

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{6I_0B}}.$$

Và chuyển động của khung được mô tả theo thời gian bởi phương trình chuyển động

$$\varphi(t) = \varphi_0\cos\left(\sqrt{\frac{6I_0B}{m}}t\right).$$

b)

Tại thời điểm $t = t_0$ như đề bài mô tả, $\varphi(t_0) = 0$ và $\dot{\varphi}(t_0) = -\varphi_0\sqrt{\frac{6I_0B}{m}}$. Ta biết rằng khi không có dòng điện chạy qua khung dây và điện trở khung không đáng kể, khung dây sẽ quay tròn đều với vận tốc góc không đổi ω (ω dương khi θ giảm). Khi đó, điện áp hai đầu MN là

$$u_{MN} = -\frac{d}{dt}\{BL^2\cos[\omega(t-t_0)]\} = \omega BL^2\sin[\omega(t-t_0)].$$

Tại thời điểm $\varphi = 0$, việc dòng điện đột ngột bị ngắt hoàn toàn không làm thay đổi vận tốc góc của khung nên $\omega = \varphi_0\sqrt{\frac{6I_0B}{m}}$ và

$$u_{MN} = \varphi_0BL^2\sqrt{\frac{6I_0B}{m}}\sin\left[\varphi_0\sqrt{\frac{6I_0B}{m}}(t-t_0)\right].$$

2.

a)

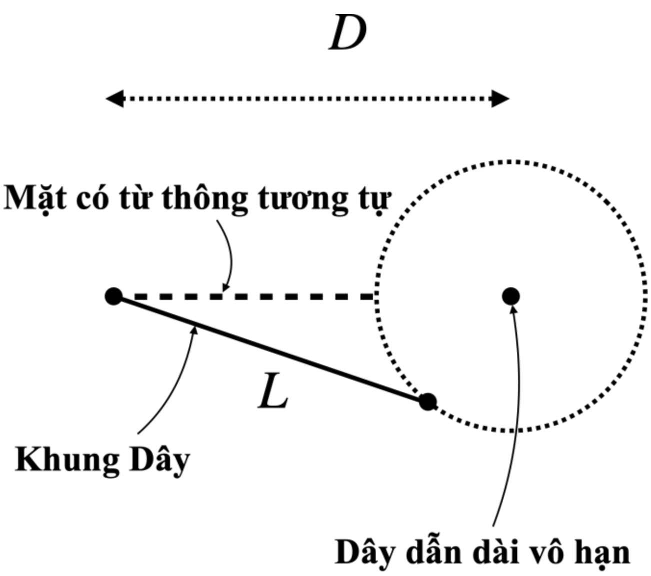
Từ trường sinh ra bởi dây dẫn thẳng dài vô hạn tại điểm cách dây r có thể dễ dàng tìm được theo định lý Ampere về lưu số của từ thông

$$B = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}.$$

Ở đây, ta sẽ có hai cách đề tính điện áp qua khung dây: Cách thứ nhất là sử dụng định luật Faraday về cảm ứng điện từ rồi đạo hàm từ thông qua khung dây theo thời gian và cách thứ hai đó là tính trực tiếp suất điện động cảm ứng thông qua công thức $u_{MN} = \oint (\vec{v} \times \vec{B})d\vec{l}$.

Theo cách thứ nhất: Việc chiếu vector để tính từ thông qua khung dây tương đối phức tạp nên ta có thể tìm một mặt phẳng có từ thông tương đương nằm trong mặt phẳng tạo bởi dây và trục quay. Các đường sức từ tạo với dây dẫn dài vô hạn đều là các đường tròn cùng bán kính nên mặt ta cần tìm là mặt giới hạn từ bán kỉnh r bằng với khoảng cách từ dây dẫn đó cho đến cạnh $2-3$. Từ đó, ta tìm được từ thông qua khung dây

$$\Phi = \int_{\sqrt{D^2+L^2-2DL\cos\varphi}}^{D} B\,Ldr = \int_{\sqrt{D^2+L^2-2DL\cos\varphi}}^{D} \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} Ldr = -\frac{\mu_0 I_0 L}{4\pi}\ln\left[1 + \left(\frac{L}{D}\right)^2 - 2\frac{L}{D}\cos\varphi\right].$$



Như vậy, điện áp u_{MN} được tính là

$$u_{MN} = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 \omega I_0 L^2}{2\pi D}\frac{\sin\varphi}{1 + \left(\frac{L}{D}\right)^2 - 2\frac{L}{D}\cos\varphi}.$$

Theo cách thứ hai: Ta dễ dàng nhận thấy suất điện động cảm ứng cả vòng mạch này bằng đúng với suất điện động cảm ứng trên cạnh 2-3, như vậy

$$u_{MN} = |\vec{v} \times \vec{B}|L = \frac{\mu_0 \omega I_0 L^2}{2\pi D}\frac{\sin\varphi}{1 + \left(\frac{L}{D}\right)^2 - 2\frac{L}{D}\cos\varphi}.$$

Hiển nhiên, theo cả hai cách tính, ta đều nhận được một đáp số giống nhau.

b)

Điện áp u_{MN} đạt cực trị tại $\frac{du_{MN}}{d\varphi} = 0$, hay

$$\cos\varphi = \frac{2DL}{D^2 + L^2}.$$

Có 2 giá trị của φ thoả mãn biểu thức trên, chúng có độ lớn bằng nhau nhưng ngược dấu, một cực đại và một cực tiểu, cực đại sẽ đạt được ở trường hợp $\varphi > 0$. Từ đó ta thu được điện áp cực đại

$$u_{MN}=\frac{\mu_0\omega I_0L^2}{2\pi D\left[1-\left(\frac{L}{D}\right)^2\right]}.$$

*** Các thành viên CLB Vật lí xPhO tham gia thực hiện lời giải tham khảo đề thi VPhO 41**

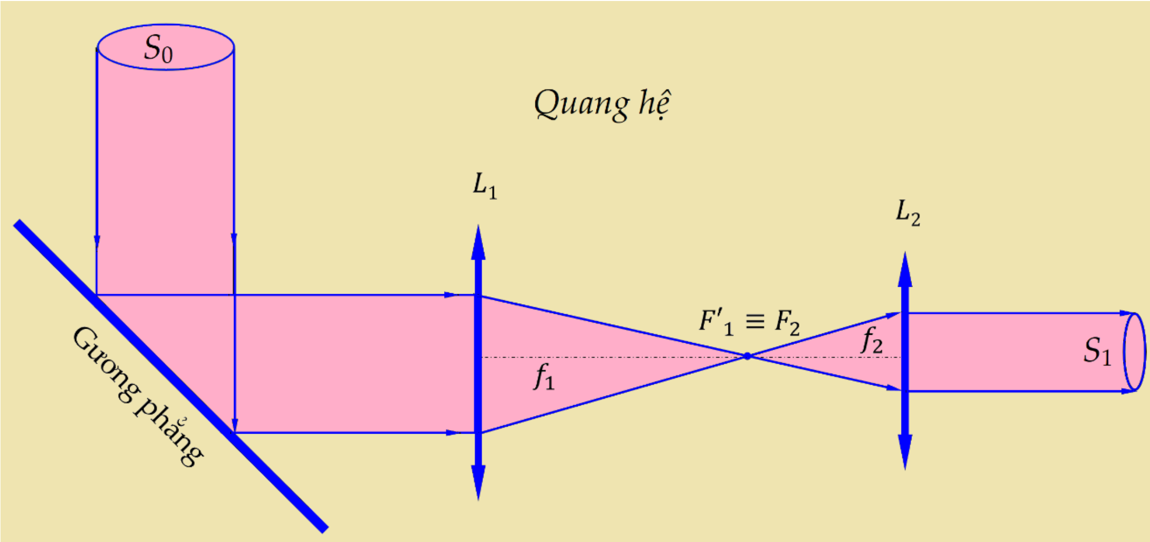
- *[sigma]*
- *Phạm Quang Anh*, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHGQ Hà Nội
- *Nguyễn Hoài Anh*, Giáo viên Trường THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Nội
- *Nguyễn Mạnh Dũng*, Trường THPT chuyên Bắc Kạn
- *Nguyễn Hải Dương*, Giáo viên Trường THPT Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định
- *GMC*
- *Phùng Minh Hiệp*, Sinh viên Trường Đại học bách khoa Hà Nội
- *Trần Văn Hiếu*, Trường Đại học Sư phạm TP. Hồ Chí Minh
- *HƯNG THỊNH AN - BÌNH ĐỊNH*
- *Quang Huy*
- *Võ Trương Thiên Kỳ*, Trường THPT Chuyên Lương Văn Chánh, Phú Yên
- *Nguyễn Thành Long*, sinh viên Trường Đại học Bách khoa Hà Nội
- *Lê Duy Nhật*, Giáo viên Trường THPT Gia Định, Tp. Hồ Chí Minh
- *Phưn Phưn*
- *Physicium*
- *qvt*
- *Nguyễn Quốc Sơn*
- *Thanh Tân*
- *Trần Kỳ Vĩ*, Giảng viên Trường Đại học Sư phạm Hà Nội
- *Zinc*

VPhO 41 – Ngày thi thứ hai (05/03/2022)

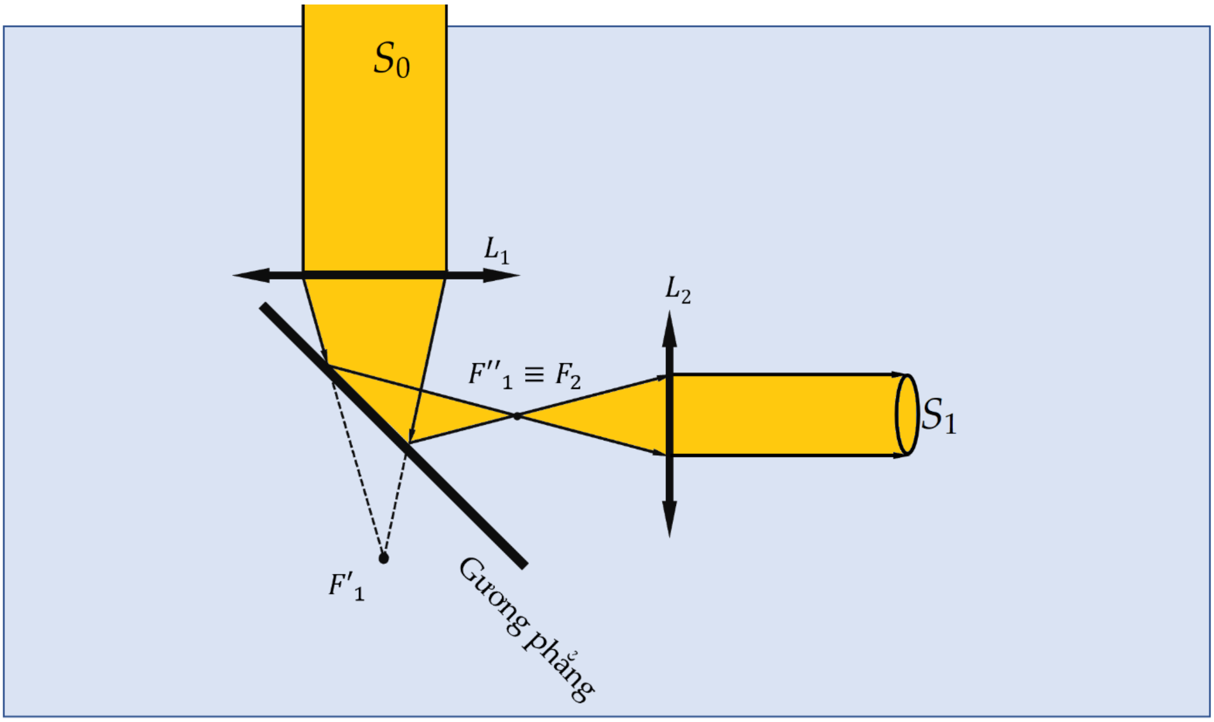
CÂU IV

**Lời giải đề xuất bởi Trần Kỳ Vĩ – Trường Đại học Sư phạm Hà Nội, Phạm Quang Anh – Trường THPT Chuyên Khoa học Tự Nhiên – ĐHQGHN và Võ Trương Thiên Kỳ - THPT Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên*

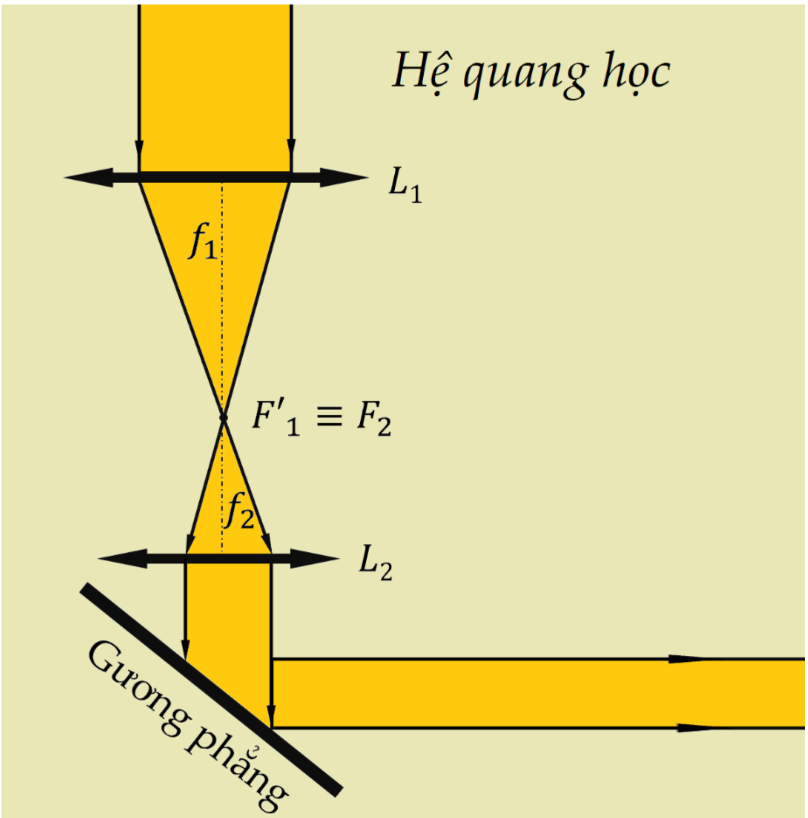
1. **a)** Có thể bố trí quang hệ như hình (1) hay hình (2) hoặc hình 3:



Hình 1. Một cách bố trí quang hệ



Hình 2. Và một cách khác....



Hình 3. Và một cách khác nữa....

Tham khảo ở[1]

b) Dựa vào ý 1a và các tam giác đồng dạng dễ dàng suy được:

$$\frac{S_1}{S_0} = \left(\frac{f_2}{f_1}\right)^2 .$$

2. Động lượng của các photon đến diện tích S của mặt phẳng gương trong 1s là:

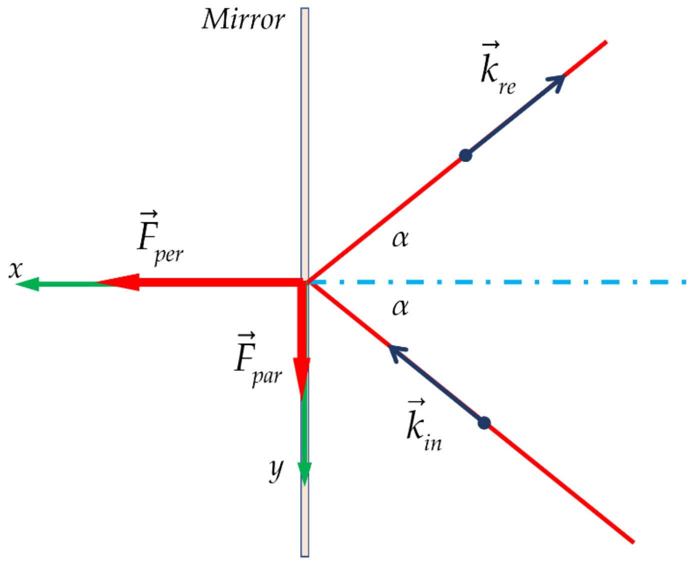
$$\left(\frac{hf}{c} cnS\cos\alpha\right)\frac{\vec{k}_{in}}{k_{in}} = (uS\cos\alpha)\frac{\vec{k}_{in}}{k_{in}}$$

với $u = nhf = \frac{nhc}{\lambda}$ là mật độ năng lượng, $\vec{k}_{in} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{e}_{in}$ là vector sóng của sóng đi tới (incident ray, $\vec{e}_{in}$ hướng theo chiều ánh sáng tới)

Tương tự động lượng của chùm photon phản xạ với hệ số phản xạ R là[2]

$$Ru\cos\alpha S\frac{\vec{k}_{re}}{k_{re}}$$

với $\vec{k}_{re} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{e}_{re}$ là vector sóng của sóng phản xạ (reflection ray) ($\vec{e}_{re}$ hướng theo chiều ánh sáng phản xạ). Về mặt độ lớn thì $\left|\vec{k}_{re}\right| = \left|\vec{k}_{in}\right| = \frac{2\pi}{\lambda}$



Hình 3. Giản đồ ánh sáng tới gương.

Lực tác dụng lên mặt phẳng gương tính nhờ định lí biến thiên động lượng::

$$\vec{F} = -\left(RuS\cos\alpha\frac{\vec{k}_{re}}{k_{re}} - uS\cos\alpha\frac{\vec{k}_{in}}{k_{in}}\right) = -uS\cos\alpha\left(R\frac{\vec{k}_{re}}{k_{re}} - \frac{\vec{k}_{in}}{k_{in}}\right)$$

Phân tích lực này thành hai thành phần vuông góc F_{per} và song song với mặt gương F_{par}, ta có:

$$\vec{F} = \vec{F}_{per} + \vec{P}_{par}$$

Sử dụng phép chiếu vector cho ta có:

$$F_{per} = uS(1+R)\cos^2\alpha = \frac{nhc}{\lambda}S(1+R)\cos^2\alpha$$

Do $\left(R\frac{\vec{k}_{re}}{k_{re}} - \frac{\vec{k}_{in}}{k_{in}}\right)\cdot\vec{e}_x = -R\cos\alpha - \cos\alpha$

$$F_{par} = uS\cos\alpha.\sin\alpha(1-R) = \frac{uS}{2}(1-R).\sin 2\alpha = \frac{nhc}{2\lambda}S(1-r)\sin 2\alpha$$

Lực tác dụng trên một đơn vị diện tích do đó là:

$$f = \frac{\sqrt{F_{par}^2 + F_{per}^2}}{S} = \frac{nhc}{2\lambda}\sqrt{(1-R)^2\sin^2 2\alpha + 4(1+R)^2\cos^4\alpha} = \frac{nhc\cos\theta}{\lambda}\sqrt{1+R^2+2R\cos 2\theta}$$

Reference:

1. Hecht, Eugene. "Optics 4th edition." *Optics 4th edition by Eugene Hecht Reading* (2001).

2. Lebedew, Peter. "Untersuchungen über die Druckkräfte des Lichtes." *Annalen der Physik* 311.11 (1901): 433-458.

4. Заикин, Дмитрий Алексеевич, Эдуард Вениаминович Прут, and Владимир Александрович Овчинкин. "Сборник задач по общему курсу физики." (2016).

*** Các thành viên CLB Vật lí xPhO tham gia thực hiện lời giải tham khảo đề thi VPhO 41**

- *[sigma]*
- *Phạm Quang Anh*, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHGQ Hà Nội
- *Nguyễn Hoài Anh*, Giáo viên Trường THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Nội
- *Nguyễn Mạnh Dũng*, Trường THPT chuyên Bắc Kạn
- *Nguyễn Hải Dương*, Giáo viên Trường THPT Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định
- *GMC*
- *Phùng Minh Hiệp*, Sinh viên Trường Đại học bách khoa Hà Nội
- *Trần Văn Hiếu*, Trường Đại học Sư phạm TP. Hồ Chí Minh
- *HƯNG THỊNH AN - BÌNH ĐỊNH*
- *Quang Huy*
- *Võ Trương Thiên Kỳ*, Trường THPT Chuyên Lương Văn Chánh, Phú Yên
- *Nguyễn Thành Long*, sinh viên Trường Đại học Bách khoa Hà Nội
- *Lê Duy Nhật*, Giáo viên Trường THPT Gia Định, Tp. Hồ Chí Minh
- *Phưn Phưn*
- *Physicium*
- *qvt*
- *Nguyễn Quốc Sơn*
- *Thanh Tân*
- *Trần Kỳ Vĩ*, Giảng viên Trường Đại học Sư phạm Hà Nội
- *Zinc*

VPhO 41 – Ngày thi thứ hai (05/03/2022)

CÂU V

**Lời giải đề xuất bởi Nguyễn Hoài Anh – Giáo viên Trường THPT chuyên Nguyễn Huệ - Hà Nội, Trần Kỳ Vĩ – Giảng viên Trường Đại học Sư phạm Hà Nội và Physicium – CLB Vật lí xPhO*

1/ Từ công thức $R = AT^{-3/2}e^{\frac{\Delta E_g}{2k_BT}} \rightarrow RT^{3/2} = Ae^{\frac{\Delta E_g}{2k_BT}}$

Lấy logarit hai vế ta được

$$\ln\left(RT^{\frac{3}{2}}\right) = lnA + \frac{\Delta E_g}{2k_B}.\frac{1}{T}$$

Đặt $y = \ln\left(RT^{\frac{3}{2}}\right)$; và $x = \frac{1}{T}$ ta thu được phương trình tuyến tính $y = ax + b$ với $a = \frac{\Delta E_g}{2k_B}$.

Từ đồ thị $y = y(x)$ ta xác định được hệ số góc a, và độ rộng của vùng cấm được tính bằng biểu thức

$$\Delta E_g = 2k_Ba$$

Hệ số góc a được xác định bằng khớp hàm tuyến tính bằng phương pháp bình phương cực tiểu.

Ta có bảng số liệu

i	$t(°C)$	$R(\Omega)$	$T(\mathrm{K})$	$x = \frac{1}{T}\ (10^{-3})$	$y = \ln RT^{\frac{3}{2}}$	$xy\ \ (10^{-3})$	$x^2\ \ (10^{-6})$
1	70	1630	343	2.92	16.15	47.09	8.50
2	65	1990	338	2.96	16.33	48.31	8.75
3	60	2440	333	3.00	16.51	49.59	9.02
4	55	3040	328	3.05	16.71	50.94	9.30
5	50	3730	323	3.10	16.89	52.29	9.59
6	45	4440	318	3.14	17.04	53.59	9.89
7	40	5630	313	3.19	17.26	55.13	10.21
				$\sum_i x_i = 21.36$	$\sum_i y_i = 116.89$	$\sum_i x_iy_i = 356.95$	$\sum_i x_i^2 = 65.25$

với $T(\mathrm{K}) = t(°C) + 273$. Sử dụng phương pháp bình phương cực tiểu trong khớp hàm tuyến tính, hệ số góc a của đường thẳng $y = ax + b$ được xác định bằng biểu thức:

$$a = \frac{N\sum_{i=1}^{N} x_iy_i - \sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{i=1}^{N} y_i}{N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2} = \frac{7\times 356.95\times 10^{-3} - 21.36\times 10^{-3}\times 116.89}{7\times 65.25\times 10^{-6} - (21.36\times 10^{-3})^2} \simeq 3.92\times 10^3(\mathrm{K}^{-1})$$

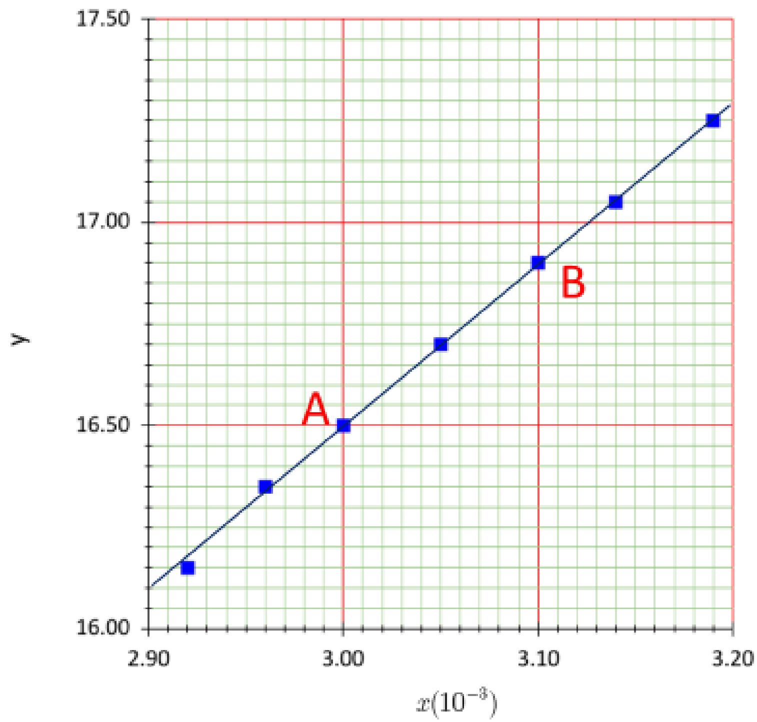
Độ rộng của vùng cấm của chất bán dẫn là: $\Delta E_g = 2k_Ba \simeq 1.08\times 10^{-19}\mathrm{J} \simeq 0.68\mathrm{eV}$

Cách 2: (Sử dụng đồ thị nếu có giấy vẽ đồ thị)

Vẽ các điểm (x_i, y_i) trên giấy vẽ đồ thị. Để xác định hệ số góc a của đường thẳng $y = ax + b$ ta vẽ đường thẳng (d) đi qua nhiều điểm dữ liệu nhất. Lấy hai điểm A và B bất kỳ trên đường thẳng (d). Hệ số góc a được xác định:

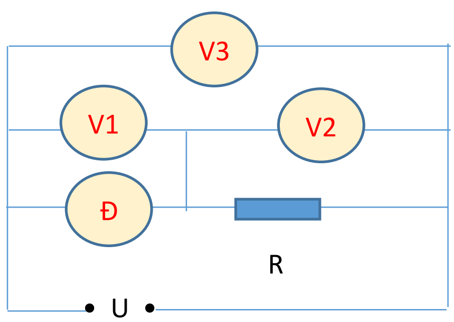
$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{16.90 - 16.50}{(3.10 - 3.00) \times 10^{-3}} = 4.00 \times 10^3 (\mathrm{K}^{-1})$$

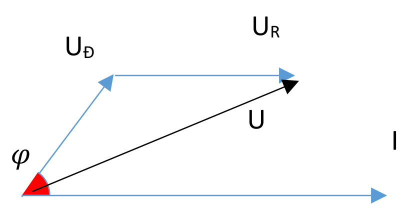
Độ rộng của vùng cấm của chất bán dẫn là: $\Delta E_g = 2k_B a \simeq 1.1 \times 10^{-19}\mathrm{J} \simeq 0.69\mathrm{eV}$



Nhận xét: Cách xác định hệ số góc a bằng phương pháp đồ thị có ưu điểm là thực hiện nhanh, nhược điểm là có độ chính xác không cao bằng khớp hàm tuyến tính bằng phương pháp bình phương cực tiểu vì phụ thuộc vào cảm tính của người vẽ đồ thị.

2/ Mắc mạch như hình vẽ





Số chỉ các vôn kế là hiệu điện thế hiệu dụng trên động cơ, điện trở và 2 đầu mạch

$$U_{V1} = U_Đ; U_{V2} = U_R;\ U_{V3} = U$$

Cường độ dòng điện hiệu dụng: $I = \frac{U_R}{R} = \frac{U_{V2}}{R}$

Động cơ Đ có giản đồ vectơ giống như cuộn cảm có điện trở → giản đồ vectơ của mạch như hình vẽ.

Áp dụng định lý cosine

$$\cos(\pi - \varphi) = \frac{U_Đ^2 + U_R^2 - U^2}{2U_Đ U_R} \rightarrow \cos\varphi = \frac{U_{V3}^2 - U_{V1}^2 - U_{V2}^2}{2U_{V1}U_{V2}}$$

Công suất động cơ

$$P_Đ = U_Đ I cos\varphi = \frac{U_{V3}^2 - U_{V1}^2 - U_{V2}^2}{R}$$

*** Các thành viên CLB Vật lí xPhO tham gia thực hiện lời giải tham khảo đề thi VPhO 41**

- *[sigma]*
- *Phạm Quang Anh*, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHGQ Hà Nội
- *Nguyễn Hoài Anh*, Giáo viên Trường THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Nội
- *Nguyễn Mạnh Dũng*, Trường THPT chuyên Bắc Kạn
- *Nguyễn Hải Dương*, Giáo viên Trường THPT Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định
- *GMC*
- *Phùng Minh Hiệp*, Sinh viên Trường Đại học bách khoa Hà Nội
- *Trần Văn Hiếu*, Trường Đại học Sư phạm TP. Hồ Chí Minh
- *HƯNG THỊNH AN - BÌNH ĐỊNH*
- *Quang Huy*
- *Võ Trương Thiên Kỳ*, Trường THPT Chuyên Lương Văn Chánh, Phú Yên
- *Nguyễn Thành Long*, sinh viên Trường Đại học Bách khoa Hà Nội
- *Lê Duy Nhật*, Giáo viên Trường THPT Gia Định, Tp. Hồ Chí Minh
- *Phưn Phưn*
- *Physicium*
- *qvt*
- *Nguyễn Quốc Sơn*
- *Thanh Tân*
- *Trần Kỳ Vĩ*, Giảng viên Trường Đại học Sư phạm Hà Nội
- *Zinc*

Lời giải tham khảo đề thi VPhO 42

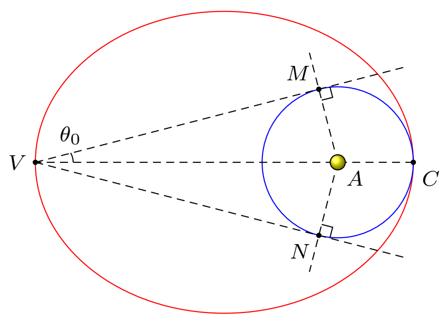
CLB Vật lí xPhO

27, Tháng 2, 2023

Ngày thi thứ nhất

Câu I

1. Hình vẽ mô tả quỹ đạo của vệ tinh



Gọi m là khối lượng của tàu. Bán kính quỹ đạo tròn là

$$R_C = R\sin\theta_0. \tag{1}$$

Bán trục chính của quỹ đạo elip là

$$a = \frac{R+R_C}{2} = \frac{R}{2}(1+\sin\theta_0). \tag{2}$$

Từ phương trình định luật Kepler 3 ta thu được

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM_\odot}} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3(1+\sin\theta_0)^3}{8GM_\odot}}. \tag{3}$$

Suy ra, thời gian tàu đi từ V đến C là

$$\tau = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{R^3(1+\sin\theta_0)^3}{8GM_\odot}} \tag{4}$$

$$\approx 127.45 \text{ ngày}. \tag{5}$$

2. Sử dụng định luật bảo toàn năng lượng đối với quỹ đạo elip, ta có vận tốc của tàu tại cực điểm C là

$$v_C = \sqrt{\frac{2GM_\odot}{R_C} - \frac{GM_\odot}{a}}. \tag{6}$$

Vận tốc của tàu trên quỹ đạo tròn là

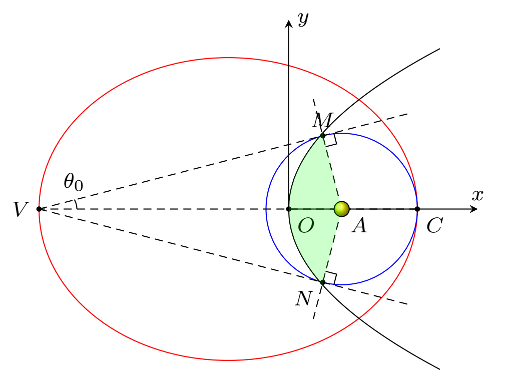
$$v'_C = \sqrt{\frac{GM_\odot}{R_C}}. \tag{7}$$

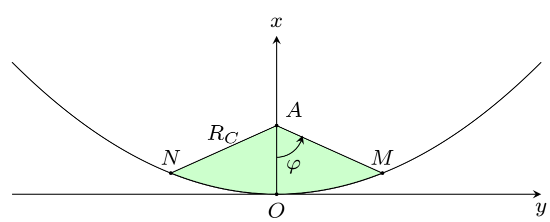
Biến thiên vận tốc của tàu là

$$\Delta v = v_C - v'_C = \sqrt{\frac{GM_\odot}{R\sin\theta_0}}\left(\sqrt{\frac{2}{1+\sin\theta_0}} - 1\right) \tag{8}$$

$$\approx 5.01 \text{ km s}^{-1}. \tag{9}$$

3. Bài toán này không nói rõ vận tốc của tàu thay đổi như nào về hướng nên quỹ đạo của tàu có thể là bất kì đường parabol nào có tiêu điểm tại A. Nên ta chỉ xét các trường hợp khả thi nhất phù hợp thời gian làm bài thi như mô tả trên các hình vẽ bên dưới.
Hình vẽ[1] **trường hợp 1** (khả thi nhất, trục đối xứng của parabol trùng với trục chính của elip):





Đầu tiên ta sẽ đi tìm giá trị a, thông số hình học chính của quỹ đạo parabol. Ta có thể sử dụng hai cách tiếp cận sau:
Phương pháp 1: Giải bằng hình học Descartes
Chọn trục toạ độ Oxy như hình vẽ. Toạ độ điểm M là

$$\begin{cases} x_M &= \dfrac{a}{2} - R_C\sin\theta_0 = \dfrac{a}{2} - R\sin^2\theta_0 \\ y_M &= R_C\cos\theta_0 = R\sin\theta_0\cos\theta_0 \end{cases} \tag{10}$$

Lắp vào phương trình parabol $y_M^2 = 2ax_M$ ta thu được phương trình bậc hai đối với a

$$a^2 - 2aR\sin^2\theta_0 - R^2\sin^2\theta_0\cos^2\theta_0 = 0. \tag{11}$$

Từ đó ta tìm được $a = R\sin\theta_0(1+\sin\theta_0)$.

Phương pháp 2: Sử dụng định luật Kepler 1
Từ định luật Kepler 1, ta có phương trình đường parabol trong hệ toạ độ cực

$$r(\varphi) = \frac{a}{1+\cos\varphi}. \tag{12}$$

[1] Hình vẽ không vẽ đúng tỉ lệ

Tại vị trí $r = R_C$, ta có $\varphi = \dfrac{\pi}{2} - \theta_0$

$$R_C = R\sin\theta_0 = \frac{a}{1+\sin\theta_0} \tag{13}$$
$$\to a = R\sin\theta_0(1+\sin\theta_0). \tag{14}$$

Tiếp theo, ta sẽ có hai cách tiếp cận để tìm thời gian tàu đi từ M đến N.

Phương pháp 1: Giải phương trình vi phân của chuyển động
Momen động lượng của quỹ đạo là: $L = m\sqrt{GM_\odot a} = mr^2\dfrac{d\varphi}{dt}$.
Ta có phương trình bảo toàn năng lượng trong hệ toạ độ cực

$$0 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{GM_\odot m}{r} \tag{15}$$
$$0 = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GM_\odot m}{r} \tag{16}$$
$$0 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{GM_\odot a}{r^2} - \frac{2GM_\odot}{r}. \tag{17}$$

Từ đó ta có phương trình vi phân mô tả khoảng cách của thiên thể theo thời gian

$$\frac{dr}{dt} = -\sqrt{GM_\odot\left(\frac{2}{r} - \frac{a}{r^2}\right)}. \tag{18}$$

Vế trái có dấu trừ là do $\dfrac{dr}{dt} < 0$ khi tàu đi từ điểm M đến cực điểm O của parabol.

$$\frac{dr}{\sqrt{\dfrac{2}{r} - \dfrac{a}{r^2}}} = -\sqrt{GM_\odot}dt. \tag{19}$$

Đặt $k = \dfrac{R_C}{a} = \dfrac{1}{1+\sin\theta_0}$. Tích phân lên lấy cận từ điểm M đến điểm O, ta thu được phương trình

$$\int_{ka}^{a/2} \frac{dr}{\sqrt{\dfrac{2}{r} - \dfrac{a}{r^2}}} = -\sqrt{GM_\odot}\int_0^{T/2} dt \tag{20}$$
$$-\frac{a^{3/2}}{3}(k+1)\sqrt{2k-1} = -\sqrt{GM_\odot}\frac{T}{2}. \tag{21}$$

Từ đó suy ra được thời gian tàu đi từ M đến N là

$$T = \frac{2}{3}(2+\sin\theta_0)\sqrt{\frac{R^3\sin^3\theta_0(1-\sin\theta_0)}{GM_\odot}}$$
$$\approx 28.29 \text{ ngày}. \tag{22}$$

Phương pháp 2: Sử dụng định luật Kepler 2
Từ định luật Kepler 2, ta có diện tích góc quét của tàu đối với tiêu điểm sẽ tỉ lệ thuận với thời gian theo mối quan hệ

$$\frac{dS}{dt} = \frac{L}{2m} = \frac{\sqrt{GM_\odot a}}{2} \tag{23}$$
$$T = \frac{2S}{\sqrt{GM_\odot R\sin\theta_0(1+\sin\theta_0)}}. \tag{24}$$

Diện tích quét được tính bằng vùng màu xanh lá cây (hình vẽ)

$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 - S_3 \\ &= R^2\sin^2\theta_0\cos\theta_0(1-\sin\theta_0) + R^2\sin^3\theta_0\cos\theta_0 \\ &\quad - 2\int_0^{y_M}\frac{1}{2a}y^2dy \\ &= R^2\frac{2+\sin\theta_0}{3}\sin^2\theta_0\cos\theta_0. \end{aligned} \tag{25}$$

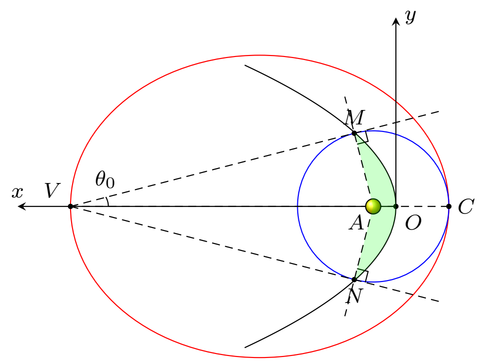
Từ đó suy ra được thời gian tàu đi từ M đến N là

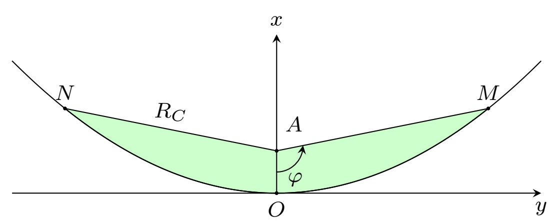
$$T = \frac{2}{3}(2+\sin\theta_0)\sqrt{\frac{R^3\sin^3\theta_0(1-\sin\theta_0)}{GM_\odot}}$$
$$\approx 28.29 \text{ ngày}. \tag{26}$$

Vận tốc của tàu tại điểm N là

$$v_N = \sqrt{\frac{2GM_\odot}{R\sin\theta_0}}$$
$$\approx 55.6 \text{ km s}^{-1}. \tag{27}$$

Một trường hợp quỹ đạo đối xứng khác:





Làm tương tự tính được biểu thức của a

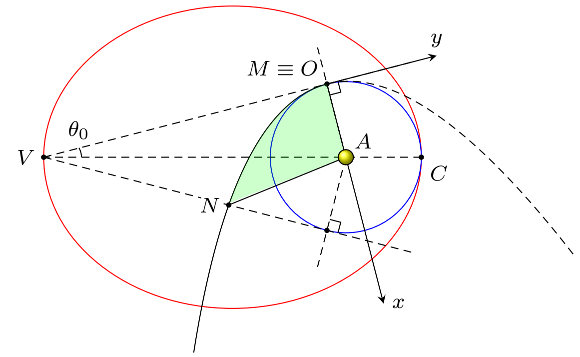
$$R_C = R\sin\theta = \frac{a}{1-\sin\theta_0} \tag{28}$$

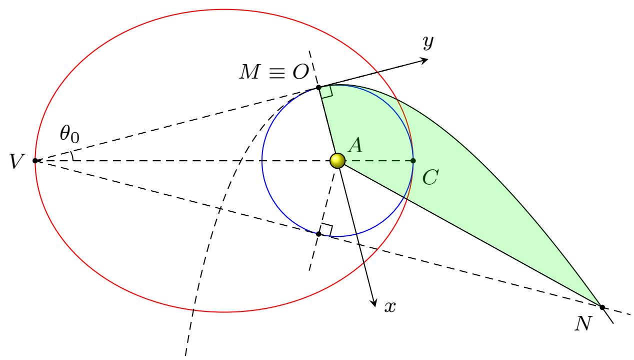
Làm tương tự như trên ta thu được thời gian tàu đi từ M đến N là

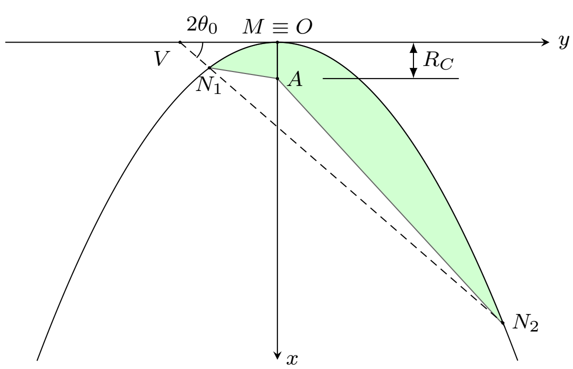
$$T = \frac{2}{3}(2-\sin\theta_0)\sqrt{\frac{R^3\sin^3\theta_0(1+\sin\theta_0)}{GM_\odot}}$$
$$\approx 30.12 \text{ ngày}. \tag{29}$$

Hình vẽ[2] **trường hợp 2** (tàu tăng tốc theo phương tiếp tuyến với quỹ đạo tròn để đạt được quỹ đạo là một nửa parabol):

[2] Hình vẽ không vẽ đúng tỉ lệ







Ta sẽ đi tìm khoảng cách $r_N = \overline{AN} = kR_C$. Ở trường hợp này $a = 2R_C$.

Phương pháp 1: Giải bằng hình học Descartes
Trước hết hết ta đi tìm toạ độ (x_N, y_N) trong hệ toạ độ Oxy
Ta có phương trình của đường parabol

$$y^2 = 4R_C x \tag{30}$$

Phương trình của đường thẳng VN là

$$\frac{x - 0}{y - (-VM)} = \tan(2\theta_0) \tag{31}$$

$$\rightarrow y = -R_C \cot\theta_0 + x\cot(2\theta_0) \tag{32}$$

Đường parabol và đường thẳng VN giao nhau tại N nên ta có:

$$(x_N \cot(2\theta_0) - R_C \cot\theta_0)^2 = 4R_C x_N \tag{33}$$

Giải phương trình bậc 2 ta thu được hai nghiệm ứng với các vị trí N_1 và N_2 như mô tả trên hình vẽ:

$$\left[\begin{array}{ll} x_N & \approx 0.4091 R_C \\ x_N & \approx 37.63 R_C \end{array}\right. \tag{34}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ll} r_N & \approx 1.4091 R_C \\ r_N & \approx 38.63 R_C \end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{ll} k & \approx 1.409 \\ k & \approx 38.63 \end{array}\right. \tag{35}$$

Phương pháp 2: Sử dụng định luật Kepler 1
Gọi góc $\angle VAN = \alpha$.
Sử dụng định luật Kepler 1 ta có

$$r_N = \frac{2R_C}{1 + \sin(\theta_0 - \alpha)}. \tag{36}$$

Sử dụng định lý sin trong tam giác ΔVNA ta thu được

$$\frac{\sin\theta_0}{r_N} = \frac{\sin(\theta_0 + \alpha)}{R}. \tag{37}$$

Từ hai phương trình trên, ta thu được

$$\frac{1 + \sin(\theta_0 - \alpha)}{2\sin\theta_0} = \cos\alpha + \cot\theta_0 \sin\alpha \tag{38}$$

Từ đó thu được phương trình bậc hai đối với $\sin\alpha$

$$\begin{aligned} &(1 + 4\sin\theta_0\cos\theta_0 + 4\cos^2\theta_0)\sin^2\alpha - 2\cos\theta_0\sin\alpha \\ &\quad + (3\cos^2\theta_0 + 4\sin\theta_0\cos\theta_0) = 0 \end{aligned} \tag{39}$$

Giải ra thu được $\alpha \approx 10.2^\circ$ và $\alpha \approx 143.5^\circ$. Từ đó ta tìm được $k = \dfrac{2}{1 + \sin(\theta_0 - \alpha)}$. Có các giá trị $k = 1.41$ ứng với N ở trong elip và $k = 38.7$ ứng với N ở ngoài elip.
Từ phương trình (19) ta làm tương tự

$$\int_{R_C}^{kR_C} \frac{dr}{\sqrt{\dfrac{1}{r} - \dfrac{R_C}{r^2}}} = \sqrt{2GM_\odot}\int_0^T dt \tag{40}$$

$$\frac{2}{3}R_C^{3/2}(k+2)\sqrt{k-1} = \sqrt{2GM_\odot}T. \tag{41}$$

Từ đó thời gian tàu bay từ M đến N là

$$T = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{R^3\sin^3\theta_0}{2GM_\odot}}(k+2)\sqrt{k-1}. \tag{42}$$

Đối với N ở trong elip thì $T \approx 26$ ngày.
Đối với N ở ngoài elip thì $T \approx 8.13$ năm.

Trường hợp tổng quát: Đối với trường hợp vector vận tốc $\vec{v}_M$ bất kì thì bài toán sẽ trở nên khó hơn nhiều và sẽ giải được khi thay số liệu cụ thể.

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{\frac{R^3\sin^3\theta_0}{GM_\odot}}\left(\int_{k_A}^{k_M}\frac{dx}{\sqrt{\dfrac{2}{x} - \dfrac{k_A}{x^2}}} + \int_{k_A}^{k_N}\frac{dx}{\sqrt{\dfrac{2}{x} - \dfrac{k_A}{x^2}}}\right) \\ &= \frac{1}{3}\sqrt{\frac{R^3\sin^3\theta_0}{GM_\odot}}\Big[(k_A + k_N)\sqrt{2k_N - k_A} \\ &\quad + (k_A + k_M)\sqrt{2k_M - k_A} - 4k_A^{3/2}\Big], \end{aligned} \tag{43}$$

với $k_M = \dfrac{r_M}{R_C}$, $k_N = \dfrac{r_N}{R_C}$ và $k_A = \dfrac{a}{R_C}$. Giá trị r_N và a có thể được tìm bằng phương pháp hình học và định luật Kepler 1.

Lời giải đề xuất bởi các thành viên:

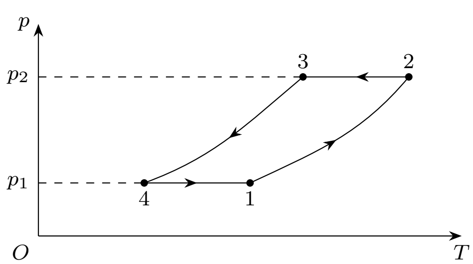
- *Trịnh Duy Hiếu*, Đại học Quốc gia Singapore
- *Võ Trương Thiên Kỳ*, Trường Đại học Bách Khoa Tp. Hồ Chí Minh
- *Phạm Trung Kiên*, Đại học Bách Khoa Hà Nội

Câu II

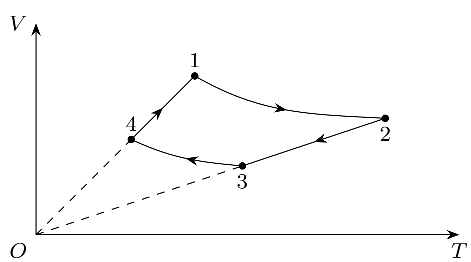
Đây là bài toán về chu trình Brayton (hay còn được gọi là chu trình Joule) với 2 quá trình đẳng áp và 2 quá trình đoạn nhiệt (đẳng Entropy).

1. *Vẽ lại chu trình trên đồ thị $p-T$ (áp suất - nhiệt độ) và trên đồ thị (V-T) (thể tích - nhiệt độ).

+Đồ thị $p-T$:



+Đồ thị $V-T$:



*Thiết lập biểu thức tính hiệu năng của máy lạnh theo p_1, p_2 và γ.
Ta nhớ rằng hiệu năng của một máy lạnh được định nghĩa thông qua biểu thức

$$\varepsilon = \frac{Q_1}{A}.$$

Hay viết theo cách khác

$$\varepsilon = \left(\frac{Q_2}{Q_1} - 1\right)^{-1}, \tag{1}$$

trong đó, A là công mà tác nhân nhận vào trong một chu trình, Q_1 là nhiệt lượng tác nhân nhận vào (trong quá trình 4-1) và Q_2 là nhiệt lượng tác nhân nhả ra (trong quá trình 2-3).
Do các quá trình đẳng áp với khí lý tưởng là các quá trình có nhiệt dung không đổi chỉ phụ thuộc vào loại khí và số mol nên

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2 - T_3}{T_1 - T_4}. \tag{2}$$

Vì quá trình 1-2 và quá trình 3-4 là các quá trình đoạn nhiệt thuận nghịch nên

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_4} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \Rightarrow \frac{T_2 - T_3}{T_1 - T_4} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}. \tag{3}$$

Thay lần lượt các biểu thức (3) vào (2) rồi thay vào (1), ta tìm được hiệu năng của chu trình:

$$\varepsilon = \left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right]^{-1}. \tag{4}$$

2. Thay các số liệu $T_1 = 302\,\mathrm{K}$, $T_3 = 326\,\mathrm{K}$, $\frac{p_2}{p_1} = \frac{1.64}{1.04} \approx 1.58$ và $\gamma = 1.4$ vào phương trình (3) và (4), ta được:

$$T_2 = T_1\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \approx 344\,\mathrm{K} \Rightarrow t_2 = 71\,^\circ\mathrm{C}. \tag{5}$$

$$T_4 = T_3\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{-\frac{\gamma-1}{\gamma}} \approx 286\,\mathrm{K} \Rightarrow t_4 = 13\,^\circ\mathrm{C}. \tag{6}$$

và hiệu năng của máy lạnh là

$$\varepsilon = \left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right]^{-1} \approx 7.20. \tag{7}$$

3. **a,** Xét quá trình vô cùng nhỏ trong thời gian dt, không khí trong phòng nhận lượng nhiệt $\delta Q_T = h\,(t_M - t_p)\,dt$ từ môi trường ngoài và nhả ra nhiệt lượng $\delta Q = \varepsilon P dt$, làm nhiệt độ của phòng thay đổi từ t_p đến $t_p + dt_p$: Nhiệt lượng khí trong phòng nhận từ máy lạnh:

$$-\delta Q + \delta Q_T = \rho_{kk} C_{V\,kk} V dt_p.$$

Hay

$$-\varepsilon P dt + h\,(t_M - t_p)\,dt = \rho_{kk} C_{V\,kk} V dt_p. \tag{8}$$

Phân ly biến số và lấy tích phân, ta tìm được thời gian để nhiệt độ giảm $t_0 = 29\,^\circ\mathrm{C}$ đến $t_S = 20\,^\circ\mathrm{C}$ là

$$t = \frac{\rho_{kk} C_{V\,kk} V}{h} \ln\left[\frac{-\varepsilon P + h\,(t_M - t_0)}{-\varepsilon P + h\,(t_M - t_S)}\right] \approx 718\,\mathrm{s}. \tag{9}$$

Tức là cỡ khoảng 12 phút!

b, Hoàn toàn tương tự cách giải phần **a**, thời gian máy nghỉ chính là tương ứng với trường hợp $P = 0$ và nhiệt độ giảm từ $t_S + \Delta t$ đến t_S, và bằng

$$t_{\text{nghỉ}} = \frac{\rho_{kk} C_{V\,kk} V}{h} \ln\left[\frac{t_M - t_S}{t_M - (t_S + \Delta t)}\right]. \tag{10}$$

Còn thời gian máy hoạt động để tăng nhiệt độ từ t_S trở lại $t_S + \Delta t$

$$t_{\text{hoạt động}} = \frac{\rho_{kk} C_{V\,kk} V}{h} \ln\left[\frac{-\varepsilon P + h\,[t_M - (t_S + \Delta t)]}{-\varepsilon P + h\,(t_M - t_S)}\right]. \tag{11}$$

Từ (10) và (11), ta tính được tỷ số thời gian máy hoạt động và thời gian máy nghỉ trong một chu kỳ tắt mở:

$$\frac{t_{\text{hoạt động}}}{t_{\text{nghỉ}}} = \frac{\ln\left[\dfrac{-\varepsilon P + h\left[t_M - (t_S + \Delta t)\right]}{-\varepsilon P + h\left(t_M - t_S\right)}\right]}{\ln\left[\dfrac{t_M - t_S}{t_M - (t_S + \Delta t)}\right]} \approx 18.7. \tag{12}$$

*Ghi chú: Ở phần **3** của bài toán, ta đã mặc định hiểu rằng "phòng kín" tức là tổng thể tích khí trong phòng không đổi. Giả thiết này có thể đúng đối với một mục đích nào đó của bài toán, song nó sẽ không còn phù hợp nếu hiểu rằng đây là máy lạnh để làm mát phòng ở. Phòng ở của chúng ta không thể được coi là phòng kín, chúng luôn có những kẽ hở để không khí cân bằng áp suất với bên ngoài. Nếu tính thêm ảnh hưởng này, lời giải bài toán vẫn hầu như không đổi mà chỉ cần thay nhiệt dung riêng của không khí bằng một giá trị khác, một giá trị có lẽ nhỏ hơn nhiệt dung riêng đẳng áp do quá trình giãn đẳng áp cũng đồng thời làm giảm số mol khí trong phòng. Đối chiếu với số liệu thực tế, nhiệt dung riêng đẳng tích của không khí ở nhiệt độ phòng chỉ vào cỡ $c_{Vkk} \approx 0.72\,\mathrm{kJ/kg\cdot K}$, tức là có sự chênh lệch khá lớn với số liệu đề bài cho. Có thể điều này đã nằm trong ngụ ý của tác giả bài toán như một sự hiệu chỉnh ứng với các hiện tượng phức tạp kể trên. Nhìn chung, dù hiểu theo cách nào, phần **3a** vẫn sẽ cho chúng ta một đánh giá về cỡ độ lớn thời gian làm lạnh của phòng và phần **3b** vẫn sẽ có tỷ số thời gian máy lạnh hoạt động và thời gian nghỉ không đổi do tỷ số này không phụ thuộc vào nhiệt dung của không khí.*

Lời giải đề xuất bởi các thành viên:

- *Võ Trương Thiên Kỳ*, Trường Đại học Bách Khoa Tp. Hồ Chí Minh
- *Thầy Phạm Đình Hoàn*, Trường THPT Chuyên Lào Cai

Câu III

1. (a) Gọi θ là góc hợp bởi pháp tuyến dây và $\vec{B}_0$, do đó $\theta(t) = \omega t$

Từ thông qua vòng dây:

$$\Phi = \vec{B}_0 \cdot \vec{S} = B_0 \pi a^2 \cos\theta \tag{1}$$

Định luật Lenz cho suất điện động cảm ứng:

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi}{dt} = B_0 \pi a^2 \omega_0 \sin\theta \tag{2}$$

(b) Công suất trung bình cần cung cấp cho vòng dây trong một chu kỳ bằng công suất tiêu tán trên dây:

$$\mathcal{P}(t) = \frac{\mathcal{E}_{\text{ind}}^2}{R} = \frac{B_0^2 \pi^2 a^4 \omega_0^2 \sin^2(\omega t)}{R} \tag{3}$$

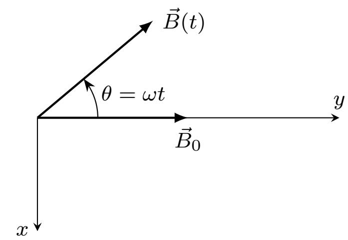
Từ đây ta tính được công suất trung bình theo chu kỳ:

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{1}{2} \frac{B_0^2 \pi^2 a^4 \omega_0^2}{R} \tag{4}$$

(c) Từ trường do vòng dây gây ra tại tâm có độ lớn:

$$B(t) = \frac{\mu_0 I}{2a} = \frac{\mu_0 e_c}{2aR} = \frac{\mu_0 B_0 \pi a^2 \omega_0 \sin\theta}{2aR} \tag{5}$$

Từ trường này quay với vận tốc góc ω_0 , xét trong mặt phẳng Oxy (hình vẽ).



Hình chiếu lên các trục của từ trường có giá trị trung bình:

$$\langle B_x \rangle = -\langle B(t)\sin\theta \rangle = -\frac{\mu_0 B_0 \pi a^2 \omega_0}{2aR} \langle \sin^2\theta \rangle$$
$$= -\frac{\mu_0 B_0 \pi a^2 \omega_0}{4aR}. \tag{6}$$

$$\langle B_y \rangle = \langle B(t)\cos\theta \rangle = \frac{\mu_0 B_0 \pi a^2 \omega_0}{2aR} \langle \sin\theta\cos\theta \rangle = 0. \tag{7}$$

Vì tốc độ góc của nam châm thử nhỏ hơn của vòng dây và xem như nam châm thử có kích thước nhỏ nên khi nam châm cân bằng:

$$\tan\theta = \frac{-\langle B_x \rangle}{B_0} = \frac{\pi \mu_0 a \omega_0}{4R} \rightarrow R = \frac{\pi \mu_0 a \omega_0}{4\tan\theta}. \tag{8}$$

2. Động năng vòng dây:

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{4} m a^2 \dot{\theta}^2. \tag{9}$$

Công suất tiêu tán trên dây:

$$\mathcal{P}(t) = \frac{B_0^2 \pi^2 a^4 \omega^2(t) \sin^2\theta}{R}. \tag{10}$$

Định lý động năng dạng đạo hàm cho:

$$\frac{dK}{dt} = -\mathcal{P}(t). \tag{11}$$

$$\frac{1}{2} m a^2 \frac{d\omega}{dt} = -\frac{B_0^2 \pi^2 a^4 \sin^2\theta}{R} \frac{d\theta}{dt}. \tag{12}$$

Gọi φ là góc quay trước khi dừng lại, tích phân hai vế ta thu được:

$$\frac{mR}{2B_0^2 \pi^2 a^2} \int_{\omega_0}^{0} d\omega = -\int_0^{\varphi} \sin^2\theta d\theta. \tag{13}$$

$$\rightarrow \frac{mR\omega_0}{B_0^2 \pi^2 a^2} = \varphi - \frac{\sin(2\varphi)}{2}. \tag{14}$$

$$\rightarrow \varphi \approx 76{,}67 \text{ rad}. \tag{15}$$

Vậy khung quay được $\varphi/2\pi \approx 12{,}2$ vòng.

Ở đây, nếu dùng $\langle \mathcal{P}(t) \rangle$ thì đáp số ra 12,16 vòng!

Ghi chú: Bài này cũng có thể tiếp cận bằng phương pháp động lực học:

Dòng điện chạy trong cuộn dây là:

$$i = \frac{\mathcal{E}_{\text{ind}}}{R} = \frac{d\Phi}{dt} = B_0 \pi a^2 \sin\theta \frac{d\theta}{dt}. \tag{16}$$

Mô men lực tác dụng lên vòng dây

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B} \tag{17}$$

$$\tau = -i\pi a^2 B_0 \sin\theta = I\frac{d\omega}{dt} \tag{18}$$

$$\rightarrow -\frac{(B_0\pi a^2)^2}{R}\sin^2\theta\frac{d\theta}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} \tag{19}$$

Thay I vào tương tự ta thu được phương trình (13)

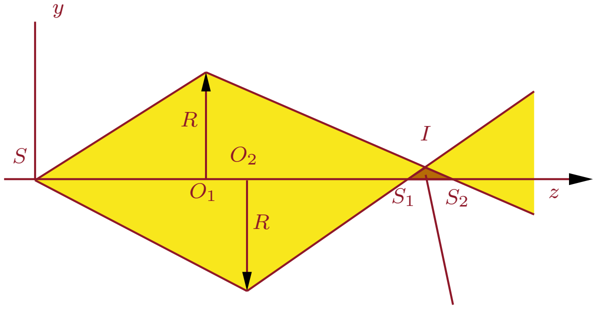
Lời giải đề xuất bởi các thành viên:

- *Võ Trương Thiên Kỳ*, Trường Đại học Bách Khoa Tp. Hồ Chí Minh
- *Trịnh Duy Hiếu*, Đại học Quốc Gia Singapore
- *Thầy Phạm Đình Hoàn*, Trường THPT Chuyên Lào Cai

Câu IV

Giao thoa kế đưa ra trong bài toán là giao thoa kế trong thí nghiệm của GS. Meslin ở Đại học Montpellier (làm 1893).

1. Với dữ liệu trong bài, sơ đồ hiện tượng của bài toán được mô tả trong hình 4.1.



Hình 4.1. Sự tạo thành các chùm tia

Dễ thấy nếu màn hứng đặt vuông góc với quang trục và đi qua I thì trường giao thoa trên màn đạt diện tích lớn nhất.

Sơ đồ tạo ảnh $S \xrightarrow{L_1} S_1; S \xrightarrow{L_2} S_2$

$\overline{O_1S} = -d_1 = -60$ cm; $\overline{O_2S} = -(d_1 + O_1O_2) = -67.5$ cm

Công thức Descartes cho:

$$-\frac{1}{\overline{O_1S}} + \frac{1}{\overline{O_1S_1}} = \frac{1}{f} \rightarrow \overline{O_1S_1} = \left(\frac{1}{f} + \frac{1}{\overline{O_1S}}\right)^{-1} = 180 \text{ cm}$$
$$-\frac{1}{\overline{O_2S}} + \frac{1}{\overline{O_2S_1}} = \frac{1}{f} \rightarrow \overline{O_2S_2} = \left(\frac{1}{f} + \frac{1}{\overline{O_2S}}\right)^{-1} = 135 \text{ cm}$$

Hay $S_1S = SO_1 + O_1S_1 = 240$ cm; $S_2S = SO_2 + O_2S_2 = 202.5$ cm.

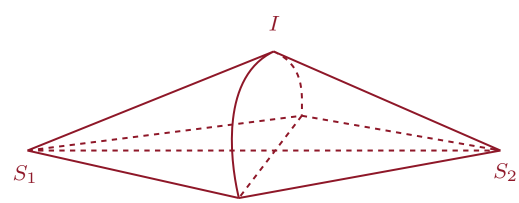
Đặt gốc tọa độ tại S, trục y hướng lên, trục z trùng với quang trục. Gọi R là bán kính rìa mỗi nửa thấu kính.

Giờ ta đi tìm tọa độ điểm $I(z, y)$, nó là giao của hai tia giới hạn y_1 và y_2 tới từ hai thấu kính L_1 và L_2 :

$$y_1 = -\frac{R}{O_1S_1}z + \frac{R}{O_1S_1}SS_1$$
$$y_2 = \frac{R}{O_2S_2}z - \frac{R}{O_2S_2}SS_2$$

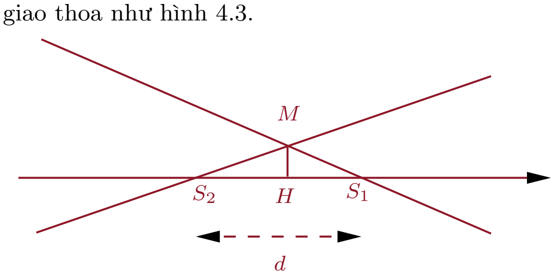
$$\text{Khi } y_1 = y_2 \rightarrow z \equiv CS = \frac{\dfrac{SS_1}{O_1S_1} + \dfrac{SS_2}{O_2S_2}}{\dfrac{1}{O_2S_2} + \dfrac{1}{O_1S_1}} \approx 218.6 \text{ (cm)}.$$

2. Miền giao thoa là thể tích $V_{S_2IS_1}$ được hiển thị trong hình 4.2.



Hình 4.2. Mô tả miền giao thoa

Ta đi tìm hiệu quang trình tại một điểm M thuộc trường giao thoa như hình 4.3.



Hình 4.3. Cách hình dung hiệu quang trình

Gọi H là hình chiếu của điểm M trên trục quang học.

Đặt $HM = r$ và $S_2H = \zeta$ ($\zeta > 0$).

Sau đó, chúng ta có $HS_1 = d - \zeta$ (trong đó $d = S_2S_1 = SS_1 - SS_2 = 37.5$ cm).

Gọi δ là hiệu quang trình cần tìm; ta đặt $\delta \equiv l_1 - l_2$, với l_1 (hoặc l_2) là quang trình của tia đi qua thấu kính L_1 (hoặc L_2).

Từ hình vẽ:

$$l_1 = \overline{SS_1} + \overline{S_1M} = SS_1 - \sqrt{r^2 + (d-\zeta)^2}$$
$$l_2 = \overline{SS_2} + \overline{S_2M} - \frac{\lambda}{2} = SS_2 + \sqrt{r^2 + \zeta^2} - \frac{\lambda}{2}$$

Hạng tử $-\dfrac{\lambda}{2}$ xuất phát từ quan điểm của Meslin [1].

Hiệu quang trình được viết:

$$\delta = l_1 - l_2 = d + \frac{\lambda}{2} - \sqrt{r^2 + (d-\zeta)^2} - \sqrt{r^2 + \zeta^2}.$$

Hơn nữa, nếu chúng ta thừa nhận rằng $r^2 \ll \zeta^2$ và $r^2 \ll (d-\zeta)^2$ thì dẫn đến:

$$\delta = l_1 - l_2 \approx d + \frac{\lambda}{2} - (d-\zeta)\left[1 + \frac{r^2}{2(d-\zeta)^2}\right] - \zeta\left[1 + \frac{r^2}{2\zeta^2}\right]$$

hoặc:

$$\delta \approx \frac{\lambda}{2} - \frac{r^2}{2}\left[\frac{1}{d-\zeta} + \frac{1}{\zeta}\right]$$

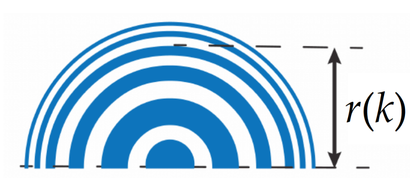
Nếu màn hứng σ được đặt cách nguồn S một khoảng l, ta có: $\zeta = l - SS_2 \approx 16.07$ cm

$$\delta \approx \frac{\lambda}{2} - \frac{r^2}{2}\left[\frac{1}{d + SS_2 - l} + \frac{1}{l - SS_2}\right]$$

Do đó, ta chỉ ra rằng $\delta =$ Cte khi và chỉ khi $r =$ Cte. Do đó ta quan sát các vân giao thoa ở dạng nửa vòng có tâm màu đen $\delta = \dfrac{\lambda}{2}$ nếu $r = 0$). Các vành "sáng bóng" tương ứng với $\delta = k'\lambda \quad (k' \in \mathbb{Z})$, do đó:

$$r = \sqrt{\frac{2\lambda\left(k + \frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{d + SS_2 - l} + \frac{1}{l - SS_2}}} \quad \text{với } k' = -k$$

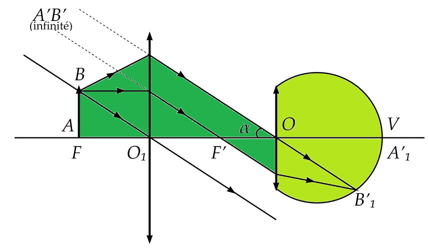
Hình ảnh hệ vân Meslin có thể cho thấy trong hình 4.4.



Hình 4.4. Hình ảnh các vân Meslin

3. Với $k = 0$ ta có vân trung tâm; $k = 1$ (vân sáng thứ hai) là vân sáng bậc 1 thì khi đó $k = 2$ là vân bậc 2 và do đó:

$$\lambda = \frac{r^2}{2\left(k + \frac{1}{2}\right)}\left(\frac{1}{d + SS_2 - l} + \frac{1}{l - SS_2}\right)$$
$$\approx 0.502 \ \mu\text{m (xanh lá)}.$$



Hình 4.5. Dùng kính lúp quan sát khoảng vân

4. Để ngắm chừng ở vô cực hệ vân phải đặt ở tiêu điểm của kính lúp và do đó màn cách kính một khoảng bằng đúng tiêu cự của kính lúp (ở đây ta gọi là f_k) nên khoảng cách từ S tới kính là $CS + f_k = 220.6$ cm.

   Khi ngắm chừng ở vô cực các tia qua mắt là song song. Khi đó góc trông sẽ là: $\alpha \approx \tan\alpha = \dfrac{r_1}{f_k} \approx 1.065°$.

Lời giải đề xuất bởi các thành viên:

- *Thầy Trần Kỳ Vĩ*, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội
- *Thầy Nguyễn Hải Dương*, Trường THPT Chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định

Câu V

1

Phương trình phản ứng:

$$^{210}_{84}\text{Po} \to {}^{206}_{82}\text{Pb} + {}^{4}_{2}\alpha \tag{1}$$
$$^{9}_{4}\text{Be} + {}^{4}_{2}\alpha \to {}^{A}_{6}\text{C} + {}^{13-A}_{0}\text{X} \tag{2}$$

Năng lượng tỏa ra khi một hạt Po phân rã:

$$Q = \Delta mc^2 = (m_{P_0} - m_{P_b} - m_\alpha)\, c^2 = 5.4\,\text{MeV} \tag{3}$$

Áp dụng định luật bảo toàn động lượng và bảo toàn năng lượng:

$$K_\alpha + K_{Pb} = 5.4 \tag{4}$$
$$p_\alpha + p_{Pb} = 0 \tag{5}$$

Từ phương trình (5) suy ra: $\dfrac{K_\alpha}{K_{Pb}} = \dfrac{m_{Pb}}{m_\alpha} \approx 51.5$, thay vào phương trình (4) ta thu được:

$$K_\alpha \approx 5.3\,\text{MeV}.$$

2

Gọi E, E', m_0, p lần lượt là năng lượng photon trước va chạm, năng lượng photon sau va chạm; khối lượng nghỉ của proton; động lượng của proton sau va chạm. Ta có $p = m_0 v$, $K = \dfrac{1}{2}m_0 v^2$, suy ra:

$$p = \frac{2K}{v} \tag{6}$$

Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng:

$$E + m_0c^2 = E' + m_0c^2 + K,$$

suy ra,

$$E' = E - K. \tag{7}$$

Gọi góc giữa phương chuyển động của photon và proton sau va chạm là α. Áp dụng định luật bảo toàn động lượng ta sẽ có:

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 = \left(\frac{E'}{c}\right)^2 + p^2 + 2\frac{E'}{c}p\cos\alpha \tag{8}$$

Thay (6), (7) vào (8), ta thu được:

$$E = \left[1 + \frac{4\left(\frac{c}{v}\right)^2 - 1}{2 - 4\frac{c}{v}\cos\alpha}\right] K \tag{9}$$

Năng lượng tối thiểu của photon ứng với $\cos\alpha = -1$. Thay số vào phương trình (9) ta thu được:

$$E_{\min} \approx 54.7\,\text{MeV} \tag{10}$$

3

Giả sử X là photon. Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng ta có:

$$\Delta m_C c^2 + K_\alpha = \Delta m_\alpha c^2 + \Delta m_{Be} c^2 + E_X + K_C, \tag{11}$$

suy ra:

$$\begin{aligned} E_X &= K_\alpha + \Delta m_C c^2 - (\Delta m_\alpha + \Delta m_{Be})c^2 - K_C \\ &\leq K_\alpha + \Delta m_C c^2 \end{aligned} \tag{12}$$

Thay số vào (12), ta được $E_X \leq 15.297\,\text{MeV}$, mà theo phần 2 thì giá trị nhỏ nhất năng lượng của photon là $54.7\,\text{MeV}$, do đó X không thể là photon.

4

Gọi khối lượng và động lượng của X trước va chạm là m và p ($p = mv$). Động lượng của X và proton sau va chạm lần lượt là p_1 và p_2 ($p_2 = m_p v_p$). Khi X và proton va chạm trực diện, áp dụng định luật bảo toàn động lượng và bảo toàn năng lượng ta có:

$$p = -p_1 + p_2, \tag{13}$$

$$\frac{p^2}{2m} = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m_p}. \tag{14}$$

Từ (13) và (14) ta tìm được: $p = p_2(1 + m/m_p)/2$, hay

$$v = v_p\left(\frac{m_p + m}{2m}\right) \tag{15}$$

Tương tự, khi X va chạm trực diện với Ni-tơ, ta có:

$$v = v_N\left(\frac{m_N + m}{2m}\right) \tag{16}$$

Từ (15) và (16) ta có:

$$\frac{v_N}{v_p} = \frac{m_p + m}{m_N + m} \tag{17}$$

Thay số vào ta thu được:

$$\frac{1 + m}{14 + m} = \frac{2}{15} \tag{18}$$

Giải phương trình (18) ta thu được khối lượng của hạt X: $m = 1\,\text{u}$

Lời giải đề xuất bởi các thành viên:

- *Thầy Nguyễn Hải Dương*, Trường THPT Chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định
- *Thầy Phạm Đình Hoàn*, Trường THPT Chuyên Lào Cai
- *Yuki*, Ecole Polytechnique

Các thành viên biên tập LaTeX:

- *Trịnh Duy Hiếu*, Đại học Quốc Gia Singapore
- *Trần Dương Chính*, Đại học Bách Khoa Hà Nội
- *Phạm Trung Kiên*, Đại học Bách Khoa Hà Nội
- *Nguyễn Thành Long*, Đại học Bách Khoa Hà Nội
- *Trần Kỳ Vĩ*, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội
- *Physicium*, CLB Vật lí xPhO

Lời giải tham khảo đề thi VPhO 42

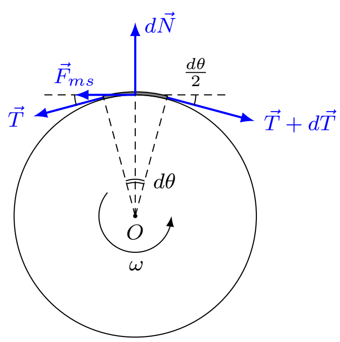
CLB Vật lí xPhO

28, Tháng 2, 2023

Ngày thi thứ hai

Câu I

1. Chúng ta đi xét một vi phân của dây đai có góc chắn $d\theta$.



Xét sự cân bằng của mảnh dây bằng cách chiếu lên phương vuông góc và tiếp tuyến ta thu được:

$$(T+dT)\cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) - T\cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) - dF_{ms} = 0 \quad (1)$$

$$(T+dT)\sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) + T\sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) - dN = 0 \quad (2)$$

Xấp xỉ góc nhỏ ta thu được:

$$\begin{cases} dT &= dF_{ms} \\ dN &= Td\theta \end{cases} \quad (3)$$

Khi dây trượt $dF_{ms} = \mu N$, do đó

$$dT = \mu T d\theta \to \frac{dT}{T} = \mu d\theta \quad (4)$$

Tích phân hai vế ta thu được:

$$T_2 = T_1 e^{\mu\theta_0} \quad (5)$$

2. (a) Cân bằng moment cho thanh AC

$$T_M \times AB = F \times AC \to T_M = F\frac{AC}{AB} = 1300\,\text{N} \quad (6)$$

Xét trụ quay cùng chiều kim đồng hồ:

$$T_N = T_M e^{\mu\theta_0} \approx 4028.3\,\text{N} \quad (7)$$

Xét trụ quay ngược chiều kim đồng hồ:

$$T_N = T_M e^{-\mu\theta_0} \approx 419.5\,\text{N} \quad (8)$$

trong đó $\theta_0 = \dfrac{3\pi}{2}$

(b) Moment quán tính của hình trụ với trục quay đi qua trục

$$I = \frac{1}{2}mR^2. \quad (9)$$

Moment quay do lực ma sát sinh ra:

$$dM = R \times dF_{ms} = RdT \quad (10)$$

$$\to M = R|T_M - T_N| = \frac{dL}{dt}. \quad (11)$$

Hình trụ dừng quay sau thời gian:

$$\tau = \frac{I\omega_0}{R|T_M - T_N|}. \quad (12)$$

Xét hình trụ quay cùng chiều kim đồng hồ:

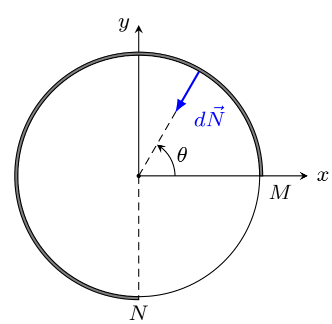
$$\tau_1 = \frac{I\omega_0}{RT_M(e^{\mu\theta_0}-1)} \approx 0{,}200\,\text{s}. \quad (13)$$

Xét hình trụ quay ngược chiều kim đồng hồ:

$$\tau_2 = \frac{I\omega_0}{RT_M(1-e^{-\mu\theta_0})} \approx 0{,}618\,\text{s}. \quad (14)$$

Nhận xét: $\tau_2 > \tau_1$ để hãm phanh nhanh hơn thì cần bố trí thanh AC sao cho $T_N > T_M$.

(c) Xét hình vẽ bên dưới:



Xét trường hợp trụ quay cùng chiều kim đồng hồ ta có:

$$dN = Td\theta = T_M e^{\mu\theta} d\theta \quad (15)$$

Ta có:

$$dN_x = -dN\cos\theta = -T_M e^{\mu\theta}\cos\theta d\theta, \quad (16)$$

suy ra

$$N_x = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} -T_M e^{\mu\theta}\cos\theta d\theta = T_M \frac{e^{\frac{3\pi\mu}{2}} + \mu}{(\mu^2+1)} \quad (17)$$

Tương tự:

$$dN_y = -dN\sin\theta = -T_M e^{\mu\theta}\sin\theta d\theta, \tag{18}$$

suy ra:

$$N_y = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} -T_M e^{\mu\theta}\sin\theta d\theta = T_M\frac{\mu e^{\frac{3\pi\mu}{2}} - 1}{(\mu^2+1)} \tag{19}$$

Vậy áp lực dây đai tác dụng lên khối trụ:

$$N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2} \tag{20}$$

$$= \frac{T_M}{\mu^2+1}\sqrt{\left(e^{\frac{3\pi\mu}{2}} + \mu\right)^2 + \left(\mu e^{\frac{3\pi\mu}{2}} - 1\right)^2} \tag{21}$$

Rút gọn:

$$N = T_M\sqrt{\frac{e^{3\pi\mu}+1}{\mu^2+1}} \approx 4116\,\mathrm{N} \tag{22}$$

Trong trường hợp quay ngược chiều kim đồng hồ ta thay μ bằng $-\mu$

$$N = T_M\sqrt{\frac{e^{-3\pi\mu}+1}{\mu^2+1}} \approx 1328\,\mathrm{N}. \tag{23}$$

Phụ lục: Giải thích phần tính tích phân:

$$I = \int e^{ax}\cos(bx)dx = \frac{1}{b}\left(e^{ax}\sin(bx) - a\int \sin(bx)e^{ax}dx\right)$$
$$= \frac{1}{b}\left[e^{ax}\sin(bx) + \frac{a}{b}\left(e^{ax}\cos(bx) - a\int e^{ax}\cos(bx)dx\right)\right].$$

$$\to I = \frac{1}{b}\left(e^{ax}\sin(bx) + \frac{a}{b}e^{ax}\cos(bx) - \frac{a^2}{b}I\right). \tag{24}$$

$$\to I = \int e^{ax}\cos(bx)dx = \frac{b\sin(bx) + a\cos(bx)}{a^2+b^2}e^{ax} + C. \tag{25}$$

Tương tự ta thu được:

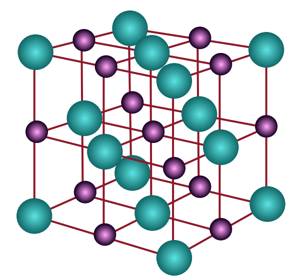
$$\int e^{ax}\sin(bx)dx = \frac{a\sin(bx) - b\cos(bx)}{a^2+b^2}e^{ax} + C. \tag{26}$$

Thực hiện giải và rà soát lời giải bởi các thành viên:

- *Trương Võ Thiên Kỳ*, Trường Đại học Bách Khoa Tp. Hồ Chí Minh
- *Gà Nòj*, Trường THPT Chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị
- *Phạm Đình Hoàn*, Trường THPT Chuyên Lào Cai
- *Bùi Khắc Chiến*, Đại học Bách Khoa Hà Nội
- *Trịnh Duy Hiếu*, Đại học Quốc gia Singapore

Câu II

LiF (Lithium Flouride) là một chất có cấu trúc tinh thể là lập phương tâm mặt (FCC). Chất này có rất nhiều ứng dụng trong đời sống như là nguyên liệu để tạo thành pin Lithium. Pin lithium thường dùng cho các thiết bị như: Điện thoại, máy tính, máy chụp hình...; phát triển trên những ứng dụng phương tiện di chuyển chạy bằng điện như: Xe đạp điện, xe máy điện, ô tô điện... hoặc kỹ thuật ở các ngành quân đội, hàng không... Do khoảng cách vùng cấm lớn của LiF, nó còn được sử dụng làm tinh thể nhiễu xạ trong phép đo phổ tia X. Nó cũng được sử dụng như một phương tiện để ghi lại phơi nhiễm bức xạ ion hóa từ tia γ, tia β và tia neutron trong liều kế nhiệt phát quang. LiF được sử dụng rộng rãi trong PLED và OLED (diode phát quang polymer và diode phát quang hữu cơ) như một lớp ghép nối để tăng cường phun điện tử.



Hình 2.1. Mạng tinh thể lập phương tâm diện của Lithium Flouride (LiF)

1. Nhận thấy trong biểu thức thế

$$U(r) = k\frac{q_1q_2}{r} + \frac{b}{r^7} = U_C(r) + U_B(r)$$

Thế này là thế Born−Meyer, đồ thị cho dạng thế này được vẽ bằng Mathematica ở dưới cùng của bài giải hình 2.2, hạng tử đầu tiên $U_C(r) = k\frac{q_1q_2}{r}$ chính là thế tương tác Coulomb của các điện tích. Còn hạng tử $U_B(r) = \frac{b}{r^7}$ gọi là thế Born (thế lượng tử sinh ra do tương tác trao đổi).

Ta xét một ion dương trong Li^+ được bao quanh bởi 26 ion kế cận nhất xung quanh nó trong mạng lập phương tâm mặt (FCC) (xem Hình 2.1).

Nhóm đầu tiên của 6 ion "trung tâm" gần nhất có điện tích âm. Chúng nằm ở khoảng cách R từ ion được xét và đóng góp của chúng là thế hút:

$$U_{C01}(R) = -6\cdot k\frac{e^2}{R}$$

Nhóm lân cận "trung tâm" tiếp theo là 12 ion nằm cách Li^+ trung tâm khoảng $\sqrt{R^2+R^2} = \sqrt{2}R$. Tất cả chúng đều có điện tích dương và là thế đẩy

$$U_{C02}(R) = +\frac{12}{\sqrt{2}}\cdot k\frac{e^2}{R}$$

Dễ dàng đoán được rằng 8 ion âm "đỉnh" nằm cách ion Li^+ được xét một khoảng $\sqrt{R^2+R^2+R^2} = \sqrt{3}R$ tạo ra một thế hút:

$$U_{C03}(R) = -\frac{8}{\sqrt{3}} \cdot k\frac{e^2}{r}$$

Tổng hợp những đóng góp này, ta thu được thế Coulomb:

$$\begin{aligned} U_{C0}(R) &= U_{C01}(R) + U_{C02}(R) + U_{C03}(R) \\ &= -\left(6 - \frac{12}{\sqrt{2}} + \frac{8}{\sqrt{3}}\right) \cdot \frac{ke^2}{R} = -\mathcal{M} \cdot \frac{ke^2}{R} \end{aligned}$$

trong đó $\mathcal{M}$ hằng số Madelung [1] gần đúng có giá trị

$$\mathcal{M} = 6 - \frac{12}{\sqrt{2}} + \frac{8}{\sqrt{3}} \approx 2.134$$

Giờ ta tính thế tương tác Born:

$$\begin{aligned} U_B(R) &= \frac{6b}{R^7} + \frac{12b}{(R\sqrt{2})^7} + \frac{8b}{(R\sqrt{3})^7} = \mathcal{B} \cdot \frac{b}{R^7} \\ \text{với } \mathcal{B} &= 6 + \frac{3}{2\sqrt{2}} + \frac{8}{27\sqrt{3}} \approx 7.232 \end{aligned}$$

Thế năng tổng hợp (thế toàn phần) là:

$$U_{tp} = U_{\text{tot}}(R) = U_C(R) + U_B(R) = -\mathcal{M}\frac{ke^2}{R} + \mathcal{B}\frac{b}{R^7}$$

Điều kiện để $R = R_0$ ở vị trí thế cực tiểu là

$$\frac{dU}{dR}(R_0) = \mathcal{M}k\frac{e^2}{R_0^2} - \mathcal{B}\frac{7b}{R_0^8} = 0 \tag{1}$$

Phương trình của R_0 cho giá trị:

$$R_0 = \left(\frac{7b\mathcal{B}}{\mathcal{M}ke^2}\right)^{\frac{1}{6}} \approx 1.695\left(\frac{b}{ke^2}\right)^{\frac{1}{6}} \tag{2}$$

Dễ thấy khi đó:

$$\frac{d^2U}{dR^2}(R_0) = -\frac{2\mathcal{M}ke^2}{R_0^3} + \frac{56\mathcal{B}b}{R_0^9} = \frac{6\mathcal{B}b}{\sqrt{7}\left(\frac{b\mathcal{B}}{\mathcal{M}ke^2}\right)^{3/2}} > 0$$

Rõ ràng giá trị R_0 ở (2) cho cực tiểu thế năng.

2. Có 8 ion nằm trên các đỉnh của mỗi ô cơ sở và chỉ có 1/8 thể tích của mỗi ion nằm trong một ô cơ sở. Mật độ ion là

$$n = \frac{8 \times \frac{1}{8}}{R_0^3} = \left(\frac{\mathcal{M}ke^2}{7b\mathcal{B}}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 0.205\left(\frac{ke^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Khối lượng riêng của tinh thể là

$$\rho = \frac{n}{2} \cdot \frac{M}{N_A} = 0.103\frac{M}{N_A}\left(\frac{ke^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}}$$

3. Khoảng cách R thay đổi từ R_0 đến R_f. Số ion trong hệ là không đổi và do đó:

$$N = \frac{8V_0}{(2R_0)^3} = \frac{8V_0(1+\delta)}{(2R_f)^3}$$

Suy ra

$$R_f = R_0 \cdot (1+\delta)^{1/3} \approx R_0\left(1 + \frac{\delta}{3} - \frac{\delta^2}{9}\right)$$

Sự thay đổi tỷ đối về khoảng cách R

$$\varepsilon = \frac{\Delta R}{R_0} = \frac{R_f}{R_0} - 1 = \frac{\delta}{3} - \frac{\delta^2}{9}$$

Thế năng tương tác của Li^+trong ô cơ sở lúc sau:

$$\begin{aligned} U_{tp_f} &= -\mathcal{M}\frac{ke^2}{(R_0 + \varepsilon R_0)} + \mathcal{B}\frac{b}{(R_0 + \varepsilon R_0)^7} \\ U_{tp_f} &\approx -\mathcal{M}\frac{ke^2}{R_0}\left(1 - \varepsilon + \varepsilon^2\right) + \mathcal{B}\frac{b}{R_0^7}\left(1 - 7\varepsilon + 28\varepsilon^2\right) \end{aligned}$$

Thế năng tương tác của Li^+ trong ô cơ sở lúc đầu

$$U_{tp_0} = -\mathcal{M}\frac{ke^2}{R_0} + \mathcal{B}\frac{b}{R_0^7}$$

Sự biến thiên thế năng của Li^+ trong một ô cơ sở (xét đến điều kiện cân bằng ở phương trình (1) và (2)):

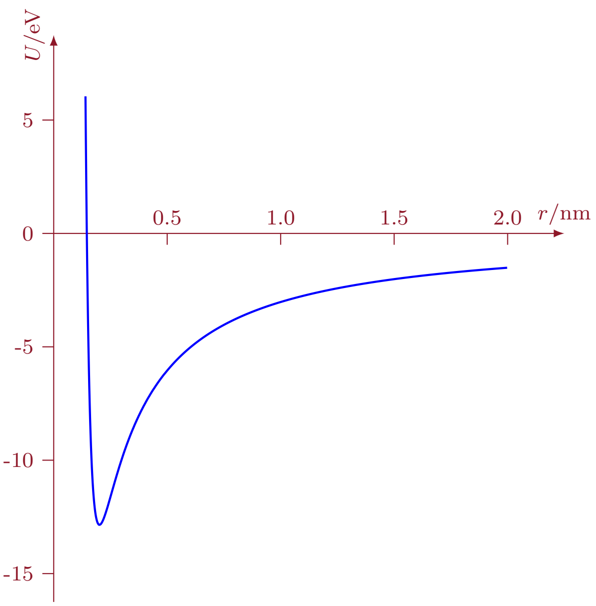
$$\begin{aligned} \delta U &= U_{tp_f} - U_{tp_0} \\ &= \left[\left(\mathcal{M}\frac{ke^2}{R_0} - \frac{7\mathcal{B}b}{R_0^7}\right) + \left(-\mathcal{M}\frac{ke^2}{R_0}\varepsilon + 28\frac{\mathcal{B}b}{R_0^7}\varepsilon\right)\right]\varepsilon \\ &= \left(-\mathcal{M}\frac{ke^2}{R_0} + 4\frac{\mathcal{M}ke^2}{R_0}\right)\varepsilon^2 = 3\mathcal{M}\frac{ke^2}{R_0}\varepsilon^2 \\ &\approx 3\mathcal{M}\frac{ke^2}{R_0}\frac{\delta^2}{9} = \frac{\mathcal{M}ke^2}{3R_0}\delta^2 \text{ (lấy tới bậc 2 của } \delta) \end{aligned}$$

Nhiệt lượng cần cung cấp cho hệ:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2}N\delta U = \frac{\mathcal{M}ke^2}{6R_0^4}V_0\delta^2 = \frac{V_0}{6}\left[\frac{\left(\mathcal{M} \cdot k \cdot e^2\right)^{\frac{5}{2}}}{7\mathcal{B} \cdot b}\right]^{\frac{2}{3}}\delta^2 \\ &= 0.099V_0\left[\frac{\left(k \cdot e^2\right)^{\frac{5}{2}}}{b}\right]^{\frac{2}{3}}\delta^2 \end{aligned}$$

Thực hiện giải và rà soát lời giải bởi các thành viên:

- *Lec. Trần Kỳ Vĩ*, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội
- *[sigma]*, Trường THPT Chuyên Lê Hồng Phong, Tp. Hồ Chí Minh
- *Bùi Khắc Chiến*, Đại học Bách Khoa Hà Nội



Hình 2.2. Đồ thị số liệu thực nghiệm của thế Born - Meyer với hằng số mạng của LiF đo từ nhiễu xạ X-ray, $a = 0.4031$ nm

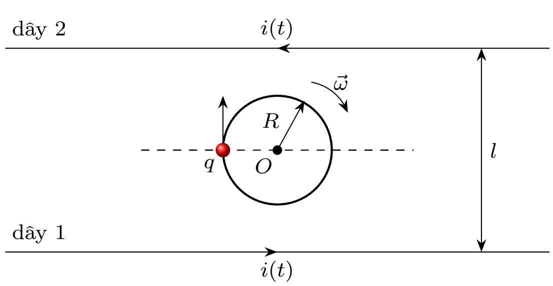
Refeference

1. Madelung, Erwin. "Das elektrische Feld in Systemen von regelmäßig angeordneten Punktladungen." Phys. Z 19.524 (1918): 32.
2. Kittel, Charles. "Introduction to solid state physics Eighth edition." (2021).
3. Varandas, A. J. C. "Accurate ab initio potential energy curves for the classic Li–F ionic-covalent interaction by extrapolation to the complete basis set limit and modeling of the radial nonadiabatic coupling." The Journal of chemical physics 131.12 (2009): 124128.
4. Khôi, Nguyễn Thế, and Nguyễn Hữu Mình. "Vật lý chất rắn, NXB Giáo Dục." (1992).

Câu III

1. Cảm ứng từ tại một điểm cách dây 1 một khoảng y trên mặt phẳng chứa hai dây dẫn

$$B = \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{l-y}\right). \tag{1}$$



Nếu bỏ qua điện trường cảm ứng, để hạt điện tích chuyển động tròn đều thì cảm ứng từ tại vị mỗi vị trí của hạt điện tích phải có cùng giá trị B sao cho

$$\omega = \frac{qB}{m} \Rightarrow B = \frac{m\omega}{q}. \tag{2}$$

Với bán kính quỹ đạo của hạt là R, tâm O của quỹ đạo tròn nằm cách đều hai dây, tại thời điểm hạt bắt đầu chuyển động, hạt có vận tốc theo phương vuông góc dây dẫn và ta có được hàm $y(t)$ như sau

$$y = \frac{l}{2} + R\sin(\omega t). \tag{3}$$

Thay (2) và (3) vào biểu thức (1), ta tìm được cường độ dòng điện theo thời gian để hạt chuyển động như yêu cầu

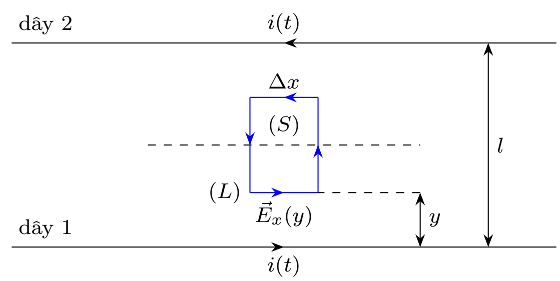
$$i(t) = \frac{2\pi m\omega}{\mu_0 q l}\left[\frac{l^2}{4} - R^2\sin^2(\omega t)\right]. \tag{4}$$

Hay biến đổi theo các công thức lượng giác, ta được

$$i(t) = \frac{2\pi m\omega}{\mu_0 q l}\left[\frac{l^2}{4} - R^2\frac{1-\cos(2\omega t)}{2}\right]. \tag{5}$$

Quan sát (4) và (5), ta tìm được cường độ dòng điện cực đại là $i_{\max} = \dfrac{\pi m\omega l}{2\mu_0 q}$ và tần số góc của dòng là $\Omega = 2\omega$.

Lời giải trên là hoàn toàn phù hợp với giả thiết của đề bài và dường như không có vấn đề gì cả, song giả thiết bỏ qua điện trường cảm ứng là một giả thiết có phần thô và có thể làm sai lệch đi hiện tượng vật lý trong bài toán.



Theo phương trình Maxwell Faraday dạng tích phân:

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}.$$

Áp dụng phương trình Maxwell Faraday dạng tích phân cho một vòng kín hình chữ nhật nằm trên mặt phẳng chứa hai dây dẫn, một cạnh nằm trên đường thẳng có tọa độ y và một cạnh đối diện nó nằm trên đường có tọa độ $l-y$, hai cạnh bên có độ dài Δx bất kỳ. Dựa vào tính đối xứng của hệ, ta có thể thấy rằng điện trường cảm ứng chỉ xuất hiện theo phương x vuông góc với y và $E_x(y) = -E_x(l-y)$, ta được

$$2E_x(y)\Delta x = -\int_{l-y}^{y} \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\partial i(t)}{\partial t}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{l-y}\right)dy\Delta x.$$

Hay

$$E_x(y) = -\frac{\mu_0}{2\pi}\ln\left(\frac{y}{l-y}\right)\frac{\partial i(t)}{\partial t}. \quad (6)$$

Để đánh giá ảnh hưởng của điện trường cảm ứng này, ta so sánh cỡ độ lớn lực điện và lực từ.
Trong đánh giá này, vì ta chỉ cần so sánh về cỡ độ lớn ta tạm giả sử rằng dòng điện như đã tính ở (5), thay vào (6), ta thấy lực điện sẽ có cỡ độ lớn:

$$F_E = qE_x(y) \sim \frac{m\omega^2 R^2}{L}\ln\left(\frac{y}{l-y}\right). \quad (7)$$

Còn theo giả thiết của đề bài, lực từ có cỡ:

$$F_B \sim m\omega^2 R. \quad (8)$$

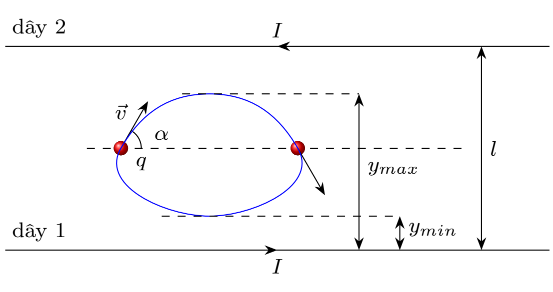
So sánh (7) và (8), ta thấy rằng giả thiết bỏ qua điện trường cảm ứng chỉ tốt với $R \ll l$ và sẽ sai nghiêm trọng nếu R có độ lớn so sánh được với $0.5l$.
Để dễ hình dung hơn, lấy $y = 0.5l + R$ tỷ số độ lớn lực điện là lực từ sẽ có độ lớn cỡ

$$\eta = \frac{F_E}{F_B} \sim \frac{R}{L}\ln\left(\frac{L+2R}{L-2R}\right). \quad (9)$$

Tức là với $R = 0.1l$, tỷ số $\eta \sim 4\%$ (tạm chấp nhận rằng có thể bỏ qua), nhưng chỉ với $R = 0.2l$, tỷ số $\eta \sim 17\%$ (một con số tương đối đáng kể). Với $R = 0.45l$, phép ước lượng trên có thể cho tỷ số lực điện chia lực từ lên đến $\eta \sim 133\%$, song con số này không còn ý nghĩa khi ta có thể đưa ngay ra một kết luận rằng không tồn tại một cường độ dòng điện $i(t)$ nào có thể khiến hạt chuyển động tròn đều do ảnh hưởng của điện tích cảm ứng nếu như R không quá bé so với l.
Thực chất việc trường hợp $R \ll l$ cũng chính là xem như hạt điện tích chỉ chuyển động trong vùng từ trường gần như đều (theo không gian). Khi đó, điều kiện để hạt chuyển động tròn gần như chỉ đơn giản là dòng điện được cấp cho dây dẫn không đổi theo thời gian và bằng $I = \dfrac{\pi m\omega l}{2\mu_0 q}$.

2. **a,** Cảm ứng từ tại một điểm trên mặt phẳng chứa hai dây dẫn cách dây 1 một khoảng y là

$$B_z(y) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{l-y}\right). \quad (10)$$



Áp dụng định luật 2 Newton với hạt điện tích chỉ chuyển động trong từ trường và chiếu các vector theo phương Ox:

$$m\ddot{x} = qB_z(y)\dot{y}. \quad (11)$$

Lấy nguyên hàm phương trình vi phân trên và ghép cận, ta tìm được phương trình vận tốc theo phương x phụ thuộc vào tọa độ y theo hàm

$$m\dot{x} - mv_0\cos\alpha = \frac{\mu_0 Iq}{2\pi}\ln\left(\frac{y}{l-y}\right). \quad (12)$$

Do lực từ không sinh công, động năng và vận tốc của hạt không đổi v_0 trong suốt quá trình chuyển động. Các giá trị $y_{\min}$ và $y_{\max}$ mà hạt điện tích đạt được là khi $\dot{y} = 0$ và $|\dot{x}| = v_0$ (như mô tả trên hình vẽ[1]). Từ đó, ta thay vào (12) tìm được $y_{\min}$ và $y_{\max}$ là:

$$y_{\min} = l\left\{1 + \exp\left[\frac{2\pi m v_0}{\mu_0 Iq}(1+\cos\alpha]\right)\right\}^{-1}. \quad (13)$$

$$y_{\max} = l\left\{1 + \exp\left[-\frac{2\pi m v_0}{\mu_0 Iq}(1-\cos\alpha)\right]\right\}^{-1}. \quad (14)$$

Qua biểu thức (11), ta có thể thấy rằng lời giải bài toán này cho phép một sự tổng quát hóa với một từ trường B_z bất kỳ chỉ phụ thuộc vào y. Đại lượng được lấy tích phân ở vế bên phải chính chỉ phụ thuộc vào tọa độ y, cho phép ta đặt ra một động lượng suy rộng $P_x = m\dot{x} - q\displaystyle\int B_z(y)dy$ được bảo toàn. Tích phân $\displaystyle\int B_z(y)dy$ trong trường hợp này chính là hình chiếu theo phương x cho thế vector A của từ trường. Đây hoàn toàn không phải một sự trùng hợp, $\vec{P} = \vec{p} + q\vec{A}$ là một động lượng suy rộng được sử dụng phổ biến trong cơ học Hamilton. Nhìn thấy được phép bảo toàn động lượng suy rộng trong bài toán này cũng sẽ cho phép ta tiến được đến phương trình (12) một cách nhanh chóng và khéo léo hơn.
b, Theo định luật 2 Newton $F = ma$, gia tốc của các vật chuyển động trong từ trường với tốc độ v_0 là:

$$a = \frac{qv_0 B_z(y)}{m} \quad (15)$$

theo hướng trục Oy. Áp dụng cho vị trí $y_{\min}$ và $y_{\max}$, ta được gia tốc của hạt tại hai thời điểm đó là:

$$a_{ymin} = \frac{2\mu_0 Iqv_0}{\pi ml}\cosh^2\left[\frac{\pi m v_0}{\mu_0 Iq}(1+\cos\alpha)\right]. \quad (16)$$

Và

$$a_{ymax} = \frac{2\mu_0 Iqv_0}{\pi ml}\cosh^2\left[\frac{\pi m v_0}{\mu_0 Iq}(1-\cos\alpha)\right]. \quad (17)$$

Trong đó, gia tốc tại thời điểm y_{min} hướng theo chiều dương trục Oy và gia tốc tại thời điểm y_{max} hướng theo chiều âm của trục Oy.

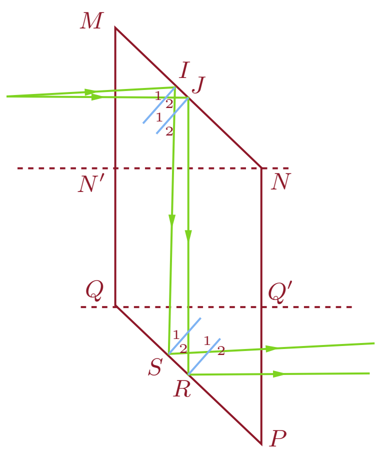
Thực hiện giải và rà soát lời giải bởi các thành viên:

- *Nguyễn Thành Long*, Đại học Bách Khoa Hà Nội
- *Bùi Khắc Chiến*, Đại học Bách Khoa Hà Nội
- *Võ Trương Thiên Kỳ*, Trường Đại học Bách Khoa Tp. Hồ Chí Minh
- *Ngô Đức Anh*, Trường THPT chuyên KHTN - ĐHKHTN - ĐHQGHN

[1] Hình vẽ chỉ mang tính chất minh hoạ

Câu IV

Lăng kính trong bài là *rhomboid*.
Gọi vật kính là L_O, thị kính là L_E



Hình 4.1. Chùm sáng qua *rhomboid*

1. Đầu tiên ta tính góc tới giới hạn có xảy ra phản xạ toàn phần là $\theta_\kappa = \arcsin\left(\frac{1}{n}\right) = \arcsin\left(\frac{2}{3}\right) \approx 41.8°$.

Góc tới mặt bên MQ nằm trong khoảng từ $0°$ tới $\alpha_0 \approx 10^{-2}$rad $\approx 0.573°$. Thành ra góc khúc xạ lớn nhất của tia tới qua mặt MQ là $\arcsin\left(\frac{\sin\alpha_0}{n}\right) \approx 0.39°$, một góc rất bé. Do đó có thể coi tia sáng có sự lệch lớn nhất tới từ L_O qua mặt bên MQ gần như là đi thẳng như hình 4.1. Nghĩa là góc tới bé nhất ở mặt bên MN có thể có tính bằng $I_1 = 45° - 0.573° = 44.427° > \theta_\kappa$.

Từ đây thấy rõ ràng các tia qua mặt MQ tới MN luôn bị phản xạ toàn phần. Lập luận tương tự với QP ta có điều phải chứng minh.

2. Ta có sơ đồ tạo ảnh sau:

$$AB \xrightarrow[d_1\equiv\infty\ ;\ d_1'=f_1]{L_O} A_1B_1 \xrightarrow[d_2\ ;\ d_2']{MQ} A_2B_2 \xrightarrow[d_3\ ;\ d_3']{MN} A_3B_3$$
$$\xrightarrow[d_4\ ;\ d_4']{PQ} A_4B_4 \xrightarrow[d_5\ ;\ d_5']{NP} A_5B_5 \xrightarrow[d_6\ ;\ d_6']{L_E} A_6B_6$$

Vì MN và QP thì các tia sáng phản xạ toàn phần nên có thể coi như MN và QP là các gương phẳng. Dựa trên sơ đồ tạo ảnh và sử dụng hệ công thức "xòe ra hai bên" (mặc dù người giải không thích hệ công thức này nhưng bài này dùng hệ này sẽ tiện gọn hơn), và từ hình vẽ ta có:

$$d_1' = f_1 = 35 \text{ cm}$$
$$d_2 = L_1 - d_1' = -30 \text{ cm}$$
$$d_2' = -nd_2 = 45 \text{ cm}$$
$$d_3 = \frac{W_1}{2} - d_2' = -42.5 \text{ cm}$$
$$d_3' = -d_3 = 42.5 \text{ cm}$$
$$d_4 = W_2 - d_3' = -32.5 \text{ cm}$$
$$d_4' = 32.5 \text{ cm}$$
$$d_5 = \frac{W_1}{2} - d_4' = -30 \text{ cm}$$
$$d_5' = \frac{-d_5}{n} = 20 \text{ cm}$$
$$d_6 = L_2 - d_5' = 5 \text{ cm} \to L_2 = 25 \text{ cm}$$

3. Các ảnh qua các lưỡng chất phẳng và "gương" không đổi về độ lớn suy ra

$$A_5B_5 = A_1B_1 = \alpha_0 f_1$$
$$\alpha \approx \tan\alpha = \frac{A_5B_5}{f_2} = \frac{\alpha_0 f_1}{f_2}$$

Từ đó tính được độ bội giác là:

$$G = \frac{\alpha}{\alpha_0} = \frac{f_1}{f_2} = 7$$

4. Ảnh qua quang hệ hiện ở cực viễn với

$$O_mC_V = PR = \left|\frac{1}{D}\right| = 50 \text{ cm}$$
$$\to d_6' = -(PR - 5 \text{ cm}) = 45 \text{ cm} \to d_6 \quad = 4.5 \text{ cm}$$
$$\to L_2 = d_5' + d_6 = 24.5 \text{ cm}$$

5. Ta có sơ đồ tạo ảnh sau:

$$AB \xrightarrow[d_1\equiv\infty\ ;\ d_1'=f_1]{L_O} A_1B_1 \xrightarrow[d_2\ ;\ d_2']{MN'} A_2B_2 \xrightarrow[d_3\ ;\ d_3']{MN} A_3B_3$$
$$\xrightarrow[d_4\ ;\ d_4']{NN'} A_4B_4 \xrightarrow[d_5\ ;\ d_5']{QQ'} A_5B_5 \xrightarrow[d_6\ ;\ d_6']{QP}$$
$$A_6B_6 \xrightarrow[d_7\ ;\ d_7']{Q'P} A_7B_7 \xrightarrow[d_8\ ;\ d_8']{L_E} A_8B_8$$

Dựa trên sơ đồ tạo ảnh, từ hình vẽ ta có:

$$d_4 = \frac{W_1}{2} - d_3' = -40 \text{ cm}$$
$$d_4' = \frac{-d_4}{n} = \frac{80}{3} \text{ cm}$$
$$d_5 = H - \frac{80}{3} = \frac{-65}{3} \text{ cm}$$
$$d_5' = -nd_5 = 32.5 \text{ cm}$$
$$d_6 = \frac{W_1}{2} - d_5' = -30 \text{ cm}$$
$$d_6' = 30 \text{ cm}$$
$$d_7 = \frac{W_1}{2} - d_6' = -27.5 \text{ cm}$$
$$d_7' = \frac{-d_7}{n} = \frac{55}{3} \text{ cm}$$
$$d_8 = L_2 - \frac{55}{3} \text{ cm} = 5 \text{ cm} \Rightarrow L_2 = 23.33 \text{ cm}$$

Thực hiện giải và rà soát lời giải bởi các thành viên:

- *Lec. Trần Kỳ Vĩ*, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội
- *Phạm Đình Hoàn*, Trường THPT Chuyên Lào Cai
- *Trịnh Duy Hiếu*, Đại học Quốc gia Singapore

Refeference

1. Hecht, Eugene. Optics. Pearson Education India, 2012.

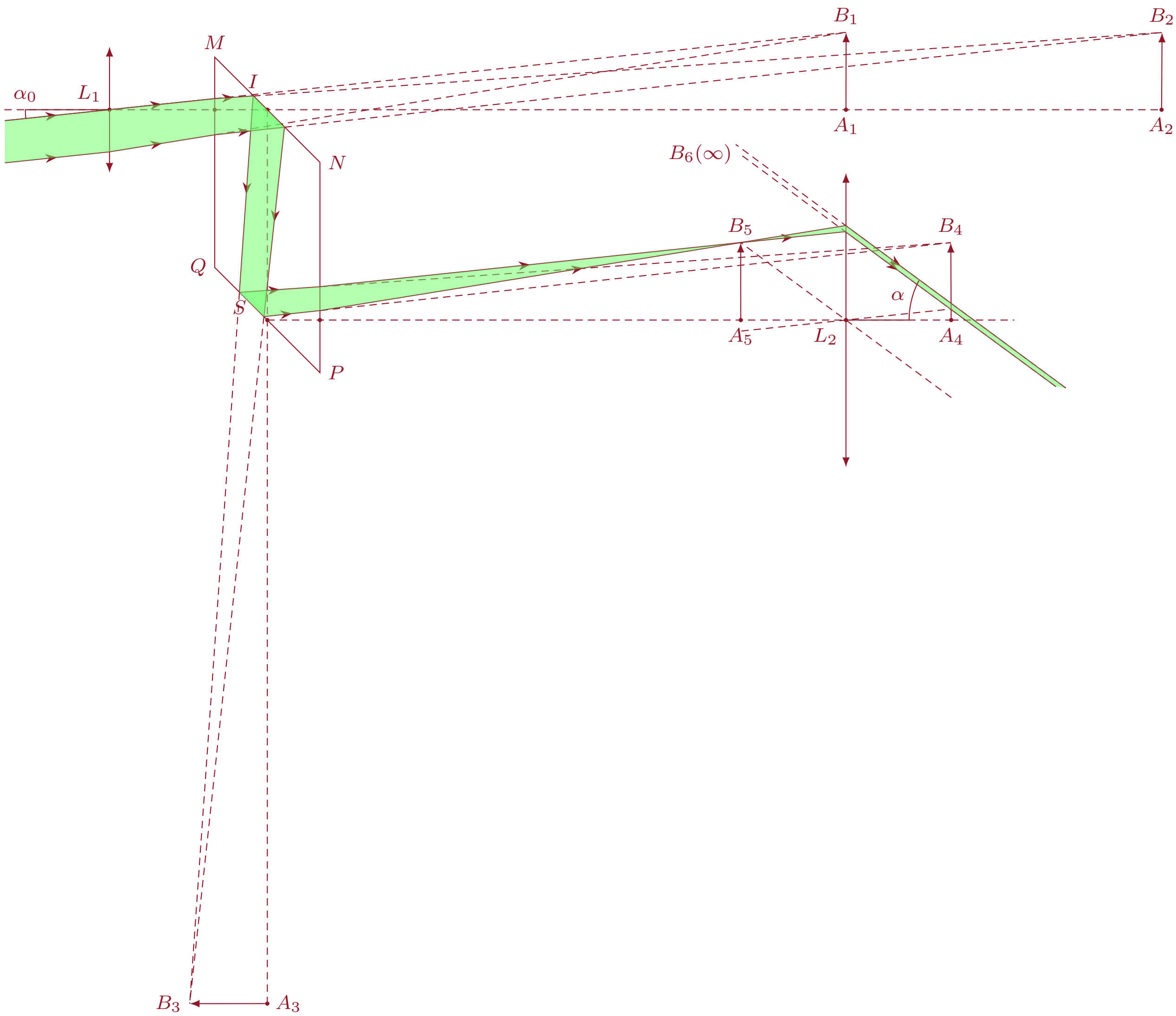
2. Katz, Milton. Introduction to geometrical optics. World scientific, 2002.

3. Mahajan, Virendra N. Optical imaging and aberrations: Ray geometrical optics. Vol. 45. SPIE press, 1998.

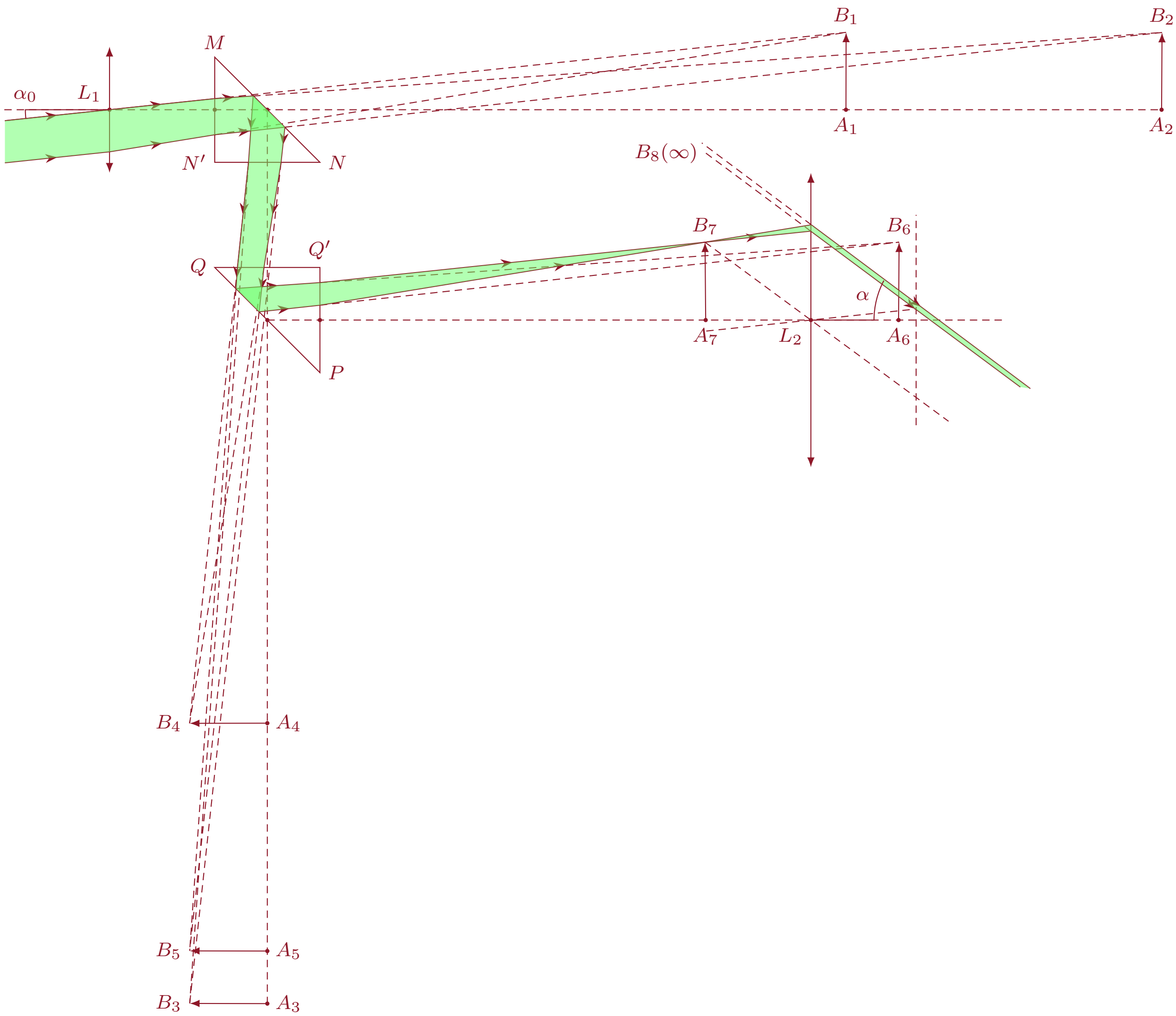
4. Born, Max, and Emil Wolf. Principles of optics: electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light. Elsevier, 2013.

5. Asimellis, George. Introduction to Optics: Lectures in Optics, Volume 1. Vol. 1. 2020.

6. SCHWARTZ, Steven H. Geometrical and Visual Optics. McGraw-Hill, 2013.



Hình 4.2. Sự tạo ảnh qua hệ quang, Câu IV.2

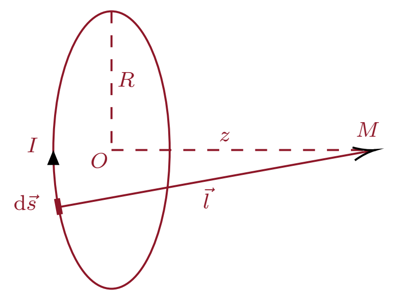


Hình 4.3. Sự tạo ảnh qua hệ quang, Câu IV.5

Câu V

1. Xử lý số liệu

Ta tìm từ trường do một vòng dây có dòng điện I, bán kính R gây ra tại một điểm nằm trên trục đối xứng của vòng dây có tọa độ z như trên hình 5.1.



Hình 5.1

z (m)	Δt (s)	X (10^{-5}T)	$\frac{1}{T^2}$ (s^{-2})
0,04	27,09	8,300	0,5451
0,06	27,27	7,921	0,5379
0,08	27,92	7,452	0,5131
0,09	28,06	7,204	0,5080
0,11	28,81	6,717	0,4819
0,12	28,96	6,491	0,4769
0,14	29,42	6,095	0,4621
0,16	29,95	5,797	0,4459
0,17	30,15	5,690	0,4400
0,18	30,22	5,613	0,4380

Bảng 5.1. Bảng xử lí số liệu

Xét một phần tử ds

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{s}\times\vec{l}}{l^3} \Rightarrow dB_z = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IR^2}{l^3}d\varphi$$

$$\Leftrightarrow B_z = \frac{\mu_0}{2}\frac{IR^2}{l^3}. \tag{1}$$

Mà $l^2 = R^2 + z^2$

$$B_z = \frac{\mu_0}{2}\frac{R^2}{(R^2+z^2)^{\frac{2}{3}}}. \tag{2}$$

Từ trường do cuộn Helmholtz gây ra tại điểm có tọa độ z

$$B_{\text{coil}} = \frac{\mu_0 NIR^2}{2}\left\{\frac{1}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{[R^2+(h-z)^2]^{\frac{3}{2}}}\right\} \tag{3}$$

Từ trường tại điểm G là từ trường tổng hợp của từ trường Trái Đất B_H và từ trường B_{coil} do cuộn Helmholtz.

$$\vec{B} = \vec{B}_H + \vec{B}_{\text{coil}} \tag{4}$$

Khi hai từ trường này cùng chiều thì $B = B_H + B_{\text{coil}}$. Chu kì dao động nhỏ của nam châm

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_G}{mB}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{T^2} = \frac{mB_H}{4\pi^2 I_G} + \frac{mB_{\text{coil}}}{4\pi^2 I_G}. \tag{5}$$

Biểu thức có thể được viết lại như sau:

$$Y = AX + B. \tag{6}$$

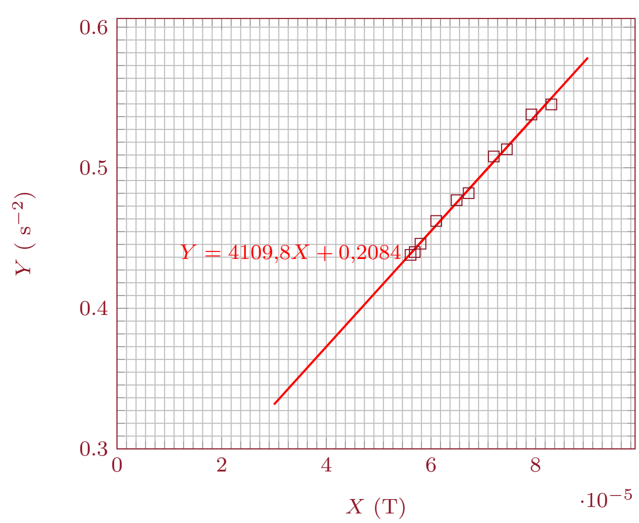
trong đó

$$Y = \frac{1}{T^2} = \frac{400}{\Delta t^2}; \tag{7}$$

$$X = B_{\text{coil}}; \tag{8}$$

$$A = \frac{m}{4\pi I_G} = \text{const}; \tag{9}$$

$$B = \frac{mB_H}{4\pi I_G} = \text{const}. \tag{10}$$



Hình 5.2. Đồ thị

Thực hiện hồi quy tuyến tính, ta thu được

$$\begin{cases} A = 4109.8\ (\mathrm{T}^{-1}\mathrm{s}^{-2}) \\ B = 0.2084\ (\mathrm{s}^{-2}) \end{cases} . \tag{11}$$

a. Từ trường ngang của Trái Đất

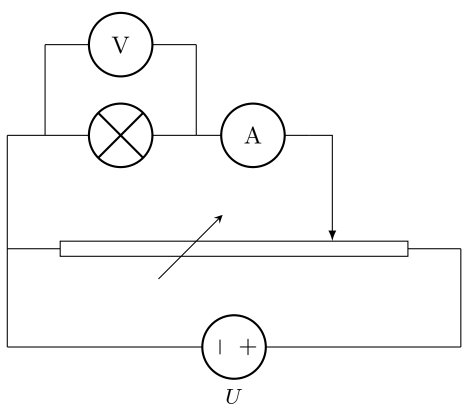
$$B_H = \frac{B}{A} \approx 5.071 \times 10^{-5}\ (\mathrm{T}) \tag{12}$$

b. Moment từ của nam châm

$$m = 4\pi^2 I_G A \approx 1.736\ (\mathrm{Am}^2) \tag{13}$$

2. Phương án thí nghiệm

a. Khảo sát đặc trưng Vôn - Ampe của dây tóc bóng đèn.
Sơ đồ mạch điện khảo sát đặc trưng Vôn-Ampe của dây tóc bóng đèn như hình vẽ.



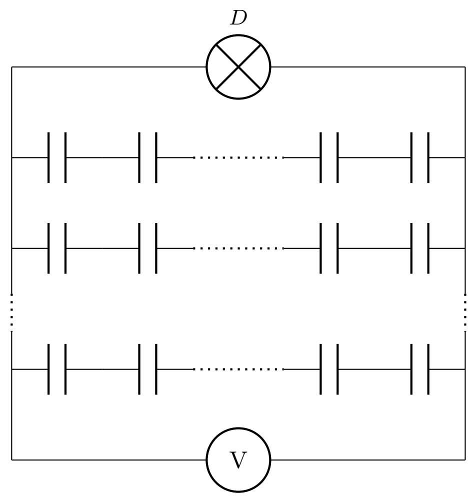
Thay đổi biến trở để thay đổi dòng điện và hiệu điện thế giữa hai đầu dây tóc bóng đèn. Ứng với mỗi vị trí của biến trở, khi giá trị của dòng điện ổn định ta đọc số chỉ của ampe kế và vôn kế.
Để xác định nhiệt độ T_C lớn nhất của bóng mà nó chưa bị đứt ta cần dịch chuyển biến trở từ từ để tìm giá trị hiệu điện thế U_C lớn nhất mà bóng đèn chưa bị cháy. Sau đó ta dịch chuyển biến trở quanh vị trí sao cho hiệu điện thế U giữa hai bóng đèn gần với giá trị U_C như $U < U_C$. Đo I và U ứng với các giá trị U gần U_C. Trong miền hiệu điện thế gần U_C này ta có thể mô tả mối liên hệ giữa dòng điện và hiệu điện thế bởi mô hình tuyến tính $I = GU + I_0$. Trong đó, G và I_0 được xác định bằng phương pháp hồi quy tuyến tính. Sau đó ta sẽ tính được $I_C = GU_C + I_0$. Từ đây ta sẽ tính được giá trị điện trở ứng với nhiệt độ T_C:

$$R_C = \frac{U_C}{I_C} \tag{14}$$

Sử dụng biểu thức $T = \alpha\rho^\beta$, ta xác định được nhiệt độ lớn nhất:

$$T_C = \alpha\left(\frac{R_C \pi d^2}{4L}\right)^\beta = \alpha\left[\frac{U_C \pi d^2}{4L(GU_C + I_0)}\right]^\beta \tag{15}$$

b. Xác định nhiệt dung riêng trung bình wolfram
Mắc các tụ nối tiếp và song song với nhau đủ để nạp điện cho các tụ điện đến hiệu điện thế để có thể có đủ năng lượng làm nóng chảy sợi dây tóc bóng đèn mà các tụ không bị đánh thủng. Mắc vôn kế song song với hệ tụ và bóng đèn để đo hiệu điện thế lúc ban đầu và khi dây tóc bị đứt (hình vẽ).



Gọi U_0 là hiệu điện thế ban đầu của hệ tụ điện và U là hiệu điện thế khi dây tóc bị cháy. Năng lượng của hệ tụ phóng ra đã làm cho dây tóc tăng nhiệt độ từ nhiệt độ phòng T_P tới nhiệt độ nóng chảy T_C của dây wolfram và một phần bức xạ:

$$\frac{1}{2}C_\Sigma U_0^2 - \frac{1}{2}C_\Sigma U^2 = c(T_C - T_P) + \epsilon\sigma T^4 S\Delta t \approx c(T_C - T_P) \tag{16}$$

trong đó c là nhiệt dung trung bình khi dây tóc tăng từ nhiệt độ phòng T_P đến nhiệt độ T_C, C_Σ là điện dung tương đương của hệ tụ, và Δt là thời gian tụ phóng điện, ϵ là hệ số $(0 < \epsilon \leq 1)$. Do thời gian phóng điện diễn ra rất ngắn nên dây tóc bóng đèn đã bị cháy mà chưa kịp phát sáng do đó năng lượng do bức xạ có thể bỏ qua. Dùng vôn kế đo hiệu điện thế U_0 và hiệu điện thế U lúc dây tóc bị chạy. Nhiệt dung trung bình c được tính như sau:

$$c = \frac{C_\Sigma(U_0^2 - U^2)}{2(T_C - T_P)} \tag{17}$$

Thực hiện giải và rà soát lời giải bởi các thành viên:

- *Đào Long Đức*, Trường Phổ thông Năng Khiếu, ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh
- *Bùi Khắc Chiến*, Đại học Bách Khoa Hà Nội
- *Physicium*, CLB Vật lí xPhO

Các thành viên biên tập LaTeX:

- *Trịnh Duy Hiếu*, Đại học Quốc Gia Singapore
- *Trần Dương Chính*, Đại học Bách Khoa Hà Nội
- *Phạm Trung Kiên*, Đại học Bách Khoa Hà Nội
- *Nguyễn Thành Long*, Đại học Bách Khoa Hà Nội
- *Trần Kỳ Vĩ*, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội
- *Physicium*, CLB Vật lí xPhO

Lời giải tham khảo đề thi VPhO 43

CLB Vật lí xPhO

Ngày 17 tháng 2 năm 2024

Ngày thi thứ nhất

Câu I

1. Giả sử rằng vật nhỏ cân bằng trên mặt phẳng nghiêng, lực kéo song song bề mặt tiếp xúc phải triệt tiêu với lực ma sát nghỉ F_{sfr}:

$$F_{\text{sfr}} = P_{||} = P\sin\alpha. \tag{1}$$

Mà độ lớn lực ma sát nghỉ cực đại:

$$F_{\text{sfr}_{\max}} = \mu N = \mu P_{\perp} = \mu P\cos\alpha, \tag{2}$$

$$\longrightarrow \mu \geq \frac{F_{\text{sfr}}}{N} = \tan\alpha. \tag{3}$$

Góc nghiêng tối đa của mặt phẳng nghiêng là:

$$\alpha_{\max} = \arctan\mu. \tag{4}$$

2. (a) Giả sử vật cân bằng trên mặt phẳng nghiêng đang chuyển động với gia tốc $\vec{a_0}$ hướng theo chiều dương được chọn và lực ma sát nghỉ ngược hướng chiều dương, hợp lực tác dụng lên vật nhỏ là:

$$F = P\sin\alpha - F_{\text{sfr}} = ma_0. \tag{5}$$

Do vậy giá trị của lực ma sát trượt được xác định bởi:

$$F_{\text{sfr}} = m\left(g\sin\alpha - a\right). \tag{6}$$

Mà ta lại có để vật không trượt (lên trên hoặc xuống dưới) dọc theo mặt nghiêng thì:

$$-F_{\text{sfr}_{\max}} \leq F_{\text{sfr}} \leq F_{\text{sfr}_{\max}}, \tag{7}$$

Tương đương với:

$$-\mu g\cos\alpha \leq g\sin\alpha - a \leq \mu g\cos\alpha \tag{8}$$

Biến đổi ta thu được:

$$g\cos\alpha\left(\tan\alpha - \tan\alpha_{\max}\right) \leq a \leq g\cos\alpha\left(\tan\alpha + \tan\alpha_{\max}\right). \tag{9}$$

Vật sẽ trượt xuống dọc theo mặt nghiêng nếu $\vec{a_0}$ có:

$$\begin{cases} a_0 < 0 \\ |a_0| \geq g\cos\alpha\left(\tan\alpha - \tan\alpha_{\max}\right). \end{cases}$$

(b) Vật sẽ trượt lên dọc theo mặt nghiêng nếu $\vec{a_0}$ có:

$$\begin{cases} a_0 > 0 \\ |a_0| \geq g\cos\alpha\left(\tan\alpha + \tan\alpha_{\max}\right). \end{cases}$$

3. Lúc đầu ván dao động đang ở vị trí biên cao nhất sẽ có gia tốc hướng về vị trí cân bằng và gia tốc có độ lớn cực đại là $a_{\max} = \omega^2 A$, hướng theo chiều dương được chọn, vậy khi thả cho ván dao động, vật nhỏ chỉ có thể trượt lên trên dọc theo mặt phẳng nghiêng. Vậy:

$$\omega^2 A \geq g\cos\alpha\left(\tan\alpha + \tan\alpha_{\max}\right). \tag{10}$$

4. Để đá luôn đứng yên trong quá trình ván dao động thì:

$$\begin{cases} \omega^2 A \leq g\left(\mu_1\cos\alpha + \sin\alpha\right) \\ \omega^2 A \leq g\left(\mu_1\cos\alpha - \sin\alpha\right). \end{cases}$$

Còn quặng có thể trượt xuống trong quá trình ván dao động khi:

$$\omega^2 A \geq g\left(\mu_2\cos\alpha - \sin\alpha\right). \tag{11}$$

Với lưu ý rằng hệ số ma sát giữa đá và quặng so với mặt ván thỏa mãn $\mu_1 > \mu_2$ nên điều kiện thỏa mãn yêu cầu bài toán là:

$$g\left(\mu_2\cos\alpha - \sin\alpha\right) \leq \omega^2 A \leq g\left(\mu_1\cos\alpha - \sin\alpha\right). \tag{12}$$

5. (a) Vì sau một thời gian đủ, đá trượt dọc xuống theo mặt nghiêng với tốc độ trôi không đổi so với đất, do đó gia tốc trung bình của đá đối với đất là bằng 0 nên:

$$t_1 a_1 + t_2|a_2| = 0. \tag{13}$$

Trong đó, t_1 là thời gian mà đá trượt dọc xuống đối với mặt phẳng nghiêng, t_2 là thời gian mà đá trượt dọc lên đối với mặt phẳng nghiêng trong một chu kì dao động của mặt phẳng.

Tại một thời điểm vật dừng lại trên mặt phẳng nghiêng, nếu gia tốc a của ván thỏa mãn:

$$-g(\mu_2\cos\alpha + \sin\alpha) < a < g(\mu_2\cos\alpha - \sin\alpha) \tag{14}$$

thì vật sẽ tiếp tục đứng yên.

Coi $t = 0$ là thời điểm mà ván ở vị trí biên cao nhất của dao động, ta tính toán khoảng thời gian gia tốc của ván nằm trong khoảng đó:

$$a = \omega^2 A\cos(\omega t_{d1}) = -g\left(\mu_2\cos\alpha + \sin\alpha\right), \tag{15}$$

$$\longrightarrow t_{d1} = \frac{\arccos\left(\dfrac{-g\left(\mu_2\cos\alpha + \sin\alpha\right)}{\omega^2 A}\right)}{\omega} \simeq 3.18\,\text{ms}. \tag{16}$$

$$a = \omega^2 A\cos(\omega t_{d2}) = g\left(\mu_2\cos\alpha - \sin\alpha\right), \tag{17}$$

$$\longrightarrow t_{d2} = \frac{\arccos\left(\dfrac{g\left(\mu_2\cos\alpha - \sin\alpha\right)}{\omega^2 A}\right)}{\omega} \simeq 3.12\,\text{ms}. \tag{18}$$

Do đó khoảng thời gian mà ván có gia tốc nằm trong khoảng đó là:

$$t_d = t_{d1} - t_{d2} \simeq 0.06\,\text{ms}. \tag{19}$$

Ta nhận thấy rằng, t_d chỉ bằng có 0.48% thời gian của một chu kì dao động của máng. Nên khi vật đổi chiều trượt trên ván, nó có thể đứng yên trên ván một khoảng thời gian tối đa là 0.48% chu kì dao động của ván, nên ta có thể coi như vật luôn luôn trượt trên ván:

$$t_1 + t_2 = T, \tag{20}$$

$$\longrightarrow t_1 a_1 + (T - t_1)\,|a_2| = 0. \tag{21}$$

Gia tốc có độ lớn là:

$$a_1 = g\left(\sin\alpha - \mu_2\cos\alpha\right), \tag{22}$$

$$|a_2| = g\left(\sin\alpha + \mu_2\cos\alpha\right). \tag{23}$$

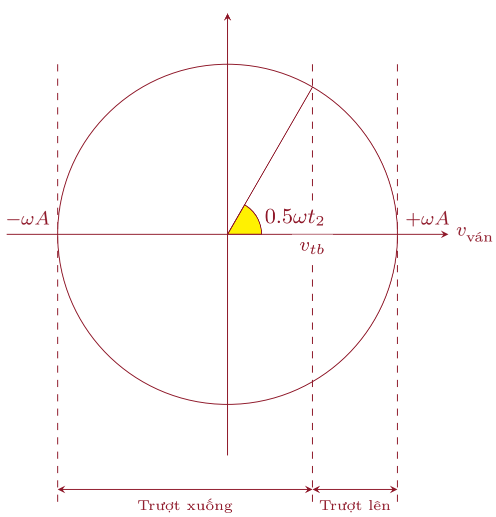
do đó thời gian trượt xuống và trượt lên được xác định là

$$t_1 = \frac{T}{2}\left(\frac{\tan\alpha}{\mu_2} + 1\right), \tag{24}$$

$$t_2 = \frac{T}{2}\left(1 - \frac{\tan\alpha}{\mu_2}\right). \tag{25}$$

Đá trượt dọc xuống dưới khi vận tốc của đá so với đất phải lớn hơn vận tốc dao động của ván, tại thời điểm đá đổi chiều trượt thì vận tốc trung bình v_{avg} có biểu thức :

$$v_{\text{avg}} = v = \omega A\cos\left(\frac{1}{2}\omega t_2\right). \tag{26}$$



Hình 1.1. Đường tròn lượng giác

Biến đổi được:

$$v_{\text{avg}} = v = \omega A\sin\left(\frac{\pi\tan(\alpha)}{2\mu_2}\right) \simeq 319.2\,\text{mm}\cdot\text{s}^{-1}. \tag{27}$$

Công suất trung bình của lực ma sát thực hiện lên đá trong một chu kỳ:

$$\overline{P} = mg\sin\alpha v_{\text{avg}} = 0.5325\,\text{W}. \tag{28}$$

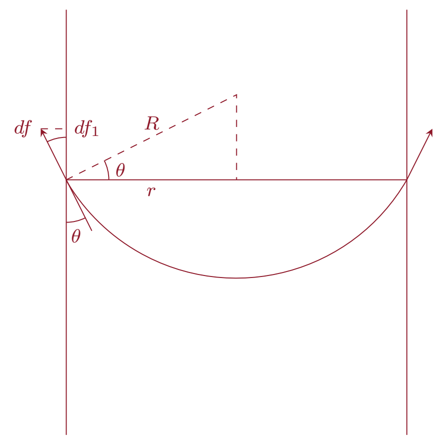
(b) Công suất tỏa nhiệt trung bình do lực ma sát gây ra trong một chu kỳ:

$$P = \mu_2 mg\cos\alpha\int_0^{2\pi}|\omega A\cos(\varphi) - v_{\text{avg}}|\frac{\mathrm{d}\varphi}{2\pi} = 1.4890\,\text{W}. \tag{29}$$

Lời giải đề xuất bởi các thành viên:

- *[sigma]*
- *Murasakiiro*, Trường Đại học Sư phạm Tp.HCM
- *Hirrus*, HSGS
- *Đức Thịnh*, 11 Lý 1 Ams

Câu II



Hình 2.1. Mô tả hệ lực

1. (a) Lực tác dụng lên thành phần dl của chu tuyến tại A là:

$$df = \sigma dl. \tag{1}$$

Thành phần của df theo phương thẳng đứng là:

$$df_1 = df\cdot\cos\theta = \sigma dl\cdot\cos\theta. \tag{2}$$

Vậy lực căng bề mặt tác dụng lên toàn chu tuyến theo phương thẳng đứng là:

$$f_1 = \int_0^{f_1} df_1 = \sigma\cos\theta\cdot\int_0^{r} dl = 2\sigma\pi r\cos\theta. \tag{3}$$

Vì thủy tinh dính ướt hoàn toàn đối với nước nên $\theta = 0$, vậy $\cos\theta = 1$. Suy ra:

$$f_1 = 2\sigma\pi r. \tag{4}$$

Chính lực f_1 làm nước bị dâng lên nên ta có:

$$f_1 = 2\sigma\pi r = Dg\pi r^2 h_0, \tag{5}$$

$$\longrightarrow \sigma = \frac{Dg\pi r h_0}{2} = 0.073\ (\text{N/m}). \tag{6}$$

Gọi σ_{KR}, σ_{LR}, σ_{LK} lần lượt là sức căng bề mặt của môi trường khí-rắn, lỏng-rắn và lỏng-khí

Xét sự cân bằng tại điểm A ta có:

$$\sigma_{KR} - \sigma_{LR} = \sigma_{LK}\cos\theta. \quad (7)$$

Vì thủy tinh dính ướt hoàn toàn đối với nước nên $\theta = 0$, vậy $\cos\theta = 1$, do đó $\sigma_{KR} - \sigma_{LR} = \sigma_{LK}$.

Diện tích bề mặt lỏng rắn tăng thêm $2\pi r h_0$, điện tích bề mặt khí rắn giảm đi $2\pi r h_0$.

Do đó năng lượng bề mặt tăng:

$$\begin{aligned} U &= \sigma_{LR}2\pi r h_0 - \sigma_{KR}2\pi r h_0 && (8)\\ &= -\sigma_{LK}2\pi r h_0 = -\sigma 2\pi r h_0 && (9)\\ &= -Dg\pi r^2 h_0^2. && (10)\end{aligned}$$

Thế năng trọng trường tăng:

$$W = Dg\pi r^2 h_0 \cdot \frac{h_0}{2} = \frac{Dg\pi r^2 h_0^2}{2}. \quad (11)$$

Coi nhiệt độ nước không đổi tức nội năng nước không đổi

Áp dụng nguyên lý I nhiệt động lực học, nhiệt lượng nước thu vào là:

$$Q = U + W = -\frac{Dg\pi r^2 h_0^2}{2} = -3.41 \times 10^{-6} \text{ (J)}. \quad (12)$$

Vậy thực tế nước tỏa nhiệt lượng 3.41×10^{-6} (J).

(b) Ban đầu khí trong ống có áp suất p_0, chiều cao L;

Áp suất khí lúc sau: $p = p_0 + \frac{2\sigma L}{r} - Dgh$, chiều cao $L - h$.

Vì quá trình đẳng nhiệt nên:

$$p_0 L = p(L-h), \quad (13)$$

$$p_0 L = (p_0 + \frac{2\sigma L}{r} - Dgh)(L-h), \quad (14)$$

$$\longrightarrow Dgh^2 - (p_0 + \frac{2\sigma L}{r} + Dgh) + \frac{2\sigma L}{r} = 0. \quad (15)$$

Nghiệm phương trình trên là:

$$h = \frac{p_0 + \frac{2\sigma}{r} + Dgh - \sqrt{(p_0 + \frac{2\sigma}{r} + Dgh)^2 - \frac{8Dg\sigma L}{r}}}{2Dg}. \quad (16)$$

Thay số: $h \approx 6.61$ (mm).

2. (a) Chênh lệch áp suất bên trong và bên ngoài của giọt nước là:

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{R} \cong 48.67 \text{ (Pa)}. \quad (17)$$

(b) Khối lượng của hai giọt nước là:

$$m = D\frac{4}{3}\pi(a^3 + b^3). \quad (18)$$

Khi hai giọt nước gộp lại thành một giọt lớn sẽ có bán kính r'. Ta có: $a^3 + b^3 = r'^3 \longrightarrow r' = (a^3+b^3)^{1/3}$.

Khi giọt nước thay đổi bán kính từ r đến r + dr, năng lượng bề mặt thay đổi một lượng:

$$dW = \frac{2\sigma}{r} \cdot 4\pi r^2 dr. \quad (19)$$

Năng lượng bề mặt của giọt nước là:

$$W = \int \frac{2\sigma}{r} \cdot 4\pi r^2 dr = \sigma 4\pi r^2 + C. \quad (20)$$

Chọn mốc năng lượng bề mặt tại $r = 0 \longrightarrow C = 0$ nên:

$$W = \sigma 4\pi r^2. \quad (21)$$

Năng lượng bề mặt ban đầu của hai giọt nước là:

$$W_i = \sigma 4\pi a^2 + \sigma 4\pi b^2 = \sigma 4\pi(a^2 + b^2). \quad (22)$$

Năng lượng bề mặt giọt nước lớn

$$W_f = \sigma 4\pi r'^2 = \sigma 4\pi (a^3 + b^3)^{2/3}. \quad (23)$$

Độ giảm năng lượng bề mặt chuyển thành độ tăng nội năng của hai giọt nước

$$mc\Delta T = W_i - W_f, \quad (24)$$

$$\longrightarrow \Delta T = \frac{W_i - W_f}{mc} = \frac{\sigma 4\pi(a^2+b^2) - \sigma 4\pi(a^3+b^3)^{2/3}}{Dc\frac{4}{3}\pi(a^3+b^3)}. \quad (25)$$

Vậy,

$$\Delta T = \frac{3\sigma[(a^2+b^2) - (a^3+b^3)^{2/3}]}{Dc(a^3+b^3)}. \quad (26)$$

Lời giải đề xuất bởi các thành viên:

- *Thầy Phạm Đình Hoàn*, THPT chuyên Vĩnh Phúc
- *Murasakiiro*, Trường Đại học Sư phạm Tp.HCM

Câu III

1.

$$V(z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{z^2+a^2}}. \quad (1)$$

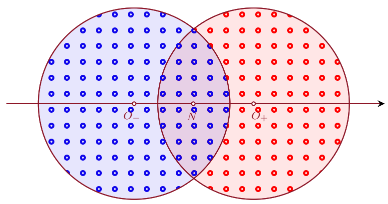
Vậy:

$$C_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}. \quad (2)$$

2. Cường độ điện trường tại N có phương trùng với trục của Oz và hướng theo chiều dương Oz:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{z^2+a^2}\frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}} = \frac{Qz}{4\pi\varepsilon_0(z^2+a^2)^{3/2}}. \quad (3)$$

3. (a) Mômen lưỡng cực điện $\vec{p}$ có phương trùng với trục Oz, chiều theo chiều của Oz:



Hình 3.1. Quá trình hình thành lưỡng cực

(b) Dễ thấy điện trường do lưỡng cực điện gây ra ở vùng không gian giao nhau của hai quả cầu là điện trường đều, tức điện trường do lưỡng cực điện gây ra tại N là:

$$\vec{E}_l = \frac{\rho\vec{l}}{3\varepsilon_0}. \tag{4}$$

Vì $\rho = \dfrac{q}{\frac{4}{3}\pi b^3}$ và $\vec{l} = \overrightarrow{O_-O_+}$ nên:

$$\vec{E}_l = \frac{\frac{q}{\frac{4}{3}\pi b^3}\vec{l}}{3\varepsilon_0} = \frac{\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 b^3}. \tag{5}$$

Điện trường tổng hợp tại N bằng không nên:

$$\vec{E} + \vec{E}_l = \vec{0}. \tag{6}$$

Suy ra:

$$\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 b^3} = E. \tag{7}$$

Tức là:

$$p = 4\pi\varepsilon_0 b^3 E = 4\pi\varepsilon_0 b^3 \frac{Qz}{4\pi\varepsilon_0 (z^2+a^2)^{3/2}} = \frac{Qb^3 z}{(z^2+a^2)^{3/2}}. \tag{8}$$

Vậy:

$$\begin{cases} C_2 = Qb^3 \\ C_3 = a^2. \end{cases}$$

(c) Thế năng của lưỡng cực[1] (tức quả cầu) là:

$$\begin{aligned} E_p(z) &= -\frac{1}{2}pE \qquad (9)\\ &= -\frac{Qb^3 z}{2(z^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{Qz}{4\pi\varepsilon_0 (z^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad (10)\\ &= -\frac{Q^2b^3z^2}{8\pi\varepsilon_0 (z^2+a^2)^3} \qquad (11)\\ &\equiv -\frac{Q^2b^3}{8\pi\varepsilon_0}\frac{z^2}{(z^2+a^2)^3}, \qquad (12)\\ E_p(z) &= -\frac{Q^2b^3}{8\pi\varepsilon_0}f(z). \qquad (13) \end{aligned}$$

[1]Hệ số 1/2 trong biểu thức thế năng là do lưỡng cực p phụ thuộc tuyến tính vào điện trường ngoài E. Nếu làm phương pháp lực $F = p\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}z}$ ta thu được kết quả giống với phương pháp năng lượng.

Với $f(z) = \dfrac{z^2}{(z^2+a^2)^3}$,

ta có:

$$f'(z) = \frac{2z(a^2-2z^2)}{(z^2+a^2)^4}. \tag{14}$$

Vị trí cân bằng ứng với $E_p' = 0$ tức là $f' = 0$ ứng với 2 nghiệm $z = 0$ và $z = \pm a/\sqrt{2}$.

Lại có:

$$f''(z) = \frac{2(a^4 - 13a^2z^2 + 10z^4)}{(z^2+a^2)^5} \to \begin{cases} f''(0) = \dfrac{2}{a^6} \\ f''\left(\pm\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = -\dfrac{64}{81a^6}. \end{cases}$$

Do đó:

$$\begin{cases} E_p''(0) = -\dfrac{Q^2b^3}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2}{a^6} < 0 \\ E_p''\left(\pm\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right) = -\dfrac{Q^2b^3}{8\pi\varepsilon_0}\left(-\dfrac{64}{81a^6}\right) = \dfrac{8Q^2b^3}{81\pi\varepsilon_0 a^6} > 0. \end{cases}$$

Vậy tại $z = 0$ thế năng cực đại, cân bằng là không bền;
tại $z = \pm a/\sqrt{2}$ thế năng cực tiểu, cân bằng là bền.

(d) Xét dao động của quả cầu quanh vị trí cân bằng bền $z = \dfrac{a}{\sqrt{2}} + x$ với $x \ll \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

Dùng khai triển Taylor ta có:

$$\begin{aligned} E_p(z) &= -\frac{Q^2b^3}{4\pi\varepsilon_0}f(z) \qquad (15)\\ &= -\frac{Q^2b^3}{8\pi\varepsilon_0}\left[f\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) + f'\left(\pm\frac{a}{\sqrt{2}}\right)x + \frac{1}{2}f''\left(\pm\frac{a}{\sqrt{2}}\right)x^2\right]. \qquad (16) \end{aligned}$$

Vì $f'\left(\pm\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right) = 0$ nên:

$$E_p(z) = A + \frac{1}{2}\left(-\frac{Q^2b^3}{8\pi\varepsilon_0}\right)\left(-\frac{64}{81a^6}\right)x^2 = A + \frac{4Q^2b^3}{81\pi\varepsilon_0 a^6}x^2. \tag{17}$$

Với A là một hằng số

Động năng của quả cầu:

$$E_k = \frac{1}{2}m\dot{x}^2. \tag{18}$$

Cơ năng của quả cầu:

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{4Q^2b^3}{81\pi\varepsilon_0 a^6}x^2 + A = \text{ const }. \tag{19}$$

Đạo hàm phương trình trên theo thời gian ta được:

$$m\ddot{x}^2 + \frac{8Q^2b^3}{81\pi\varepsilon_0 a^6}x = 0. \tag{20}$$

Vậy tần số dao động là:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{8Q^2b^3}{81m\pi\varepsilon_0 a^6}}. \tag{21}$$

Lời giải đề xuất bởi các thành viên:

- *Thầy Phạm Đình Hoàn*, THPT chuyên Vĩnh Phúc
- *Thầy Nguyễn Hải Dương*, THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định
- *TDH*, NUS
- *Murasakiiro*, Trường Đại học Sư phạm Tp.HCM

Câu IV

Cách 1: Dùng định luật Snell - Descartes

1. (a) Khi tia sáng gần tâm O nhất thì $i = \pi/2$, dựa vào biểu thức bài cho $nr\sin(i) = \text{const}$ ta thu được:

$$\sqrt{2 - \frac{r^2}{R^2}} \cdot r \cdot \sin(\pi/2) = 1 \cdot R \cdot \sin(i_0), \tag{1}$$

$$\rightarrow \left(2 - \frac{r^2}{R^2}\right)\frac{r^2}{R^2} = \sin^2(i_0), \tag{2}$$

$$\rightarrow \left(\frac{r}{R}\right)^4 - 2\left(\frac{r}{R}\right)^2 + \sin^2(i_0) = 0, \tag{3}$$

$$\rightarrow \left(\frac{r}{R}\right)^2 = 1 \pm \cos(i_0). \tag{4}$$

Vì $r \leq R \;\forall -\pi/2 \leq i_0 \leq \pi/2$ nên ta lấy nghiệm có dấu trừ ở phương trình trên. Vậy:

$$r_{\min} = R\sqrt{1 - \cos(i_0)}. \tag{5}$$

(b) Tương như phần 1(a) tại vị trí r với góc i bất kì, ta thu được phương trình:

$$\left(\frac{r}{R}\right)^4 - 2\left(\frac{r}{R}\right)^2 + \frac{\sin^2(i_0)}{\sin^2(i)} = 0, \tag{6}$$

$$\rightarrow \left(\frac{r}{R}\right)^2 = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{\sin^2(i_0)}{\sin^2(i)}}. \tag{7}$$

Tương tự, ta lấy nghiệm có dấu trừ.

$$\rightarrow \left(\frac{r}{R}\right)^2 = 1 - \sqrt{1 - \frac{\sin^2(i_0)}{\sin^2(i)}}. \tag{8}$$

Lấy logarithm napier rồi đạo hàm hai vế theo θ ta thu được:[2]

$$\rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[2\ln\left(\frac{r}{R}\right)\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\ln\left(1 - \sqrt{1 - \frac{\sin^2(i_0)}{\sin^2(i)}}\right)\right], \tag{9}$$

$$\rightarrow 2\frac{\mathrm{d}r}{r\mathrm{d}\theta} = \frac{\dfrac{\dfrac{-\sin^2(i_0)\cos(i)}{\sin^3(i)}}{\sqrt{1 - \dfrac{\sin^2(i_0)}{\sin^2(i)}}}}{1 - \sqrt{1 - \dfrac{\sin^2(i_0)}{\sin^2(i)}}}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}\theta}. \tag{10}$$

[2]Có thể rút giá trị của r/R rồi đạo hàm trực tiếp $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$ ta thu được cùng kết quả.

Nhân liên hợp, rút gọn ta thu được:

$$\rightarrow 2\frac{\mathrm{d}r}{r\mathrm{d}\theta} = -\cot(i)\left[1 + \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{\sin^2(i_0)}{\sin^2(i)}}}\right]\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}\theta}. \tag{11}$$

Theo hình 4, ta có $\cot(i) = \dfrac{-\mathrm{d}r}{r\mathrm{d}\theta}$ (dấu trừ là do tia sáng trên hình vẽ đang đi vào tâm nên r giảm). Khi đó phương trình (11) trở thành:

$$2\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}i + \frac{\sin(i)\mathrm{d}i}{\sqrt{\sin^2(i) - \sin^2(i_0)}}. \tag{12}$$

Tích phân hai vế của phương trình trên từ vị trí tia sáng đi vào thấu kính đến khi tia sáng gần tâm O nhất là:

$$\rightarrow \int_0^{\Delta\theta} 2\mathrm{d}\theta = \int_{i_0}^{\pi/2} \mathrm{d}i - \int_{i_0}^{\pi/2} \frac{d(\cos(i))}{\sqrt{\cos^2(i_0) - \cos^2(i)}}, \tag{13}$$

$$2\Delta\theta = \frac{\pi}{2} - i_0 - \sin^{-1}\left(\frac{\cos(\pi/2)}{\cos(i_0)}\right) + \sin^{-1}\left(\frac{\cos(i_0)}{\cos(i_0)}\right), \tag{14}$$

$$2\Delta\theta = \pi - i_0 \rightarrow 2\Delta\theta + i_0 = \pi. \tag{15}$$

Do đó tia sáng sẽ ló ra ở điểm M với $\angle SOM = \pi - i_0$, tia ló ra song song với trục Δ (như mô tả trên hình vẽ 4.2).

2. (a) Dễ thấy với mọi i_0, các tia sáng ló ra đều song song với trục Δ nên ảnh của điểm S qua thấu kính Luneburg này ở vô cùng.

(b) Vì tia sáng đi qua tâm ($i_0 = 0°$) mà theo chứng minh ở trên góc quét của tia sáng sẽ là $2\Delta\theta = \pi$, ta kết luận $\angle SOP = 180°$.

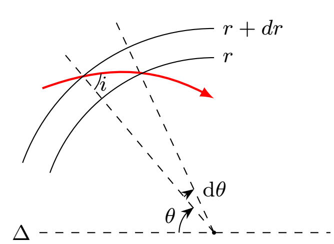
Để cho đơn giản tính toán, ta dùng nguyên lý Fermat. Do $PQ'T'$ là mặt đầu sóng nên thời gian ánh sáng đi theo các con đường SOP, SQQ' và STT' là như nhau. Do đó thời gian để ánh sáng đi trong khối cầu từ S đến P là:

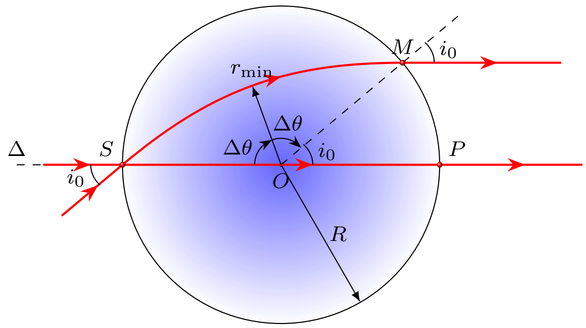
$$\tau_{SP} = \tau_{ST} + \tau_{TT'} = \frac{\pi R/2}{c} + \frac{R}{c} = \frac{R}{c}\left(1 + \frac{\pi}{2}\right). \tag{16}$$

(c) Tương tự như phần trên, ta có:

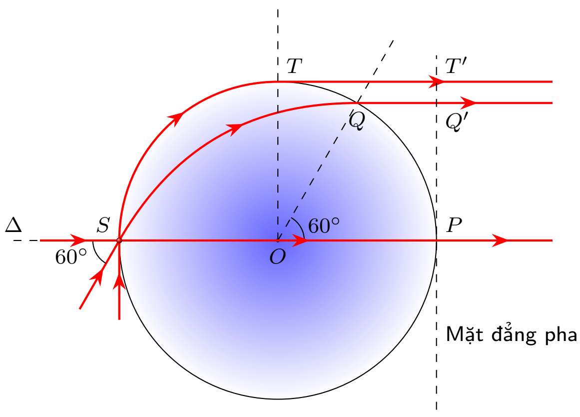
$$\tau_{SQ} = \tau_{SQ'} - \tau_{QQ'} = \tau_{SP} - \tau_{QQ'}, \tag{17}$$

$$\tau_{SQ} = \frac{R}{c}\left(1 + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{R - R\cos(60°)}{c} = \frac{R}{2c}\left(1 + \pi\right). \tag{18}$$

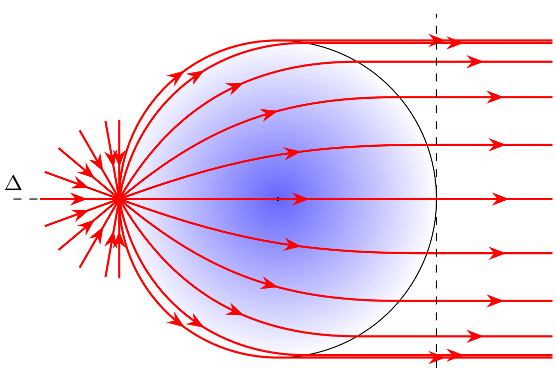




Hình 4.2



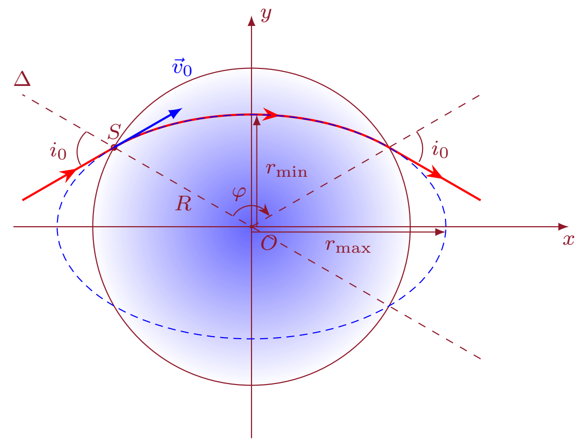
Hình 4.3



Hình 4.4

Cách 2: Sử dụng sự tương tự quang - cơ
Cơ sở để giải các bài toán này là dựa vào sự giống nhau về quỹ đạo chuyển động của hạt trong một trường lực thế với quỹ đạo một tia sáng trong một môi trường không đồng nhất về mặt quang học. Quỹ đạo của một chất điểm và quỹ đạo của tia sáng sẽ trùng nhau khi có sự tương ứng xác định giữa tốc độ và chiết suất của môi trường biến thiên trong không gian. Thực tế này đã được phát minh về mặt lý thuyết bởi nhà vật lý và toán học lừng danh người Ireland W. R. Hamilton vào năm 1834 [3] và Schrödinger cũng nhắc lại điều này năm 1926 [4].

[3]Xem: Hamilton, W.R. *British Association Report* 513 (1834): 1834.
[4]Xem: Schrödinger, Erwin. Collected papers on wave mechanics. Vol. 302. *American Mathematical Soc.*, 2003.



Hình 4.1. Đường truyền tia sáng dưới quỹ đạo ellipse

1. Giả sử có một vật khối lượng m chuyển động trong thế xuyên tâm $U(r)$, khi đó có bảo toàn năng lượng:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U = \text{ const} \tag{19}$$

với $U(r)$ là thế năng của vật, hay:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \text{ const } - U(r) \tag{20}$$

Mà $U = U(r)$ do đó v là hàm của r hay $v = v(r)$ và momen động lượng bảo toàn:

$$L = r \cdot m \cdot v_\varphi = r \cdot m \cdot v(r) \cdot \sin\alpha = \text{ const} \tag{21}$$

Trong đó α là góc hợp bởi pháp tuyến hướng tâm và vector $\vec{v}(r)$, tương tự như góc tới i trong quang hình học, v_φ là thành phần phương vị vuông góc với r của $\vec{v}$.

Nhận thức rằng

$$r \cdot v(r) \cdot \sin\alpha = \text{ const} \tag{22}$$

Tương tự như

$$r \cdot n(r) \cdot \sin i = \text{const} \tag{23}$$

trong hệ chiết suất biến thiên xuyên tâm $n(r)$.

Như vậy rõ thấy vai trò của $v(r)$ và $n(r)$ là tương đương[5].

Điều kiện biên cho

$$r = R, i = i_0, n(R) = 1 \tag{24}$$

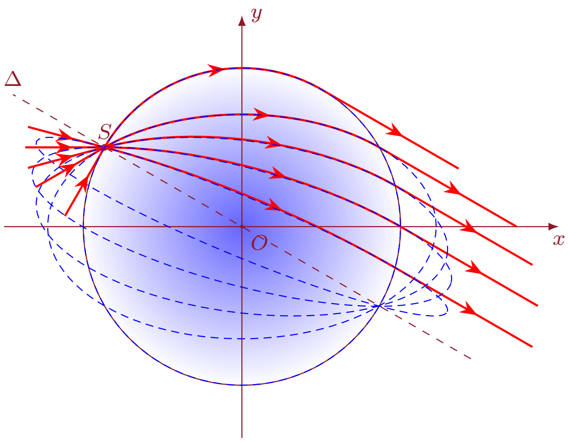
Dẫn tới

$$r \cdot n(r) \cdot \sin i = R \cdot \sin i_0 = L = \text{Cte} \tag{25}$$

[5]Xem: Born, Max, and Emil Wolf, *Principles of optics Elsevier* 2013

Người ta gọi $L = r \cdot n(r) \cdot \sin i = \text{Cte}$ là moment động lượng quang[6].

Từ phương trình (20) dẫn tới $\mathbf{F} = -\text{grad}U = -k\mathbf{r}$ với $v(r) = \sqrt{2 - \frac{r^2}{R^2}}$ (do $v(r)$ tương tự với $n(r)$.), dẫn tới chuyển động trên hai phương Descartes của hạt là điều hòa, suy ra quỹ đạo của hạt (hay của photon) là các ellipse (như mô tả ở Hình 4.1) $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$, với A và B xác định từ các điều kiện đầu. Dễ thấy $B = r_{\min} = \sqrt{2}R\sin\frac{i_0}{2}$; $A = r_{\max} = \sqrt{2}R\cos\frac{i_0}{2} = B\tan\frac{\varphi}{2}$.



Hình 4.2. Các quĩ đạo tia sáng dạng ellipse dưới góc tới i_0 khác nhau

Khi các quĩ đạo ellipse cắt quả cầu chiết suất biến thiên của đề bài sẽ cho nghiệm giao cắt sao cho $\varphi + i_0 = \pi$. Dẫn tới các tia ló ở các dưới góc tới i_0 khác nhau đều song song với trục Δ như mô tả ở Hình 4.2.

2. Câu 2 ý a, b, c làm tương tự cách 1.

Lời giải đề xuất bởi các thành viên:

- *TDH*, NUS
- *Sāriputta*, HNUE

Câu V

1. Phương trình phân rã α của hạt nhân:

$$^{238}_{92}\text{U} \longrightarrow {}^{4}_{2}\text{He} + {}^{234}_{90}\text{Th}, \tag{1}$$

Phương trình phân rã β^- của hạt nhân:

$$^{234}_{90}\text{Th} \longrightarrow {}^{234}_{91}\text{Pa} + {}^{0}_{-1}\text{e}\ [1]. \tag{2}$$

2. Đồng vị của Urani phải có số khối A chênh lệch với 238 một bội số của 4 vì vậy: $^{222}_{86}$Rn, $^{218}_{84}$Po, và $^{226}_{88}$Ra là các đồng vị của Urani.

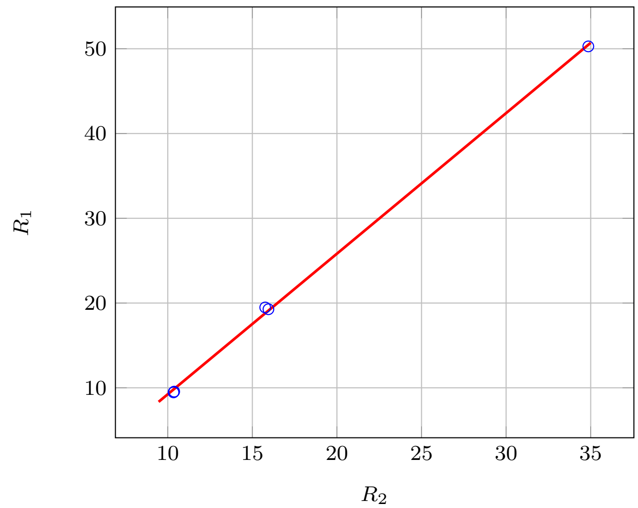
Còn đồng vị của Actini phải có số khối A chênh lệch với 235 một bội số của 4 vì vậy: $^{219}_{86}$Rn, $^{223}_{88}$Ra, và $^{215}_{84}$Po là các đồng vị của Actani.

[6]Xem bài báo: D Ambrosini *et al* 1997 *Eur. J. Phys.* 18 284

3. Từ công thức tỉ lệ ta đặt $\alpha = \frac{R_1 - R_{10}}{R_2 - R_{20}}$ với R_{10}, R_{20} lần lượt là R_1, R_2 của một mẫu làm chuẩn. Dễ thấy R_1, R_2 của một mẫu cụ thể sẽ liên hệ với nhau qua phương trình tuyến tính:

$$R_1 = \alpha(R_2 - R_{20}) + R_{10}. \tag{3}$$

Từ số liệu của đề bài ta có đồ thị:



Từ đồ thị ta có:

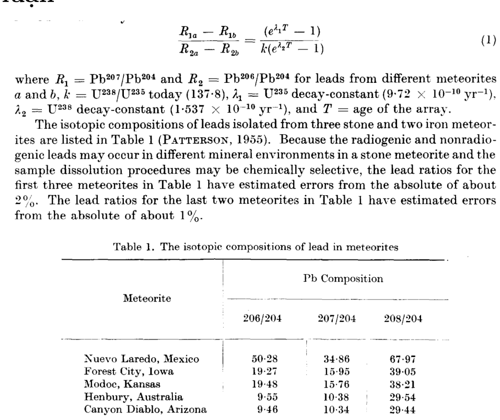
$$\alpha = 1.658 = \frac{k(2^{T/T_1} - 1)}{2^{T/T_2} - 1}. \tag{4}$$

Thay số thu được:

$$T_1 = 4.51 \times 10^9 \text{ năm}, T_2 = 7.13 \times 10^8 \text{ năm}. \tag{5}$$

Từ đó ta được $T = 4.58 \times 10^9$ năm.

Bình luận



$$\frac{R_{1a} - R_{1b}}{R_{2a} - R_{2b}} = \frac{(e^{\lambda_1 T} - 1)}{k(e^{\lambda_2 T} - 1)} \tag{1}$$

where $R_1 = Pb^{207}/Pb^{204}$ and $R_2 = Pb^{206}/Pb^{204}$ for leads from different meteorites a and b, $k = U^{238}/U^{235}$ today (137·8), $\lambda_1 = U^{235}$ decay-constant ($9{\cdot}72 \times 10^{-10}$ yr^{-1}), $\lambda_2 = U^{238}$ decay-constant ($1{\cdot}537 \times 10^{-10}$ yr^{-1}), and T = age of the array.

The isotopic compositions of leads isolated from three stone and two iron meteorites are listed in Table 1 (PATTERSON, 1955). Because the radiogenic and nonradiogenic leads may occur in different mineral environments in a stone meteorite and the sample dissolution procedures may be chemically selective, the lead ratios for the first three meteorites in Table 1 have estimated errors from the absolute of about 2%. The lead ratios for the last two meteorites in Table 1 have estimated errors from the absolute of about 1%.

Table 1. The isotopic compositions of lead in meteorites

Meteorite	Pb Composition		
	206/204	207/204	208/204
Nuevo Laredo, Mexico	50·28	34·86	67·97
Forest City, Iowa	19·27	15·95	39·05
Modoc, Kansas	19·48	15·76	38·21
Henbury, Australia	9·55	10·38	29·54
Canyon Diablo, Arizona	9·46	10·34	29·44

Một đoạn bài báo có lẽ là nguồn của bài toán này [7]:

[7]Xem bài báo: Patterson, C. (1956). Age of meteorites and the earth., *Geochimica et Cosmochimica Acta* 10(4), 230-237.

1. Ở phương trình (2), phân rã β^-, một neutron bị biến đổi thành proton, và quá trình này tạo ra một electron và một phản neutrino electron $\bar{\nu}_e$; trong khi ở phân rã β^+, một proton được chuyển đổi thành neutron và quá trình này tạo ra một positron và một neutrino electron. phân rã β^+ còn được gọi là phát xạ positron.
2. Các phản ứng hạt nhân nói chung và phân rã β nói riêng phải bảo toàn một số lượng tử gọi là số lepton, hay số electron và các neutrino liên kết của chúng (các lepton khác là hạt muon và tau). Vì các hạt nhân nặng như $^{234}_{90}$Th và $^{234}_{91}$ Pa có số lepton trung hòa và electron có số lepton +1, vì vậy trong phương trình (2) phải sinh ra hạt có số lepton -1. Do đó phân rã β^- (electron) phải đi kèm với một phản neutrino electron ($\bar{\nu}_e$), (số lepton–1) để trung hòa số lepton trong phương trình trên, bản chất của bảo toàn số lepton đã bao gồm cả bảo toàn số spin nên không cần nói đến ở đây [8].

Lời giải đề xuất bởi các thành viên:

- *Sāriputta*, HNUE
- *[sigma]*

Các thành viên biên tập LaTeX:

- *TDH*, NUS
- *Sāriputta*, HNUE
- *[Drop]*
- *Thân Hải Kiên*, Trường THPT Chuyên Bắc Giang

[8] Xem: Landau, L. D., *et al.* (1993). Lectures on nuclear theory. Courier Corporation.

Lời giải tham khảo đề thi VPhO 43

CLB Vật lí xPhO

Ngày 17 tháng 2 năm 2024

Ngày thi thứ hai

Câu I

1. Khảo sát nửa đĩa tròn đồng chất có khối lượng m và bán kính R. Nếu chia đĩa tròn thành các tam giác rất nhỏ, mỗi tam giác đều đồng chất nên có trọng tâm cách đều tâm đĩa O một đoạn $\frac{2}{3}R$. Vậy khối tâm của nửa đĩa tròn đồng chất chính là khối tâm của nửa vành tròn đồng chất có khối lượng m và bán kính $a = \frac{2}{3}R$.

Xét vi phân khối lượng dm nằm trên vành tròn với $dm = \frac{m}{\pi}d\alpha$ có tọa độ Descartes hai chiều trong mặt phẳng chứa vành tròn là $(a\sin(\alpha);\, a\cos(\alpha))$, tọa độ khối tâm được xác định bởi:

$$x_G = \int_{-0.5\pi}^{0.5\pi} \frac{a}{\pi}\sin\alpha d\alpha = 0, \tag{1}$$

$$y_G = \int_{-0.5\pi}^{0.5\pi} \frac{a}{\pi}\cos(\alpha)\, d\alpha = \frac{2}{\pi}a = \frac{4}{3\pi}R. \tag{2}$$

Nếu trực tiếp chia đĩa tròn thành vi phân khối lượng với $dm = rdrd\alpha$ có tọa độ Descartes hai chiều trong mặt phẳng chứa đĩa tròn là $(r\sin(\alpha);\, r\cos(\alpha))$ thì:

$$x_G = \frac{1}{S}\int_0^R r^2 dr \int_{-0.5\pi}^{0.5\pi} \sin(\alpha)\, d\alpha = 0, \tag{3}$$

$$y_G = \frac{1}{S}\int_0^R r^2 dr \int_{-0.5\pi}^{0.5\pi} \cos(\alpha)\, d\alpha = \frac{4}{3\pi}R. \tag{4}$$

Vậy dễ dàng ta xác định được thông số độ dài:

$$u = QC = \frac{4}{3\pi}R. \tag{5}$$

2. Momen quán tính của đĩa tròn đối với tâm hình học Q được xác định:

$$I_Q = \frac{m}{S}\int_0^R r^3 dr \int_{-0.5\pi}^{+0.5\pi} d\alpha = \frac{1}{2}mR^2. \tag{6}$$

Áp dụng định lý trục quay song song Huygens - Steiner ta được:

$$I_C = I_Q - mu^2 = mR^2\left[\frac{1}{2} - \left(\frac{4}{3\pi}\right)^2\right] \simeq 0.3199mR^2. \tag{7}$$

3. Dễ thấy:

$$l = \sqrt{u^2 + R^2} = R\sqrt{\left(\frac{u}{R}\right)^2 + 1} = R\sqrt{\left(\frac{4}{3\pi}\right)^2 + 1} \simeq 1.0863R.$$

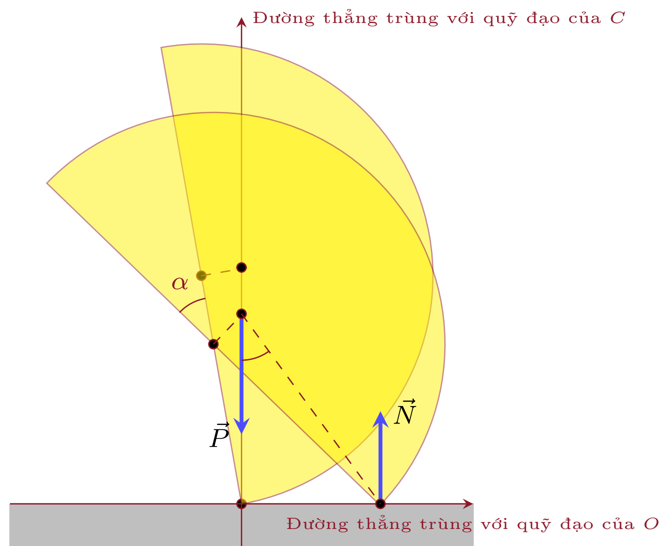
Áp dụng định lí trục quay song song Huygens - Steiner ta được:

$$I_O = I_C + ml^2 = I_C + m\left(u^2 + R^2\right) = I_Q + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2. \tag{8}$$

4. Vì sàn không có ma sát, nên cơ năng của bán trụ được bảo toàn, do đó:

$$mgl\left(1 - \cos\alpha\right) = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}I_C\omega^2. \tag{9}$$

Ngoại lực tác dụng lên bán trụ chỉ gồm trọng lực và phản lực đàn hồi tại vị trí tiếp xúc, do vậy khối tâm C của bán trụ rơi theo phương thẳng đứng, chuyển động của đĩa tròn và các lực tác dụng lên đĩa xét trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm được mô tả như hình dưới.



Hình 1.1. Quá trình hình thành miền và trường giao thoa

Liên hệ về tọa độ ta có:

$$\begin{cases} y_C = l\left(1 - \cos(\alpha)\right) \\ x_O = l\sin(\alpha). \end{cases}$$

Nên liên hệ với vận tốc:

$$\begin{cases} v_C = -\omega l\sin(\alpha) \\ v_O = \omega l\cos\alpha. \end{cases}$$

Từ đó tốc độ góc được xác định:

$$\omega^2 = \frac{2mgl(1-\cos\alpha)}{ml^2\sin^2\alpha + I_C}. \tag{10}$$

Như vậy:

$$\omega = \sqrt{\frac{2(1-\cos\alpha)}{\sin^2\alpha + k}}\omega_0. \tag{11}$$

Dễ dàng đạo hàm phương trình trên ta được gia tốc góc:

$$\gamma = \frac{\sin(\alpha)\left(\sin^2\alpha + k\right) - \sin(2\alpha)\left(1-\cos\alpha\right)}{\left(\sin^2\alpha + k\right)^2}\omega_0^2. \tag{12}$$

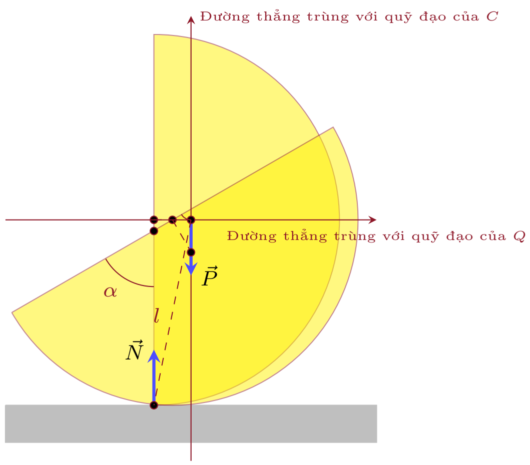
Từ phương trình liên hệ vận tốc, ta xác định được liên hệ về gia tốc với:

$$a_C = -\left(\omega^2 l\cos\alpha + \gamma l\sin(\alpha)\right). \tag{13}$$

Kết hợp với các kết quả ở trên ta được:

$$a_C = -g\left[\frac{2k\left(1-\cos\alpha\right)\cos\alpha + \sin^2\alpha\left(\sin^2\alpha + k\right)}{\left(\sin^2\alpha + k\right)^2}\right]. \tag{14}$$

5. Chuyển động của đĩa tròn và các lực tác dụng lên đĩa xét trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm được mô tả như hình dưới:



Hình 1.2. Quá trình hình thành miền và trường giao thoa

Các phương trình động học tương ứng là:
• Tịnh tiến: $N - mg = ma_c$.
• Quay: $-Nu = I_c\gamma$.
Liên hệ về tọa độ ta có được:

$$\begin{cases} y_c = -u\sin\alpha \\ x_Q = -u\cos\alpha. \end{cases}$$

Nên liên hệ gia tốc :

$$a_c = \omega^2 u\sin\alpha - \gamma u\cos\alpha. \tag{15}$$

Tại thời điểm t $= 0$ thì $\omega = 0$ và $\alpha = 0$, do đó:

$$a_c = -\frac{g}{1 + \dfrac{I_c}{mu^2}} \simeq -0.3603g. \tag{16}$$

Lời giải đề xuất bởi các thành viên:

- *[sigma]*
- *Murasakiiro*, Trường Đại học Sư phạm Tp.HCM
- *Đoàn Quang Tuấn*

Câu II

1. Công suất bức xạ trên một đơn vị diện tích tại khoảng cách R_{SE} của Mặt Trời là:

$$L = \frac{P_S}{4\pi R_{SE}^2} = \frac{\sigma 4\pi R_s^2 T_S^4}{4\pi R_{SE}^2}. \tag{1}$$

Ta thấy diện tích hiệu dụng thu bức xạ của Trái Đất là πR_E^2, nên năng lượng bức xạ Mặt Trời đến Trái Đất trong một giây là:

$$P_a = L\cdot\pi R_E^2 = \frac{\sigma 4\pi R_s^2 T_S^4}{4\pi R_{SE}^2}\cdot\pi R_E^2 = \frac{\pi\sigma R_S^2 T_S^4 R_E^2}{R_{SE}^2} \cong 2\times 10^{17}\mathrm{W}. \tag{2}$$

Vậy năng lượng bức xạ Mặt Trời đến Trái Đất trong một giây là $2\cdot 10^{17}$J.

2. Giả thiết bài toán ta có:

$$3\%P_a t = A. \tag{3}$$

$$\to t = \frac{A}{0.03P_a} = \frac{2.6\times 10^{16}}{0.03\times 2\times 10^{17}} \approx 4.3\mathrm{h}. \tag{4}$$

3. Khi nhiệt độ Trái Đất ổn định là T_E thì công suất hấp thụ và bức xạ của Trái Đất bằng nhau nên:

$$P_a = \sigma 4\pi R_E^2 T_E^4. \tag{5}$$

$$\frac{\pi\sigma R_S^2 T_S^4 R_E^2}{R_{SE}^2} = \sigma 4\pi R_E^2 T_E^4. \tag{6}$$

$$\to T_E = T_S\sqrt{\frac{R_S}{2R_{SE}}} \approx 290\,\mathrm{K}. \tag{7}$$

4. Động lượng của một hạt proton có năng lượng ε là:

$$p = \frac{\varepsilon}{c}. \tag{8}$$

Trong một giây, độ lớn độ biến thiên động lượng của tất cả các hạt proton ngay trước khi và sau khi đập vào Trái Đất là:

$$\Sigma p = \frac{\Sigma\varepsilon}{c}. \tag{9}$$

Lực do bức xạ Mặt Trời tác dụng lên Trái Đất là:

$$F = \Sigma p = \frac{\Sigma\varepsilon}{c}. \tag{10}$$

Mà

$$\Sigma\varepsilon = P_a = \frac{\pi\sigma R_S^2 T_S^4 R_E^2}{R_{SE}^2}. \tag{11}$$

Thay vào biểu thức trên, ta được

$$F = \frac{\pi\sigma R_S^2 T_S^4 R_E^2}{R_{SE}^2 c} \approx 6.67\times 10^8\ \mathrm{N}. \tag{12}$$

5. Giả thiết khí quyển hấp thụ hoàn toàn bức xạ từ Trái Đất. Gọi nhiệt độ bề mặt Trái Đất ở ý này là T_E'. Giả thiết bài toán cho ta:

$$70\%\frac{\pi\sigma R_S^2 T_S^4 R_E^2}{R_{SE}^2} = \sigma 4\pi R_E^2 T_E'^4 \tag{13}$$

$$\rightarrow T_E' = T_S\sqrt{\frac{R_S}{2R_{SE}}} = \sqrt[4]{70\%}\cdot T_E \approx 265\,\mathrm{K}. \tag{14}$$

Lời giải đề xuất bởi các thành viên:

- *Thầy Phạm Đình Hoàn*, THPT chuyên Vĩnh Phúc
- *Đào Long Đức*, Phổ Thông Năng Khiếu, Đại học Quốc Gia Tp.HCM
- *Murasakiiro*, Trường Đại học Sư phạm Tp.HCM

Câu III

1. a) Trường hợp $\xi = 0$. Ống trụ tích điện đều
Xét điện trường gây bởi 1 vòng bề dày dz mang điện tích $dq = \sigma_0 2\pi a dz$:

$$\mathrm{d}\vec{E} = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q\cdot z}{(z^2+a^2)^{3/2}}\hat{\mathbf{z}}. \tag{1}$$

Lực do điện trường này tác dụng lên điện tích $+q$:

$$\begin{aligned}\vec{F}_+ &= \int q\,\mathrm{d}\vec{E} = -\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}aq\int_0^\ell \frac{z\,\mathrm{d}z}{(z^2+a^2)^{3/2}}\hat{\mathbf{z}},\\ \vec{F}_+ &= -\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}q\left(1-\frac{a}{\sqrt{\ell^2+a^2}}\right)\hat{\mathbf{z}}.\end{aligned} \tag{2}$$

Tương tự lực tác dụng lên điện tích $-q$ cũng vậy:

$$\vec{F}_+ = \vec{F}_-. \tag{3}$$

Lực tổng hợp tác dụng lên hệ điện tích điểm là:

$$\vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_- = -\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}q\left(1-\frac{a}{\sqrt{\ell^2+a^2}}\right)\hat{\mathbf{z}}. \tag{4}$$

Lực có phương và chiều ngược trục Oz.
b) Trường hợp $\xi = 1$
Dễ thấy ống tích điện đều là sự chồng chập của 2 thành phần điện tích $\sigma_0 = \sigma_0\cos^2\dfrac{\pi z}{2\ell} + \sigma_0\sin^2\dfrac{\pi z}{2\ell}$.
Đối với mỗi thành phần: do tích chất đối xứng mà nó đều tác dụng lên hệ điện tích những lực như nhau. Do đó nếu chồng chập lại thì ra được lực như ý a. Vậy lực gây bởi mỗi thành phần tác dụng lên hệ là:

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_2 = \frac{\vec{F}}{2}, \tag{5}$$

Hay

$$\vec{F}_{\text{tot}} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}q\left(1-\frac{a}{\sqrt{\ell^2+a^2}}\right)\hat{\mathbf{z}}. \tag{6}$$

2. a) Bỏ qua bức xạ điện từ gây bởi vector Poynting.
Xem nó như một cuộn solenoid mang tổng dòng là Ni

$$\mathbf{B} = \mu_0\frac{N}{\ell}i\hat{\mathbf{z}} = \frac{\mu_0}{\ell}\frac{\sigma_0\cdot 2\pi a\ell}{2\pi}\omega\hat{\mathbf{z}} = \mu_0\sigma_0 a\omega\hat{\mathbf{z}}. \tag{7}$$

b) Từ trường thay đổi sinh ra một điện trường xoáy:

$$\begin{aligned}&\Phi = \pi r^2 B \rightarrow \mathcal{E} = -\pi r^2\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = 2\pi r\cdot E_{(r)},\\ &\text{Hay } \mathbf{E}_{(r)} = -\frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\hat{\varphi} = -\frac{r}{2}\mu_0\sigma_0 a\gamma\hat{\varphi}.\end{aligned} \tag{8}$$

Với $\hat{\varphi}$ cùng chiều quay vận tốc góc $\vec{\omega}$.
c) Năng lượng từ trường:

$$W_B = \frac{B^2}{2\mu_0}\pi a^2\ell = \frac{\mu_0(\sigma_0 a\omega)^2}{2}\pi a^2\ell. \tag{9}$$

Năng lượng điện trường:

$$W_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0\int_0^a E^2(r)\pi\ell d\left(r^2\right) = \frac{\mu_0}{16c^2}\sigma_0^2 a^6\pi\ell\gamma^2. \tag{10}$$

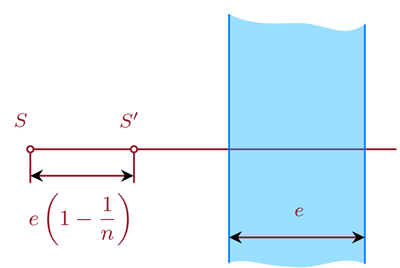
Tổng năng lượng điện từ trường:

$$\begin{aligned}W = W_B + W_E &= \frac{\mu_0\sigma_0^2 a^4\pi l\omega^2}{2}\left(1+\frac{a^2\gamma^2}{8\omega^2c^2}\right)\\ &\approx \frac{\mu_0\sigma_0^2 a^4\pi l\omega^2}{2}.\end{aligned} \tag{11}$$

Lời giải đề xuất bởi các thành viên:

- *Sāriputta*, HNUE
- *Đào Long Đức*, Phổ thông Năng Khiếu, Đại học Quốc gia Tp.HCM

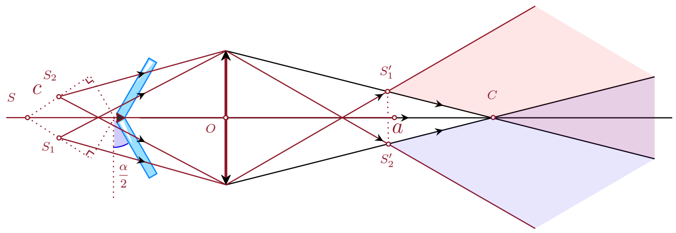
Câu IV



Hình 4.1. Quá trình tạo ảnh qua bmss

1. Sơ đồ tạo ảnh:
Cho phần hệ quang phía trên:

$$S \xrightarrow{BMSS1} S_1 \xrightarrow[d\ ;\ d']{TK} S_1'. \tag{1}$$



Hình 4.2. Quá trình hình thành miền và trường giao thoa

Tương tự cho phần hệ quang phía dưới:

$$S \xrightarrow{BMSS2} S_2 \xrightarrow[d\ ;\ d']{TK} S_2'. \tag{2}$$

Sự tạo ảnh qua lăng kính:

$$c = SS_1 = SS_2 = e\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 6\,\text{mm}. \tag{3}$$

Từ đó:

$$S_1S_2 = \alpha c = 0.75\,\text{mm}. \tag{4}$$

Sự tạo ảnh qua thấu kính:

$$S_1O = S_2O \approx d = SO - SS_1 = 45.6 - 0.6 = 45\,\text{cm}, \tag{5}$$

$$d' = OS_1' = OS_2' \approx \frac{df}{d-f} = \frac{45 \times 30}{45 - 30} = 90\,\text{cm}. \tag{6}$$

Suy ra:

$$S_1'S_2' = \frac{d'}{d} S_1S_2 = 2\alpha c = 1.5\,\text{mm}. \tag{7}$$

2. Miền giao thoa là miền chồng chập của hai chùm tia "tựa như" phát ra từ từ S_1' và S_2' (vùng hồng phấn đậm Xem hình 4.2):

$$\frac{OC_{\min} - 90\text{ cm}}{OC_{\min}} = \frac{0.75\text{ cm}}{10\text{ cm}} \Rightarrow OC_{\min} = 97.3\text{ cm}. \tag{8}$$

3. Ta có $OC = 15$ m và theo kết quả câu 1 thì $OS_1' = 0.9$ m.
Hệ tương tự hệ khe Young và khi đó khoảng cách giữa với hai nguồn thứ cấp chính là các ảnh S_1' và S_2' Do đó khoảng cách giữa hai nguồn thứ cấp này là $a = S_1'S_2' = 1.5$ (mm) và khoảng cách từ hai nguồn này tới màn có thể gọi là D và bằng :

$$D = S_1'C = S_2'C = 0.6\,\text{mm}. \tag{9}$$

Khoảng vân:

$$i = \frac{\lambda D}{a}. \tag{10}$$

Thay các số đã tính ở trên theo dữ kiện đề bài thì $i = 0.2$ (mm)

4. Đạo hàm biểu thức của i trong phương trình (10), và nhớ lại $a = S_1'S_2' = 2\alpha c$, ta thu được tốc độ thay đổi của khoảng vân:

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\lambda D}{a}\right) = -\frac{\lambda D}{2\alpha^2 c}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}. \tag{11}$$

Vì góc alpha giảm dần với tốc độ ω nên :

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = -\omega = -\frac{\pi}{400}\ \text{rad/s}. \tag{12}$$

Do đó:

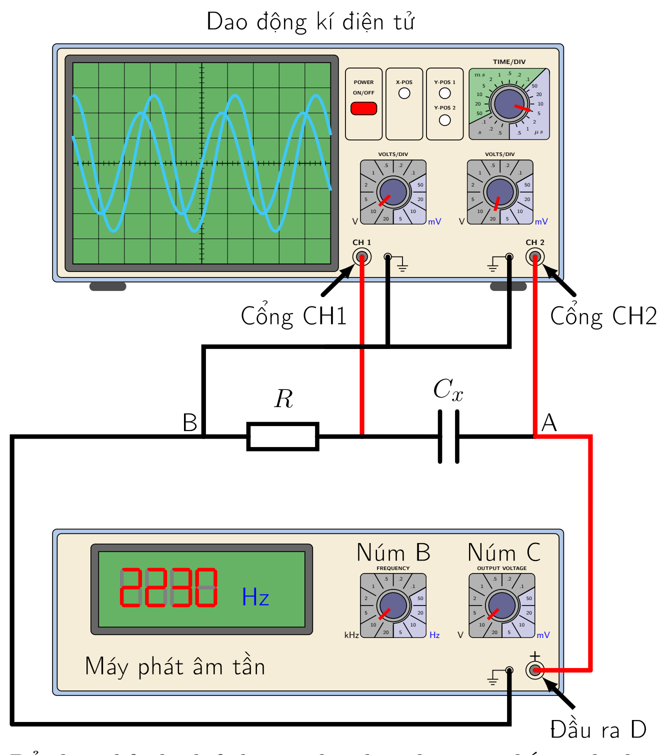
$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{\lambda D \omega}{2\alpha^2 c} = 12.6\,\mu\text{m/s}. \tag{13}$$

Lời giải đề xuất bởi các thành viên:

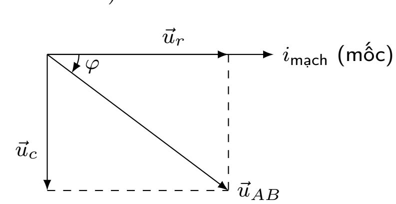
- *Sāriputta*, HNUE
- *Đào Long Đức*, Phổ thông Năng Khiếu, Đại học Quốc gia Tp.HCM

Câu V

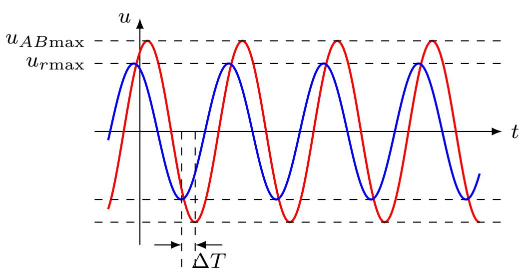
1. a) Thiết kế sơ đồ mạch điện theo yêu cầu của thí nghiệm:



Để phác thảo hình ảnh trên dao động kí, trước hết ta đánh giá tương quan giữa hai điện áp xoay chiều qua giản đồ pha của mạch (giản đồ Fresnel):



Như vậy, từ giản đồ pha, ta nhận thấy u_{AB} có biên độ lớn hơn u_r, và trễ pha một lượng φ. Đồ thị ghi trên dao động kí sẽ được phác thảo như hình dưới:



Từ hình ảnh thu được trên dao động kí, ta có hai cách để tìm được độ lệch pha của hai điện áp:

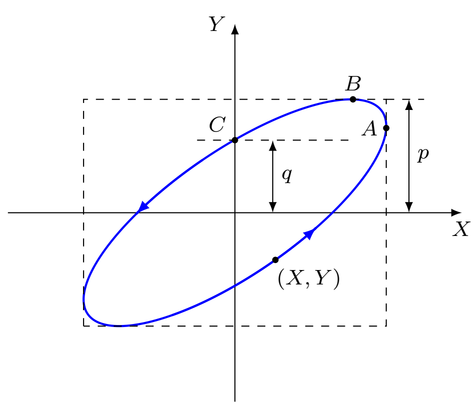
- Xác định khoảng thời gian ΔT giữa 2 thời điểm liền kề mà hai điện áp đạt cực đại, từ đó ta có:

$$\varphi = \frac{2\pi\Delta T}{T}. \tag{1}$$

- Sử dụng tính chất thu được từ giản đồ pha:

$$\varphi = \arccos\frac{u_{R\max}}{u_{AB\max}}. \tag{2}$$

b)



Ta giả sử các điểm thể hiện điện áp tức thời hai điện áp trên dao động kí di chuyển theo chiều dương trên quỹ đạo Ellip được quy ước như hình vẽ. Như vậy, ta nhận thấy tại điểm A, X đạt giá trị cực đại còn tại điểm B, Y đạt giá trị cực đại. Ta kết luận được: X sớm pha hơn Y; vì thế, X hiển thị giá trị tức thời của điện áp u_R, Y hiển thị giá trị tức thời của điện áp u_{AB}

- Tại điểm B trên đồ thị dao động kí:

$$u_{AB} = u_{AB\max} = p. \tag{3}$$

- Tại điểm C trên đồ thị dao động kí:

$$u_R = 0. \tag{4}$$

Để thuận tiện, ta giả sử $u_R = U_{R\max}\cos\omega t$, vậy $u_{AB} = u_{AB\max}\cos(\omega t - \varphi_0)$, trong đó φ_0 là độ trễ pha của u_{AB} so với u_R. Kết hợp với các phương trình (3) và (4), ta được:

$$u_R(C) = U_{R\max}\cos(\omega t_C) = 0 \rightarrow \omega t_C = \frac{\pi}{2} \pm k\pi, (k \in N). \tag{5}$$

Lúc này,

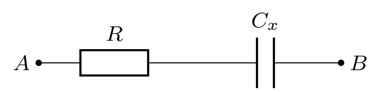
$$u_{AB}(C) = U_{AB\max}\cos(\omega t_C - \varphi_0) \tag{6}$$

$$= p\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm k\pi - \varphi_0\right) = q. \tag{7}$$

Dễ có, $\left|\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm k\pi - \varphi_0\right)\right| = |\sin\varphi_0|$. Vậy, $p\sin\varphi_0 = q$, hay:

$$\varphi_0 = \arcsin\left(\frac{q}{p}\right). \tag{8}$$

2. Ta vẽ sơ đồ lắp mạch điện xoay chiều,



Ta có:

$$\frac{u_{OR}}{u_{OC}} = \frac{z_R}{z_C} = \frac{R}{\frac{1}{\omega C_X}} = \omega R C_x, \tag{9}$$

mà $\omega = 2\pi f$, vậy,

$$\frac{U_{0R}}{U_{0c}} = 2\pi f R C_x \Rightarrow C_x = \frac{U_{0R}}{u_{0c}} \cdot \frac{1}{2\pi R f}. \tag{10}$$

Ta thực hiện việc tính toán với số liệu thu được qua công thức (10):

$f\ (Hz)$	99.8	199.0	300.0	400.1	500.3
U_{0R}/U_{0C}	0.3	0.6	0.9	1.2	1.6
$C_x\ (10^{-7}\text{F})$	9.568	9.597	9.549	9.547	10.180

Ta tính được giá trị điện dung trung bình:

$$\bar{C_x} = \frac{\Sigma C_{xi}}{5} = 9.688 \cdot 10^{-7}\text{F}. \tag{11}$$

Đánh giá sai số: $\varepsilon(C_x) = \varepsilon(\frac{u_{0R}}{u_{0C}}) + \varepsilon(R) = 5\% + 5\% = 10\%$.

$$\Rightarrow \Delta\bar{C_x} = 10\%\bar{C_x} = 0.9688 \cdot 10^{-7}\text{F}.$$

Vậy giá trị điện dung cần tìm là: $C_x = 9.688 \pm 0.969 \cdot 10^{-7}$F.

Lời giải đề xuất bởi các thành viên:

- *Đào Long Đức*, Phổ Thông Năng Khiếu, Đại học Quốc Gia Tp.HCM
- *Murasakiiro*, Trường Đại học Sư phạm Tp.HCM

Các thành viên biên tập LaTeX:

- *TDH*, NUS
- *Sāriputta*, HNUE
- *Đào Long Đức*, Phổ Thông Năng Khiếu, Đại học Quốc Gia Tp.HCM
- *[Drop]*
- *Thân Hải Kiên*, THPT chuyên Bắc Giang
- *Colevol*, Phổ thông Năng Khiếu, Đại học Quốc Gia Tp.HCM